STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957-004

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr.ir. L. Kosten

20 februari 1957

Over een bepaald type van stochastische problemen uit de telecommunicatietechniek

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr Ir L. Kosten

20 februari 1957

Over een bepaald type van stochastische problemen uit de telecommunicatietechniek

1. Inleiding en probleemstelling

In een drietal artikelen x) zijn door spreker e.a. enige stochastische problemen uit de telecommunicatietechniek behandeld, welke een grote mate van overeenkomst in de probleemstelling vertonen. In deze voordracht zal een algemene methode worden ontwikkeld, welke in de drie genoemde gevallen kan worden toegepast. Van de twee in §3 behandelde voorbeelden is één hetzelfde probleem uit de eerste der genoemde publicaties.

We beschouwen thans een systeem dat in n+1 verschillende toestanden (genummerd 0,1,2,...,n) kan verkeren. Wanneer op een bepaald tijdstip t de toestand (j) bestaat, is de kans dat deze toestand in het interval (t,t+dt) overgaat in de toestand (i) gelijk aan $a_{ij}dt$. De kans dat de toestand (j) in dit interval niet verandert is dan $\prod_{i=0\neq j}^{n}(1-a_{ij}dt) = 1 - \sum_{i=0,\neq j}^{n} a_{ij}dt + O(dt^2)$. Onder verwaarlozing van dt^2 wordt deze kans - als we voorts $a_{jj} = -\sum_{i=0,\neq j}^{n} a_{ij}$ schrijven - : $1+a_{jj}dt$. We veronderstellen dat de coëfficiënten a_{ij} niet van t afhangen.

Noemen we de kans, dat op het tijdstip t de toestand (i) bestaat, $x_i(t)$, dan kan het volgend patroon van overgangen worden aangegeven:

$$
(j\neq i):\qquad
\begin{array}{c}
\underline{\quad t \quad}\\[4pt]
x_j(t) \xrightarrow{a_{ij}dt} \\[4pt]
x_i(t) \xrightarrow{1+a_{ii}dt}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}
\begin{array}{c}
\underline{\quad t+dt \quad}\\[4pt]
x_i(t+dt)
\end{array}
\tag{1}
$$

Dus geldt:

$$x_i(t+dt) = \sum_{j=0,\neq i}^{n} x_j(t)a_{ij}dt + (1+a_{ii}dt)\, x_i(t) \tag{2}$$

waaruit:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum a_{ij}x_j(t) \tag{3}$$

----

x) L. Kosten, J.R. Manning en F. Garwood: J.Roy.Stat.Soc.1949(11)54.
L. Kosten: Appl.Sci.Res.1951(B2) 108 en 401; ook in "Het PTT-Bedrijf" 1951(3) 98 en 1951(4) 26.

Verstaan we onder $\underline{A}$ de matrix (a_{ij}) en onder $\underline{x}$ de vector $(x_o,\ldots x_n)$, dan kan (3) geschreven worden als

$$\frac{dx}{dt} = \underline{A}\ \underline{x}(t) \tag{4}$$

Daar uit $a_{jj} = -\sum_{i=0,\neq j}^{n} a_{ij}$ volgt dat de kolomsommen van $\underline{A}$ nul zijn, is de rang van $\underline{A}$ hoogstens n. Uit het feit dat de niet-diagonaalelementen niet-negatief zijn en uit het nulzijn der kolomsommen kan worden afgeleid, dat de eigenwaarden λ_i van $\underline{A}$ geen positief reëel deel kunnen hebben (zie bijv. J. Giltay, proefschrift Delft....). Minstens één der eigenwaarden is nul (stel $\lambda_o=0$).

Stel, dat op het tijdstip t=0 de toestandsstatistiek door $\underline{x}(0)=\underline{b}$ aangegeven kan worden. Ontleed nu $\underline{b}$ in de eigenvectoren $\underline{e}_i$ van $\underline{A}$: $\underline{b} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\ \underline{e}_i$. Op het tijdstip t volgt dan voor $\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\ \underline{e}_i\ e^{\lambda_i t} \tag{5}$$

De termen, welker eigenwaarde een negatief reëel deel heeft, sterven uit. Er blijven alleen over de component(en) met eigenwaarde nul. Wanneer er meer dan één eigenwaarde nul is, blijft de eindstatistiek afhankelijk van de beginstatistiek. Is er slechts één eigenwaarde nul, dan blijft over $\alpha_o \underline{e}_o$. Daar in dit geval, zoals nog zal blijken, α_o niet van $\underline{b}$ afhangt, is de eindstatistiek dan onafhankelijk van de beginstatistiek.

Een voorbeeld, waarbij dit niet het geval zou zijn, is bijv. het geval dat

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underline{B} & \underline{0} \\ \hline \underline{0} & \underline{C} \end{array}\right), \tag{6}$$

waarin de rang hoogstens n-1 is. In dit geval bestaat het systeem uit twee groepen toestanden. Bestaat op t=0 een toestand uit de ene groep, dan blijft het verder altijd in toestanden behorend tot deze groep verkeren.

We veronderstellen verder echter, dat er slechts één eigenwaarde λ_o nul is. De <u>eindstatistiek</u> is tevens de <u>stationnaire statistiek</u> $\underline{x}^o$, bepaald door

$$\underline{A}\ \underline{x}^o = 0 \tag{7}$$

Tevens geldt:

$$\underline{x}^o = \text{const.} \cdot \underline{e}_o \tag{8}$$

Wanneer we met $\{\underline{q}\}$. aangeven de som der kentallen van de vector $\underline{q}$, dan moet $\underline{x}^o$ genormeerd worden door:

$$\{\underline{x}^o\}_. = \text{const.} \cdot \{\underline{e}_o\}_. = 1 \tag{9}$$

We normeren $\underline{e}_o$ zodanig, dat $\{\underline{e}_o\}_. = 1$ zodat

$$\underline{x}^o = \underline{e}_o \tag{10}$$

Daar de kolomsommen van $\underline{A}$ nul zijn, volgt hieruit

$$\{\underline{A}\ \underline{e}_i\}_. = 0 \tag{11}$$

en wegens

$$\underline{A}\ \underline{e}_i = \lambda_i\ \underline{e}_i \tag{12}$$

volgt dan:

$$\{\underline{e}_i\}_. = 0 \text{ als } i \neq 0,\ \lambda_i \neq 0 \tag{13}$$

Uit $\underline{b} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\ \underline{e}_i$, $\{\underline{b}\}_. = 1$, $\{\underline{e}_o\}_. = 1$ en $\{e_i\}_. = 0$ voor $i > 0$ volgt, dat $\alpha_o = 1$, dus onafhankelijk van $\underline{b}$. Van deze eigenschappen hadden we reeds eerder gebruik gemaakt.

Het vraagstuk waar we ons hier mee zullen bezighouden is het volgende. Op het tijdstip $t=0$ is de statistiek van de toestanden gelijk aan de stationnaire statistiek $\underline{x}^o$. Over het interval $(0,t)$ wordt bepaald de integraal

$$s = \int_0^t g\ dt \tag{14}$$

Hierin is g een gewichtsfactor die voor het interval (t_1, t_1+dt) de waarde g_{ii} heeft indien gedurende dit interval de toestand (i) heerst. s zal een verdelingsfunctie bezitten. De vraag is, de momenten $\mu_o, \mu_1, \mu_2 \ldots$ van deze verdelingsfunctie te bepalen. Deze momenten zijn functies van t. In het bijzonder wordt gevraagd te bepalen $\mu_1 = E(s)$ en var $s = \mu_2 - \mu_1^2$. Van deze grootheden moet zo mogelijk het asymptotisch gedrag voor grote waarden van t worden aangegeven.

2. Oplossing van het probleem.

We definiëren het volgende volledige stelsel van elkaar uitsluitende toestanden met bijbehorende waarschijnlijkheden:

> $[s,t,ds]_i$ is de toestand op het tijdstip t, waarbij het systeem in de toestand (i) verkeert, en waarbij de integraal een waarde tussen s en $s+ds$ heeft bereikt; de bijbehorende waarschijnlijkheid is $p_i(s,t)ds$.

We kunnen het volgende systeem van overgangen aangeven:

$$\left.\begin{array}{ll} (j\neq i) & [s-\theta g_{ii}dt-(1-\theta)g_{jj}dt,\ t,\ ds]_j \xrightarrow{a_{ij}dt} \\ & [s-g_{ii}dt,\ dt,\ ds]_i \xrightarrow{1+a_{ii}dt} \end{array}\right\} [s,t+dt,ds]_i \tag{15}$$

waarin $0 \leq \theta \leq 1$.
De waarschijnlijkheid van de toestand rechts moet gelijk zijn aan de som van de producten van de waarschijnlijkheden der toestanden links met de bijbehorende overgangswaarschijnlijkheden. Dit geeft:

$$p_i(s,t+dt)ds = p_i(s-g_{ii}dt,t)ds \cdot (1+a_{ii}dt) + \sum_{j=0,\neq i}^{n} p_j(s-\theta g_{ii}dt-(1-\theta)g_{jj}dt,t)ds.a_{ij}dt \tag{16}$$

Ontwikkelen we naar dt (in de onderstelling, dat p_i differentiëerbaar is naar s en t), dan heffen de nulde graadstermen elkaar op. De eerste graadstermen leveren bij deling door ds dt :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + g_{ii}\frac{\partial p_i}{\partial s} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}p_j(s,t) \tag{17}$$

Verstaan we onder $\underline{p}(s,t)$ de vector $(p_o,p_1..,p_n)$ en onder $\underline{G}$ de diagonaalmatrix $\begin{pmatrix} g_{oo} & & \\ & \ddots & \\ & & g_{nn}\end{pmatrix}$, dan kan dit geschreven worden als:

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \underline{G}\frac{\partial \underline{p}}{\partial s} = \underline{A}\ \underline{p} \tag{18}$$

Nu voeren we in de (eenzijdige) Laplace-transformatie:

$$\left.\begin{aligned} \underline{p}(s,t) &\doteqdot \underline{f}(s,z) \\ \underline{f}(s,z) &= \int_0^{\infty} e^{-zt}\,\underline{p}(s,t)dt \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Dan gaat (18) over in:

$$z\underline{f} - \underline{p}(s,0) + \underline{G}\frac{\partial \underline{f}}{\partial s} = \underline{A}\ \underline{f} \tag{20}$$

Op het tijdstip t=0 kunnen we onderstellen dat de statistiek van de toestand (i) de stationnaire, $\underline{x}^o$, is. Tevens is dan s=0 onafhankelijk van i. Dus zou $\underline{p}(s,0)$ een impulsfunctie in s bevatten. Om geen moeilijkheden te krijgen met discontinuiteiten voor $t > 0$ voeren we in de veronderstelling dat, s op t=0 niet exact nul is, doch een verdelingsfunctie h(s) heeft (fig.1), welke voor s=0 nul is. Physisch komt dit erop neer, dat we het meetapparaat waarmee s gemeten wordt, een onbekende positieve "voorgift" geven met verdelingsfunctie h(s). In de limiet laten we dan later h(s) tot een impulsfunctie naderen.

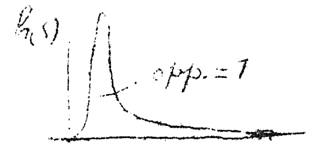

fig 1

Voor $\underline{p}(s,0)$ kunnen we dus nu schrijven:

$$\underline{p}(s,0) = h(s)\ \underline{x}^o \tag{21}$$

Thans voeren we in de Laplace-transformatie:

$$\underline{f}(s,z) \doteqdot \underline{g}(z',z)$$
$$\underline{g}(z',z) = \int_0^\infty e^{-z's}\,\underline{f}(s,z)ds \qquad (22)$$

Hiermee gaat (20) tezamen met (21) over in:

$$z\underline{g} - k(z')\underline{x}^o + z'\underline{G}\,\underline{g} = \underline{A}\,\underline{g}, \qquad (23)$$

waarin $k(z')$ de L.T. van $h(s)$ is.

Laten we thans $h(s)$ tot $\delta(s)$ naderen, dan nadert $k(z')$ tot 1. We kunnen $\underline{g}(z',z)$ nu oplossen:

$$\underline{g}(z',z) = (z\underline{E} + z'\underline{G} - \underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o \qquad (24)$$

waarin $\underline{E}$ de eenheidsmatrix is.

Nu zijn we uiteindelijk slechts geïnteresseerd in de momenten van $s(t)$ ongeacht de eindtoestand (i). We moeten dus achteraf alle kentallen van waarschijnlijkheidsvectoren sommeren. We doen dit nu reeds met $\underline{g}$:

$$\left\{\underline{g}(z',z)\right\}_. = \left\{(z\underline{E} + z'\underline{G} - \underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o\right\}_. \qquad (25)$$

De op $\underline{x}^o$ werkende inverse matrix kunnen we volgens von Neumann ontwikkelen als volgt:

$$\left\{\underline{g}(z',z)\right\}_. = \left\{(z\underline{E} - \underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o\right\}_. - z'\left\{(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{G}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o\right\}_. +$$
$$+ z'^2\left\{(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{G}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{G}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o\right\}_. - \ldots \qquad (26)$$

Wanneer $|z|$ groot genoeg gekozen wordt, zijn de absolute waarden van de eigenwaarden van $(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\underline{G}$ altijd absoluut kleiner dan één te maken, waarmee de ontwikkeling gerechtvaardigd is.

Thans merken we op, dat onder dezelfde veronderstelling $(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\underline{q}$ ($\underline{q}$ is een willekeurige vector) ontwikkeld kan worden als:

$$(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\underline{q} = \frac{1}{z}\,\underline{q} + \frac{1}{z^2}\,\underline{A}\,\underline{q} + \frac{1}{z^3}\,\underline{A}^2\underline{q} + \ldots \qquad (27)$$

Uit (7) volgt dan:

$$(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\,\underline{x}^o = \frac{1}{z}\,\underline{x}^o \qquad (28)$$

Daar de kolomsommen van $\underline{A}$ nul zijn, is:

$$\left\{\underline{A}^m\underline{q}\right\}_. = 0 \quad (m \text{ pos. geheel}) \qquad (29)$$

zodat uit (27) volgt:

$$\left\{(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\underline{q}\right\}_. = \frac{1}{z}\left\{\underline{q}\right\}_. \qquad (30)$$

Met behulp van (28) en (30) kan (26) worden vereenvoudigd tot (zie ook 9):

$$\left\{g(z',z)\right\}_. = \frac{1}{z} - \frac{z'}{z^2}\left\{\underline{G}\ \underline{x}^o\right\}_. + \frac{z'^2}{z^2}\left\{\underline{G}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\ \underline{G}\ \underline{x}^o\right\}_. - \dots \tag{31}$$

De ontwikkeling naar machten van z' geeft direct de L.T. van de momenten van s(t). Immers is:

$$\mu_m = \int_0^\infty s^m\left\{\underline{p}(s,t)\right\}_. ds \doteqdot \int_0^\infty s^m\left\{\underline{f}(s,z)\right\}_. ds = = (-1)^m\left[\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^m\left\{\underline{g}(z',z)\right\}_.\right]_{z'=0} \tag{32}$$

Dus is:

$$\mu_0 \doteqdot \frac{1}{z} \quad \text{of} \quad \mu_0 = 1 \tag{33}$$

$$\mu_1 \doteqdot \frac{1}{z^2}\left\{\underline{G}\ \underline{x}_o\right\}_. \quad \text{of} \quad \mu_1 = \left\{\underline{G}\ \underline{x}_o\right\}_.\ t \tag{34}$$

$$\mu_2 \doteqdot \frac{2}{z^2}\left\{\underline{G}(z\underline{E}-\underline{A})^{-1}\ \underline{G}\ \underline{x}^o\right\}_. \tag{35}$$

(33) brengt tot uitdrukking, dat

$$\sum_{i=0}^{n}\int_0^\infty p_i(s,t)ds = 1 \tag{36}$$

μ_1 is gelijk aan $\left(\sum_{i=0}^{n} g_{ii}\ x_i^o\right)t$. De uitdrukking tussen ( ) is de mathematische verwachting van Δs per tijdseenheid; dus geeft (34) de juiste mathematische verwachting van s in het interval (0,t).

μ_2 kunnen we als volgt herleiden. Ontbind $\underline{G}\ \underline{x}^o$ volgens de eigenvectoren van $\underline{A}$:

$$\underline{G}\ \underline{x}^o = \sum_{i=0}^{n}\beta_i\ \underline{e}_i \tag{37}$$

Dan kan (35) geschreven worden als:

$$\mu_2 \doteqdot 2\left\{\underline{G}\sum_{i=0}^{n}\frac{\beta_i \underline{e}_i}{z^2(z-\lambda_i)}\right\}_. \tag{38}$$

Onderstellen we dat alle eigenwaarden verschillend zijn dan kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{z^2(z-\lambda_i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{z^3} \quad \text{voor } i=0,\quad \lambda_o=0 \\ -\dfrac{1}{\lambda_i z^2} - \dfrac{1}{\lambda_i^2 z} + \dfrac{1}{\lambda_i^2(z-\lambda_i)} \end{cases} \tag{39}$$

Met deze uitdrukkingen volgt voor het tweede moment zelf:

$$\mu_2 = \beta_o t^2\left\{\underline{G}\ \underline{e}_o\right\}_. - 2t\left\{\underline{G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i}\right\}_. - 2\left\{G\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i^2}\right\}_. + 2\left\{\underline{G}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i}\ e^{\lambda_i t}\right\}_. \tag{40}$$

Hiermee is μ_2 ontbonden in een term in t^2, één in t, een constante term en termen die exponentiëel uitsterven daar alle λ_i $(i\neq 0)$ een negatief reëel deel hebben.

Nu is:

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}_0 &= \underline{x}^0 \;;\; \text{dus } \{\underline{G}\,\underline{e}^0\}_. = \sum_{i=0}^{n} g_{ii}\, x_i^{\,0} \\ \beta_0 &= \beta_0 \{\underline{e}_0\}_. = \sum_{i=0}^{n} \{\beta_i\, \underline{e}_i\}_. = \{\underline{G}\,\underline{x}^0\}_. = \sum_{i=0}^{n} g_{ii}\, x_i^{\,0} \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

De term met t^2 is dus gelijk aan $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} g_{ii}\, x_i^{\,0}\right)^2 t^2 = \mu_1^{\,2}$

Verwaarlozen we exponentieel uitstervende termen dan kunnen we voor de variantie van s dus schrijven:

$$\text{var } s = \mu_2 - \mu_1^{\,2} \approx -2t\left\{\underline{G} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i}\right\}_. - 2\left\{\underline{G} \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i^{\,2}}\right\}_. = Pt + Q \quad (42)$$

P en Q kunnen als volgt worden bepaald. Bepaal eerst:

$$\psi(z) = \{\underline{G}\,(\underline{A} - z\underline{E})^{-1} \underline{G}\,\underline{x}_0\}_. \quad (43)$$

Dus is dan

$$\psi(z) = \left\{\underline{G} \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i - z}\right\}_. \quad (44)$$

Ontwikkel nu $2\psi(z)$ volgens opklimmende machten van $1/z$:

$$2\psi(z) = -\frac{2\beta_0^{\,2}}{z} + 2\left\{\underline{G} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i}\right\}_. + 2z\left\{\underline{G} \sum_{1}^{n} \frac{\beta_i \underline{e}_i}{\lambda_i^{\,2}}\right\}_. + \dots \quad (45)$$

dan zijn de coëfficiënten van z^0 en z' resp. gelijk aan -P en -Q (vergelijk (42)).

Het berekeningsschema is dus als volgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \text{los op: } \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}\, x_j^{\,0} = 0 \quad \{\underline{x}\}_. = 1 \\[2ex] 2) & \text{los } \underline{y} \text{ op uit: } \sum\limits_{j=0}^{n} a_{ij}\, y_j - z y_i = g_{ii}\, x_i^{\,0} \\[2ex] 3) & \text{bepaal: } \psi(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} g_{ii}\, y_i \\[2ex] 4) & \text{bepaal P en Q als residus van } -\dfrac{2\psi(z)}{z} \\ & \text{resp. } -2\,\dfrac{\psi(z)}{z^2} \text{ in } z=0. \end{array}\right\} \quad (46)$$

3. Een tweetal toepassingen

De volgende toepassingen hebben beide betrekking op de volledige bundel met c lijnen zonder wachtgelegenheid, exponentiële houdtijdverdeling en een Poissonverdeling der binnenkomende oproepen met een dichtheid van a oproepen per gemiddelde houdtijd.

Is (i) de toestand met i bezette lijnen, dan is het patroon der overgangswaarschijnlijkheden:

$$(0) \underset{1}{\overset{a}{\rightleftarrows}} (1) \underset{2}{\overset{a}{\rightleftarrows}} (2) - - - (c-1) \underset{c}{\overset{a}{\rightleftarrows}} (c) \tag{47}$$

Het vergelijkingenstelsel (7) luidt hier:

$$\begin{aligned} a x^{o}_{i-1} - (a+i)x^{o}_{i} + (i+1)x^{o}_{i+1} &= 0 \quad (i < c) \\ a x^{o}_{c-1} - c x^{o}_{o} &= 0 \end{aligned} \tag{48}$$

met $x^{o}_{-1}=0$, $\sum_{o}^{c} x_i=1$.

De resultaten in de volgende afleidingen kunnen het gemakkelijkst worden verkregen met behulp van voortbrengende functies. We zullen vaak gebruik maken van de volgende arithmetische functies en hun voortbrengende functies:

$$\varphi_i = \frac{e^{-a}a^i}{i!} \triangleq e^{-a(1-p)} \tag{49}$$

$$\varphi_i^{z} = \varphi_i + \frac{z}{1!}\varphi_{i-1} + \frac{z(z+1)}{2!}\varphi_{i-2} + \ldots + \frac{z(z+1)\ldots(z+c-1)}{c!}\varphi_o \triangleq$$

$$\triangleq e^{-a(1-p)}(1-p)^{-z} \tag{50}$$

Voor φ_i^{z} gelden de volgende betrekkingen:

$$\varphi_i^{z} = \varphi_i^{z-1} + \varphi_{i-1}^{z} \tag{51}$$

en:

$$i\,\varphi_i^{z} = a\,\varphi_{i-1}^{z} + z\,\varphi_{i-1}^{z+1} \tag{52}$$

$$\varphi_i^{z+1} = \sum_{j=0}^{i} \varphi_j^{z} \tag{52^a}$$

In het bijzonder is:

$$\varphi_c' = \varphi_o + \varphi_1 + \ldots \varphi_c \tag{53}$$

Men ziet gemakkelijk dat de oplossing van (48) luidt:

$$x_i^{o} = \varphi_i/\varphi_c' \tag{54}$$

Het eerste voorbeeld betreft de nauwkeurigheid van de meting van x_c^o (de "blokkeringskans") door gedurende het interval (0,t) de som van alle intervallen te bepalen waarin alle c lijnen bezet zijn. We hebben dan

$$g_{ii} = 0 \quad (i < c) \quad g_{cc} = 1 \tag{55}$$

Het eerste moment van $\acute{s}$ is dus:

$$\mu_1 = \left\{ \underline{G}\ \underline{x}^o \right\}.\ t = \varphi_c t / \varphi_c' \tag{55a}$$

Het vergelijkingenstelsel (46;2) luidt:

$$a y_{i-1} - (a+i+z) y_i + (i+1) y_{i+1} = 0 \quad (i < c) \tag{56a}$$

$$a y_{c-1} - (c+z) y_c = \varphi_c / \varphi_c' \tag{56b}$$

De algemene oplossing van (56a) luidt:

$$y_i = C(z)\ \varphi_i^z \tag{57}$$

Substitutie in (56b) geeft:

$$C(z) = \frac{\varphi_c/\varphi_c'}{a\varphi_{c-1}^z - (c+z)\varphi_c^z} \tag{58}$$

De noemer kan met behulp van (51) en (52) worden herleid en er komt:

$$C(z) = -\frac{\varphi_c/\varphi_c'}{z\varphi_c^{z+1}} \tag{59}$$

zodat:

$$y_i = -\frac{1}{z}\frac{\varphi_c}{\varphi_c'} \cdot \frac{\varphi_i^z}{\varphi_c^{z+1}} \tag{60}$$

De functie $\psi(z)$ (zie 46;3) is dan:

$$\psi(z) = y_c = -\frac{1}{z}\frac{\varphi_c}{\varphi_c'} \cdot \frac{\varphi_c^z}{\varphi_c^{z+1}} \tag{61}$$

Met behulp van (50) kan men de volgende ontwikkeling vinden:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_c^z/\varphi_c^{z+1} = \frac{\varphi_c}{\varphi_c'} + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots \\
&\text{met:} \\
&A_1 = \frac{\varphi_{c-1}'}{\varphi_c'}(b_1 - a_1) \\
&A_2 = \frac{\varphi_{c-1}'}{\varphi_c'}(b_2 - a_2) - b_1 A_1 \\
&\text{waarin:} \\
&a_1 = \frac{1}{\varphi_{c-1}'}\sum_{r=0}^{c-2} \alpha_{r+1}\varphi_r;\quad b_1 = \frac{1}{\varphi_c'}\sum_{r=0}^{c-1}\alpha_r \varphi_r \\
&a_2 = \frac{1}{\varphi_{c-1}'}\sum_{r=0}^{c-3} \beta_{r+1}\varphi_r;\quad b_2 = \frac{1}{\varphi_c'}\sum_{r=0}^{c-2}\beta_r \varphi_r
\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

en:
$$\alpha_r = \sum_{i=1}^{c-r} \frac{1}{i} ; \quad \beta_r = \sum_{i=2}^{c-r} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i\,j}$$

Met de aldus bepaalde cöëfficiënten A_1 en A_2 vindt men (zie 46;4):

$$P = \underset{z=0}{\mathrm{Res}} \left(-\frac{2\psi(z)}{z}\right) = 2\,\frac{\varphi_c}{\varphi_c'}\,A_1$$
$$Q = \underset{z=0}{\mathrm{Res}} \left(-\frac{2\psi(z)}{z^2}\right) = 2\,\frac{\varphi_c}{\varphi_c'}\,A_2 \tag{63}$$

zodat:
$$\mathrm{var}\ s \simeq \frac{\varphi_c}{\varphi_c'}\,t\,\left(2A_1 + \frac{2A_2}{t}\right) \tag{64}$$

Bij het tweede toepassingsvoorbeeld wordt de gemiddelde lijnbezetting over het interval $(0,t)$ bepaald en de variantie hiervan is gevraagd. Dan is dus $g_{ii}=i$ $(i=0,\ldots,c)$. Het eerste moment van s is dus:

$$\mu_1 = \{\underline{G}\ \underline{x}^0\}\ t = t\sum g_{ii}\,x_i^0 = t\sum_{i=0}^{c} i\,\varphi_i/\varphi_c' = \varphi_{c-1}'\,t/\varphi_c' \tag{64a}$$

(46;2)geeft:

$$a y_{i-1} - (a+i+z)y_i + (i+1)y_{i+1} = i\,\varphi_i/\varphi_c' \tag{65a}$$
$$a y_{c-1} - (c+z)y_c = c\,\varphi_c/\varphi_c' \tag{65b}$$

Uit (65a) volgt als algemene oplossing:

$$y_i = -\frac{a}{\varphi_c'}\left[\frac{\varphi_i}{z(z+1)} + \frac{\varphi_{i-1}}{z+1}\right] + C(z)\,\varphi_i^z \tag{66}$$

Nu b is (65b) equivalent met:

$$a y_c = (c+1)y_{c+1} \tag{67}$$

Hierin (66) gesubstitueerd geeft, na enige omrekening met (51) en (52):

$$C(z) = \frac{a}{z(z+1)}\cdot\frac{\varphi_c}{\varphi_c'}\cdot\frac{1}{\varphi_c^{z+1}} \tag{68}$$

zodat:
$$y_i = -\frac{a}{\varphi_c'}\left[\frac{\varphi_i}{z(z+1)} + \frac{\varphi_{i-1}}{z+1}\right] + \frac{a\,\varphi_c}{z(z+1)\varphi_c'}\cdot\frac{\varphi_i^z}{\varphi_c^{z+1}} \tag{69}$$

Nu moet worden bepaald:

$$\psi(z) = \sum_0^c i\,y_i \tag{70}$$

Nu is:

$$\sum_0^c i\,\varphi_i = \sum_0^c a\,\varphi_{i-1} = a\,\varphi'_{c-1} \qquad (71)$$

$$\sum_0^c i\,\varphi_{i-1} = a\,\varphi'_{c-2} + \varphi'_{c-1} \qquad (72)$$

$$\sum_0^c i\,\varphi_i^z = \sum_0^c (a\,\varphi_{i-1}^z + z\,\varphi_{i-1}^{z+1}) = a\,\varphi_{c-1}^{z+1} + z\,\varphi_{c-1}^{z+2} \qquad (73)$$

Bij substitutie van (69), (71), (72) en (73) in (70):

$$\psi(z) = -\frac{a}{\varphi_c'}\cdot\left[\frac{a\,\varphi'_{c-1}}{z(z+1)} + \frac{a\,\varphi'_{c-2}+\varphi'_{c-1}}{z+1}\right] + \frac{a\,\varphi_c}{z(z+1)\varphi_c'}\;\frac{a\varphi_{c-1}^{z+1}+z\varphi_{c-1}^{z+2}}{\varphi_c^{z+1}} \qquad (74)$$

Nu kan $\psi(z)$ in een reeks in z ontwikkeld worden. Hierbij is:

$$\frac{\varphi_{c-1}^{z+1}}{\varphi_c^{z+1}} = 1 - \frac{\varphi_c^z}{\varphi_c^{z+1}} = (1-\frac{\varphi_c}{\varphi_c'}) - A_1 z - \ldots \qquad (75)$$

Men vindt dan na enig rekenwerk:

$$\varphi(z) = -a^2(1-\varphi_c/\varphi_c')^2\cdot\frac{1}{z} + \left[\frac{a(2\varphi_{c-1}^2\varphi_c - \varphi'_{c-1}\varphi_c')}{(\varphi_c')^2} + \frac{a^2A_1\varphi_c}{\varphi_c'}\right] + \ldots \qquad (76)$$

Dus is:

$$P = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{-2\,\varphi(z)}{z}\right) = -2\left[\frac{a(2\varphi_{c-1}^2\varphi_c - \varphi'_{c-1}\varphi_c')}{(\varphi_c')^2} - \frac{a^2A_1\varphi_c}{\varphi_c'}\right] \qquad (77)$$

Wanneer we c naar ∞ laten naderen, geldt:

$$\varphi_c = O(1/c!)$$

$$\varphi'_{c-1} \text{ en } \varphi_c' \longrightarrow 1$$

$$\varphi_{c-1}^2 = c\,\varphi_c' - a\,\varphi'_{c-1} \longrightarrow c-a \longrightarrow c$$

Dan is:

$$P \longrightarrow 2a$$

Dus:

$$\text{var } s \longrightarrow 2\,at \quad \text{voor} \quad c \longrightarrow \infty \qquad (78)$$

Dit resultaat klopt met hetgeen langs elementaire weg in dit geval is af te leiden.