STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950 - 003

Voordracht in de serie Actualiteiten

# Enige methoden in de sequentieanalyse II

25 februari 1950

J.H.B. Kemperman

1950

Voordracht door J.H.B. Kemperman in de serie
Actualiteiten op 25 Februari 1950.

# Enige methoden in de sequentieanalyse II.[1]

## 1. Een methode.

Beschouw het rooster $\gamma$ van alle punten $(n,y)$ in het $n-y$ -vlak met gehele coordinaten. Laten $r$ en $s$ zekere gehele getallen voorstellen met $r+s \neq 0$.

Een (dronken) wandelaar $W$ beweegt zich op de volgende wijze door $\gamma$.

1. Hij begint in de oorsprong .
2. Wanneer $W$ in een zeker roosterpunt $(n,y)$ arriveert, dan zijn er de volgende drie mogelijkheden:

   a) hij valt in een put (een z.g. catastrofe) met een waarschijnlijkheid $v(n,y)$;

   b) hij doet een stap, die hem in het punt $(n+1,y-s)$ brengt met een wh $p(n,y)$;

   c) hij doet een stap naar het punt $(n+1,y+r)$ met wh $q(n,y)$.

Hierin is

(1) $$p(n,y) + q(n,y) + v(n,y) = 1$$

We interesseren ons nu voor de kans $\alpha(n,y)$, dat in het punt $(n,y)$ een catastrofe optreedt. We zullen een algemene methode geven onder de volgende veronderstellingen.

1) Zij $R$ een $O$ niet bevattende deelverzameling van $\gamma$ (de z.g. rand) bestaande uit een eindig aantal $N$ periodieke componenten $R_h$. Hierin bestaat $R_h$ $(h = 1,2,\dots N)$ uit de punten

$$P_{h,i} = (n_h + i\omega,\ y_h + i\mu) \qquad (i = 0,1,2,\dots,\infty)$$

waarin $n_h$, $\omega$ en $\mu$ gehele getallen voorstellen met $\omega > 0$ en $n_h \geq 0$.

2) Voor een niet in $R$ gelegen punt $(n,y) \neq (0,0)$ geldt

$$v(n,y) = v \quad ; \quad p(n,y) = p \quad ; \quad q(n,y) = q \ ,$$

waarin $p$, $q$ en $v$ niet negatieve constanten zijn met $0 \leq v < 1$ en

---

[1]) v.g.l. Enige methoden in de sequentieanalyse I, rapport Z.W. 1949-009 (voordracht in de serie Actualiteiten op 29 Oct. '49).

(2) $$p + q = 1 - v$$

Voor de oorsprong $O$ veronderstellen we evenwel, dat

(3) $$v(0,0) = 0 \quad ; \quad p(0,0) = \frac{p}{1-v} \quad ; \quad q(0,0) = \frac{q}{1-v} \; .$$

3) Voor een punt $(n,y)$ uit $\mathcal{R}_h$ $(h = 1,2,\ldots,N)$ geldt

(4) $$v(n,y) = v_h \quad ; \quad p(n,y) = p\,\frac{1-v_h}{1-v} \quad ; \quad q(n,y) = q\,\frac{1-v_h}{1-v} \; ,$$

waarin $0 \leqq v_h \leqq 1$. Wegens (2) is dan aan (1) voldaan.

Opm. Men mag eventueel toelaten, dat $\mathcal{R}$ behalve periodieke componenten bovendien eindig vele punten bevat (waarin $p(n,y)$, $q(n,y)$, $v(n,y)$ zijn voorgeschreven) doch de berekening van $v(n,y)$ wordt dan te omslachtig.

Het is duidelijk, dat voor het bijzondere geval met $v = 0$ en $v_h = 1$ $(h = 1,2,\ldots N)$ met deze situatie een sequentietest overeenkomt, mits men $\mathcal{R}$ verdeelt in twee disjuncte delen, waarop een sequentie wordt goedgekeurd resp. afgekeurd. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we ons beperken tot het geval $\mu = 0$ (v.g.l. de transformatie aangegeven op blz. 8 van het rapport Z.W., 1949-009). Ter vereenvoudiging zullen we aannemen, dat $0 \leqq n_h < \omega$ $(h = 1,2\ldots N)$. Om de formulering van de methode te vergemakkelijken [1] zullen we verder aannemen, dat $v \leqq v_h$ $(h = 1,2,\ldots,N)$. Zoals men achteraf gemakkelijk inziet, is het uiteindelijke resultaat (in het bijzonder formule (12)) ook geldig, wanneer aan de laatste veronderstelling niet is voldaan.

We stellen nu voor $(n,y) \neq (0,0)$

(5) $$v(n,y) = v + r(n,y)$$

Voor een punt $(n,y)$ op $\mathcal{R}_h$ (resp. buiten $\mathcal{R}$) geldt dus $r(n,y) = v_h - v = r_h$ (resp. $r(n,y) = 0$). Wanneer $W$ in $(n,y)$ arriveert, dan is er een kans $v(n,y)$ op een catastrofe. We onderscheiden nu gewone catastrofes en randcatastrofes, en spreken af, dat wanneer $W$ in $(n,y)$ arriveert, er een kans $v$ is op een gewone catastrofe en een kans $r(n,y)$ op een randcatastrofe. Een randcatastrofe kan dus alleen voor een randpunt een van nul verschillende waarschijnlijkheid hebben. In overeenstemming met (3) stellen we voor $O$ de kans zowel op een gewone catastrofe als op een randcatastrofe gelijk nul.

---

[1]) Anders moeten we werken met een negatieve kans op z.g. randcatastrofes, overeenkomend met een positieve kans, dat een z.g. gewone catastrofe ongedaan wordt gemaakt.

Als de wandelaar $W$ in een punt $(n,y)$ arriveert, dan zijn er dus vier mogelijkheden:

a) Er treedt een gewone catastrofe op met kans $v$.

b) Er treedt een randcatastrofe op met kans $r(n,y)$.

c) $W$ doet een stap naar het punt $(n+1,y-s)$ met kans $p\frac{1-v(n,y)}{1-v}$

d) $W$ doet een stap naar het punt $(n+1,y+r)$ met kans $q\frac{1-v(n,y)}{1-v}$

Voor de oorsprong handhaven we evenwel de afspraak (3). We zullen deze situatie een <u>gestoorde</u> wandeling noemen. Als voor een gestoorde wandeling $\alpha(n,y)$ de kans voorstelt op een catastrofe in het punt $(n,y)$, dan is

$$(6)\qquad \frac{r(n,y)}{v(n,y)}\cdot\alpha(n,y)=\frac{r(n,y)}{v+r(n,y)}\cdot\alpha(n,y)$$

de kans op een randcatastrofe in het punt $(n,y)$.

Wanneer in het geval van een randcatastrofe in het punt $(n,y)$, $W$ direct wordt vrijgelaten en vervolgens ofwel een stap doet naar het punt $(n+1,y-s)$ (met wh $\frac{p}{1-v}$), ofwel een stap doet naar het punt $(n+1,y-r)$ (met wh $\frac{q}{1-v}$), dan zeggen we dat $W$ een <u>vrije</u> wandeling uitvoert. Men kan een vrije wandeling dus ook definieren als een in $O$ beginnende wandeling (het vertrek vanuit $O$ wordt weer door (3) bepaald), waarvoor bij aankomst in het punt $(n,y)$ de volgende drie mogelijkheden bestaan.

a) er treedt een gewone catastrofe op met wh $v$.

(7) b) $W$ doet een stap naar $(n+1,y-s)$ met wh $p$.

c) $W$ doet een stap naar $(n+1,y+r)$ met wh $q$.

Zij $\gamma(n,y)$ de kans voor een vrije wandeling (beginnend in de oorsprong), dat $W$ in het punt $(n,y)$ arriveert. We stellen $\gamma(0,0)=1$. Deze grootheid is precies bekend, zoals we spoedig zullen zien. Zij in het bijzonder $P_{k,i}=(n_k+i\omega,y_k)$ een randpunt. Dan is $r_k\gamma(n_k+i\omega,y_k)$ de kans, dat voor een <u>vrije</u> wandeling, beginnend in de oorsprong, in het randpunt $P_{k,i}$ een randcatastrofe optreedt (waarna overigens $W$ direct weer zou worden vrijgelaten). In dit geval is in zeker randpunt $P_{k,l}$ voor het eerst een randcatastrofe opgetreden (gerekend vanaf de oorsprong). De kans, dat voor een vrije wandeling in een punt $(n,y)$ <u>voor het eerst</u> een randcatastrofe optreedt, is juist gelijk aan de kans, dat voor een gestoorde wandeling vanaf $O$ een randcatastrofe optreedt in het punt $(n,y)$. Deze kans wordt gegeven door (6). Stellen we voor het randpunt $P_{k,l}=(n_k+l\omega,y_k)$

$$\alpha_{k,l}=\alpha(n_k+l\omega,y_k)$$

dan is dus $\frac{r_k}{v+r_k}\alpha_{k,l}$ de kans, dat voor een vrije wandeling in het randpunt $P_{k,l}$ voor het eerst een randcatastrofe optreedt. Zij nu $P_{k,l} \neq P_{h,i}$. Nadat in $P_{k,l}=(n_k+l\omega, y_k)$ voor een vrije wandeling een randcatatstrofe is opgetreden, wordt de wandelaar $W$ weer vrijgelaten en is na een vrije wandeling (onder voorwaarde dat in $P_{k,l}$ voor de eerste maal een randcatastrofe is opgetreden) de kans op een randcatastrofe in $P_{h,i} = (n_h+i\omega, y_h)$ juist

$$r_h \, \gamma(n_h-n_k+(h-k)\omega, y_h-y_k)$$

zoals direct volgt uit de definitie van $\gamma(n,y)$ (waarbij we rekening moeten houden met het bijzondere karakter van de oorsprong, v.g.l. (3)). Sommeren we nu over alle randpunten, dan volgt voor de kans op een randcatastrofe in $P_{h,i}$ na een vrije wandeling

$$r_h \gamma(n_h+i\omega, y_h) = \frac{r_h}{v+r_h}\alpha_{h,i} + r_h \sum_{\substack{k=1 \\ (k,l)\neq(h,i)}}^{N} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_k}{v+r_k} \alpha_{k,l} \gamma(n_h-n_k+(i-l)\omega, y_h-y_k)$$ [1]

of wegens $\gamma(0,0)=1$

(8) $$\gamma(n_h+i\omega, y_h) = \frac{1-r_h}{v+r_h}\alpha_{h,i} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_k}{v+r_k}\alpha_{k,l}\gamma(n_h-n_k+(i-l)\omega, y_h-y_k).$$

Aan elk randpunt $P_{h,i} = (n_h+i\omega, y_h)$ voegen we nu een karakteriserende term toe

$$\alpha_{h,i}\, u^{n_h+i\omega} w^{y_h}$$

en aan de randcomponent $R_h$ de ontwikkeling

(9) $$A_h(u,w) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{h,i}\, u^{n_h+i\omega} w^{y_h} ,$$

de z.g. h-de component van de randontwikkeling. We stellen verder

(10) $$K_{n,y} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(n+i\omega, y)\, u^{n+i\omega} w^{y}$$

voor $n<0$ heeft deze ontwikkeling zin, als we stellen

(11) $$\gamma(n,y)=0 \quad \text{voor } n<0 .$$

Gebruik makend van formule (8) en de substitutie $i-l=m$ volgt nu

------------

[1]) We mogen veronderstellen, dat $r_h \neq 0$, daar voor $r_h=0$ de randcomponent $R_h$ niet actief is.

$$\mathcal{K}_{n_h,y_h} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(n+i\omega, y_h)\, u^{n_h+i\omega} w^{y_h}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} u^{n_h+i\omega} w^{y_h} \left\{ \frac{1-r_h}{v+r_h}\alpha_{h,i} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_k}{v+r_k}\alpha_{k,l}\,\gamma(n_h-n_k+(i-l)\omega, y_h-y_k) \right\}$$

$$= \frac{1-r_h}{v+r_h} A_h + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{r_k}{v+r_k}\alpha_{k,l}\, u^{n_k+l\omega} w^{y_k} \cdot \sum_{m=-l}^{\infty} \gamma(n_h-n_k+m\omega, y_h-y_k)\, u^{n_h-n_k+m\omega} w^{y_h-y_k} \right]$$

Wegens $0 \leq n_h < \omega$ en $0 \leq n_k < \omega$ volgt $n_h - n_k < \omega$. Voor $m < 0$ is dus $n_h - n_k + m\omega$ en $\gamma(n_h - n_k + m\omega, y_h - y_k) = 0$. In de laatste uitdrukking mogen we dus $\sum_{m=-l}^{\infty}$ vervangen door $\sum_{m=0}^{\infty}$. We vinden nu

(12) $$\mathcal{K}_{n_h,y_h} = \frac{1-r_h}{v+r_h} A_h + \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{v+r_k}\, \mathcal{K}_{n_h-n_k,\, y_h-y_k}\, A_k .$$

Uit dit stelsel vergelijkingen kan men in het algemeen $A_1, A_2, \ldots, A_N$ oplossen, waarmee we voor een gestoorde wandeling wegens (9) voor elk randpunt $P_{h,i}$ de kans $\alpha_{h,i}$ op een catastrofe in $P_{h,i}$ in principe kunnen bepalen. De kans op een catastrofe op de randcomponent $\mathcal{R}_h$ is juist $A_h(1,1)$. Onder de bijvoorwaarde, dat $W$ zijn weg beeindigt, doordat op $\mathcal{R}_h$ een catastrofe optreedt, wordt het gemiddelde aantal stappen gegeven door

(13) $$\left[ \frac{\frac{\partial}{\partial u} A_h(u,w)}{A_h(u,w)} \right]_{u=w=1}$$

Neem aan, dat $W$ een vrije wandeling uitvoert (vanaf de oorsprong) in de zin van definitie (7). Als $W$ in $(n,y)$ arriveert, na $j$ stappen van het type

(14) $$(n', y') \rightarrow (n'+1, y'-s)$$

(elk met een wh $p$) en $k$ stappen van het type

(15) $$(n', y') \rightarrow (n'+1, y'+r)$$

(elk met een wh $q$), dan geldt

(16) $$j + k = n \qquad \text{en} \qquad kr - js = y .$$

waarin dus $j$ en $k$ gehele getallen $\geq 0$ zijn. Uit (16) volgt

(17) $$k = \frac{nr+y}{r+s} \qquad \text{en} \quad j = n - k$$

en het punt $(n,y)$ is dus alleen bereikbaar vanuit $O$, als $\frac{nr+y}{r+s}$ een geheel getal is $\geq 0$ en $\leq n$, ofwel

(18) $$-r \leq \frac{y}{n} \leq +s$$

Om de kans $\gamma(n,y)$ te bepalen, dat $W$ na een vrije wandeling in het punt $(n,y)$ arriveert, merken we vooreerst op, dat $\gamma(n,y) = 0$ wanneer $(n,y)$ niet vanuit $O$ bereikbaar is. Is $(n,y)$ wel bereikbaar, dan bestaan er niet-negatieve gehele getallen $j$ en $k$, waarvoor (16) vervuld is. Er zijn juist $\binom{j+k}{j}$ gelijkwaardige mogelijkheden om door $j$ stappen van het type (14) en $k$ stappen van het type (15) vanuit de oorsprong het punt $(n,y)$ te bereiken. In verband met de bijzondere afspraak (3) voor de oorsprong, heeft elk dezer mogelijkheden een wh $\frac{p^j q^k}{1-v}$. Hieruit volgt voor elk van $O$ verschillend, bereikbaar punt $(n,y)$

(19) $$\gamma(n,y) = \binom{j+k}{j} \frac{p^j q^k}{1-v}$$

waarin $j$ en $k$ volgens (17) worden bepaald. De ontwikkeling $\mathfrak{K}_{n,y}$ mag dus als gegeven worden beschouwd.

Wanneer $r$ en $s$ een grootste gemene deler hebben, dan volgt uit (16), dat voor een bereikbaar punt $(n,y)$ steeds $d$ een deler is van $y$. Zonder de algemeenheid te schaden mogen we dus aannemen, dat $r$ en $s$ onderling ondeelbaar zijn (stel anders $r' = \frac{r}{d}$, $s' = \frac{s}{d}$ en $y' = \frac{y}{d}$). Wanneer $(n_1,y)$ en $(n_2,y)$ beide bereikbare punten zijn, dan volgt nu uit (17), dat $n_1 - n_2$ een veelvoud is van $(r+s)$. Daarom zullen we formule (12), waarin $A_h$ en $\mathfrak{K}_{n,y}$ door (9) resp. (10) zijn gedefinieerd, bij voorkeur toepassen voor het bijzondere geval $\omega = r+s$. In dat geval is ofwel geen punt, ofwel elk punt van $\mathfrak{K}_h$ bereikbaar (voor zover aan (18) is voldaan). In het eerste geval heeft $\mathfrak{K}_h$ geen enkele invloed op de beweging van de wandelaar $W$, en (in het geval $\omega = r+s$) mogen we dus veronderstellen, dat $\mathfrak{K}_h$ alle bereikbare punten van de lijn $y = y_h$ omvat.

Zij $y$ een geheel getal. Laten $j_0$ en $k_0$ de kleinste niet-negatieve gehele getallen voorstellen met $k_0 r - j_0 s = y$. Dan wordt de abscis van de bereikbare roosterpunten op de lijn met ordinaat $y$ geven door

$$n_i = j_0 + k_0 + i(r+s) \qquad (i = 0,1,2\ldots).$$

Wegens (19) en

$$(j_0 + ir) + (k_0 + is) = n_i \; ; \; (k_0 + is)r - (j_0 + ir)s = y$$

volgt nu voor $i = 0,1,2,\ldots$

$$\gamma(n_i, y) = \binom{j_0 + k_0 + i(r+s)}{j_0 + ir} \frac{p^{j_0 + ir} q^{k_0 + is}}{1-v}$$

(evenwel geldt $\gamma(0,0)=1$). In verband met definitie (10) vinden we nu voor het geval $\omega = r+s$.

$$(20)\qquad \mathcal{K}_{n_0,y} = \frac{w^y}{1-v} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0+k_0+i(r+s)}{j_0+ir} p^{j_0+ir} q^{k_0+is} u^{j_0+k_0+i(r+s)},$$

waarin $n_0 = j_0+k_0$. Voor $n \not\equiv n_0 (\mathrm{mod.}\ r+s)$ zijn alle punten $(n+i(r+s),\eta)$ met $i = 0,1,2,\ldots$ onbereikbaar en geldt dus $\mathcal{K}_{n,y} \equiv 0$. We stellen de ontwikkeling in het rechterlid van (20) behorende bij de verzameling van alle roosterpunten met ordinaat $y$ gelijk aan $\mathcal{K}_y$. Dan volgt uit (20)

$$(21)\qquad \mathcal{K}_y = \frac{w^y}{1-v} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0+k_0+i(r+s)}{j_0+ir} (pu)^{j_0+ir} (qu)^{k_0+is}$$

Voor $y=0$ is $j_0 = k_0 = 0$ en moeten we de constante in de ontwikkeling vervangen door $\gamma(0,0)=1$ d.w.z. we moeten het rechterlid van (21) verminderen met $\frac{v}{1-v}$.

In de veronderstelling, dat $\mathcal{K}_k$ bestaat uit de verzameling van alle bereikbare punten op de lijn $y=y_k$ gaat formule (12) over in

$$(22)\qquad \mathcal{K}_{y_h} = \frac{1-r_h}{v+r_h} A_h + \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{v+r_k} \mathcal{K}_{y_h-y_k} A_k \qquad (h=1,2,\ldots,N).$$

Zij $r(y) = r(n,y)$ de door (5) gedefinieerde grootheid. Zij verder $\beta(n,y)$ de kans, dat $W$ na een gestoorde wandeling in het punt $(n,y)$ arriveert. Dan geldt

$$(23)\qquad (v + r(y))\,\beta(n,y) = \alpha(n,y)$$

Vorm nu

$$(24)\qquad \mathcal{D}_y = w^y \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n,y)\, u^n$$

Analoog met (22) kan men bewijzen

$$(25)\qquad \mathcal{K}_y = (1-r(y))\,\mathcal{D}_y + \sum_{k=1}^{N} r_k\, \mathcal{K}_{y-y_k}\, \mathcal{D}_{y_k}$$

Wegens (9), (24) en (23) hebben we voor $h = 1,2,\ldots,N$

$$(v + r(y_h))\,\mathcal{D}_{y_h} = (v+r_h)\,\mathcal{D}_{y_h} = A_h$$

en (25), toegepast voor het speciale geval $y = y_h$, geeft nu (22). Voor $y \neq y_h$ ($h = 1,2,\ldots,N$) is $r(y) = 0$ en volgt uit (25)

$$(26)\qquad \mathcal{D}_y = \mathcal{K}_y - \sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{v+r_k} A_k$$

Als met (22) de grootheden $A_k$ berekend zijn, dan volgt $\mathcal{D}_y$ direct uit (26).

## 2. Hulpstellingen.

Het is natuurlijk gewenst om voor $\mathcal{K}_\eta(u,w)$, zoals deze door (21) wordt gedefinieerd, eenvoudiger formules af te leiden. We gebruiken hiervoor het volgende lemma.

Lemma 1. Laten $j$ en $k$, $r$ en $s$ gehele getallen voorstellen met $j \geq 0$, $r > 0$ en $s > 0$. De reeks

$$(27) \qquad \mathcal{L}_{j,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+k+i(r+s)}{j+ir} z^i$$

heeft de convergentiestraal

$$(28) \qquad \rho = \frac{1}{\left(1+\frac{r}{s}\right)^s \left(1+\frac{s}{r}\right)^r}$$

en voldoet voor $|z|<\rho$ en $z \neq 0$ aan

$$(29) \qquad \mathcal{L}_{j,k} = \sum_{m=1}^{s} \frac{1}{(1-\eta_m)^j \, \eta_m^k \, [s-(r+s)\eta_m]} + h_{j,k}(z)$$

met

$$(30) \qquad h_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{s}\right]} \binom{mr-j-1}{k-ms} (-1)^{k+1-ms} \frac{1}{z^m}$$

en met $\eta_1, \ldots, \eta_s$ als de wortels met de kleinste absolute waarde van de vergelijking

$$(31) \qquad (1-\eta)^r \eta^s - z = 0$$

Opm. 1. We stellen steeds $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Het polynoom $h_{j,k}$ is nul voor $k \leq s-1$. Er geldt de ontwikkeling

$$\frac{t^s}{\zeta - t^s + t^{r+s}} = -\sum_{y=s}^{\infty} \zeta^{-j} h_{j,k}(\zeta^r)\, t^y$$

waarin $j$ en $k$ de eenduidig bepaalde gehele getallen voorstellen met $kr - js = y$ en $0 \leq j \leq r-1$ (we denken $r$ en $s$ onderling ondeelbaar). Ontwikkeling van het linkerlid geeft n.l.

$$\frac{t^s}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} t^{ns} \zeta^{-n} \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{n}{h} t^{hr}$$

Stellen we voor de exponent $(n+1)s + hr = kr - js$, dan volgt

$$n+1 = mr - j \qquad \text{en} \qquad h = k - ms$$

waarin $m$ een geheel getal voorstelt. Dus de coefficient van $t^{kr-js}$

wordt nu

$$\frac{1}{z}\sum_{\frac{j+1}{r}\leq m\leq\frac{k}{s}}\binom{mr-j-1}{k-ms}(-1)^{k-ms}z^{-mr-j+1}$$

en mits geldt $0\leq j\leq r-1$, is die coefficient gelijk aan $-z^{-j}h_{j,k}(z^r)$.

Voor $k r-j s=y\leq s-1$ en $j\leq r-1$ geldt $k\leq s-1$ en is dus $h_{j,k}=0$.

Opm. 2. Voor $|z|<\rho$ (met $z\neq 0$) zijn de $r+s$ wortels van (31) alle verschillend en wel zodanig, dat $s$ wortels liggen in de cirkelschijf $|\eta|<\frac{s}{r+s}$ en $r$ wortels in de cirkelschijf $|1-\eta|<\frac{r}{r+s}$. Want wegens

$$(31)' \qquad \frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta)^r\eta^s-z\right]=(1-\eta)^{r-1}\eta^{s-1}\left[s-(r+s)\eta\right]$$

kan een dubbele wortel van (30) alleen optreden voor $\eta=0$, $\eta=1$ of $\eta=\frac{s}{r+s}$ d.w.z. $z=0$ of $z=\rho$. Verder zou uit het gelijktijdig gelden van de ongelijkheden

$$|\eta|\geq\frac{s}{r+s} \quad en \quad |1-\eta|\geq\frac{r}{r+s}$$

voor een wortel $\eta$ van (31) volgen, dat $|z|\geq\rho$.

Bewijs van lemma 1. De functie $\frac{1}{1-\xi-\eta}$, waarin $\xi$ en $\eta$ complexe veranderlijken zijn, is regulier voor $|\xi|+|\eta|<1$ en is aldaar ontwikkelbaar in de absoluut convergente dubbelreeks

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m}\xi^m\eta^n$$

Als $C_1$ de cirkel $|\xi|=R_1$ en $C_2$ de cirkel $|\eta|=R_2$ voorstelt (beide in positieve zin doorlopen), dan volgt voor $R_1+R_2<1$, dat

$$\binom{m+n}{m}=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{C_2}\int_{C_1}\frac{1}{1-\xi-\eta}\,\frac{d\xi}{\xi^{m+1}}\,\frac{d\eta}{\eta^{n+1}}$$

Zij $R_2=\frac{s}{r+s}$. Wegens $|z|<\rho=\left(\frac{r}{r+s}\right)^r\left(\frac{s}{r+s}\right)^s$ is dan een getal $R_1$ te vinden met

$$0<R_1<1-R_2=\frac{r}{r+s} \quad en \quad |z|<R_1^r R_2^s$$

Voor $|\xi|=R_1$ en $|\eta|=R_2$ is nu de reeks

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\xi^r\eta^s}\right)^i=\frac{1}{1-\frac{z}{\xi^r\eta^s}}$$

gelijkmatig convergent, waaruit volgt

$$(32)\quad \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{C_2}\int_{C_1} \frac{1}{1-\xi-\eta}\;\frac{1}{1-\dfrac{z}{\xi^r\eta^s}}\;\frac{d\xi}{\xi^{j+1}}\;\frac{d\eta}{\eta^{k+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{C_2}\int_{C_1} \frac{1}{1-\xi-\eta}\;\frac{d\xi}{\xi^{j+ir+1}}\;\frac{d\eta}{\eta^{k+is+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+k+i(r+s)}{j+ir} z^i = L_{j,k}$$

Teven· blijkt, dat de laatste reeks voor $|z|<\rho$ steeds convergent is, en dus een convergentiestraal $\geqq \rho$ heeft.

Voor $|\xi| \geqq R_1$ en $|\eta| = R_2$ geldt $\left|\frac{z}{\xi^r\eta^s}\right| \leqq \frac{|z|}{R_1^r R_2^s} < 1$
Voor vastgehouden $\eta$ met $|\eta| = R_2$ is dus $\dfrac{1}{1-z\,\xi^{-r}\eta^{-s}}$ voor $|\xi| \geqq R_1$ een reguliere functie van $\xi$, terwijl $(1-\xi-\eta)^{-1}$ een pool heeft in het punt $\xi = 1-\eta$ met $|1-\eta| \geqq 1-|\eta| = 1-R_2 > R_1$; wegens $j \geqq 0$ is de integrand in het eerste lid van (32) regulier in $\xi=\infty$. Uit de residuenrekening volgt nu

$$(33)\quad L_{j,k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1}{1-\dfrac{z}{(1-\eta)^r\eta^s}}\;\frac{1}{(1-\eta)^{j+1}}\;\frac{d\eta}{\eta^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{(1-\eta)^{r-j-1}\eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^r\eta^s - z}\,d\eta$$

waarin $C_2$ de in positieve zin doorlopen cirkel $|\eta| = R_2 = \frac{s}{r+s}$ voorstelt. Uit de opmerking, direct na de formulering van lemma 1, volgt dat voor $0<|z|<\rho$ de noemer $(1-\eta)^r\eta^s - z$ binnen de cirkel $|\eta| = \frac{s}{r+s}$ precies $s$ verschillende nulpunten $\eta_1,\dots,\eta_s$ heeft (juist de nulpunten met kleinste absolute waarde). Wegens $R_2 < 1$ zijn deze nulpunten samen met $\eta = 0$ de enige polen binnen $|\eta| = R_2$ voor de integrand in de laatste integraal. Het residu in een punt $\eta_m$ ($m = 1,2,\dots,s$) is gelijk aan

$$\left[\frac{(1-\eta)^{r-j-1}\eta^{s-k-1}}{\frac{d}{d\eta}\{(1-\eta)^r\eta^s - z\}}\right]_{\eta=\eta_m} = \left[\frac{(1-\eta)^{r-j-1}\,\eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^{r-1}\eta^{s-1}\{s-(r+s)\eta\}}\right]_{\eta=\eta_m}$$

$$= \frac{1}{(1-\eta_m)^j\,\eta_m^k\,\{s-(r+s)\eta_m\}}$$

Om het residu van de integrand in $\eta = 0$ te bepalen ontwikkelen we de integrand volgens

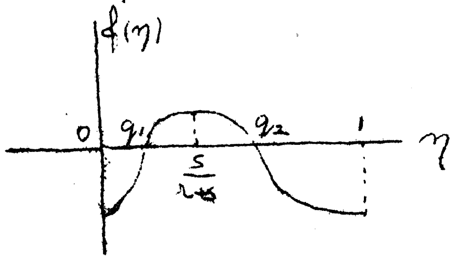
$$\frac{(1-\eta)^{r-j-1}\eta^{s-k-1}}{(1-\eta)^r\eta^s - z} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{z^m}\,(1-\eta)^{rm-j-1}\,\eta^{sm-k-1}$$

en dit residu is dus gelijk aan

$$h_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{[k/s]} \binom{mr-j-1}{k-ms} \frac{(-1)^{k+1-ms}}{z^m}$$

Voor $k \leq s-1$ is dit residu dus nul (en $\eta = 0$ een regulier punt voor de integrand). Formule (29) volgt nu direct uit (33) met residuenrekening.

We tonen tenslotte aan, dat de convergentiestraal van de reeks (27) precies $\rho$ is. Zij $f(\eta)=(1-\eta)^r \eta^s - z$ en zij $z$ reëel met $0<z<\rho$. Wegens (31)' en $f(\frac{s}{r+s}) = \rho - z > 0$ heeft in $[0,1]$ de functie $f(\eta)$ het volgende verloop:




Als $z$ langs de reele as tot $\rho$ nadert, dan naderen $q_1$ en $q_2$ tot $\frac{s}{r+s}$, dat voor $z = \rho$ een dubbel nulpunt is van $f(\eta)$. Bij deze limietovergang nadert dus slechts één der wortels $\eta_m$ van (31) (behorende tot de $s$ kleinste wortels, alle gelegen binnen $|\eta| = \frac{s}{r+s}$) tot $\eta = \frac{s}{r+s}$. Uit (29) volgt nu (zij $\varepsilon > 0$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ I_{j,k} \right]_{z=\rho-\varepsilon} = \infty ,$$

wat impliceert, dat de reeks (27) precies de convergentiestraal $\rho$ heeft.

Opm. Met behulp van de formule van Stirling vindt men voor $i \to \infty$

$$b_i = \binom{j+k+i(r+s)}{j+ir} = \frac{\left(1+\frac{s}{r}\right)^{j+ir}\left(1+\frac{r}{s}\right)^{k+is}}{\sqrt{2\pi \frac{rs}{r+s}\, i}} \left(1+O\left(\frac{1}{i}\right)\right)$$

en ook hieruit volgt direct, dat $\rho$ juist de convergentiestraal van (27) is.

Lemma 2. Laten $j_0$, $k_0$, $r$, $s$ en gehele getallen zijn met $r>0$ en $s>0$ onderling ondeelbaar en met $j_0$ en $k_0$ als de kleinste niet-negatieve gehele getallen waarvoor aan $k_0 r - j_0 s = j$ voldaan is.

Later verder $p$ en $q$ positieve getallen zijn met $p+q \leq 1$, evenwel met uitsluiting van het geval, dat tegelijkertijd voldaan is aan

$$p = \frac{r}{r+s} \quad \text{en} \quad q = \frac{s}{r+s}$$

en zij $u$ een complex getal met $0 < |u| \leq 1$. Dan gelden voor $F_j$, zoals door (21) wordt gedefinieerd, de beide volgende formules.

$$(34)\qquad \mathfrak{K}_y = \frac{w^y}{1-v}(pu)^{j_0}(qu)^{k_0}\left[\sum_{m=1}^{s}\frac{1}{(1-\eta_m)^{j_0}\eta_m^{k_0}\{s-(r+s)\eta_m\}} + h^{(1)}_{j_0,k_0}(z)\right]$$

en

$$(35)\qquad \mathfrak{K}_y = \frac{w^y}{1-v}(pu)^{j_0}(qu)^{k_0}\left[\sum_{m=s+1}^{s+r}\frac{1}{(1-\eta_m)^{j_0}\eta_m^{k_0}\{(r+s)\eta_m-s\}} + h^{(2)}_{j_0,k_0}(z)\right]$$

Hierin zijn $\eta_1,\dots,\eta_s$ de $s$ wortels met de kleinste absolute waarde (zelfs gelegen binnen $|\eta| = \frac{s}{r+s}$ ) en $\eta_{s+1},\dots,\eta_{s+r}$, de $r$ wortels met de grootste absolute waarde (zelfs gelegen binnen $|1-\eta| = \frac{r}{r+s}$ ) van de vergelijking

$$(36)\qquad (1-\eta)^r\eta^s = z \qquad \text{met} \quad z = (pu)^r(qu)^s$$

Verder is

$$(37)\qquad h^{(1)}_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{k}{s}\right]}\binom{mr-j+1}{k-ms}\frac{(-1)^{k+1-ms}}{z^m}$$

en

$$(38)\qquad h^{(2)}_{j,k}(z) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{j}{r}\right]}\binom{ms-k-1}{j-mr}\frac{(-1)^{j+1-mr}}{z^m}$$

In verband met de nauwkeurige definitie van $\mathfrak{K}_y$, moet men voor $y=0$ de rechterleden van (34) en (35) verminderen met $\frac{v}{1-v}$ .

<u>Bewijs</u>. Wegens de aan $p$, $q$ en $u$ opgelegde voorwaarden, geldt voor $z = (pu)^r(qu)^s$ , dat $|z|<\rho$ waarin $\rho$ volgens (28) is gedefinieerd. Formule (34) volgt nu onmiddellijk uit lemma 1. Past men lemma 1 toe na verwisseling van $r$ en $s$ resp. $j$ en $k$ dan volgt

$$\mathfrak{K}_y = \frac{w^y}{1-v}(pu)^{j_0}(qu)^{k_0}\left[\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{(1-\zeta_m)^{k_0}\zeta_m^{j_0}\{r-(r+s)\zeta_m\}} + h^{(3)}_{j_0,k_0}(z)\right]$$

waarin $\zeta_1,\dots,\zeta_r$ de wortels zijn met de kleinste absolute waarde van de vergelijking

$$(1-\zeta)^s\zeta^r = z$$

De substitutie $\zeta = 1-\eta$ geeft nu formule (35).

<u>Opm</u>. Wanneer $y \geq 0$ , dan geldt steeds $0 \leq j_0 \leq r-1$ en $0 \leq k_0$ , en in dat geval is de extra term $h^{(2)}_{j_0,k_0}$ in (35) nul. Evenzo vervalt voor $y \leq 0$ in (34) de term $h^{(1)}_{j_0,k_0}$. Bij toepassing van de ontwikkelde methode in de sequentieanalyse, zal in het algemeen gelden

ofwel $r \ll s$, ofwel $s \ll r$; zij $s \ll r$. De berekening van de $s$ kleinste wortels $\eta_1, \ldots, \eta_s$ van de vergelijking (36) is dan niet zeer bezwaarlijk, doch wel de berekening van de zeer vele wortels $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_{s+r}$ met grootste absolute waarde. Door uitsluitend gebruik te maken van formule (34) kan men evenwel deze laatste berekening vermijden.

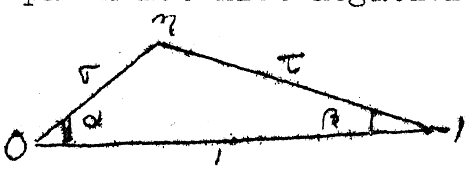
In verband met lamma 2 en de opmerking gemaakt na formule (12) is het van bijzonder belang de wortels te bepalen van de vergelijking

$$(1-\eta)^r \eta^s = p^r q^s$$

Hierin geldt voor $z = p^r q^s$, dat $0 \leq z \leq \rho$ en we moeten dus voor elke reele waarde $z$ met $0 \leq z \leq \rho$ de wortels bepalen van de vergelijking

(39) $$(1-\eta)^r \eta^s = z$$

Dit is vrij gemakkelijk. Daar de niet reele wortels van (36) in geconjugeerde paren voorkomen, behoeven we alleen de wortels te bepalen met niet-negatief reeel deel. Stel nu




$$\eta = \sigma e^{i\alpha} \quad \text{en} \quad 1-\eta = \tau e^{-i\beta}$$

met

$$\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ \alpha+\beta \leq \pi \qquad (40)$$

Voor een wortel $\eta$ van (39) geldt dus

(41) $$\tau^r e^{-ir\beta} \sigma^s e^{is\alpha} = z$$

Daar $z$ reeel is volgt $\sin(s\alpha - r\beta) = 0$ ofwel voor $k$ geheel

(42) $$s\alpha - r\beta = k\pi$$

Uit (40) volgt dat voor de gehele waarde $k$ geldt

(43) $$-\tfrac{1}{2} r \leq k \leq \tfrac{1}{2} s$$

Door toepassing van de sinusregel op de getekende driehoek volgt verder

(44) $$\sigma = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{en} \quad \tau = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

en wegens (41) hebben we dan

(45) $$\frac{(\sin\alpha)^s (\sin\beta)^r}{(\sin(\alpha+\beta))^{r+s}} = z$$

Men kiest nu een waarde $\alpha$ met $0 \leq \alpha \leq \pi$ en verder een gehele waarde $k$, die aan (43) voldoet. Met (42) berekent men nu $\beta$, met (44) de waarden $\sigma$ en $\tau$ en tenslotte uit (43) de waarde van $z$, waarvoor het gevonden getal $\eta = \sigma e^{i\alpha}$ voldoet aan vergelijking (36). Alle berekeningen kunnen logarithmisch geschieden. Eist men geen grote nauwkeurigheid, dan is het wellicht eenvoudiger de wortels van (39) grafisch te bepalen, door in het complexe $\eta$-vlak de eindig vele krommen te tekenen met vergelijking (42) en verder een schaar van krommen met vergelijking (39).

Opm. Door de substitutie

$$\eta = z^{\frac{1}{s}} w^{-r}$$

kan men ook de berekening van de wortels van vergelijking (39) herleiden tot de berekening van de wortels van de trinomische vergelijking

$$w^{r+s} - w^{r} + z^{\frac{1}{s}} = 0$$

Wanneer $z^{\frac{1}{s}}$ reeel is, dan bepaalt men de reele wortels gemakkelijk met behulp van de optellingslogarithmen ingevoerd door Gauss. Vgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I p. 391-399.

Beschouw de algebraische functie $\eta(z)$ gedefinieerd door (36). Het Riemannoppervlak $\Gamma$ van $\eta(z)$ heeft twee vertakkingspunten $A$ en $B$ in $z=0$ op hoogte $\eta=0$ resp. $\eta=1$ (resp. $s$-bladig en $r$-bladig). Verder heeft $\Gamma$ een tweebladig vertakkingspunt $C$ in $z=\rho$ op hoogte $\frac{s}{r+s}$ en een $(r+s)$-bladig vertakkingspunt[*] gaat één door het punt $A$, en één door het punt $B$ (v.g.l. het slot van het bewijs van lemma 1). Beschouw nu op $\Gamma$ de functie $\eta(z)$ in de omgeving van het $s$-bladige vertakkingspunt $A$ en stel $\zeta = z^{\frac{1}{s}}$. Omloopt $\zeta$ de oorsprong éénmaal in een kleine cirkel, dan omloopt $z$ de oorsprong $s$ maal, en heeft $\eta(z) = \eta(\zeta^{s})$ weer de zelfde waarde. Doorloopt $\zeta$ éénmaal een gesloten, $O$ niet omvattende Jordankromme gelegen binnen $|\zeta| = \rho^{1/s}$ dan omloopt $z$ éénmaal een analoge kromme binnen $|z| = \rho$ en herneemt $\eta(z) = \eta(\zeta^{s})$ zijn oospronkelijke waarde. Dus de functie $\eta(\zeta^{s})$ is éénduidig regulier voor $|\zeta| < \rho^{1/s}$. Omloopt $z$ eenmaal het punt $z=\rho$ dan doorloopt het bijbehorend punt op de door $C$ gaande bladen van $\Gamma$ een niet gesloten weg. Als dus $\zeta$ het overeenkomstige randpunt $\rho^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2\pi i}{k}}$ omloopt, dan herneemt $\eta(\zeta^{s})$ niet zijn oorspronkelijke waarden d.w.z. deze functie heeft een singulariteit in genoemd randpunt. De reeks van Puiseux

$$(46) \qquad \eta(\zeta^{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{n}$$

[*] in het oneindige. Van de twee bladen door het punt C

heeft dus een convergentiestraal $\rho^{\frac{1}{s}}$. Substitueert men voor $|z|<\rho$ in (46)

$$\zeta = z^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2\pi i k}{s}} \qquad (k=0,1,\dots,s-1)$$

dan vindt men juist de $s$ wortels $\eta_1,\dots,\eta_s$ van vergelijking (39) met de kleinste absolute waarde. Voor de berekening van deze wortels is het dus van groot belang de coefficienten $b_n$ te kennen.

We definieren de functie $(1-\eta)^{\frac{r}{s}}$ zodanig, dat voor $0<\eta<1$ geldt $0<(1-\eta)^{r/s}<1$. Uit (39) volgt dan

$$\eta(1-\eta)^{r/s} = \zeta$$

waarin $\zeta$ één der wortels voorstelt van de binomiaalvergelijking $\zeta^s = z$. Nu geldt (v.g.l. A. Hurwitz und R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie p. 136-138):

<u>Lemma 3</u>. (Stelling van Lagrange Bürmann). Zij voor $a_1 \neq 0$

(47) $$\zeta = f(\eta) = a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \cdots$$

een voor $|\eta| \leq R$ convergente machtreeks, met $f(\eta) \neq 0$ voor $0<|\eta|<R$. Zij verder

(48) $$M = \min_{|\eta|=R} |f(\eta)|$$

Dan behoort bij elke waarde $\zeta$ met $|\zeta|<M$ één en slechts één waarde $\eta$ met $|\eta|<R$, waarvoor (47) geldt. Deze waarde $\eta$ is een reguliere functie van $\zeta$, en wel geldt (voor $|\zeta|<M$ )

(49) $$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left( \frac{\eta}{f(\eta)} \right)^n \right]_{\eta=0}$$

Voor $f(\eta) = \eta(1-\eta)^{\frac{r}{s}}$ en $R = \frac{s}{r+s}$ is aan de voorwaarden van lemma 3 voldaan. De door (48) gedefinieerde minimale waarde $M$ wordt aangenomen voor $\eta = \frac{s}{r+s}$ en is gelijk aan $\rho^{\frac{1}{s}}$. Uit de bewering van lemma 3 volgt nu voor $|\zeta|<\rho^{\frac{1}{s}}$

(50) $$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^n$$

met

$$b_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}(1-\eta)^{-\frac{nr}{s}}\right]_{\eta=0} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{-\frac{nr}{s}}{n-1}$$

ofwel

(51) $$b_n = \frac{nr(nr+s)(nr+2s)\cdots(nr+(n-2)s)}{s^{n-1}\,n!}$$

Men kan bewijzen, dat een van $n$ onafhankelijke positieve constante $C$ bestaat met

$$|b_n| < C \frac{\left(1+\frac{r}{s}\right)^n \left(1+\frac{s}{r}\right)^{\frac{r}{s}n}}{n\sqrt{n}} = \frac{C}{n\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\rho^{\frac{1}{s}}}\right)^n$$

Hieruit volgt, dat de reeks (50) zelfs convergeert voor $|z| \leq \rho^{\frac{1}{s}}$.
De gevonden resultaten vatten we nu samen in

Lemma 4. Zij $|x| \leq \rho$. De $s$ wortels $\eta_1, \ldots, \eta_s$ van de vergelijking

(52) $\quad (1-\eta)^r \eta^s = x$

met de kleinste absolute waarde worden gegeven door de voor $|z| \leq \rho^{\frac{1}{s}}$ convergente machtreeks

(53) $\quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$

waarin $b_n$ door (47) is gedefinieerd, en waarin $z$ één van de $s$ wortels voorstelt van de vergelijking $z^s = x$.

Opm. Een analoge ontwikkeling bestaat natuurlijk voor de $r$ wortels $\eta_{s+1}, \ldots, \eta_{s+r}$ van (52) met de grootste absolute waarde. Lemma 2 en 4 hebben tot doel de numerieke oplossing van het stelsel vergelijkingen (22) te vergemakkelijken. Voor $z^s = x = (p^\mu)^r (q^\mu)^s$ is de convergentiesnelheid in (21) en (53) ongeveer gelijk (de convergentiestralen zijn n.l. $\rho$ resp. $\rho^{\frac{1}{s}}$) en de berekening van een wortel van (52) resp. de berekening van $F_y(u,v)$ vergt dus ongeveer evenveel tijd. Gebruik makend van lemma 2 en 4 behoeft men voor de berekening van de in (22) voorkomende grootheden $F_y(u,v)$ ten hoogste $r$ maal een reeks te sommeren (v.g.l. de opmerking na lemma 2). Direct combinatie van (21) en (22) vereist in het algemene geval, dat men ongeveer $N^2$ maal een reeks sommeert, en deze methode is dus alleen voor kleine waarden van $N$ aan te bevelen.

## 3. Toepassingen.

Bij toepassing van de aangegeven methode in de sequentieanalyse kan men $v$ interpreteren als de kans, die er bij elke stap bestaat, dat de test door onvoorziene omstandigheden moet worden afgebroken. We zullen voortaan voor het gemak aannemen, dat

$$v = 0 \qquad \text{en dus} \qquad p + q = 1$$

I. We beschouwen vooreerst het klassieke probleem, waarin $r = s = 1$, en waarin $\mathfrak{R}$ twee componenten $\mathfrak{R}_1$ en $\mathfrak{R}_2$ heeft, bestaande uit de verzameling van alle roosterpunten op de lijn $y = a$ resp. $y = -b$. Hier in stellen $a$ en $b$ gehele positieve getallen voor.

Voor de gehele getallen $j_0$ en $k_0$ genoemd in de formulering van lemma 2 geldt nu

$$\begin{array}{llll} k_0 = y & \text{en} & j_0 = 0 & \text{als} \quad y \geq 0 \\ k_0 = 0 & \text{"} & j_0 = -y & \text{"} \quad y \leq 0 \end{array}$$

In het eerste geval gebruiken we formule (35) van lemma 2 en vinden dan voor $y \geq 0$

$$\mathfrak{K}_y = w^y (qu)^y \frac{1}{\eta_2^y (2\eta_2 - 1)}$$

en analoog met formule (34) voor $y \leq 0$

$$\mathfrak{K}_y = w^y (pu)^{-y} \frac{1}{(1-\eta_1)^{-y} (1-2\eta_1)}$$

Hierin stelt $\eta_1$, resp. $\eta_2$ de absoluut grootste resp. absoluut kleinste wortel voor de vergelijking

$$(1-\eta)\,\eta = pq u^2$$

Zij $u$ reeel met $0 \leq u \leq 1$. Dan geldt voor

$$U = \sqrt{1 - 4qpu^2}$$

dat

$$1 - \eta_1 = \eta_2 = \tfrac{1}{2}(1 + U)$$

en verder

$$2\eta_2 - 1 = 1 - 2\eta_1 = U$$

en dus volgt voor $y \geq 0$

$$\mathfrak{K}_y = w^y \cdot \frac{1}{U} \left[ \frac{2qu}{1+U} \right]^y \tag{54}$$

en voor $y \leq 0$

(55) $$\mathfrak{R}_y = w^y \frac{1}{U} \left[\frac{2pu}{1+U}\right]^{-y}$$

Het stelsel vergelijkingen (22) wordt in ons geval

$$\mathfrak{R}_a = \left(\frac{1-r_1}{r_1} + \mathfrak{R}_0\right)A_1 + \mathfrak{R}_{a+b} A_2$$

$$\mathfrak{R}_b = \mathfrak{R}_{-a-b} A_1 + \left(\frac{1-r_2}{r_2} + \mathfrak{R}_0\right)A_2$$

Stellen we $w = 1$ , dan gaat wegens (54) en (55) dit stelsel na vermenigvuldiging met $U$ over in

$$\left[\frac{2qu}{1+U}\right]^a = \left(\frac{1-r_1}{r_1} U + 1\right)A_1(u,1) + \left[\frac{2qu}{1+U}\right]^{a+b} A_2(u,1)$$

$$\left[\frac{2pu}{1+U}\right]^b = \left[\frac{2pu}{1+U}\right]^{a+b} A_1(u,1) + \left(\frac{1-r_2}{r_2} U + 1\right) A_2(u,1)$$

Rekening houdende met

$$4pq u^2 = 1-(1-4pq u^2) = 1-U^2$$

vinden we als oplossing van dit tweetal vergelijkingen

(56) $$A_1(u,1) = (2qu)^a \frac{\left(\frac{1-r_2}{r_2} U + 1\right)(1+U)^b - (1-U)^b}{\left(\frac{1-r_1}{r_1} U + 1\right)\left(\frac{1-r_2}{r_1} U + 1\right)(1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

en

(57) $$A_2(u,1) = (2pu)^a \frac{\left(\frac{1-r_1}{r_1} U + 1\right)(1+U)^a - (1-U)^a}{\left(\frac{1-r_1}{r_1} U + 1\right)\left(\frac{1-r_2}{r_2} U + 1\right)(1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

Voor algemene $r_1$ en $r_2$ zijn dit irrationale functies van $u$. Wegens (9) geldt hierin voor $j = 1,2$

(58) $$A_j(u,1) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{j,l} u^l$$

waarin $\alpha_{1,l}$ resp. $\alpha_{2,l}$ de kans voorstelt, dat na een door $\mathfrak{R}$ gestoorde wandeling vanaf de oorsprong een catastrofe optreedt en het randpunt $(a,l)$ van $\mathfrak{R}_1$ resp. het randpunt $(-b,l)$ van $\mathfrak{R}_2$. Dus $A_j(1,1)$ is de kans, dat op de component $\mathfrak{R}_j$ een catastrofe optreedt. Wanneer $W$ in een randpunt op de lijn $y = a$ resp. $y = -b$ arriveert, dan is de kans op een catastrofe in dat randpunt $r_1$ resp. $r_2$ .

Ia. Voor $r_2 = 0$ is wegens (56) en (57) $A_2(u,1) = 0$ en

(59) $$A_1(u,1) = \left(\frac{2qu}{1+U}\right)^a \frac{1}{\frac{1-r_1}{r_1} U + 1}$$

Wegens $p + q = 1$ geldt voor $u = 1$

(60) $$U = \sqrt{1-4pq} = 1-2p \qquad \text{als } p \leq q$$
$$= 1-2q \qquad \text{''} \quad q \leq p$$

en de kans op een catastrofe wordt dus

$$A_1(1,1) = \frac{1}{1+(1-2p)\frac{1-x_1}{x_1}} \qquad \text{als } p \leq q$$

of

$$A_1(1,1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a} \frac{1}{1+(1-2q)\frac{1-x_1}{x_1}} \qquad \text{als } q \leq p$$

Teneinde de door (59) gegeven functie volgens (58) te ontwikkelen, stellen we

$$1 - U = 1-\sqrt{1-4pqu^2} = 2\eta$$

en dus is voldaan aan

$$\zeta = pqu^2 = \eta(1-\eta)$$

Uit de algemene stelling van Lagrange-Bürmann (een generalisatie van lemma 3) volgt, dat we een in $\eta = 0$ reguliere functie $f(\eta)$ kunnen ontwikkelen naar opklimmende machten van $\zeta$

$$f(\eta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[ f'(\eta) \left(\frac{\eta}{\eta(1-\eta)}\right)^n \right]_{\eta=0}$$

Passen we deze formule toe op de functie (59), dan vinden we

$$A_1(u,1) = \left(\frac{qu}{1-\eta}\right)^a \frac{x_1}{1-2(1-x_1)\eta}$$
$$= (qu)^a x_1 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left\{ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{(1-\eta)^a \{1-2(1-x_1)\eta\}} \right) \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^n \right\}_{\eta=0} \right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{1,a+2n} u^{a+2n}$$

waarin $\alpha_{1,a} = (q)^a x_1$ en waarin voor $n \geq 1$

$$\alpha_{1,a+2n} = \frac{p^n q^{a+n}}{n!} x_1 \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[ \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{(1-\eta)^a \{1-2(1-x_1)\eta\}} \right) \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^n \right]_{\eta=0}$$

In het bijzondere geval $x_1 = 1$ vinden we

$$\alpha_{1,a+2n} = \frac{p^n q^{a+n}}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[ a \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{a+n+1} \right]_{\eta=0}$$

$$= \frac{a(a+n+1)(a+n+2)\cdots(a+2n-1)}{n!} p^n q^{a+n}$$

als de kans, dat in het punt $(x,y) = (a+2n, a)$ een catastrofe optreedt.

De punten $(a+2n+1, 0)$ zijn vanaf de oorsprong onbereikbaar.

Ib. Nemen we nu aan, dat $r_1 = r_2 = 1$, dan volgt uit (56) en (57)

$$(61) \qquad A_1(u,1) = (2qu)^a \frac{(1+U)^b - (1-U)^b}{(1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

en

$$(62) \qquad A_2(u,1) = (2pu)^a \frac{(1+U)^a - (1-U)^a}{(1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}}$$

Dat zijn beide rationale functies in $U^2$ en dus in $u$. Wegens (60) worden de kansen op een catastrofe op $\mathfrak{R}_1$ en $\mathfrak{R}_2$

$$(63) \qquad A_1(1,1) = q^a \frac{p^b - q^b}{p^{a+b} - q^{a+b}} \qquad \text{resp. } A_2(1,1) = p^b \frac{p^a - q^a}{p^{a+b} - q^{a+b}}$$

een resultaat, dat overigens veel eenvoudiger kan worden bewezen (v.g.l. J.V. Uspensky, Introduction to mathematical probability, blz. 141).

Met partiaalbreuk-splitsing kan men de functies (61) en (62) volgens (58) ontwikkelen, doch dit laten we nu achterwege. Onder de voorwaarde, dat een catastrofe optreedt op de randlijn $y = a$ wordt de gemiddelde weglengte gegeven door

$$\overline{n}_1 = \frac{1}{A_1(1,1)} \left[ \frac{d}{du} A_1(u,1) \right]_{u=1}$$

Wegens $\frac{dU}{du} = -\frac{4pqu}{U}$ geldt dus

$$\overline{n}_1 = a + \frac{(2q)^a}{A_1(1,1)} \left[ -\frac{4pq}{U} \frac{d}{dU} \frac{(1+U)^b - (1-U)^b}{(1+U)^{a+b} - (1-U)^{a+b}} \right]_{U=1-2q}$$

waarmee $\overline{n}_1$ expliciet bekend is.

II. Zij nu $s = 1$ en $r$ een willekeurig natuurlijk getal. Laat de rand $\mathfrak{R}$ bestaan uit de roosterpunten gelegen op de lijn $y = -b$, waarin $b$ een positief geheel getal voorstelt. Het stelsel vergelijkingen (22) reduceert zich (voor $v = 0$) tot de vergelijking

$$\mathfrak{F}_{-b} = \left( \frac{1-r_1}{r_1} + \mathfrak{F}_0 \right) A_1$$

waaruit volgt

$$(64) \qquad A_1 = \frac{\mathfrak{F}_{-b}}{\frac{1-r_1}{r_1} + \mathfrak{F}_0}$$

Voor $y \leq 0$ geldt voor het paar kleinste niet-negatieve gehele getallen $j_0$ en $k_0$ met

$$y = k_0 r - j_0 s = k_0 r - j_0$$

dat $k_0 = 0$ en $j_0 = -y$. Uit formule (34) van lemma 2 volgt dan voor $y \leq 0$

(65) $$\mathcal{K}_y = w^y (pu)^{-y} \frac{(1-\eta_1)^y}{1-(r+1)\eta_1},$$

waarin $\eta_1$ de wortel met de kleinste absolute waarde voorstelt van de vergelijking

(66) $$(1-\eta)^r \eta = (pu)^r qu .$$

Uit (64) en (65) volgt dan voor $w = 1$

(67) $$A_1(u,1) = (pu)^b \frac{(1-\eta_1)^{-b}}{\frac{1-r_1}{r_1}\{1-(r+1)\eta_1\}+1}$$

en de kans op een catastrofe wordt dus gegeven door

(68) $$A_1(1,1) = \left(\frac{p}{1-\eta_1}\right)^b \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1-r_1}{r_1}(r+1)\eta_1}$$

met $\eta_1 = \eta_1(u=1)$ als de absoluut kleinste wortel van

$$(1-\eta)^r \eta = (1-q)^r q$$

Uit de redenering uit het slot van het bewijs van lemma 1 volgt dat $\eta_1$ reeel positief is met $\eta_1 \leq \frac{1}{r+1}$ . Voor $q \leq \frac{1}{r+1}$ is $\eta_1 = q$ en de kans (67) op een catastrofe wordt dan

$$\frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1-r_1}{r_1}(r+1)q}$$

Voor $r_1 = 1$ is deze kans 1. Dit is voor $q < \frac{1}{r+1}$ ook om andere redenen duidelijk. Immers de verwachtingswaarde van de bij elke stap naar boven afgelegde afstand is

$$qr - p = q(r+1) - 1$$

en deze is voor $q < \frac{1}{r+1}$ negatief. De waarschijnlijkheid, dat $W$ nooit de lijn $y = -b$ ontmoet, is dan nul, en dus (voor $r_1 = 1$) ook de kans dat nooit een catastrofe zal optreden.

Voor $r_1 = 1$ volgt uit (67)

$$A_1(u,1) = \left(\frac{pu}{1-\eta_1}\right)^b$$

met $\eta_1$ als absoluut kleinste wortel van (66). Als vroeger volgt nu uit de stelling van Lagrange-Bürmann

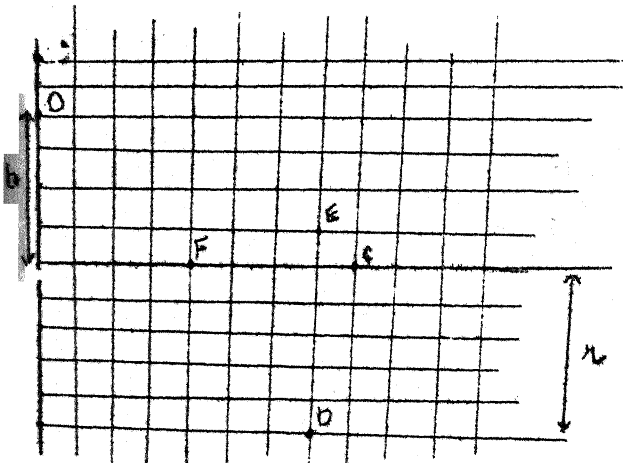
$$A_1(u,1)=(pu)^b\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p^r q\, u^{r+1})^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}}\left\{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^b\left(\frac{\eta}{(1-\eta)^r\eta}\right)^n\right\}\right]_{\eta=0}$$

$$=(pu)^b+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(b+1+rn)(b+2+rn)\cdots(b+n-1+rn)}{n!}(pu)^{b+nr}(qu)^n$$

en dus volgt voor de kans $\alpha_n$ op een catastrofe in het randpunt $(x,y)=(b+n(r+1),b)$, $\alpha_0=p^b$ en voor $n\geq 1$

$$(69)\qquad \alpha_n=\frac{b(b+1+rn)(b+2+rn)\cdots(b+n-1+rn)}{n!}p^{b+nr}q^n$$

Het is belangwekkend, dat formule (69) zeer eenvoudig en aanschouwelijk als volgt kan worden bewezen.



Onder een weg verstaan we een eindige of oneindige rij punten $(x_j,y_j)$ $(j=0,1,2,\dots)$ met $(x_0,y_0)=(0,0)$ zodat voor elke waarde $j=0,1,\dots$ één der volgende relaties geldt

$$(x_{j+1},y_{j+1})=(x_j+1,\ y_j+r)$$

resp. $(x_{j+1},y_{j+1})=(x_j+1,y_j-1)$

Zij C een bereikbaar randpunt op $y=-b$, dus met coordinaten $x=+b+k(r+1)$ en $y=-b$ (met k als een niet-negatief getal). Het aantal wegen met C als eindpunt is $d_k=\binom{b+k(r+1)}{k}$. Om het aantal $a_k$ wegen te bepalen met C als eindpunt en enig randpunt, moeten we $d_k$ verminderen met het aantal $e_k$ in C eindigende wegen, die tevoren reeds een randpunt F zijn gepasseerd, d.w.z. $a_k=d_k-e_k$.

Elke in C eindigende weg heeft D of E als voorlaatste punt met

$$D=(b+k(r+1)-1,\ -b+r)$$

$$E=(b+k(r+1)-1,\ -b+1)$$

Dus is $e_k=N_D+N_E$ als $N_D$ resp. $N_E$ het aantal in D resp. E eindigende wegen voorstelt, die de rand minstens éénmaal gepasseerd zijn. Daar elke in D eindigende weg de rand $y=-b$ noodzakelijk eens moet hebben gepasseerd, hebben we

$$N_D=\binom{b+k(r+1)-1}{k-1}$$

We laten nu zien, dat $N_E = r N_D$. Een weg, die $E$ passert, en tevoren de rand is gepasseerd, heeft in zeker randpunt $F$ met

$$F = (b + j(r+1), -b)$$

waarin $0 \le j \le k-1$, deze rand voor het eerst getroffen. Het aantal geheel vrije mogelijkheden om van $F$ naar $E$ te komen is

$$N_E^{(j)} = \binom{(n-j)(r+1)-1}{n-j}$$

en analoog

$$N_D^{(j)} = \binom{(n-j)(r+1)-1}{n-j+1}.$$

en het blijkt nu, dat geldt

$$N_E^{(j)} = r\, N_D^{(j)} \qquad (j=0,1,\ldots,k-1)$$

Dus volgt

$$N_E = \sum_{j=0}^{k-1} e_j\, N_E^{(j)} = r \sum_{j=0}^{k-1} e_j\, N_D^{(j)} = r\, N_D$$

We hebben nu

$$\begin{aligned} e_k &= d_k - \ell_k = d_k - N_D - N_E = d_k - (r+1)\, N_D \\ &= \binom{b+k(r+1)}{k} - (r+1)\binom{b+k(r+1)-1}{k-1} \\ &= \frac{a}{k}\binom{b+k(r+1)-1}{k-1} \end{aligned}$$

en de kans $\alpha_k$ op een catastrofe in het punt $C = (b+k(r+1), -b)$ is dus

$$\alpha_k = e_k\, p^{b+kr} q^k = \frac{b(b+1+rk)(b+2+rk)\cdots(b+k-1+rk)}{k!}\, p^{b+kr} q^k$$

wat juist formule (69) is.

III. We geven nu een tweede toepassing voor het geval, dat $s=1$ en dat $r$ een willekeurig natuurlijk getal is. Laat de rand $\mathcal{R}$ bestaan uit $N$ componenten $\mathcal{R}_h$, waarbij $\mathcal{R}_h$ ($h = 0,1,2,\dots,N-1$) bestaat uit de verzameling van alle (bereikbare) roosterpunten op de lijn $y = a + h$, waarin $a$ een positief geheel getal is. Zij verder $r_h = 1$ voor $h = 0,1,2,\dots,N-1$. Indien $N>r$, dan kunnen de componenten $\mathcal{R}_r, \mathcal{R}_{r+1}, \dots, \mathcal{R}_{N-1}$ alleen bereikt worden vanaf de oorsprong door tenminste één der componenten $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{r-1}$ te passeren, doch dan treedt onherroepelijk een catastrofe op wegens $r_h = 1$. De componenten $\mathcal{R}_h$ met $h \geq r$ kunnen dus buiten beschouwing worden gelaten, en we mogen aannemen, dat $N \leq r$.

Het stelsel vergelijkingen (22) krijgt in ons geval de gedaante

$$\mathcal{R}_{a+h} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{R}_{h-k} A_k \qquad (h=0,1,\dots,N-1) \tag{70}$$

Voor $y \leq 0$ wordt $\mathcal{R}_y$ gegeven door de formule (65). Voor $y \geq 0$ geldt voor de in lemma 2 genoemde getallen $j_0$ en $k_0$, dat $k_0 = \left\{\frac{y}{r}\right\}$ en $j_0 = r k_0 - y$, als $\{x\}$ het kleinste gehele getal $\geq x$ voorstelt. Uit formule (34) van lemma 2 volgt nu voor $y \geq 0$

$$\mathcal{R}_y = w^y (pu)^{r k_0 - y} (qu)^{k_0} \left[ \frac{1}{(1-\eta_1)^{r k_0 - y} \eta_1^{k_0} \{1-(r+1)\eta_1\}} + \sum_{m=1}^{k_0} \binom{y-(k_0-m)r-1}{k_0-m} \frac{(-1)^{k_0-m+1}}{(p^r q u^{r+1})^m} \right], \tag{71}$$

waarin $k_0 = \left\{\frac{y}{r}\right\}$ en waarin $\eta_1$ de absoluut kleinste wortel van (66) voorstelt. Wegens (65) geldt formule (71) ook voor $y \leq 0$, mits we in dit geval $k_0 = 0$ stellen (de som in het rechterlid van (71) is nu leeg).

Wegens $N \leq r$ geldt voor de coefficienten $\mathcal{R}_{h-k}$ in het stelsel vergelijkingen (70), dat $|h-k| \leq r-1$. Nu wordt $\mathcal{R}_y$ voor $y \leq 0$ gegeven door (65) en voor $0 < y \leq r$ door (71) met $k_0 = 1$. Dus

$$\mathcal{R}_y = w^y (pu)^{-y} \frac{(1-\eta_1)^y}{1-(r+1)\eta_1} \tag{72}$$

als $y \leq 0$ en

$$\mathcal{R}_y = w^y (pu)^{r-y} qu \left[ \frac{1}{(1-\eta_1)^{r-y} \eta_1 \{1-(r+1)\eta_1\}} - \frac{1}{p^r q u^{r+1}} \right] \tag{73}$$

als $0<y\leq r$, waarbij we gebruik maakten van (66). We stellen nu

$$(74)\qquad \frac{w}{pu}(1-\eta_1)=x\ ;\quad \frac{w}{pu}=y\ ;\quad 1-(r+1)\eta_1=\alpha .$$

De matrix $\Delta_N$ van het stelsel vergelijkingen (70) wordt gegeven door

$$\Delta_N=\left\|\begin{array}{cccccc}
\mathfrak{K}_0 & \mathfrak{K}_{-1} & \mathfrak{K}_{-2} & \cdots & \cdots & \mathfrak{K}_{-N+1}\\
\mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_0 & \mathfrak{K}_{+1} & \cdots & \cdots & \mathfrak{K}_{-N+2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & & & \mathfrak{K}_0 & \mathfrak{K}_{-1}\\
\mathfrak{K}_{N-1} & \mathfrak{K}_{N-2} & \cdots & \cdots & \mathfrak{K}_1 & \mathfrak{K}_0
\end{array}\right\|$$

en is wegens (72) en (73) gelijk aan

$$\frac{1}{\alpha}\left\|\begin{array}{cccccc}
1 & x^{-1} & x^{-2} & x^{-3} & \cdots & x^{-N+1}\\
x-\alpha y & 1 & x^{-1} & x^{-2} & & x^{-N+2}\\
x^2-\alpha y^2 & x-\alpha y & 1 & x^{-1} & & x^{-N+3}\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & x^{-1}\\
x^{N-1}-\alpha y^{N-1} & \cdots & \cdots & \cdots & x-\alpha y & 1
\end{array}\right\|$$

We transformeren $\Delta_N$ in een nieuwe matrix $\Delta'_N$ door de laatste kolom vermenigvuldigd met $x^{N-k}$ af te trekken van de k-de kolom ($k=1,2,\dots,N-1$). Door deze operatie, wordt noch de determinant van de matrix, noch de minor van een niet tot de laatste kolom behorend element, gewijzigd. We vinden

$$\frac{1}{\alpha}\left\|\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-N+1}\\
-\alpha y & 0 & 0 & & 0 & x^{-N+2}\\
-\alpha y^2 & -\alpha y & 0 & & 0 & x^{-N+3}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \ddots & 0 & x^{-1}\\
-\alpha y^{N-1} & -\alpha y^{N-2} & \cdots & \cdots & -\alpha y & 1
\end{array}\right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^{-1}x^{-N+1} \\ -y & 0 & 0 & & 0 & \alpha^{-1}x^{-N+2} \\ -y^2 & -y & 0 & & 0 & \alpha^{-1}x^{-N+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \alpha^{-1}x^{-1} \\ -y^{N-1} & -y^{N-2} & \cdots & & -y & \alpha^{-1} \end{array} \right\|$$

Dus geldt vooreerst voor de determinant van $\Delta_N$

(75) $|\Delta_N| = |\Delta_N'| = (-1)^{N-1}\alpha^{-1}x^{-N+1}(-y)^{N-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1}$

Zij $k \neq N$. Door op $\Delta_N'$ de volgende (van $k$ afhankelijke) operatie toe te passen, gaat $\Delta_N'$ over in $\Delta_N^{(k)}$ en blijven te minoren van de $k^{de}$ kolom onveranderd.

(1) Vermenigvuldig de $2^{de}$ kolom met $y$ en trek af van de $1^e$ kolom
(2) " " $3^{de}$ " " " " " " " " $2^{de}$ "

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(k-2) " " $(k-1)^e$ " " " " " " " " $(k-2)^{de}$ kolom
(k-1) " " $(k+1)^e$ " " $y^2$ " " " " " $(k-1)^e$ kolom
(k) " " $(k+2)^{de}$ " " $y$ " " " " " $(k+1)^e$ "

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

(N-2) " " $(N-1)^e$ " " " " " " " " $(N-2)^e$ "

We vinden

$$\Delta_N^{(k)} = \left\| \begin{array}{ccccc|c|cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \alpha^{-1}x^{-N+1} \\ -y & 0 & 0 & & & & & & & & & \alpha^{-1}x^{-N+2} \\ 0 & -y & 0 & & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -y & 0 & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & -y & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 0 & -y & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & -y^2 & -y & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & -y^3 & 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & -y & 0 & \alpha^{-1}x^{-1} \\ \vdots & & & & & & & & & 0 & -y & \alpha^{-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & -y^{N-k} & & & & & & \end{array} \right\|$$

Zij $M_{ik}$ de minor (d.w.z. onderdeterminant met teken) van het element uit de $i^{de}$ rij en $k^{de}$ kolom van $\Delta_N^{(k)}$. Deze is gelijk aan de overeenkomstige minor van $\Delta_N$ (we veronderstellen nog steeds $k \neq N$). Voor $2 \leq i \leq k-1$ bevat de matrix van $M_{ik}$ een kolom nullen en is dus $M_{ik} = 0$. Hetzelfde geldt voor $k+2 \leq i \leq N$. Verder ziet men gemakkelijk in, dat de volgende formules gelden.

(76) $M_{1,k} = \alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} x^{k-1} y^{-1}(x-y)$ voor $k = 1,2,\ldots,N-1$

$= \alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} x\, y^{-1}$ voor $k = 1$

(77) $M_{k,k} = \alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1}$ voor $k = 1,2,\ldots,N-1$

$= \alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} x\, y^{-1}$ voor $k = 1$ en $k = N$

(78) $M_{k+1,k} = -\alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} y^{-1}$ voor $k = 1,2,\ldots,N-1$

Het $k^{de}$ element in de eerste rij van $\Delta_N$ is gelijk aan $\alpha^{-1} x^{-k+1}$.
Dus hebben we

$$\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{N} x^{-k+1} M_{1,k} = |\Delta_N| = \alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1}$$

en wegens (76) volgt nu

(79) $M_{1,N} = -\alpha^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{N-1} x^{N-1} y^{-1}\left\{x-\alpha y + (N-2)(x-y)\right\}$

Daar de matrix $\Delta_N$ symmetrisch is t.o.v. de nevendiagonaal, geldt

$$M_{i,k} = M_{N-k+1,\,N-i+1}$$

en zijn alle minoren van $\Delta_N$ nu bekend. In verband met de oplossing van het stelsel (70) interesseert ons vooral de inverse matrix $(\Delta_N)^{-1}$ van $\Delta_N$, welke de gespiegelde is van de matrix $\left(\frac{M_{i,k}}{|\Delta_N|}\right)$. Wegens de formules (75) tot (79) heeft deze de gedaante

$$
\Delta_N^{-1} = \left\| \begin{matrix}
x y^{-1} & \cdots & -y^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
x y^{-1}(x-y) & & 1 & -y^{-1} & & & \vdots \\
x^2 y^{-1}(x-y) & & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
x^{N-2} y^{-1}(x-y) & & & & & 1 & -y^{-1} \\
-x^{N-1} y^{-1}\{x-\alpha y+(N-2)(x-y)\}, & x^{N-2} y^{-1}(x-y), & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & , x y^{-1}
\end{matrix} \right\|
$$

De oplossing van het stelsel (70) wordt dus

$$A_0 = x y^{-1} \mathfrak{F}_a - y^{-1} \mathfrak{F}_{a+1}$$

(80)
$$A_k = x^k y^{-1}(x-y)\mathfrak{F}_a + \mathfrak{F}_{a+k} - y^{-1} \mathfrak{F}_{a+k-1} \quad (k= 1,2,\ldots,N-2)$$

$$A_{N-1} = -x^{N-1} y^{-1}\{x-\alpha y+(N-2)(x-y)\}\mathfrak{F}_a + x y^{-1} \mathfrak{F}_{a+N-1} + \sum_{h=1}^{N-2} x^{N-h-1} y^{-1}(x-y)\, \mathfrak{F}_{a+h}$$

Hiermee is het gestelde probleem in principe opgelost; $A_h(1,1)$ is de kans, dat op de component $\mathfrak{R}_h$ een catastrofe optreedt. Gebruik makend van (71) en (74) vinden we deze kans als een eenvoudige uitdrukking in de absoluut kleinste wortel $\eta_1$ van

$$(1-\eta)^r \eta = p^r q$$

(voor $q \leq \frac{1}{r+1}$ geldt weer $\eta_1 = q$).

Opm. Uit (80) volgt, dat voor $h < N-1$ de randontwikkeling $A_h$ ( bij de randcomponent $\mathfrak{R}_h$ bestaande uit alle bereikbare roosterpunten op de lijn $y = a + h$) en dus ook de kans, dat op $\mathfrak{R}_h$ een catastrofe optreedt, onafhankelijk is van $N$ . Dit is achteraf ook duidelijk. Immers, als $h < N-1$ , dan behoort de lijn $y = a+h+1$ tot de rand, en wanneer $W$ in een punt van deze lijn arriveert, dan treedt onherroepelijk een catastrofe op. Dit betekent, dat $W$ vanaf een punt $(n,y)$ met $y \geq a+h+2$ onmogelijk de lijn $y = a+h$ kan bereiken, daar $W$ in benedenwaartse richting alleen stappen ter lengte 1 kan maken. Het al of niet aanwezig zijn van randlijnen $y = a+k$ met $k \geq h+2$ is dus onverschillig wat betreft de kans op een catastrofe in een punt van de lijn $y = a + h$.

Als $\eta_1$ de absoluut kleinste wortel is van

$$(1-\eta)^r \eta = (pu)^r q u$$

dan geldt voor een in $\eta = 0$ reguliere functie $f(\eta)$ de formule

$$(81) \quad f(\eta_1) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p^r q u^{r+1})^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[ f'(\eta) \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{rn} \right]_{\eta=0}$$

welke analoog met (61) direct volgt uit de stelling van Lagrange-Bürmann.

Hieruit volgt voor $l \geq 1$

$$(82) \quad \eta_1^l = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{(r+1)n - l - 1}{n-l} (p^r q u^{r+1})^n$$

Verder hebben we wegens (10) en (19)

$$(83) \quad K_y(u,1) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j_0 + k_0 + i(r+1)}{k_0 + i} u^{j_0 + k_0 + i(r+1)}$$

waarin voor $y \geq 0$ geldt $k_0 = \left\{ \frac{y}{r} \right\}$ en $j_0 = rk_0 - y$. Dus wegens (74), (82) en (83) geeft (80) de functie $A_k(u,1)$ als een som van bekende ontwikkelingen en producten van twee bekende ontwikkelingen. Gebruik makend van (71), (80) en (81) kan men zelfs $A_k(u,1)$ verkrijgen als de som van een aantal bekende ontwikkelingen.