ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

VOORDRACHTEN OVER NEUTRIXREKENING

door

Prof. dr. J. G. van der Corput

deel I

ZW

1961

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

I. Geneutraliseerde sommen

In de maanden april, mei en juni 1961 heb ik op tien middagen op het Mathematisch Centrum te Amsterdam voordrachten gehouden over neutrixrekening. Deze methode steunt op het denkbeeld dat onder algemene voorwaarden termen van een bepaalde soort mogen worden verwaarloosd. Dit denkbeeld is niet nieuw. We doen in de wiskunde nauwelijks iets anders. Cauchy verwaarloost alle door ξ^2+1 deelbare veeltermen in ξ met gehele coefficienten. Hij schrijft bijv. $\xi^3=-\xi$, omdat het verschil $\xi^3+\xi$ deelbaar is door ξ^2+1. Om de lezer van die verwaarlozing op de hoogte te stellen, vervangen wij de letter ξ door een bepaald symbool en daarvoor wordt de letter i gekozen, zodat $i^3=-i$. Op die manier rechtvaardigt Cauchy de invoering van de complexe getallen. De klasse ingevoerd door Cauchy die bestaat uit de door ξ^2+1 deelbare veeltermen met gehele coefficienten is een additieve groep.
Dit betekent: twee willekeurige tot de klasse behorende veeltermen hebben de eigenschap dat hun som en ook hun verschil tot de klasse behoren. De klasse voldoet ook aan de volgende voorwaarde: als ze een functie bevat die gelijk is aan een constante γ, dan is $\gamma=0$. Immers iedere door ξ^2+1 deelbare veelterm van de graad 0 is identiek nul. Een additieve groep die deze voorwaarde vervult, is een neutrix en het slagen van de theorie der complexe getallen is te danken aan het feit dat de door Cauchy ingevoerde klasse een neutrix is.
In de analyse werken we met een groot aantal belangrijke begrippen, waaraan een neutrix ten grondslag ligt, zoals limietbegrip, convergentie, divergentie, distributies van Schwartz, enz. De neutrixrekening dient dan ook ter vereenvoudiging (omdat in de redenering en in de berekening een groot aantal termen worden verwaarloosd), ter unificatie (omdat een groot aantal wijduiteenlopende onderwerpen tot één enkele theorie verenigd worden) en ter generalisatie (omdat met behulp van neutrices tal van nieuwe mathematische objecten worden geconstrueerd).

Voor de algemene definitie van een neutrix voeren we een willekeurige niet-lege verzameling Λ in, die een domein genoemd wordt. Verder beschouwen we een additieve groep $\bar{N}$ gevormd door functies $v(\xi)$ gedefinieerd voor elk element ξ van het gegeven domein. Het is mogelijk dat dit bestaanbare of complexe functies zijn, maar dat is niet nodig. Wij mogen ook abstracte functies toelaten, die uitsluitend waarden aannemen welke tot de een of andere additieve groep behoren, zodat voor die functies steeds de optelling en de aftrekking mogelijk zijn met de bekende rekenregels.

<u>De additieve groep $\overline{N}$ heet een neutrix indien ze aan de volgende voorwaarde voldoet: iedere tot $\overline{N}$ behorende functie, die voor elk element ξ van het gegeven domein gelijk is aan een constante, is identiek nul.</u>

De functies behorende tot een neutrix $\overline{N}$ heten in $\overline{N}$ verwaarloosbaar.

Waar geen misverstand te duchten is, schrijven we kortweg N inplaats van $\overline{N}$.

Een zeer bekende neutrix is de neutrix U welke gevormd wordt door de functies $\varepsilon(\xi)$ ($\xi = 0, 1, \ldots$) die voor $\xi \to \infty$ tot nul nadert. Dat deze functies een neutrix vormen, is evident, omdat een constante die tot nul nadert identiek nul is. Het domein van deze neutrix wordt gevormd door de getallen 0, 1, ... Indien $u_1 + u_2 + \ldots$ een convergente reeks is, dan is voor elk getal $\xi \geqq 0$

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\xi} u_n = s + \varepsilon(\xi),$$

waarin s de som van de oneindige reeks voorstelt en waarin $\varepsilon(\xi)$ voor $\xi \to \infty$ tot nul nadert en dus tot de neutrix U behoort. Die restterm $\varepsilon(\xi)$ wordt verwaarloosd, zodat het rechterlid van (1) overgaat in s, maar om de argeloze lezer van die verwaarlozing op de hoogte te stellen vervangen wij in het linkerlid ξ door een nieuw symbool. Daarvoor is het teken ∞ gekozen, zodat we krijgen

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

De formules (1) en (2) zijn gelijkwaardig.

Voor ieder bestaanbaar getal a dat niet gelijk is aan een veelvoud van 2π geldt de identiteit

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\xi} \sin na = \tfrac{1}{2} \cot \frac{a}{2} + \tfrac{1}{2} \sin \xi a - \tfrac{1}{2} \left(\cot \frac{a}{2}\right) \cos \xi a \qquad (\xi = 0, 1, \ldots);$$

immers voor $\xi = 0$ zijn beide leden gelijk aan nul en geldt de formule voor ξ, dan geldt ze ook voor $\xi + 1$. De functies van ξ ($\xi = 0, 1, \ldots$) van de vorm

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2} c \left(\sin \xi a - \left(\cot \frac{a}{2}\right) \cos \xi a\right),$$

waarin de coefficienten c willekeurige gehele constante getallen voorstellen, vormen een neutrix F. Inderdaad, als (4) gelijk is aan een van ξ onafhankelijk getal γ, dan is $c\sum_{n=1}^{\xi}$ sin na volgens de identiteit onafhankelijk van ξ, dus c sin na = 0 (n=1,2,...) Indien c=0, dan is γ zeker nul. Indien c$\neq$0, dan is sin na =0, dus sin a =0, dus cot $\frac{a}{2}$ = 0, dus γ=0, zodat F inderdaad een neutrix is. Evenals in de theorie van de convergente reeksen verwaarlozen we de tot F behorende term $\frac{1}{2}$ sin ξ a $-\frac{1}{2}$ (cot $\frac{a}{2}$)cos ξ a, zodat het rechterlid van (3) overgaat in $\frac{1}{2}$ cot $\frac{a}{2}$ en om de lezer van die verwaarlozing op de hoogte te stellen, vervangen wij in het linkerlid ξ door een nieuw symbool. Daarvoor kiezen we de letter F die ook de neutrix aanduidt, zodat we krijgen

$$(5)\qquad \sum_{n=1}^{F} \sin na = \tfrac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\ .$$

De formules (3) en (5) zijn gelijkwaardig. Aangezien (3) correct is, kan (5) nooit tot een tegenspraak voeren. De tegenwerping, dat het linkerlid van (5) de som "moet" voorstellen, die men verkrijgt als n de rij 1.2,... tot F (incl.) doorloopt, heeft geen zin. Het is waar dat n de neutrix F nooit bereikt, maar hetzelfde bezwaar zou in (2) gelden, waar n nooit het oneindige bereikt. Formule (5) is slechts een andere schrijfwijze voor (3).

Het linkerlid van (5) stelt een geneutraliseerde som voor; een geneutraliseerde uitdrukking is namelijk een uitdrukking, waarin minstens één neutrix voorkomt.

Omdat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}$ sin na convergeert behalve als a een veelvoud van π is, hebben wij de neutrix F ingevoerd om de schadelijke invloed van het oneindige te neutraliseren. In elke uitdrukking waar een singulariteit een zodanige storende invloed uitoefent dat die uitdrukking zinloos wordt, voeren wij een geschikte neutrix in om die invloed te neutraliseren. Aan dit feit danken de neutrices hun naam.

Hetzelfde denkbeeld kan worden toegepast bij elke reeks $u_1+u_2+\dots$ die de eigenschap bezit dat voor elk geheel getal $\xi \geq 0$

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\xi} u_n = \gamma + v(\xi)\ ,$$

waarin γ onafhankelijk van ξ is en waarin $v(\xi)$ (ξ=0,1,...) verwaarloosbaar is in een gegeven neutrix N. Dan wordt de term $v(\xi)$ verwaarloosd, zodat het rechterlid overgaat in γ, doch, ter waarschuwing, wordt in het linkerlid ξ door N vervangen, zodat we krijgen

$$(7)\qquad \sum_{n=1}^{N} u_n = \gamma\ .$$

De formules (6) en (7) zijn gelijkwaardig.

Als de reeks $u_1+u_2+\ldots$ en de neutrix N gegeven zijn, dan is γ ondubbelzinnig bepaald, want als voor $\xi=0,1\ldots$

$$(\ ) \qquad \sum_{n=1}^{\xi} u_n = \gamma_1 + v_1(\xi),$$

waarin γ_1 onafhankelijk van ξ is en waarin $v_1(\xi)$ $(\xi=0,1,\ldots)$ verwaarloosbaar in N is, dan is de constante $\gamma_1 - \gamma$ gelijk aan het verschil $v(\xi) - v_1(\xi)$ van twee in N verwaarloosbare functies, zodat deze constante zelf in N verwaarloosbaar en dus gelijk aan nul is, dus $\gamma = \gamma_1$.

Bij een convergente reeks $u_1+u_2+\ldots$ geldt formule (1) waarin $\varepsilon(\xi)$ tot de neutrix U behoort, zodat wij inplaats van(2) ook kunnen schrijven

$$\sum_{n=1}^{U} u_n = s.$$

De formule (5) mag niet termsgewijs naar a gedifferentieerd worden, m.a.w. de formule

$$\sum_{n=1}^{F} n \cos na = \tfrac{1}{2} \frac{d}{da} \cot \frac{a}{2}$$

is onjuist. Immers de identiteit (3) geeft voor elk geheel getal 0

$$(10) \quad \sum_{n=1}^{\xi} n \cos na = \tfrac{1}{2} \cot \frac{a}{2} + \tfrac{1}{2} \frac{d}{da} (\sin \xi a - (\cot \frac{a}{2}) \cos \xi a),$$

maar de laatste term is niet verwaarloosbaar in F. Dat komt omdat de neutrix F te mager is. De algemene tendentie in de neutrix calculus moet zijn de neutrices zo uitgebreid mogelijk te kiezen. In verband hiermede leid ik nu een stelling af, die een zeer uitgebreide neutrix levert. Een lineaire combinatie van functies $f_1(\xi),\ldots, f_n(\xi)$ is een som van de vorm $c_1f_1(\xi)+\ldots+c_nf_n(\xi)$, met coefficienten c die onafhankelijk van ξ zijn.

Indien we de identiteit (3) schrijven in de gedaante

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\xi} \sin na = \tfrac{1}{2} \sin \xi a + (\cot \frac{a}{2}) \sin^2 \tfrac{1}{2} \xi a \quad (\xi=0,1,\ldots),$$

dan ligt het voor de hand de neutrix G in te voeren die gevormd wordt door de functies van ξ van de vorm

$$c\,(\tfrac{1}{2} \sin \xi a + (\cot \frac{a}{2}) \sin^2 \tfrac{1}{2} \xi a \ (\xi=0,1,\ldots),$$

waarin de coefficienten c willekeurige gehele constante getallen voorstellen. Deze neutrix geeft

$$(12) \qquad \sum_{n=1}^{G} \sin na = 0.$$

De formules (11) en (12) zijn niet strijdig. Verschillende neutrices kunnen verschillende eigenschappen bezitten.

Stelling 1: Zij ψ een additieve groep gevormd door begrensde functies van ξ ($\xi = 0,1,\ldots$) die, afgezien van de functie welke identiek nul is, geen van alle voor $\xi \to \infty$ tot een eindige limiet naderen. Zij ϕ een verzameling gevormd door functies van ξ ($\xi = 0,1,\ldots$) zodanig dat ϕ de functie bevat die identiek gelijk is aan 1 en dat de verhouding van elk paar tot ϕ behorende functies voor $\xi \to \infty$ of wel tot nul nadert of wel in absolute waarde onbegrensd aangroeit.

Beschouw alle functies van de vorm

$$\mu(\xi) = \sum_{h=1}^{m} \chi_h(\xi)\ \psi_h(\xi) + \varepsilon(\xi) \qquad (\xi = 0,1,\ldots),$$

waarin $\varepsilon(\xi) \to 0$ voor $\xi \to \infty$, waarin de functies $\psi_h(\xi)$ tot ψ behoren en waarin elke functie $\chi_h(\xi)$ gelijk is aan een voor $\xi \to \infty$ tot nul naderende functie, vermeerderd met een lineaire combinatie van functies die tot φ behoren. Die functies $\mu(\xi)$ vormen een neutrix M .

Het bewijs verloopt als volgt. Dat de functies $\mu(\xi)$ een additieve groep vormen is duidelijk, zodat het voldoende is te bewijzen: is $\mu(\xi) = \gamma$, waarin γ onafhankelijk van ξ is, dan is $\gamma = 0$. Omdat iedere functie $\chi_h(\xi)$, afgezien van een tot 0 naderende functie, gelijk is aan een lineaire combinatie van tot ϕ behorende functies en omdat verder ψ een additieve groep is, kunnen we $\mu(\xi)$ schrijven in de vorm

$$\sum_{h=1}^{n} a_h\ \varphi_h(\xi)\ \psi_h^*(\xi) + \delta(\xi) = \gamma \qquad (\xi = 0,1,\ldots),$$

waarin $\delta(\xi) \to 0$ voor $\xi \to \infty$, waarin $\varphi_h(\xi)$ tot φ en $\psi_h^*(\xi)$ tot ψ behoren, terwijl de getallen a_h constanten $\neq 0$ zijn. Indien $n = 0$, dan is $\gamma = \delta(\xi)$, dus $\gamma = 0$. Indien $n \geq 1$, dan kunnen we de som $\sum_{h=1}^{n}$ zó rangschikken dat $\frac{\varphi_h(\xi)}{\varphi_{h+1}(\xi)}$ $(1 \leq h < n)$ voor $\xi \to \infty$ tot nul nadert. Volgens veronderstelling heeft men $\frac{\varphi_n(\xi)}{1} \to 0$ of $\frac{|\varphi_n(\xi)|}{1} \to \infty$ of $\varphi_n(\xi) = 1$. Indien $\varphi_n(\xi) \to 0$, dan nadert $\varphi_h(\xi)$ $(1 \leq h \leq n)$ tot nul, dus $\gamma = 0$.
Indien $|\varphi_n(\xi)|$ onbegrensd zou aangroeien, dan zou

$$\psi^*(\xi) = \frac{\gamma - \delta(\xi) - \sum_{h=1}^{n-1} a_h \varphi_h(\xi)\ \psi_h^*(\xi)}{a_n\ \varphi_n(\xi)} \tag{13}$$

tot nul naderen, in strijd met de veronderstelling dat $\psi_n^*(\xi)$ niet tot een eindige limiet nadert. Tenslotte zou in het geval $\varphi_n(\xi) = 1$ het in (13) genoemde getal $\psi_n^*(\xi)$ tot $\frac{\gamma}{a_n}$ naderen, in strijd met de veronderstelling dat $\psi_n^*(\xi)$ niet tot een limiet nadert. Dit voltooit het bewijs.

Opmerking: In deze opmerking definieer ik een bepaalde neutrix M door voor de verzamelingen φ en ψ een bepaalde keuze te doen. Alle lineaire combinaties van functies van de vorm sin ξa en cos ξ a, waarin de coefficienten a willekeurige bestaanbare getallen voorstellen die niet gelijk zijn aan een veelvoud van 2π, vormen een additieve groep ψ met de genoemde eigenschap.

De verzameling gevormd door alle niet tot nul naderende functies die voor voldoend grote gehele ξ de vorm

$$(14)\qquad \varphi(\xi) = \xi^{\alpha_0} (l_1\xi)^{\alpha_1} \dots (l_r\xi)^{\alpha_r}$$

bezitten, waarin $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ reële getallen voorstellen, vormen een verzameling φ met de genoemde eigenschap ; hierin is $l_1\xi = \log\xi$ en $l_{h+1}\xi = \log(l_h\xi)$ $(h \geq 1)$.

Iedere tot deze verzameling ϕ behorende functie $\varphi(\xi)$ heeft de eigenschap dat voor elk geheel getal $h \geq 0$ $\Delta^h \varphi(\xi)$, afgezien van een tot nul naderende term, geschreven kan worden als een lineaire combinatie van functies die tot φ behoren. Om dit aan te tonen zullen we eerst voor iedere α, voor iedere gehele $r \geq 0$ en voor voldoend grote $|\xi|$ bewijzen dat

$$(15)\qquad (l_r(\xi+1))^{\alpha} (l_r\xi)^{-\alpha} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \xi^{-h} p_h\left(\frac{1}{l_1\xi}, \dots, \frac{1}{l_r\xi}\right),$$

waarin $p_h(u_1, \dots u_r)$ een veelterm in $u_1, \dots, u_r$ voorstelt die in elke dezer veranderlijken een graad $\leq h$ bezit; hierin is $l_0\xi = \xi$. Formule (15) is evident voor $r=0$, wegens

$$(\xi + 1)^{\alpha} \xi^{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^{\alpha} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\alpha}{h} \xi^{-h}.$$

Ik mag dus aannemen dat $r \geq 1$ is en dat (15) met r vervangen door r-1 reeds bewezen is. Deze inductieveronderstelling, toegepast met $\alpha = 1$, geeft dus

$$l_{r-1}(\xi+1)\,(\log_{r-1}\xi)^{-1} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \xi^{-h} q_h\left(\frac{1}{l_1\xi}, \dots, \frac{1}{l_{r-1}\xi}\right),$$

waarin $q_h(u_1, \dots, u_{r-1})$ een veelterm in $u_1, \dots, u_{r-1}$ voorstelt die in elke dezer veranderlijken een graad $\leq h$ bezit. Door aan weerskanten de logarithme te nemen, vinden we

$$l_r(\xi+1) - l_r\xi = \log\left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} \xi^{-h} q_h\left(\frac{1}{l_1\xi}, \dots, \frac{1}{l_{r-1}\xi}\right)\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \xi^{-h} s_h\left(\frac{1}{l_1\xi}, \dots, \frac{1}{l_{r-1}\xi}\right),$$

waarin $s_h(u_1, \dots, u_{r-1})$ een veelterm is in $u_1, \dots, u_{r-1}$ die in elk dezer veranderlijken een graad $\leq$ h bezit. Dus

$$\log_r(\xi+1)\cdot(l_r\xi)^{-1} = 1+\sum_{h=1}^{\infty}\xi^{-h}\frac{1}{l_r\xi}s_h\left(\frac{1}{l_1\xi},\ldots,\frac{1}{l_{r-1}\xi}\right)$$

en door beide leden in de macht α te verheffen vinden we de gevraagde betrekking (15). Door deze formule toe te passen met $r = 0,1,\ldots,r$ en met $\alpha = \alpha_0, \alpha_1,\ldots,\alpha_r$ en door de aldus verkregen formules met elkaar te vermenigvuldigen, zien we dat de in (14) genoemde tot ϕ behorende functie $\varphi(\xi)$ de eigenschap

$$\varphi(\xi+1)\,\varphi^{-1}(\xi) = 1+\sum_{h=1}^{\infty}\xi^{-h}t_h\left(\frac{1}{l_1\xi},\ldots,\frac{1}{l_r\xi}\right)$$

bezit, waarin $t_1(u_1,\ldots,u_r)$ een veelterm in $u_1,\ldots,u_r$ voorstelt die in elk dezer veranderlijken een graad $\leq$ h bezit. Dus

$$\Delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi+1)-\varphi(\xi) = \varphi(\xi)\sum_{h=1}^{\infty}\xi^{-h}t_h\left(\frac{1}{l_1\xi},\ldots,\frac{1}{l_r\xi}\right)$$

en dit antwoordt is, afgezien van een voor $\xi\to\infty$ tot nul naderende term, gelijk aan een lineaire combinatie $\lambda(\xi)$ van functies die tot φ behoren. Dan is $\Delta^2\varphi(\xi)$, afgezien van een tot nul naderende term, gelijk aan $\Delta\lambda(\xi)$, dus afgezien van een tot nul naderende term, gelijk aan een lineaire combinatie van functies die tot φ behoren, zo doorgaande vinden we dat $\Delta^h\varphi(x)$ voor elk geheel getal $h\geq 0$ de verlangde eingenschap bezit.

<u>Voorbeeld</u>: De in de voorgaande opmerking ingevoerde neutrix M vervult voor elk bestaanbaar getal a dat geen veelvoud van 2π is en voor elk geheel getal $h\geq 0$ de betrekkingen

$$(16)\quad \sum_{n=1}^{M} n^{2h}\sin na = (-)^h\tfrac12\left(\frac{d}{da}\right)^{2h}\cot\frac{a}{2};\quad \sum_{n=1}^{M} n^{2h+1}\sin na = 0;$$

$$(17)\quad \sum_{n=1}^{M} n^{2h+1}\cos na = (-)^h\tfrac12\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\cot\frac{a}{2};\quad \sum_{n=1}^{M} n^{2h+2}\cos na = 0,$$

$$(18)\quad \text{terwijl}\quad \sum_{n=1}^{M}\cos na = \tfrac12$$

Inderdaad, uit de identiteit (3) en de overeenkomstige identiteit

$$(19)\quad \sum_{n=1}^{\xi}\cos na = \tfrac12+\tfrac12\cos\xi a-\tfrac12\left(\cot\frac{a}{2}\right)\sin\xi a$$

volgt voor ieder geheel getal $h\geq 0$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h}\sin na = (-)^h\tfrac12\left(\frac{d}{da}\right)^{2h}\cot\frac{a}{2} +$$
$$+(-)^h\tfrac12\left(\frac{d}{da}\right)^{2h}\left\{\sin\xi a-\left(\cot\frac{a}{2}\right)\cos\xi a\right\};$$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+1}\cos na = (-)^h \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\cot\frac{a}{2} +$$

$$+ (-)^h\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\left\{\sin\xi a-\left(\cot\frac{a}{2}\right)\cos\xi a\right\};$$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+1}\sin na = (-)^{h+1}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+1}\left\{\cos\xi a - \left(\cot\frac{a}{2}\right)\cos\xi a\right\};$$

$$\sum_{n=1}^{\xi} n^{2h+2}\cos na = (-)^{h+1}\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h+2}\left\{\cos\xi a-\left(\cot\frac{a}{2}\right)\sin\xi a\right\}.$$

De laatste term in elk van deze vier betrekkingen is gelijk aan een veelvoud in ξ maal sin ξ a vermeerderd met een veelvoud in ξ maal cos ξ a en derhalve verwaarloosbaar in M . Dit geeft (16) en (17), terwijl (18) uit (19) volgt.

<u>Stelling 2:</u> <u>Zij a een bestaanbaar getal dat geen veelvoud van 2π is. Zij $\chi(\xi)$ een gegeven functie van ξ (ξ = 0,1,...). Zij k een geheel getal</u> ≥ 0. <u>Zij N een neutrix die elke functie</u> $ce^{i\xi a}\Delta^h\chi(\xi)$ $(0\leq h<k)$ <u>bevat, waarin de coefficienten</u> c <u>willekeurige complexe getallen voorstellen. Dan is</u>

$$(20)\quad \sum_{n=1}^{N}\chi(n)e^{ina} = -\sum_{h=0}^{k-1}\left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{h+1}\Delta^h\chi(1) + \left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{k}\sum_{n=1}^{N}(\Delta^k\chi(n))e^{ina},$$

<u>indien de laatste geneutraliseerde som bestaat.</u>

Het bewijs verloopt als volgt. De functie

$$g(n)=\frac{e^{i(n+1)a}}{e^{ia}-1}$$

voldoet aan de volgende identiteit, waarin ξ een willekeurig geheel getal ≥ 0 voorstelt:

$$\sum_{n=1}^{\xi}\varphi(n)e^{ina} = \sum_{n=1}^{\xi}\varphi(n)\,(g(n)-g(n-1))$$

$$=\varphi(\xi)\,g(\xi)-\varphi(1)\,g(0)+\sum_{n=1}^{\xi}(\Delta\varphi(n))\,g(n)$$

$$=\varphi(\xi)\frac{e^{i(\xi+1)a}}{e^{ia}-1}-\varphi(1)\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}+\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\sum_{n=1}^{\xi}(\Delta\varphi(n)e^{ina}.$$

De eerste term in het rechterlid is verwaarloosbaar in M . Dus

$$\sum_{n=1}^{M}\varphi(n)e^{ina} = -\varphi(1)\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}+\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\sum_{n=1}^{M}(\Delta\varphi(n))\,e^{ina},$$

als de laatste som bestaat. Zo doorgaande vinden we de gevraagde betrekking.

Voorbeeld: Zij a een bestaanbaar getal dat een veelvoud van 2π is.
Zij voor elk voldoend groot natuurlijk getal n

$$\chi(n) = n^{\alpha} (\log n)^{\beta} (\log \log n)^{\gamma},$$

waarin α, β en γ bestaanbare getallen voorstellen met $\alpha < 4000$.
In de opmerking toegevoegd aan stelling 1 hebben we een neutrix M ingevoerd zodanig dat voor h=0,1,.... en voor iedere constante c $c(\Delta^h \chi(\xi))\, e^{i\xi a}$ verwaarloosbaar is in M. Indien formule (20) met k=4000 wordt toegepast, dan gaat de laatste in (20) voorkomende som over in

$$\sum_{n=1}^{M} (\Delta^{4000} \chi(n)) e^{ina} = \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta^{4000} \chi(n)) e^{ina},$$

aangezien $\Delta^{4000} \chi(n)$ voor $n \to \infty$ monotoon tot nul nadert. Op die manier vinden wij

$$\sum_{n=1}^{M} \chi(n) e^{ina} = - \sum_{h=0}^{3999} \left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1} \right)^{h+1} \Delta^h \chi(1) +$$

$$+ \left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1} \right)^{4000} \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta^{4000} \chi(n)) e^{ina}.$$

Op die manier hebben we voor de geneutraliseerde som die in het linkerlid voorkomt een convergente uitdrukking gevonden, maar in de praktijk is in tal van gevallen de in het linkerlid voorkomende schrijfwijze verre te verkiezen.

De neutrix calculus voert in sommige gevallen tot convergente ontwikkelingen, in andere gevallen tot asymptotische reeksontwikkelingen. Laat ik hier een toepassing op de asymptotiek behandelen.
In de asymptotiek voeren wij een bestaanbare of complexe onbegrensde variabele in. De taak is voor bepaalde functies van ω bij grote $|\omega|$ asymptotische reeksontwikkelingen $\sum_{r=1}^{\infty}{}' u_r(\omega)$ af te leiden; het symbool $\sum'$ stelt een asymptotisch convergente reeks voor. Het symbool $\backsim$ betekent: asymptotisch gelijk. "Vast" betekent: onafhankelijk van ω.

<u>Stelling 3:</u> <u>Zij a een bestaanbaar getal dat geen veelvoud van 2π is. Stel $\chi_r(\xi)$ (r=0,1,...) zijn gegeven functies van ω en ξ (ξ =0,1,...). Zij N een neutrix die elke van ω en ξ (ξ =0,1,...) afhankelijke functie bevat welke bij gegeven ω voor $\xi \to \infty$ tot nul nadert en die bovendien alle functies $\gamma e^{i\xi a} \Delta^h \chi_r(\xi)$ ($h \geq 0, r \geq 0$) bevat, waarin de coefficienten γ wel van ω maar niet van ξ afhangen.</u>

Stel dat bij elk vast positief getal q een vast geheel getal $m_q \geq 0$ gevonden kan worden zódanig dat bij elk vast geheel getal $m \geq m_q$ een vast geheel getal $k \geq 0$ en twee vaste positieve getallen c en δ bestaan met de eigenschappen

$$(21)\quad \left|\chi_o(n) - \sum_{r=1}^{m} \chi_r(n)\right| \leq c\,|\omega|^{-q} \qquad (1 \leq n \leq k)$$

en

$$(22)\quad \left|\Delta^k\left(\chi_o(n) - \sum_{r=1}^{m} \chi_r(n)\right)\right| \leq c\, n^{-1-\delta}|\omega|^{-q} \qquad (n \geq 1).$$

Dan is

$$\sum_{n=1}^{N} \chi_o(n)e^{ina} \backsim \sum_{r=1}^{\infty}{}' \sum_{n=1}^{N} \chi_r(n)e^{ina}.$$

Het bewijs is eenvoudig. Identiteit (20), toegepast met

$$\chi(n) = \chi_o(n) - \sum_{r=1}^{m} \chi_r(n)$$

geeft

$$(23)\quad \sum_{n=1}^{N}\left(\chi_o(n) - \sum_{r=1}^{m}\chi_r(n)\right)e^{ina} = -\sum_{h=0}^{k-1}\left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{h+1}\left\{\Delta^h\chi_o(1) - \sum_{r=1}^{m}\Delta^h\chi_r(1)\right\}$$

$$+\left(\frac{e^{ia}}{e^{ia}-1}\right)^{k}\sum_{n=1}^{N}\left(\Delta^k\chi_o(n) - \sum_{r=1}^{m}\Delta^k\chi_r(n)\right)e^{ina},$$

aangenomen dat de laatste geneutraliseerde som bestaat. Dit is inderdaad het geval, omdat deze som wegens (22) in een convergente reeks overgaat als N door ∞ vervangen wordt. De geneutraliseerde som is dus gelijk aan de som van de convergente reeks en derhalve in absolute waarde

$$\leq c\,|\omega|^{-q}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} \leq c\,|\omega|^{-q}\left(1 + \int_1^{\infty} u^{-1-\delta}\,du\right) = c\left(1+\frac{1}{\delta}\right)|\omega|^{-q}.$$

Volgens (21) is voor $0 \leq h < k$

$$\Delta^h\chi_o(1) - \sum_{r=1}^{m}\Delta^h\chi_r(1) = \sum_{n=0}^{h}(-)^n\binom{h}{n}\left\{\chi_o(h+1-n) - \sum_{r=1}^{m}\chi_r(h+1-n)\right\}$$

in absolute waarde $\leq c\,|\omega|^{-q}\sum_{n=0}^{h}\binom{h}{n} = 2^h c\,|\omega|^{-q}$. Dus voor iedere vaste gehele $m \geq m_q$ is het linkerlid van (23) in absolute waarde $\leq c_1\,|\omega|^{-q}$ bij geschikt gekozen vaste c_1. Dit geeft het verlangde resultaat.

Voorbeeld 1: Voor iedere vaste λ met Re $\lambda < 0$, voor ieder vast bestaanbaar getal a dat geen veelvoud van 2π is en voor iedere ω met grote $|\omega|$ en met $-\pi+\varepsilon < \arg\omega < \pi-\varepsilon$, waarin ε een vast positief getal $<\pi$ voorstelt, geldt de betrekking

$$(24)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\omega+n^2)^{\lambda}\sin na \sim \tfrac{1}{2}\sum_{h=0}^{\infty}{}'\,(-)^h\binom{\lambda}{h}\omega^{\lambda-h}\left(\frac{d}{da}\right)^{2h}\cot\frac{a}{2}\,.$$

Om dit aan te tonen is het voldoende te bewijzen dat de voorwaarden van stelling 3 voor

$$\chi_0(n)=(\omega+n^2)^{\lambda}\ ;\ \chi_r(n)=\binom{\lambda}{r-1}\omega^{\lambda-r+1}\,n^{2r-2}\quad(r\geq 1)$$

vervuld zijn, want dan heeft de neutrix M , ingevoerd in de aan stelling 1 toegevoegde opmerking, de eigenschap dat het linkerlid van (24) gelijk is aan

$$\sum_{n=1}^{M}(\omega+n^2)^{\lambda}\sin na \sim \sum_{r=1}^{\infty}{}'\binom{\lambda}{r-1}\omega^{\lambda-r+1}\sum_{n=1}^{M}n^{2r-2}\sin na,$$

zodat de bewering uit (16) volgt.

Voor elk vast geheel getal $k\geq 0$ en voor $x\geq 0$ is $\chi_0^{(k)}(x)$ gelijk aan $(\omega+x^2)^{\lambda-k}$ vermenigvuldigd met een veelterm in ω en x zodanig dat in iedere term van deze veelterm de exponent van x vermeerderd met de dubbele exponent van ω gelijk is aan k.
Dus $\chi_0^{(k)}(x)$ heeft hoogstens dezelfde orde van grootte als $|(\omega+x^2)^{\lambda-k}|\,(|\omega|^{\frac{1}{2}k}+x^k)$.

Voor elke k-maal continu differentieerbare functie f(x) is

$$\Delta^k f(x)=\int_x^{x+1}\int_{t_1}^{t_1+1}\cdots\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1}+1} f^{(k)}(t_k)\,dt_k\ldots dt_1,$$

dus

$$(25)\qquad |\Delta^k f(x)| \leq \max|f^{(k)}(t)|\qquad x\leq t\leq x+k\ ,$$

Derhalve heeft $\Delta^k\chi_0(n)$ hoogstens dezelfde orde van grootte als $|(\omega+n^2)^{\lambda-k}|\,(|\omega|^{\frac{1}{2}k}+n^k)$ en is, bij geschikt gekozen vaste c_1, in absolute waarde

$$\begin{cases}\leq c_1|\omega|^{\mathrm{Re}\,\lambda-\frac{1}{2}k}\leq c_1\,n^{-1-\delta}\,|\omega|^{-q} & \text{voor } 0\leq n\leq|\omega|^{\frac{1}{2}}\\ \leq c_1 n^{2\,\mathrm{Re}\,\lambda-k}\leq c_1\,n^{-1-\delta}|\omega|^{-q} & \text{voor } n\geq|\omega|^{\frac{1}{2}},\end{cases}$$

indien $k \geq 2q + 1 + \delta + 2 \operatorname{Re} \lambda$ gekozen wordt. Kiezen we

$$k = \max\,(2q + 1 + \delta + 2 \operatorname{Re} \lambda\,,\ 2m-1),$$

dan is $\Delta^k \chi_r(n) = 0$ voor $1 \leq r \leq m$, zodat (22) met $c = c_1$ geldt. Voor iedere vaste gehele $m \geq q + \operatorname{Re} \lambda$ geldt ongelijkheid (21) bij geschikt gekozen vaste c, omdat het linkerlid hoogstens dezelfde orde van grootte bezit als $|\omega^{\lambda}| \cdot \left(\frac{k^2}{\omega}\right)^m$. Dit voltooit het bewijs.

Voorbeeld 2: Indien $-\pi + \varepsilon < \arg \omega < \pi - \varepsilon$, waarin ε een vast positief getal $< \pi$ voorstelt, dan is voor grote $|\omega|$ en voor ieder vast bestaanbaar getal dat geen veelvoud van 2π is

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\omega + n^2)}{\omega + n^2} \sin na \backsim \tfrac{1}{2} \sum_{h=0}^{\infty} (\log \omega + 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{h})^{-h-1} \left(\frac{d}{da}\right)^h \cot \frac{a}{2}.$$

Immers voor elk geheel getal ≥ 0 en $\leq |\omega|^{\frac{1}{3}}$ is

$$\frac{\log\,(\omega + n^2)}{\omega + n^2} \backsim \sum_{h=0}^{\infty}{}' (\log \omega + 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{h}) \frac{n^{2h}}{\omega^{h+1}} ,$$

zodat het voldoende is te bewijzen dat (22) geldt voor

$$\chi_0(n) = \frac{\log\,(\omega + n^2)}{\omega + n^2}\ ; \quad \chi_r(n) = (\log \omega + 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{r-1}) \frac{n^{2r-2}}{\omega^r} \quad (r \geq 1)$$

en dit gaat op dezelfde manier als in het voorgaande voorbeeld.

Voorbeeld 3: Indien $-\pi + \varepsilon < \arg \omega < \pi - \varepsilon$, waarin ε een vast positief getal $< \pi$ voorstelt, dan is voor grote $|\omega|$, voor iedere vaste λ met $\operatorname{Re} \lambda < 0$ en voor iedere vaste bestaanbare a die geen veelvoud van 2π is,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\omega + n^2 \sqrt{\log n})^2 \sin na \backsim \sum_{h=0}^{\infty}{}' c_h \binom{\lambda}{h} \omega^{\lambda - h},$$

waarin c_h de constante

$$c_h = \sum_{n=1}^{M} n^{2h} (\log n)^{\frac{1}{2}h} \sin na$$

voorstelt, waarin M de neutrix aanduidt die in de opmerking van stelling 1 ingevoerd is. Met behulp van stelling 2 kunnen die constanten c_h dus door convergente uitdrukkingen worden uitgedrukt.

Voor het bewijs is het voldoende aan te tonen dat de voorwaarden van stelling 3 gelden voor

$$\chi_0\,(n) = (\omega + n^2 \sqrt{\log n})^{\lambda}\ ; \quad \chi_r\,(n) = \binom{\lambda}{r-1} \omega^{\lambda - r + 1} (n^2 \sqrt{\log n})^{r-1} (r \geq 1).$$

Zij ρ een vast positief getal $< \frac{1}{2}$. Voor $n \leqq |\omega|^{\rho}$ is

$$\chi_0(n) - \sum_{r=1}^{m} \chi_r(n) = O|\omega^{\lambda}|\,(|\omega|^{-1} n^2 (\log n)^{\frac{1}{2}})^m$$

$$= O|\omega|^{\operatorname{Re}\lambda - (1-2\rho)m} (\log n)^{\frac{1}{2}m} = On^{-1-\delta}|\omega|^{-q}$$

voor voldoend grote m, zodat (21) zeker geldt voor ieder vast geheel getal $k \geqq 0$. Voor $n \leqq |\omega|^{\lambda}$ en voor iedere vaste gehele $k \geqq 0$ vinden wij dus

$$\Delta^k (\chi_0(n) - \sum_{r=1}^{m} \chi_r(n)) = O\, n^{-1-\delta}|\omega|^{-},$$

zodat (22) geldt voor $n \leqq |\omega|^{\rho}$. Beschouw nu de getallen $x \geqq |\omega|^{\rho}$. Stel $\log x = x_1$. Met behulp van het principe van volledige inductie vinden we dat $\chi_0^{(k)}(x)$ te schrijven is in de gedaante

$$(\omega + x^2 x_1^{\frac{1}{2}})^{\lambda - k} x_1^{-k} p_k(\omega, x, x_1^{\frac{1}{2}}),$$

waarin p_k een veelterm is in ω, x en $x_1^{\frac{1}{2}}$ zodanig dat in iedere term de exponent van x vermeerderd met het dubbele van de exponent van ω gelijk is aan k, terwijl de exponent van x_1 hoogstens $\frac{3}{2}k$ is. Dus

$$\chi_0^{(k)}(x) = O|(\omega + x^2 x_1^{\frac{1}{2}})^{\lambda}|\,x^{-k} x_1^{\frac{1}{2}k} = O x^{-1-\delta}|\omega|^{-q}$$

voor voldoend grote vaste k. Verder is voor $0 \leqq h < m$

$$(\tfrac{d}{dx})^k x^{2h} x_1^{\frac{1}{2}h} = x^{2h-k} x_1^{\frac{1}{2}h-k} p^*(x_1),$$

waarin $p^*(x_1)$ een veelterm in x_1 is van de graad k.
Voor $0 \leqq h \leqq m-1$ is dus

$$\omega^{\lambda-h} (\tfrac{d}{dx})^k x^{2h} x_1^{h} = O\, x^{-1-\delta}|\omega|^{-q}$$

voor voldoend grote k. Voor iedere $x \geqq |\omega|^{\rho}$ is derhalve

$$(\tfrac{d}{dx})^k (\chi_0(x) - \sum_{h=0}^{m-1} \binom{\lambda}{h} \omega^{\lambda-h} x^{2h} (\log x)^{\frac{1}{2}h}) = O x^{-1-\delta}|\omega|^{-q},$$

zodat uit (25) volgt voor elk geheel getal $n \geqq |\omega|^{\rho}$

$$\Delta^k (\chi_0(n) - \sum_{h=0}^{m-1} \binom{\lambda}{h} \omega^{\lambda-h} n^{2h} (\log n)^{\frac{1}{2}h}) = On^{-1-\delta}|\omega|^{-q}.$$

Dit voltooit het bewijs.

Deze drie voorbeelden zijn illustratief. De in de asymptotische ontwikkelingen optredende coefficienten zijn ondubbelzinnig bepaald, dus onafhankelijk van de keuze der gebruikte neutrices. De neutrix M, ingevoerd in de aan stelling 1 toegevoegde opmerking, heeft het voordeel dat ze die coefficienten op zeer eenvoudige wijze oplevert. Lang niet alle neutrices bezitten die fraaie eigenschap. Er zijn namelijk neutrices M_1 voor welke

$$\sum_{n=1}^{M_1} n^{2h} (\log n)^{\frac{1}{2}h} \sin na$$

niet de in voorbeeld 3 genoemde waarde c_h bezit. Zulke neutrices zijn dan ook hier te gebruiken en worden daarom slecht genoemd. Een neutrix wordt goed genoemd, als ze op eenvoudige manier de coefficienten in de gezochte convergente of asymptotische ontwikkelingen oplevert en als op die neutrix een rekening kan worden opgebouwd met eenvoudige rekenregels en met behoud van algemene beginsels, zoals de principes van analytische voortzetting, convergentie, limiet, ontwikkeling in convergente of asymptotische reeksen, enz. Al is de grens tussen goede en slechte neutrices niet scherp te trekken, de neutrix M, ingevoerd in de aan stelling 1 toegevoegde opmerking, is zeker goed te noemen. Eveneens de in (5) voorkomende neutrix F, ook al is die zeer mager, maar niet de neutrix G die in (12) optreedt. Daarom raad ik het gebruik van de neutrix G af. Om de ontwikkeling van de neutrixrekening mogelijk te maken, heb ik een groot aantal uitgebreide goede neutrices geconstrueerd, zodat de lezer, na lezing van deze rapporten, putten kan uit een groot reservoir, met behulp waarvan hij een aantal problemen kan oplossen die, zonder deze neutrices, niet of althans veel moeilijker oplosbaar zouden zijn.

II. Geneutraliseerde waarden

§1. Definitie van geneutraliseerde waarden.

In de eerste voordracht gepubliceerd onder de subtitel "Geneutraliseerde sommen" heb ik het neutrixbegrip ingevoerd, waarbij ik mij tot sommen beperkt heb. In deze voordracht ga ik het genoemde begrip verder ontwikkelen.

Zij $\mathcal{W}$ een eens en voor al gegeven additieve groep. Dat wil zeggen dat voor elk tweetal tot die verzameling behorende elementen α en β de som $\alpha+\beta$ en het verschil $\alpha-\beta$ wederom elementen van die verzameling zijn, waarbij de optelling en de aftrekking de bekende eigenschappen bezitten. Ik noem de verzameling $\mathcal{W}$ de waardegroep, in verband met het feit dat iedere in deze voordrachtenreeks voorkomende functie uitsluitend waarden aanneemt die tot $\mathcal{W}$ behoren. In de regel kies ik als waardegroep de verzameling van de bestaanbare of de verzameling van de complexe getallen, zodat dan "functie" betekent "bestaanbare functie" of "complexe functie".

Zij $\mathcal{X}$ een willekeurige gegeven niet-lege verzameling. Een functie $f(\xi)$ met domein $\mathcal{X}$ is een functie gedefinieerd voor elk element ξ van $\mathcal{X}$; volgens bovenstaande afspraak is dan $f(\xi)$ voor elk element ξ van $\mathcal{X}$ een element van de gekozen waardengroep Twee functies $f(\xi)$ en $g(\xi)$ met eenzelfde domein bezitten dus steeds een som $f(\xi)+g(\xi)$ en een verschil $f(\xi)-g(\xi)$ met de bekende eigenschappen.

Een additieve groep $\overline{N}$ gevormd door functies $f(\xi)$ met domein $\mathcal{X}$ heet een neutrix als de functie, die identiek nul is, de enige tot $\overline{N}$ behorende constante functie is.
Anders uitgedrukt: als een tot een neutrix behorende functie $\nu(\xi)$ voor elk element ξ van $\mathcal{X}$ eenzelfde waarde aanneemt, dan is die waarde het nulelement van de waardengroep. $\overline{N}$ heet de neutrix met domein $\mathcal{X}$ en veranderlijke ξ . De tot $\overline{N}$ behorende functies heten in $\overline{N}$ verwaarloosbaar.
Waar geen misverstand te vrezen is, schrijven wij kortweg N inplaats van $\overline{N}$.

Zij $f(\xi)$ een functie met domein $\mathcal{X}$ die geschreven kan worden als een som $\gamma + \nu(\xi)$, waarin γ onafhankelijk van ξ is en waarin $\nu(\xi)$ verwaarloosbaar in $\overline{N}$ is. Als de functie $f(\xi)$ en de neutrix $\overline{N}$ gegeven zijn, dan is de constante γ ondubbelzinnig bepaald. Immers als bovendien gegeven is $f(\xi) = \gamma_1 + \nu_1(\xi)$, waarin γ_1 constant en $\nu_1(\xi)$ verwaarloosbaar in $\overline{N}$ is, dan is de in $\overline{N}$ verwaarloosbare functie $\nu_1(\xi) - \nu(\xi)$ gelijk aan de constante $\gamma - \gamma_1$, zodat deze constante gelijk aan nul, dus $\gamma = \gamma_1$ is. Het gronddenkbeeld van de neutrixrekening is dat verwaarloosbare termen ook werkelijk verwaarloosd worden. Dat impliceert dat in de formule $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$ de term $\nu(\xi)$ verwaarloosd mag worden. Natuurlijk mogen wij niet schrijven $f(\xi) = \gamma$, want dat is niet waar, afgezien van het uitzonderingsgeval dat $\nu(\xi)$ identiek nul is, maar dan valt er niets te verwaarlozen.

Bovendien, omdat γ onafhankelijk van ξ is, moeten wij een notatie kiezen, waarbij in het linkerlid de letter ξ niet meer voorkomt. Verder moet de lezer er opmerkzaam op gemaakt worden dat functies die tot de gegeven neutrix $\overline{N}$ behoren, verwaarloosd worden, zodat in het linkerlid de nieuwe notatie op de een of andere manier die neutrix $\overline{N}$ moet vermelden. Zoals ik in voordracht I uitvoerig uiteengezet heb, heeft hetzelfde notatieprobleem zich reeds lang geleden in de theorie van de oneindige reeksen voorgedaan. Uitgaande van de som $\sum_{n=1}^{\xi}$ van de ξ eerste termen ener reeks (ξ geheel ≥ 0) hebben wij een notatie nodig om de som van de oneindige reeks aan te duiden. In dit geval vervangen wij de veranderlijke ξ door het symbool ∞ hetwelk aangeeft dat functies van ξ die bij onbegrensd aangroeiende ξ tot nul naderen verwaarloosd worden. In het algemene geval gaan wij op dezelfde manier te werk. In het rechterlid van de betrekking $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$ schrappen wij de verwaarloosbare term $\nu(\xi)$, maar, ter waarschuwing, wordt in het linkerlid ξ overal vervangen door de letter N, dezelfde letter als die welke de neutrix $\overline{N}$ aanduidt, zodat de lezer onmiddellijk ziet welke termen verwaarloosd mogen worden. Merk op dat de letter ξ vervangen wordt door de letter N zonder horizontale streep. De twee formules $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$ en $f(N) = \gamma$ hebben precies dezelfde betekenis. De notatie

$f(N) = \gamma$ is korter, vooral indien de verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ zeer ingewikkeld is, zoals vaak het geval is. Het werken met betrekkingen van de gedaante $f(N) = \gamma$ is dan ook vaak veel eenvoudiger dan het manipuleren met de overeenkomstige relaties $f(\xi) = \gamma + \nu(\xi)$. Wij noemen γ de geneutraliseerde waarde die $f(\xi)$ in $\xi = N$ aanneemt, maar dit is slechts een uitdrukkingswijze die gemakshalve wordt ingevoerd.

Er zijn functies $f(\xi)$ die niet geschreven kunnen worden als een som $\gamma + \nu(\xi)$, waarin γ onafhankelijk van ξ en waarin $\nu(\xi)$ verwaarloosbaar in $\overline{N}$ is. Voor zodanige functies wordt $f(N)$ voorlopig niet gedefinieerd.

Voorbeeld 1: Als $f(N)$ en $g(N)$ bestaan, dan hebben de functies

$$s(\xi) = f(\xi) + g(\xi) \quad \text{en} \quad v(\xi) = f(\xi) - g(\xi)$$

de eigenschap dat $s(N)$ en $v(N)$ bestaan, en daarbij is dan

$$s(N) = f(N) + g(N) \quad \text{en} \quad v(N) = f(N) - g(N).$$

Immers, dan is voor elk element ξ van het domein $\mathcal{H}$

$$f(\xi) = f(N) + \nu_1(\xi) \quad \text{en} \quad g(\xi) = g(N) + \nu_2(\xi),$$

waarin $\nu_1(\xi)$ en $\nu_2(\xi)$ verwaarloosbaar in $\overline{N}$ zijn, dus $s(\xi) = f(N) + g(N) + \nu_3(\xi)$ en $v(\xi) = f(N) - g(N) + \nu_4(\xi)$, waarin

$$\nu_3(\xi) = \nu_1(\xi) + \nu_2(\xi) \quad \text{en} \quad \nu_4(\xi) = \nu_1(\xi) - \nu_2(\xi)$$

verwaarloosbaar in $\overline{N}$ zijn. Hieruit volgt de bewering.

Dit voorbeeld toont aan dat in de neutrixrekening de optelling en de aftrekking aan de bekende rekenregels voldoen.

In het bijzonder: als $f(N)$ bestaat, dan heeft de functie $u(\xi) = k\, f(\xi)$ voor elk geheel getal k de eigenschap dat $u(N)$ bestaat en gelijk is aan $k\, f(N)$.

Als $f(N)$ bestaat en $v(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi)$, dan is het mogelijk dat $v(N)$ niet bestaat, maar als $v(N)$ bestaat, dan is $v(N) = \frac{1}{2}f(N)$; de laatste betrekking is identiek met $2v(N)=f(N)$. Om te laten zien dat $v(N)$ niet altijd bestaat, beschouwen wij de neutrix $\overline{N}$ met domein $0 \leq \xi \leq 1$, die gevormd wordt door de functies $0, \pm\xi, \pm 2\xi, \ldots$. Dan is $N=0$, omdat $\xi = 0 + \xi$, waarin de laatste term verwaarloosbaar in $\overline{N}$ is. Aan de andere kant, $\frac{1}{2}N$ bestaat niet, omdat $\frac{1}{2}\xi$ niet geschreven kan worden als een som $\gamma + \nu(\xi)$, waarin γ onafhankelijk van ξ en waarin $\nu(\xi)$ een der functies $\pm\xi, \pm 2\xi, \ldots$ is.

Als $f(N)$ en $v(N)$ bestaan, waarin $v(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi)$, dan is

$v(N) = \frac{1}{2} f(N)$, want uit
$f(\xi) = v(\xi) + v(\xi)$ volgt $f(N) = v(N) + v(N) = 2v(N)$.

In het hierboven beschouwde geval van de neutrix $\overline{N}$ en de verwaarloosbare functies $0, \pm \xi, \pm 2\xi, \ldots$ hebben wij een voorbeeld dat het geen aanbeveling verdient in de notatie van deze neutrix de horizontale streep weg te laten. Immers in dat geval heeft N een andere betekenis, namelijk N=0. Het verschijnsel dat bij weglaten van de horizontale streep een misverstand kan optreden komt echter zó zelden voor, dat bijna steeds de horizontale streep boven de een neutrix aanduidende letter kan worden weggelaten. Dit zullen wij dan ook in de regel doen.

§ 2. Over het gebruik van twee of meer neutrices tegelijkertijd.

Beschouw twee neutrices M en N met domeinen $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{N}$ en met onafhankelijk veranderlijken ξ en η. Beschouw verder een functie $f(\xi, \eta)$ gedefinieerd voor elk element ξ van $\mathfrak{M}$ en elk element η van $\mathfrak{N}$ die geschreven kan worden als een som

(1) $f(\xi, \eta) = \gamma + \nu(\eta) + \mu(\xi, \eta)$,

waarin γ onafhankelijk van ξ en η is, waarin $\nu(\eta)$ een van ξ onafhankelijke, in N verwaarloosbare functie voorstelt en waarin tenslotte $\mu(\xi, \eta)$, voor elk gegeven element η van $\mathfrak{N}$, een in M verwaarloosbare functie van ξ aanduidt. Bij gegeven functie $f(\xi, \eta)$ en bij gegeven neutrices M en N is de constante γ ondubbelzinnig bepaald, want als bovendien gegeven is

$$f(\xi, \eta) = \gamma_1 + \nu_1(\eta) + \mu_1(\xi, \eta),$$

waarin γ_1 onafhankelijk van ξ en η is, waarin $\nu_1(\eta)$ een van ξ onafhankelijke, in N verwaarloosbare functie van η voorstelt en waarin tenslotte $\mu_1(\xi, \eta)$, voor elk gegeven element η van $\mathfrak{N}$, een in M verwaarloosbare functie van ξ aanduidt, dan is

$$\gamma - \gamma_1 = \nu_2(\eta) + \mu_2(\xi, \eta),$$

waarin $\nu_2(\eta) = \nu_1(\eta) + \nu(\eta)$ verwaarloosbaar in N is en waarin $\mu_2(\xi, \eta), = \mu_1(\xi, \eta) - \mu(\xi, \eta)$, voor elk gegeven element η van $\mathfrak{N}$, verwaarloosbaar in M is. De in de neutrix M verwaarloosbare functie $\mu_2(\xi, \eta)$ is onafhankelijk van ξ, dus identiek gelijk aan nul. Hieruit volgt dat de in N verwaarloosbare functie $\nu_2(\eta)$ gelijk is aan de constante $\gamma-\gamma_1$, zodat deze constante gelijk aan nul, dus $\gamma=\gamma_1$ is.

Volgens de in de vorige paragraaf gemaakte afspraak mogen wij in het rechterlid van (1) de in M verwaarloosbare term $\mu(\xi,\eta)$ weglaten, als wij dan maar, ter waarschuwing, in het linkerlid ξ door M vervangen. Aldus krijgen wij voor elk element η van $\mathfrak{N}$

(2) $$f(M,\eta) = \gamma + \nu(\eta).$$

Hebben wij nu het recht om in het rechterlid de in N verwaarloosbare term $\nu(\eta)$ weg te laten en in het linkerlid η door N te vervangen?

Hier schuilt een gevaar. Het is namelijk mogelijk dat $f(\xi,\eta)$ ook in de gedaante

$$f(\xi,\eta) = \gamma^* + \mu^*(\xi) + \nu^*(\xi,\eta)$$

geschreven kan worden, waarin γ^* onafhankelijk van ξ en η is, waarin $\mu^*(\xi)$ een van η onafhankelijke, in M verwaarloosbare functie van ξ voorstelt en waarin tenslotte $\nu^*(\xi,\eta)$ voor elk gegeven element ξ van $\mathfrak{M}$, een in N verwaarloosbare functie van η voorstelt. In dat geval is voor elk element ξ van $\mathfrak{M}$

(3) $$f(\xi,N) = \gamma^* + \mu^*(\xi).$$

Indien wij het recht hadden het in (2) voorkomende getal γ met f(M,N) aan te duiden, dan zouden wij met hetzelfde recht voor het in (3) optredende getal γ^* dezelfde notatie vinden. Dit zou tot misverstand kunnen voeren, omdat, zoals wij zo dadelijk zullen zien, de constanten γ en γ^* niet noodzakelijk gelijk zijn. In de eerste redenering, die tot het antwoord γ voert, heeft de neutrix M de voorrang. Dit betekent dat eerst de in M verwaarloosbare term $\mu(\xi,\eta)$, daarna pas de in N verwaarloosbare term $\nu(\eta)$ verwaarloosd wordt.
In de tweede redenering, die tot het antwoord γ^* voert, heeft de neutrix N de voorrang, omdat eerst de in N verwaarloosbare term $\nu^*(\xi,\eta)$, daarna pas de in M verwaarloosbare term $\mu^*(\xi)$ verwaarloosd wordt. De volgorde, die invloed op het resultaat hebben kan, moet dus op de een of andere manier in de notatie worden vermeld. In verband hiermede maak ik de volgende afspraak: als in een formule twee neutrices M en N tegelijkertijd voorkomen, waarbij M de voorrang heeft,

dan wordt in de formule N van een accent voorzien. Dus

$\gamma = f(M,N')$ en $\gamma^* = f(M',N)$.

Bedenk dat in deze notatie N' de neutrix N aanduidt en dat het accent alleen de volgorde der twee neutrices M en N aanduidt.

Het verschijnsel dat de volgorde invloed op het resultaat heeft, treedt reeds in de klassieke analyse op. Indien ξ en η positieve, tot nul naderende getallen voorstellen, dan is

$$\lim_{\eta\to 0}\ \lim_{\xi\to 0} \xi^{\eta} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{\xi\to 0}\ \lim_{\eta\to 0} \xi^{\eta} = 1.$$

Dus als de neutrix M gevormd wordt door de functies van ξ die voor $\xi\to 0$ tot nul naderen en als de neutrix N gevormd wordt door de functies van η die voor $\eta\to 0$ tot nul naderen, dan is

$$M^{N'} = 0 \qquad \text{en } M'^{N} = 1.$$

Indien de volgorde der neutrices geen invloed op het resultaat heeft, dat wil zeggen als $\gamma = \gamma^*$ is, dan duiden wij die gemeenschappelijke waarde kortweg met f(M,N) aan, zodat dan geen accent ingevoerd wordt. Dit geval treedt bijv. op als

$$f(\xi,\eta) = \gamma + \mu(\xi) + \nu(\eta),$$

waarin $\mu(\xi)$ een van η onafhankelijke, in M verwaarloosbare functie van ξ voorstelt en waarin $\nu(\eta)$ een van ξ onafhankelijke, in N verwaarloosbare functie van η voorstelt; dan duiden wij dus γ aan met f(M,N).

Op overeenkomstige manier behandelen wij functies van drie of meer onafhankelijke veranderlijken. Stel M,N en P zijn neutrices met matrices $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{P}$ en met onafhankelijk veranderlijken ξ,η en ζ. Stel verder

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \gamma + \pi(\zeta) + \nu(\eta,\zeta) + \mu(\xi,\eta,\zeta),$$

waarin γ onafhankelijk van ξ,η en ζ is, waarin $\pi(\zeta)$ een van ξ en η onafhankelijke, in P verwaarloosbare functie van ζ voorstelt, waarin $\nu(\eta,\zeta)$, voor elk element ζ van $\mathfrak{P}$, een van ξ onafhankelijke, in N verwaarloosbare functie van η aanduidt en waarin tenslotte $f(\xi,\eta,\zeta)$, voor elk element η van $\mathfrak{N}$ en elk element ζ van $\mathfrak{P}$, een in M verwaarloosbare functie van ξ aangeeft. Dan schrijven wij

$$\gamma = f(M,N',P'').$$

Een neutrix zonder accent heeft de voorrang boven een neutrix met één accent; een neutrix met één accent heeft de voorrang boven een neutrix met twee accenten,enz.

Als de volgorde van de neutrices M en N geen invloed op het resultaat heeft, dan mogen wij schrijven

$$\gamma = f(M,N,P').$$

Als de volgorde van N en P geen invloed heeft,dan mogen wij

$$\gamma = f(M,N',P')$$

schrijven.Als de keuze van de volgorde van de drie neutrices M,N,P geen invloed heeft, dan mogen wij

$$\gamma = f(M,N,P) \tag{4}$$

schrijven. In het bijzonder, als

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \gamma + \mu(\xi) + \nu(\eta) + \pi(\zeta),$$

waarin $\mu(\xi)$ onafhankelijk van η en ζ en verwaarloosbaar in M is, als $\nu(\eta)$ onafhankelijk van ξ en ζ en verwaarloosbaar in N is en als tenslotte $\pi(\zeta)$ onafhankelijk van ξ en η en verwaarloosbaar in P is, dan geldt de notatie (4).

§ 3. Over een vergroting van een neutrix.

Een vergroting V van een neutrix N is een neutrix met hetzelfde domein en met dezelfde veranderlijke zodanig dat elke in N verwaarloosbare functie ook in V verwaarloosbaar is.

Dus iedere neutrix is een vergroting van zichzelf.

<u>Voorbeeld 2: Als f(N) bestaat, dan bestaat f(V) voor iedere vergroting V van N, en dan is f(V) = f(N).</u>

Immers uit $f(N) = \gamma$ volgt dat $f(\xi) - \gamma$, voor elk element ξ van het domein van N, een in N verwaarloosbare functie van ξ, dus ook een in V verwaarloosbare functie van ξ voorstelt, waaruit volgt $f(V) = \gamma$.

In de voorbeelden 3,4 en 5 stelt N een neutrix voor met domein $\mathfrak{N}$ en veranderlijke ξ zodanig dat elke in N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ en elk geheel positief getal k de eigenschap bezitten dat $\frac{\nu(\xi)}{k}$ eveneens verwaarloosbaar in N is; dit heeft tengevolge dat $r\nu(\xi)$ voor ieder rationaal getal r verwaarloosbaar in N is.

<u>Voorbeeld 3: Als $f(\xi)$ voor elk element ξ van $\mathcal{N}$ gedefinieerd is en $f(N)$ niet bestaat, en als γ een willekeurig element van de waardengroep $\mathcal{W}$ voorstelt, dan is het mogelijk een vergroting V van N te vinden met de eigenschap $f(V) = \gamma$ en met de eigenschap dat voor iedere in V verwaarloosbare functie $\varphi(\xi)$ en voor ieder rationaal getal r het produkt $r\varphi(\xi)$ verwaarloosbaar in V is.</u>

Wij zullen laten zien dat de functies $\nu(\xi) + r(f(\xi)-\gamma)$, waarin de termen $\nu(\xi)$ willekeurige in N verwaarloosbare functies voorstellen en waarin r de rij der rationale getallen doorloopt, een verzameling V met de verlangde eigenschappen vormen. Door r=0 te kiezen, zien wij dat elke in N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ tot V behoort. Indien een tot V behorende functie $\nu(\xi) + r(f(\xi)-\gamma)$ voor elk element ξ van het domein van N dezelfde waarde γ^* aanneemt, dan is r=0, omdat anders

$$f(\xi) - \gamma - \frac{\gamma^*}{r} = - \frac{\nu(\xi)}{r}$$

verwaarloosbaar in N zou zijn, zodat $f(\xi)$ voor $\xi = N$ de waarde $\gamma + \frac{\gamma^*}{r}$ zou aannemen, in tegenspraak met de veronderstelling dat $f(N)$ niet bestaat.

Uit r = 0 volgt dat de in de neutrix N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ gelijk is aan de constante γ^*, zodat deze constante nul is. Aldus hebben wij aangetoond dat V een neutrix en dus een vergroting van N is. Uit de definitie van V blijkt tevens dat voor iedere in V verwaarloosbare functie $\varphi(\xi)$ en voor elk rationaal getal ρ het produkt $\rho\,\varphi(\xi)$ tot V behoort. Tenslotte, door $\nu(\xi) = 0$ en r = 1 te kiezen, zien wij dat $f(\xi) - \gamma$ verwaarloosbaar is in φ, zodat

$$f(\xi) = \gamma + (f(\xi) - \gamma)$$

voor $\xi = V$ de waarde γ aanneemt.

<u>Voorbeeld 4: Indien $f_1(\xi), \ldots, fm(\xi)$ (m geheel ≥ 1) voor elk element ξ van $\mathcal{N}$ gedefinieerd zijn, dan is het mogelijk een vergroting V van N te vinden zodanig dat $f_1(V), \ldots, fm(V)$ bestaan en dat elke in V verwaarloosbare functie $\varphi(\xi)$ en elk rationaal getal r de eigenschap bezitten dat het produkt $r\,\varphi(\xi)$ verwaarloosbaar in V is.</u>

Deze bewering is evident voor $m=1$, want in dat geval kunnen wij, als $f_1(N)$ bestaat, $V = N$ kiezen en, als $f_1(N)$ niet bestaat, V kiezen met behulp van het voorgaande voorbeeld. Wij mogen dus veronderstellen dat $m \geq 2$ is en dat wij reeds een vergroting M van N gevonden hebben zodanig dat $f_1(M), \ldots, f_{m-1}(M)$ bestaan en dat elke in M verwaarloosbare functie $\mu(\xi)$ en elk rationaal getal r de eigenschap bezitten dat het produkt $r\mu(\xi)$ verwaarloosbaar in M is. Indien $f_m(M)$ bestaat, dan bezit $V=M$ de verlangde eigenschappen. Indien $f_m(M)$ niet bestaat, dan vinden wij met behulp van het voorgaande voorbeeld een vergroting V van M waarvoor $f_m(V)$ bestaat, zodanig dat elke in V verwaarloosbare functie $\varphi(\xi)$ en elk rationaal getal r de eigenschap bezitten dat het produkt $r\mu(\xi)$ verwaarloosbaar in V is. V is een vergroting van de vergroting M van N, dus zeker een vergroting van N. Volgens voorbeeld 1 is $f_h(M) = f_h(V)$ $(h = 1,2,\ldots,m-1)$, zodat niet alleen $f_m(V)$, maar ook $f_1(V), \ldots, f_{m-1}(V)$ bestaan. Hieruit blijkt dat V de hierboven geformuleerde voorwaarden vervult.

Voorbeeld 5: Als op $\mathfrak{M}$ aftelbaar oneindig veel functies $f_h(\xi)$ $(h=1,2,\ldots)$ gedefinieerd zijn, dan is het mogelijk een vergroting V van N te vinden zo dat $f_h(V)$ $(h=1,2,\ldots)$ bestaan en dat elke in V verwaarloosbare functie $\varphi(\xi)$ en elk rationaal getal r de eigenschap bezitten dat het produkt $r\varphi(\xi)$ verwaarloosbaar in V is.

Om dit te bewijzen duiden wij de in het voorgaande voorbeeld geconstrueerde verzameling V met V_m aan. Dan is V_{m+1} een vergroting van V_m. De functies $\varphi(\xi)$, die tot minstens een der verzamelingen $V_1, V_2, \ldots$ behoren, vormen een verzameling V met de verlangde eigenschappen. V is een neutrix, want als een tot V behorende functie $\varphi(\xi)$ gelijk is aan een constante, dan behoort $\varphi(\xi)$ tot minstens één neutrix V_m, zo dat de genoemde constante nul is. V is een vergroting van V_1, dus van N. Indien $\varphi(\xi)$ verwaarloosbaar in V is, dan is die functie verwaarloosbaar in minstens een der neutrices V_m, zodat bij elke keuze van het rationale getal r het produkt $r\varphi(\xi)$ tot V_m dus tot V behoort. Tenslotte, bij iedere keuze van de gehele positieve getal h, bestaat $f_h(V_h)$, dus ook het daaraan gelijke getal $f_h(V)$. Hieruit blijkt dat V de gestelde eisen vervult.

Opmerking: Zelfs als een niet-aftelbare verzameling van op $\mathfrak{N}$ gedefinieerde functies gegeven is, dan bestaat er een vergroting V van N met de eigenschap dat elke tot die verzameling behorende functie in V een geneutraliseerde waarde aanneemt, maar in dit algemene existentiebewijs moet het keuzeaxioma worden toegepast, zodat de redenering niet constructief is.

De volgende beschouwingen dienen om de betekenis van de voorgaande voorbeelden toe te lichten. In de regel treden in de analyse, bij de oplossing van een probleem, een of meer functies op. Daarbij kunnen twee soorten problemen onderscheiden worden, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Eerste probleem: Als f(x) voor elke bestaanbare x een continue bestaanbare functie voorstelt, welke waarde neemt dan in het punt x = 1 de bestaanbare functie y(x) aan, die in de oorsprong de waarde nul bezit en voor elke bestaanbare x aan de differentiaalvergelijking

$$y' = 3\, y^{\frac{2}{3}} f(x)$$

voldoet?

Tweede probleem: Bepaal de genoemde functie y(x) voor elke bestaanbare x.

Het antwoord is bij het tweede probleem

$$y(x) = \left(\int_0^x f(t)\, dt\right)^3,$$

dus bij het eerste probleem

$$y(1) = \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)^3.$$

Voor de beantwoording van het tweede probleem moet de functie f(x) voor elke bestaanbare x gegeven zijn, maar voor de beantwoording van het eerste probleem behoeven wij niet de functie f(x) zelf te kennen, doch alleen de constante

(5) $$\int_0^1 f(t)\,dt.$$

In het eerste probleem kunnen wij dus deze constante beschouwen als de representant van de functie $f(x)$. Die constante treedt in de plaats van de misschien zeer ingewikkelde functie $f(x)$ op, althans in zoverre dat de kennis van deze constante voldoende is voor de oplossing van dit speciale probleem.
In het tweede probleem heeft $f(x)$ geen constante representant, omdat nu eenmaal voor de oplossing van dat probleem $f(x)$ voor elke bestaanbare x bekend moet zijn.

Onder een probleem van de eerste soort versta ik een probleem in wiens oplossing een of meer functies optreden die een constante representant bezitten. In dat geval is het voor de oplossing van het probleem niet nodig die functies zelf te kennen, maar kunnen wij volstaan met de berekening van hun constante representanten. Dit denkbeeld wordt in de analyse algemeen toegepast, en wel met behulp van operatoren, zoals grensovergang, differentiatie, integratie (zie bijv. (5)), enz. Maar die operatoren kunnen lang niet altijd toegepast worden. Het kan gebeuren dat de in aanmerking komende limiet niet bestaat, dat de functie die voor differentiatie of integratie in aanmerking komt, niet differentieerbaar of integreerbaar is, enz. Dat zit hem in het feit, dat in de klassieke analyse overal bordjes staan en ook moeten staan met opschrift "Toegang verboden", maar dat dwingt ons tot een strenge restrictie, strenger dan in werkelijkheid nodig is. Immers uit de in deze paragraaf behandelde voorbeelden blijkt dat aan de in de oplossing van een probleem optredende functies steeds, door middel van geschikt gekozen neutrices, geneutraliseerde - dus constante - waarden kunnen worden toegekend, zodat in de neutrixrekening een veel grotere graad van vrijheid heerst dan in de klassieke analyse. Natuurlijk moet er naar gestreefd worden dat de ingevoerde neutrices zò gekozen worden dat elke aldus verkregen geneutraliseerde waarde in het ter oplossing voorgelegde probleem werkelijk de representant is van de corresponderende functie. Of een constante werkelijk als representant van een functie kan fungeren, hangt af van het gestelde probleem, zodat de keuze van de geschikte neutrices afhankelijk is van de aard van het probleem. In de neutrixrekening voeren wij uitgebreide neutrices in die voor uitgebreide klassen van problemen aan de gestelde eisen voldoen.

Er is een nauw verband tussen de in deze paragraaf gegeven beschouwingen enerzijds en het geneutraliseerde limietbegrip aan de andere kant. Stel het domein $\mathcal{N}$ bezit een niet tot $\mathcal{N}$ behorend limietpunt α. Stel verder dat N de verzameling voorstelt gevormd door alle op $\mathcal{N}$ gedefinieerde functies $\nu(\xi)$ die tot nul naderen als ξ op $\mathcal{N}$ tot a nadert. Iedere in N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ en elk rationaal getal r heeft de eigenschap dat $r\nu(\xi)$ voor $\xi \to a$ tot nul nadert en dus verwaarloosbaar in N is. Stel de functies $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, ... zijn op $\mathcal{N}$ gedefinieerd en V is een vergroting van N met de in voorbeeld 5 genoemde eigenschappen. Dan bestaan de geneutraliseerde waarden $f_h(V)$ $(h=1,2,..)$. Beschouw nu een willekeurige op $\mathcal{N}$ gedefinieerde functie $g(\xi)$ waarvoor $g(V)$ bestaat. In het bijzondere geval dat $g(\xi)$ tot een eindige limiet λ nadert als ξ op $\mathcal{N}$ tot α nadert, is

$$g(V) = \lambda , \tag{6}$$

want $g(\xi) - \lambda$ nadert tot nul, is dus verwaarloosbaar in N, derhalve zeker in de vergroting V, zodat $g(\xi)$ in V de geneutraliseerde waarde λ bezit.

In het geval dat $g(\xi)$ niet tot een eindige limiet nadert als ξ op $\mathcal{N}$ tot α nadert, kunnen wij derhalve $g(V)$ de gegeneraliseerde limiet van $g(\xi)$ noemen en wij kunnen schrijven

$$\underset{\xi \to \alpha}{\text{gen.lim.}}\; g(\xi) = g(V) ,$$

maar men moet daarbij bedenken dat de gegeneraliseerde limiet van de keuze van de neutrix V kan afhangen. Uit voorbeeld 5 blijkt dat voor elk der functies $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, ... deze gegeneraliseerde limiet bestaat. Dit verschijnsel kan, enigszins onnauwkeurig, geformuleerd worden door te zeggen dat iedere gegeneraliseerde limiet bestaat, dus dat iedere functie, in de gegeneraliseerde zin beschouwd, differentieerbaar, integreerbaar is, enz.

Bijvoorbeeld als de neutrix V met domein $0 < \xi \leqq 1$ gevormd wordt door de functies van de gedaante $\frac{c}{\xi} + \varepsilon(\xi)$, waarin de coefficienten c willekeurige constanten voorstellen en waarin $\varepsilon(\xi)$ een willekeurige in het interval $0 < \xi \leqq 1$ gedefinieerde functie voorstelt die voor $\xi \to 0$ tot nul nadert, dan is

$$\underset{\xi \to 0}{\text{gen.lim.}} \quad \cot \xi = 0,$$

omdat

$$\cot \xi = \frac{1}{\xi} + \varepsilon(\xi).$$

§ 4. Definitie van geneutraliseerde contourintegralen.

Zij Γ een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen continue rectificeerbare kromme met een niet tot Γ behorend beginpunt a en een eindpunt b. Voorlopig doet het er niet toe of het eindpunt al dan niet tot de kromme behoort. De punten a en b mogen in het oneindige liggen. Zij $\mathcal{H}$ een boog van Γ met beginpunt a.
Indien de functies $f_h(z)$ ($h = 1, 2, ..$) op Γ gedefinieerd en voor elk op $\mathcal{H}$ gelegen punt ξ integreerbaar langs Γ van ξ naar b zijn, dan is het volgens voorbeeld 5 mogelijk een neutrix N met domein $\mathcal{H}$ en veranderlijke ξ te vinden zodanig dat de functie

$$(7) \qquad \int_{\xi}^{b} f_h(z)\, dz \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

voor $\xi = N$ een geneutraliseerde waarde γ_h aanneemt en dat N iedere op $\mathcal{H}$ gedefinieerde functie van ξ bevat die tot nul nadert als ξ op $\mathfrak{M}$ tot a nadert. Om dat in te zien, vervangen wij in het genoemde voorbeeld de neutrix N door de verzameling gevormd door de op $\mathfrak{M}$ gedefinieerde functies van ξ die voor $\xi \to a$ tot nul naderen.

De hierboven geconstrueerde neutrix N heeft de eigenschap dat

$$\int_N^b f_h(z)\, dz = \gamma_h \qquad (h=1,2,\ldots.)$$

is en dat voor iedere langs Γ van a naar b integreerbare functie g(z) de betrekking

$$\int_N^b g(z)\, dz = \int_a^b g(z)\, dz$$

geldt, omdat

$$\int_\xi^b g(z)\, dz - \int_a^b g(z)\, dz$$

voor $\xi \to a$ tot nul nadert en dus verwaarloosbaar in N is. Dit heeft tengevolge dat de klassieke integraalrekening een bijzonder geval is van de geneutraliseerde integraalrekening die met behulp van deze neutrix kan worden opgebouwd.

In het bovenstaande hebben wij geneutraliseerde integralen ingevoerd waarvan de ondergrens een neutrix is. Natuurlijk kunnen wij op overeenkomstige manier integralen invoeren waarvan de bovengrens een neutrix is. Daartoe beschouwen wij een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen continue rectificeerbare kromme Γ met een niet tot Γ behorend eindpunt b en een beginpunt a. Zij $\mathfrak{M}$ een boog van Γ met eindpunt b. Indien de functies $f_h(z)$ (h= ,2,...) op Γ gedefinieerd en voor elk op $\mathfrak{M}$ gelegen punt η integreerbaar langs Γ van a naar η zijn, dan voeren wij met behulp van voorbeeld 5 een neutrix M met domein $\mathfrak{M}$ en veranderlijke η in zodanig dat

$$\int_a^\eta f_h(z)\, dz \qquad (h=1,2,\ldots.)$$

in $\eta^* = M$ een geneutraliseerde waarde γ_h^* aanneemt en dat M iedere op $\mathfrak{M}$ gedefinieerde functie van η bevat die tot nul nadert als η op $\mathfrak{M}$ tot b nadert. Dan is

$$\int_a^M f_h(z)\,dz = \gamma_h^* \qquad (h=1,2,\ldots.)$$

en iedere langs Γ van a naar b integreerbare functie g(z) voldoet aan de betrekking

$$\int_a^M g(z)\,dz = \int_a^b g(z)\,dz$$

Tenslotte kunnen wij contourintegralen invoeren waarvan beide grenzen neutrices zijn. Indien een kromme Γ met beginpunt a en eindpunt b een punt p bevat, zodanig dat de integralen

$$\int_N^p f(z)\,dz \quad \text{en} \quad \int_p^M f\,(z)\,dz$$

beide bestaan, dan duiden wij hun som met

$$(8) \qquad \int_N^M f(z)\,dz$$

aan. Merk daarbij op dat deze som onafhankelijk is van de keuze van het punt p en dat de volgorde der neutrices N en M, waarvan in § 2 gesproken is, geen invloed op de som heeft, zodat het niet nodig is om in de notatie een dezer neutrices van een accent te voorzien. Als (8) bestaat, dan heet f(z) integreerbaar langs Γ van N naar M.

Bovenstaande theorie steunt op voorbeeld 5, maar in de praktijk gaan wij juist andersom te werk. Daar gaan wij uit van uitgebreide neutrices N en M en beschouwen dan vervolgens de functies die langs de gegeven integratieweg integreerbaar zijn van N naar M. Voorbeelden van dergelijke uitgebreide neutrices vindt de lezer in de volgende voordracht gewijd aan Hadamard neutrices die van een drager voorzien zijn.

§ 5. Isomorphe neutrices.

Beschouw twee neutrices N en M, resp. met domein $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$ en met onafhankelijk veranderlijken ξ en η. Die twee neutrices heten isomorph, als het mogelijk is tussen de elementen ξ van $\mathfrak{N}$ en de elementen η van $\mathfrak{M}$ een (1,1) verwantschap

(9) $\quad \xi = \varphi(\eta); \qquad \eta = \chi(\xi)$

te leggen, zodanig dat iedere in N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ de eigenschap bezit dat $\nu(\varphi(\eta))$ een in M verwaarloosbare functie van η voorstelt, terwijl bovendien iedere in M verwaarloosbare functie $\mu(\eta)$ de eigenschap bezit dat $\mu(\chi(\xi))$ een in N verwaarloosbare functie van ξ voorstelt.

Voorbeeld 6: Stel $\mathfrak{N}$ en $\mathfrak{M}$ zijn twee verzamelingen zodanig dat het mogelijk is een (1,1) verwantschap (9) te vinden tussen de elementen ξ van $\mathfrak{N}$ en de elementen η van $\mathfrak{M}$. Zij N een neutrix met domein $\mathfrak{N}$. Zij M een verzameling van functies gedefinieerd op $\mathfrak{M}$ zodanig dat iedere in N verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ de eigenschap bezit dat $\nu(\varphi(\eta))$ een tot M behorende functie van η voorstelt en dat iedere tot M behorende functie $\mu(\eta)$ de eigenschap bezit dat $\mu(\chi(\xi))$ verwaarloosbaar in N is. Dan is M een neutrix, dus een met N isomorphe neutrix.

Om te bewijzen dat M een additieve groep is, beschouwen wij twee willekeurige tot die verzameling behorende functies $\mu(\eta)$ en $\mu^*(\eta)$. Dan zijn volgens veronderstelling $\mu(\chi(\xi))$ en $\mu^*(\chi(\xi))$ verwaarloosbaar in de neutrix N, waaruit blijkt dat ook de som en het verschil van die twee functies verwaarloosbaar in N zijn. Volgens veronderstelling behoren dan $\mu(\eta) + \mu^*(\eta)$ en $\mu(\eta) - \mu^*(\eta)$ tot M, zodat M een additieve groep is.

Tenslotte moeten wij nog aantonen: indien een tot M behorende functie $\mu(\eta)$ gelijk is aan een constante γ, dan is $\gamma = 0$.
Dit is evident, want dan is de in N verwaarloosbare functie $\mu(\chi(\xi))$ voor elk element ξ van $\mathfrak{N}$ gelijk aan γ, zodat $\gamma = 0$ is.

III. Hadamardneutrices met een drager

§ 1. Het oneindige deel van een integraal.

De neutrices waaraan deze voordracht is gewijd zijn genoemd naar de Franse wiskundige die in zijn onderzoekingen over het Cauchyprobleem in de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen aan zekere divergente integralen een ondubbelzinnig bepaalde eindige waarde toekent welke hij het "eindige deel" van de integraal noemt.

Beschouw bijvoorbeeld de integraal

$$(1)\qquad c\int_{\xi}^{2} x^{s-1}dx = \begin{cases} c\,s^{-1}2^{s} - c\,s^{-1}\,\xi^{s} & \text{voor } s \neq 0; \\ c\log 2 - c\log \xi & \text{voor } s = 0; \end{cases}$$

hierin is $\xi > 0$; s is een gegeven bestaanbaar getal en de coëfficiënten c stellen willekeurige complexe getallen voor. In het geval $c \neq 0$ convergeert

$$(2)\qquad c\int_{0}^{2} x^{s-1}\,dx$$

dan en alleen dan als $s > 0$. In het geval $s < 0$ groeit $s^{-1}\,\xi^{s}$ voor $\xi \to 0$ onbegrensd aan, terwijl eveneens $-\log \xi$ onbegrensd aangroeit. In het geval $s < 0$; $c \neq 0$ noemt Hadamard de term $c\,s^{-1}2^{s}$ het eindige, de term $-c\,s^{-1}\,\xi^{s}$ het oneindige deel van de integraal. In het geval $s=0$, $c \neq 0$ heten $c\log 2$ en $-c\log\xi$ het eindige, resp. het oneindige deel van de integraal.

Hadamard verwaarloost overal de oneindige delen. In andere woorden: in het geval $s \leq 0$ kent hij aan (2) de waarde toe die gelijk is aan het eindige deel van de integraal. Dat betekent dat (2) in het geval $s < 0$ de waarde $cs^{-1}2^{s}$, in het geval $s = 0$ de waarde $c\log 2$ krijgt.

Dat in de door Hadamard behandelde gevallen de verwaarlozing van de oneindige delen nooit tot een tegenspraak kan voeren, is zó duidelijk dat die verwaarlozing daar geen rechtvaardiging behoeft. In de door ons behandelde, trouwens veel ingewikkelder gevallen, beroepen wij ons op het volgende feit: indien $s \neq 0$ en $cs^{-1}\xi^{s}$ in een interval $0 < \xi < \beta$ gelijk is aan een van ξ onafhankelijk getal γ, dan is $\gamma=0$

Indien $c \log \xi$ in $0 < \xi < \beta$ gelijk is aan een constante γ, dan is γ eveneens gelijk aan nul. Dus de functies die voor $s \neq 0$ de gedaante $cs^{-1} \xi^{s}$, voor $s = 0$ de gedaante $c \log \xi$ bezitten, waarin de coefficienten c willekeurige complexe getallen voorstellen, vormen een neutrix H. Volgens de in § 1 van voordracht II gemaakte afspraak mogen wij die functies in het rechterlid van (1) verwaarlozen, als wij dan maar in het linkerlid de letter ξ vervangen door H. Aldus vinden wij voor elke bestaanbare s

$$c \int_{H}^{2} x^{s-1}\, dx = \begin{cases} cs^{-1}\, 2^{s} & \text{voor } s \neq 0 \\ c \log 2 & \text{voor } s = 0. \end{cases}$$

Het feit dat de door Hadamard verwaarloosde delen steeds in absolute waarde onbegrensd aangroeien is niet het karakteristieke kenmerk van het genoemde verschijnsel. Trouwens voor positieve s zijn het juist de tot nul naderende termen die verwaarloosd worden, maar dat wekt geen verwondering omdat dat in de klassieke analyse te doen gebruikelijk is. Maar bovenstaande redenering blijft gelden voor willekeurige complexe s, zodat wij bijvoorbeeld vinden

$$\int_{H}^{2} x^{10\, i-1} dx = - \frac{1}{10}\, i\, (\cos 10 \log 2 + i \sin 10 \log 2).$$

In dit geval heeft de verwaarloosde term

$$\frac{1}{10}\, i\, (\cos 10 \log \xi + i \sin 10 \log \xi)$$

de constante modulus $\frac{1}{10}$, zodat hier de uitdrukking "oneindig deel" niet op haar plaats is.

Generalisatie van het denkbeeld van Hadamard voert tot een meer algemene neutrix, die ik in de volgende paragraaf ga invoeren.

§ 2. De Hadamardneutrix H_a.

Zij $\mathfrak{P}$ een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen puntverzameling met een in het eindige gelegen en niet tot $\mathfrak{P}$ behorend limietpunt a, met de eigenschap dat een punt ζ op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot a kan naderen dat arg(ζ - a) tot een eindige limiet nadert. Ik zeg dat een functie u(ζ) op $\mathfrak{P}$ een Hadamard ontwikkeling naar machten van ζ - a bezit als ze op $\mathfrak{P}$ gedefinieerd is en voor de in de omgeving van a op $\mathfrak{P}$ gelegen punten ζ een asymptotische ontwikkeling bezit van de gedaante

$$(3) \qquad u(\zeta) \backsim {\sum_{h=0}^{\infty}}' \chi_h (\zeta - a)^{\psi_h} \log^{k_h}(\zeta - a),$$

waarin χ_h, ψ_h en k_h onafhankelijk van ζ zijn, waarin Re $\psi_h \to \infty$ voor $h \to \infty$ en waarin verder k_h geheel $\geqq 0$ is. Formule (3) betekent dat er bij elk van ζ onafhankelijk bestaanbaar getal q een van ζ onafhankelijk geheel getal $m_o \geqq 0$ bestaat met de eigenschap dat bij elk van ζ onafhankelijk geheel getal $m \geqq m_o$ twee van ζ onafhankelijke positieve getallen c_m en ε_m gevonden kunnen worden zodanig dat elk op $\mathfrak{P}$ gelegen punt ζ met $|\zeta - a| < \varepsilon_m$ de ongelijkheid

$$(4) \qquad \left|u(\zeta) - \sum_{h=0}^{m-1} \chi_h (\zeta - a)^{\psi_h} \log^{k_h}(\zeta - a)\right| < c_m |\zeta - a|^q$$

vervult. Het accent in formule (3) aan het somteken toegevoegd geeft te kennen dat wij hier met een asymptotische reeks te maken hebben die dus volstrekt niet behoeft te convergeren.

Indien in de ontwikkeling (3) geen enkele term met $\psi_h = k_h = 0$ voorkomt, dan spreken wij van een Hadamardontwikkeling zonder constante term. De getallen ψ_h worden de exponenten in de Hadamardontwikkeling genoemd. Die benaming gebruiken wij niet voor de getallen k_h.

Beschouw alle op $\mathfrak{P}$ gedefinieerde functies $\nu(\zeta)$, die voor de in de omgeving van a op $\mathfrak{P}$ gelegen punten ζ geschreven kunnen worden als een som u(ζ) + $\varepsilon(\zeta)$, waarin u(ζ) op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van ζ - a zonder constante term bezit en waarin $\varepsilon(\zeta)$ tot nul nadert als ζ op $\mathfrak{P}$ tot a nadert.

Wij zullen zo dadelijk bewijzen dat deze functies $\nu(\zeta)$ een neutrix vormen met domein $\mathfrak{P}$ en veranderlijke ζ.

Deze neutrix heet de Hadamardneutrix H_a en het punt a wordt de drager van de neutrix genoemd.

Indien in een redenering twee Hadamard neutrices voorkomen met dezelfde drager a, maar met verschillende domeinen of met verschillende veranderlijken, dan zijn die twee neutrices niet dezelfden, zodat ze in de notatie onderscheiden moeten worden, bijv door de aanwijzingen H_a en H_a^*.

Opmerking: Het is duidelijk, waarom wij de voorwaarde ingevoerd hebben dat de Hadamard ontwikkelingen van de functies $u(\xi)$ geen constante term $c \neq 0$ mogen bevatten, want anders zou de klasse gevormd door de genoemde functies $\nu(\xi)$ de functie bevatten die identiek gelijk is aan c, zodat die klasse zeker geen neutrix zijn zou.

Misschien maakt de lezer de opmerking dat de definitie van de neutrix H_a onnodig ingewikkeld is. Indien wij in (4) $q > 0$ kiezen, dan nadert het verschil tussen $u(\xi)$ en $\sum_{h=0}^{m-1}$ tot nul als ξ op $\mathfrak{B}$ tot a nadert, zodat dit verschil in de term $\varepsilon(\xi)$ kan worden opgenomen. Hetgeen betekent dat in de definitie van H_a de voorwaarde, dat $u(\xi)$ op $\mathfrak{B}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $\xi - a$ zonder constante term bezit, vervangen kan worden door de eenvoudiger conditie dat $u(\xi)$ geschreven kan worden als een eindige som

$$\sum_{h=0}^{m-1} \chi_h (\xi - a)^{\psi_h} \log^{k_h} (\xi - a)$$

zonder constante term. Toch heb ik bovenstaande definitie gekozen omdat die in de toepassingen eenvoudiger blijkt te zijn.

Uit het bovenstaande volgt dat elke in H_a verwaarloosbare functie geschreven kan worden in de vorm

$$\sum_{h=0}^{m-1} \chi_h (\xi - a)^{\psi_h} \log^{k_h} (\xi - a) + \varepsilon(\xi),$$

waarin $\varepsilon(\xi)$ tot nul nadert als ξ op $\mathfrak{B}$ tot a nadert. Dit heeft tengevolge dat bij elke in H_a verwaarloosbare functie $\nu(\xi)$ een van ξ onafhankelijk positief getal q gevonden kan worden zodanig dat $(\xi - a)^q \, \nu(\xi)$ tot nul nadert, als ξ op $\mathfrak{P}$ tot a nadert. Immers ieder positief getal q dat groter is dan $-\mathrm{Re}\ \psi_h$ voor $h = 0, 1, \ldots, m-1$ bezit de genoemde eigenschap.

De voorwaarde dat ξ op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot a kan naderen dat $\arg(\xi - a)$ tot een eindige limiet nadert, mag worden vervangen door de zwakkere conditie dat $\mathfrak{P}$ een rij tot a naderende punten $\xi_0, \xi_1, \ldots$ bevat met de eigenschap dat bij onbegrensd aangroeiende n $\arg(\xi - a)$ tot een eindige limiet en $\dfrac{\xi_{n+1} - a}{\xi_n - a}$ tot 1 nadert.

Het is niet voldoende dat $\mathfrak{P}$ een rij tot a naderende punten $\xi_0, \xi_1, \ldots$ bevat met de eigenschap dat $\arg(\xi_n - a)$ voor $n \to \infty$ tot een eindige limiet nadert. Immers als $\mathfrak{P}$ de rij der punten $1, p^{-1}, p^{-2}, \ldots$ met limietpunt $a = 0$ voorstelt, waarin $p > 1$, dan is de functie $\xi^{\frac{2\pi i}{\log p}}$ voor elk punt ξ van $\mathfrak{P}$ gelijk aan 1 en behoort dus zeker niet tot een neutrix met domein $\mathfrak{P}$.

Het bewijs dat de klasse gevormd door de genoemde functies $\nu(\xi)$ een neutrix is verloopt als volgt. Die klasse is een additieve groep, zodat wij alleen behoeven te bewijzen: indien

$$(5) \quad \sum_{h=0}^{m-1} \chi_h (\xi - a)^{\psi_h} \log^{k_h}(\xi - a) + \varepsilon(\xi) = \gamma$$

is, waarin γ onafhankelijk is van ξ, dan is $\gamma = 0$. Wij mogen aannemen dat in iedere term $\mathrm{Re}\ \psi_h \leqq 0$ is, omdat de eventuele termen met $\mathrm{Re}\ \psi_h > 0$ in de term $\varepsilon(\xi)$ kunnen worden opgenomen. Ik zal aantonen dat de som $\sum\limits_{h=1}^{m-1}$ identiek nul is. Dit is voldoende voor het bewijs, omdat dan de constante γ gelijk is aan de tot nul naderende functie $\varepsilon(\xi)$, derhalve gelijk is aan nul.

In het bewijs dat $\sum\limits_{h=0}^{m-1} = 0$ is, mogen wij veronderstellen dat $m \geqq 1$ is en dat het bewijs reeds geleverd is als m door een kleiner geheel getal $\geqq 0$ vervangen wordt. Bovendien mogen wij aannemen dat de som $\sum\limits_{h=0}^{m-1}$ niet twee termen met hetzelfde getal ψ_h en hetzelfde getal k_h bevat, omdat twee zodanige termen kunnen worden samengevoegd.

Laat ik eerst het geval behandelen dat in de som $\sum_{h=0}^{m-1}$ iedere exponent ψ_h zuiver imaginair is en dat $k_h=0$ is. Stel $\psi_h = i\beta_h$. Beschouw een rij op $\mathfrak{F}$ tot a naderende punten $\xi_0, \xi_1, \ldots$ zodanig dat bij onbegrensd aangroeiende n $\arg(\xi_n - a)$ tot een eindige limiet λ en verder $\frac{\xi_{n+1} - a}{\xi_n - a}$ tot 1 nadert. Dan is het mogelijk bij elk positief getal p twee tot de rij $\xi_0, \xi_1, \ldots$ behorende en tot a naderende punten ξ en ξ^* te vinden zodanig dat $\left|\frac{\xi^* - a}{\xi - a}\right|$ tot p nadert. Indien $|\xi - \alpha| = e^{-r}$; $|\xi^* - \alpha| = e^{-r^*}$; $\arg(\xi - a) = \varphi$ en $\arg(\xi^* - \alpha) = \varphi^*$ gesteld wordt, dan volgt uit (5) dat de betrekking

$$\sum_{h=1}^{m-1} \chi_h e^{-i\beta_h r^* - \beta_h \varphi^*} = \gamma + o(1)$$

geldt; hierin stelt $o(1)$ een tot nul naderende functie voor. Uit $\varphi^* \to \lambda$ en $r^* - r \to -\log p$ volgt dus voor elke bestaanbare p

$$(6) \qquad \sum_{h=0}^{m-1} e^{i\beta_h \log p} \chi_h e^{-i\beta_h r - \beta_h \lambda} = \gamma + o(1).$$

Volgens veronderstelling bevat de som $\sum_{h=0}^{m-1}$ niet twee termen met dezelfde ψ_h en dezelfde k_h. Evenmin bevat die som een constante term. Omdat alle getallen k_h $(0 \leq h \leq m-1)$ in dit geval nul zijn, zijn dus de m getallen β_h $(0 \leq h \leq m-1)$ verschillend en $\neq 0$. Wij kunnen dus aan het bestaanbare getal p m waarden p_l $(l=0,1,\ldots,m-1)$ geven zodanig dat de m^2 getallen $e^{i\beta_h \log p_l}$ een determinant $\neq 0$ vormen. Uit (6) volgt dan dat elk van de m getallen $\chi_h e^{-i\beta_h r}$ tot een eindige limiet γ_h nadert, als het tot de rij $\xi_0, \xi_1, \ldots$ behorende punt ξ tot a nadert. Wij hebben hierboven gezien dat twee tot de rij $\xi_0, \xi_1, \ldots$ behorende punten ξ en ξ^* op zodanige wijze tot a kunnen naderen dat $r^* - r \to \frac{\pi}{\beta_h}$.

In dat geval nadert dus

$$\chi_h e^{-i\beta r^*} = -\chi_h e^{-i\beta_h^* r - \pi i}$$

tot γ_h en eveneens tot $-\gamma_h$. Hieruit volgt $\gamma_h = 0$, dus $\chi_h = 0$ $(0 \leq h \leq m-1)$, zodat de som $\sum_{h=0}^{m-1}$ inderdaad identiek nul is.

Laten wij tenslotte het overblijvende geval behandelen. Stel

$$\sigma = \min_{0 \leq h \leq m-1} \operatorname{Re} \psi_h \quad \text{en} \quad k = \max_{\substack{0 \leq h \leq m-1 \\ \operatorname{Re} \psi_h = \sigma}} k_h .$$

Omdat $\operatorname{Re} \psi_h \leq 0$, is $\sigma \leq 0$. Indien $\sigma = 0$ is, dan is iedere $\operatorname{Re} \psi_h$ gelijk aan nul en dus minstens een der getallen k_h positief, omdat het geval $\operatorname{Re} \psi_h = 0$; $k_h = 0$ $(0 \leq h \leq m-1)$ hierboven reeds behandeld is. Dus als $\sigma = 0$ is, dan is $k \geq 1$

Splits de som $\sum_{h=0}^{m-1}$ in twee deelsommen $\sum_1$ en $\sum_2$, waarin $\sum_1$ de bijdrage is der termen met $\operatorname{Re} \psi_h = \sigma$; $k_h = k$ en waarin $\sum_2$ dus de bijdrage der overige termen is. In elke term van de som $\sum_2$ is of wel $\operatorname{Re} \psi_h > \sigma$ of wel $\operatorname{Re} \psi_h = \sigma$; $k_h > k$, zodat iedere term van deze som $0 \, |\zeta - a|^{\sigma} \log^k |\zeta - a|$ is. Ook de constante γ is $0 \, |\zeta - a|^{\sigma} \log^k |\zeta - a|$, omdat of wel $\sigma < 0$ of wel $\sigma = 0$; $k \geq 1$. Uit (5) volgt dus

$$\sum\nolimits_1 = 0 \, |\zeta - a|^{\sigma} \log^k |\zeta - a| .$$

Als in iedere term van de som $\sum_1$ $\psi_h = \sigma + i\tau_h$ en bovendien $|\zeta - a| = e^{-r}$; $\arg(\zeta - a) = \varphi$ gesteld wordt, dan gaat deze formule over in

$$\sum\nolimits_1 \chi_h \, e^{-\sigma r - i\tau_h r + (\sigma + i\tau_h)\varphi} \, (-r + i\varphi)^{k_h} =$$

$$= 0 \, |\zeta - a|^{\sigma} \log^k |\zeta - a| = 0 \, e^{-\sigma r} \, r^k ,$$

en dus, wegens $\varphi \longrightarrow \lambda$,

$$(7) \qquad \sum_{T} \chi_h \, e^{-i\tau_h r + (\sigma + i\tau_h)\lambda} = O(1).$$

Hier ontmoeten wij opnieuw het hierboven reeds behandelde geval, waarin ψ_h door het zuiver imaginaire getal $i\tau_h$ en waarin de getallen k_h door nul vervangen zijn; hierbij is zelfs in zoverre nog de vereenvoudiging op te merken dat de constante γ bovendien door nul vervangen is. Wij hebben hierboven gezien dat uit (7) volgt dat alle in de som $\sum_T$ voorkomende factoren χ_h gelijk aan nul zijn, zodat $\sum_1$ identiek nul is. Uit (5) blijkt dan dat

$$\sum_2 \chi_h (\xi - a)^{\psi_h} \log^{k_h} (\xi - a) + \varepsilon(\xi) = \gamma ,$$

waarin de som $\sum_2$ minder dan m termen bevat. Volgens de inductieveronderstelling is dan de som $\sum_2$ identiek nul, waarmede het bewijs geleverd is.

<u>Voorbeeld 1: Indien twee verschillende punten a en b verbonden worden door een continue rectificeerbare kromme Γ die in het punt a een raaklijn bezit en die het punt a niet bevat, dan is voor ieder geheel getal $k \geq 0$ en voor elke complexe s</u>

$$(8) \qquad \int_{H_a}^{b} (z-a)^{s-1} \log^k (z-a)\, dz = \begin{cases} (k+1)^{-1} \log^{k+1} (b-a) & \text{voor } s = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^k \dfrac{(b-a)^s}{s} & \text{voor } s \neq 0 \end{cases}$$

De bedoeling is dat het domein van H_a gevormd wordt door een boog van Γ met beginpunt a.

Het bewijs is als volgt. Voor elk punt ξ op Γ is

$$(9) \qquad \int_{\xi}^{b} (z-a)^{-1} \log^k (z-a)\, dz = (k+1)^{-1} \log^{k+1} (b-a) + $$
$$ -(k+1)^{-1} \log^{k+1} (\xi - a),$$

waarbij de laatste term verwaarloosbaar in H_a is, hetgeen de bewering voor $s = 0$ geeft. Voor $s \neq 0$ is

$$\int_{\xi}^{b} (z-a)^{s-1}\, dz = \frac{(b-a)^s}{s} - \frac{(\xi - a)^s}{s} ,$$

dus

$$(1.0)\quad \int_{\xi}^{b} (z-a)^{s-1} \log^{k} (z-a)\, dz = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k} \frac{(b-a)^{s}}{s} - \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k} \frac{(\xi-a)^{s}}{s},$$

waarin de laatste term gelijk is aan

$$- \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \left\{ \left(\frac{d}{ds}\right)^{k-h} \frac{1}{s} \right\} (\xi -a)^{s} \log^{h} (\xi -a)$$

en dus wegens $s \neq 0$ verwaarloosbaar in H_a is. Dit geeft de bewering voor $s \neq 0$.

Formule (8) geeft voor $s \neq 0$ en voor elk geheel getal $m \geq 0$ de genoegelijke betrekking

$$(11)\quad \int_{H_a}^{b} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{m} (z-a)^{s-1} \log^{k} (z-a)\, dz =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{m} \int_{H_a}^{b} (z-a)^{s-1} \log^{k} (z-a)\, dz,$$

want het linkerlid is gelijk aan

$$\int_{H_a}^{b} (z-a)^{s-1} \log^{k+m} (z-a) dz = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k+m} \frac{(b-a)^{s}}{s} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{m} \int_{H_a}^{b} (z-a)^{s-1} \log^{k} (z-a)\, dz.$$

Dit is alvast een eenvoudige rekenregel geldig bij gebruik van de neutrix H_a. Afgezien van het triviale geval $m=0$ geldt formule (11) niet in het punt $s=0$, omdat de in het rechterlid voorkomende integraal blijkens (8) een discontinue functie van s in $s=0$ voorstelt.

Zoals reeds herhaalde malen opgemerkt is, worden aan een goede neutrix bepaalde eisen gesteld betreffende het principe van analytische voortzetting. Aan dit principe zullen hierna, in het bijzonder in § 4 enige beschouwingen worden gewijd, maar hier beperk ik mij tot de volgende opmerking. In het halfvlak Re $s > 0$ stelt

$$\int_a^b (z-a)^{s-1}\log^k(z-a)\,dz = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \frac{(b-a)^s}{s} =$$

$$= (b-a)^s \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k-h} \frac{1}{s} \right\} \log^h (b-a)$$

een analytische functie van s voor, die in het gehele s-vlak, de oorsprong uitgezonderd, analytisch kan worden voortgezet. De neutrix H_a voldoet aan de eis dat het linkerlid van (8) voor elke complexe s, de oorsprong uitgezonderd, die analytische functie voorstelt. Die functie bezit in de oorsprong een (k+1)-voudige pool, maar toch neemt het linkerlid van (8) in dat punt een eindige waarde aan. Trouwens alle geneutraliseerde uitdrukkingen nemen uitsluitend eindige waarden aan.

Voorbeeld 2: Stel twee verschillende punten a en b worden verbonden door een continue rectificeerbare kromme Γ die in het punt a een raaklijn bezit en die het punt a niet bevat. Zij β een boog van Γ met beginpunt a. Indien u(z) op Γ gedefinieerd en langs Γ integreerbaar is van elk punt ξ van β naar b en indien $u(\xi)$ op β een Hadamardontwikkeling naar machten van ξ - a bezit, dan bestaat de geneutraliseerde integraal

$$\int_{H_a}^{b} u(z)\,dz.$$

Om dit te bewijzen kiezen wij in formule (4) q > 0 en stellen wij

$$u(\xi) = \sum_{h=0}^{m-1} \chi_h\,(\xi-a)^{\psi_h} \log^{k_h}(\xi-a) + r(\xi),$$

zodat $r(\xi)$ tot nul nadert als ξ op β tot a nadert. Omdat r(z) langs Γ van elk punt ξ van β naar b integreerbaar is, is dus r(z) langs Γ van a naar b integreerbaar, zodat

$$\int_{H_a}^{b} r(z)\,dz = \int_a^b r(z)\,dz$$

en dus

$$\int_{H_a}^{b} u(z)\,dz = \sum_{h=0}^{m-1} \chi_h \int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi_h} \log^{k_h}(z-a)\,dz + $$
$$+ \int_a^b r(z)dz.$$

§ 3. Over het verband tussen convergente en asymptotisch convergente reeksen.

Uit het voorgaande voorbeeld blijkt het bestaan van de geneutraliseerde integraal

$$\int_{H_a}^{b} u(z)\,dz,$$

als de integraal een Hadamardontwikkeling naar machten van z-a bezit. Bijvoorbeeld, indien b positief is en

$$u(x) = x^{-s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \qquad (0 < x \leq b),$$

waarin s een willekeurig complex getal voorstelt, dan bestaat de geneutraliseerde integraal

$$\int_{H_0}^{b} u(x)\,dx,$$

omdat u(x) voor de in de omgeving van de oorsprong gelegen positieve x de Hadamardontwikkeling

$$\sum_{h=0}^{\infty}{}' \; (-)^h \, h! \; x^{h-s}$$

naar machten van x bezit. Hieruit blijkt dat het niet nodig is dat de integrand u(z) voor de in de omgeving van a op de integratieweg gelegen punten z een convergente ontwikkeling van de gedaante

$$(12) \quad u(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \chi_h \,(z-a)^{\psi_h} \log^{k_h}(z-a)$$

bezit, waarin χ_h, ψ_h en k_h onafhankelijk van z zijn, waarin Re $\psi_h \to \infty$ voor $h \to \infty$ en waarin de getallen k_h geheel $\geqq 0$ zijn.

Goed, zal de lezer opmerken, al moge dan de voorwaarde van convergentie niet nodig zijn, voldoende is ze toch zeker, want uit de voorwaarde dat Re ψ_h voor $h \to \infty$ onbegrensd aangroeit, volgt dat de termen voor de in de omgeving van a gelegen punten z in absolute waarde zeer snel afnemen als h aangroeit, zodat, als van de convergente reeks genoeg termen genomen worden, de restterm in absolute waarde zeer klein is voor de op de integratieweg in de omgeving van a gelegen punten z. Hoe vreemd het ook klinken moge, dit is niet steeds het geval, zelfs niet bij reeksen van een eenvoudige gedaante. Laten wij het eenvoudige geval behandelen dat $a=0$; $0 < b < 1$; $\psi_h = h$; $k_h = h^2$; $\chi_o = 0$ is en dat de integratieweg door het interval $0 < x \leqq b$ gevormd wordt. Dan is

$$(13) \qquad u(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \chi_h x^h \log^{h^2} x \qquad (0 < x \leqq b)$$

Wij zullen bewijzen dat de coefficienten χ_h zó gekozen kunnen worden, dat iedere term van deze convergente reeks positief is, dat de som $u(x)$ in het interval $0 < x \leqq b$ continu is en dat toch $u(x)$ niet integreerbaar is van H_o naar b.

Ik definieer χ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ door de voorwaarde dat $\chi_h x^h \log^{h^2} x$ in het punt

$$x = x_h = e^{-\frac{h^2}{h+\sqrt{\log h}}}$$

de waarde $\frac{1}{h^2} x_h^{-\sqrt{\log h}}$ aanneemt. Dan is $(-)^{h^2} \chi_h > 0$, zodat iedere term in de beschouwde reeks positief is.

Bij gegeven positief geheel getal h stelt

$$\chi_h x^{h+\sqrt{\log h}} \log^{h^2} x$$

een positieve functie van x voor, die haar grootste waarde aanneemt in het punt x bepaald door

$$h + \sqrt{\log h} = \frac{h^2}{\log \frac{1}{x}} ,$$

dus in het punt $x = x_h$. Deze maximale waarde is

$$\frac{1}{h^2} x_h^{-\sqrt{\log h}} \cdot x_h^{\sqrt{\log h}} = \frac{1}{h^2} ,$$

zodat

$$\chi_h \, x^h \log^{h^2} x \leq \frac{1}{h^2} \, x^{-\sqrt{\log h}} .$$

De reeks die u(x) voorstelt heeft dus de majorante

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \, x^{-\sqrt{\log h}} ,$$

die voor $0 < x \leq b$ convergeert, omdat voor voldoend grote h de ongelijkheid $x^{-\sqrt{\log h}} < h^{\frac{1}{2}}$ geldt. De functie u(x) is dus continu in het interval $0 < x \leq b$.

Om aan te tonen dat u(x) toch niet integreerbaar is van H_0 naar b, stel ik

$$\varepsilon_h = - \frac{1}{2h^2} \log x_h \text{ , dus } \varepsilon_h > 0.$$

In het interval $x_h \leq x \leq x_h e^{\varepsilon_h}$ is

$$- \log x \geq - \log x_h - \varepsilon_h = (-\log x_h) \left(1 - \frac{1}{2h^2}\right) ,$$

dus

$$h^2 \log (- \log x) - h^2 \log (- \log x_h) \geq h^2 \log \left(1 - \frac{1}{2h^2}\right) \geq \log \tfrac{1}{2} ,$$

omdat

$$-2h^2 \log \left(1 - \frac{1}{2h^2}\right) = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2h^2)^2} + \ldots$$

een monotone functie van h is. Aldus vinden wij

$$\frac{(-)^{h^2} \log^{h^2} x}{(-)^{h^2} \log^{h^2} x_h} = e^{h^2 (\log(-\log x) - \log(-\log x_h))} \geq e^{\log \frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} ,$$

dus

$$\chi_h x^h \log^{h^2} x \geq \tfrac{1}{2}\, \chi_h\, x_h^{\,h} \log^{h^2} x = \frac{1}{2h^2}\, x_h^{-\sqrt{\log h}}.$$

Voor iedere gehele positieve h waarvoor $x_h\, e^{\varepsilon_h} \leq b$ is, is dus

$$\chi_h \int_{x_h}^{b} x^h \log^{h^2} x\, dx \geq \chi_h \int_{x_h}^{x_h e^{\varepsilon_h}} x^h \log^{h^2} x\, dx$$

$$\geq \frac{1}{2h^2}\,(e^{\varepsilon_h} - 1)\, x_h^{\,1-\sqrt{\log h}} > \frac{\varepsilon_h}{2h^2}\, x_h^{\,1-\sqrt{\log h}}.$$

Omdat $\dfrac{\log \varepsilon_h}{\log x_h}$ en $\dfrac{\log h}{\log x_h}$ voor $h \to \infty$ tot nul naderen, is

$$\frac{\varepsilon_h}{h^2} = x_h^{\frac{\log \varepsilon_h}{\log x_h} - 2\frac{\log h}{\log x_h}} > x_h^{\,c-1},$$

waarin c een geschikt gekozen van h onafhankelijk getal voorstelt, zodat voor $\xi = x_h$ de ongelijkheid

$$\chi_h \int_{\xi}^{b} x^h \log^{h^2} x\, dx > \tfrac{1}{2}\xi^{\,c-\sqrt{\log h}}$$

geldt. Hieruit volgt dat het linkerlid niet in $\xi = H_o$ een geneutraliseerde waarde aanneemt, want anders zou die functie, afgezien van een in H_o verwaarloosbare functie, gelijk zijn aan een constante en dus, volgens de in de voorgaande paragraaf gemaakte opmerking, hoogstens dezelfde orde van grootte bezitten als ξ^{-q}, waarin q een geschikt gekozen van ξ onafhankelijk positief getal voorstelt, hetgeen in strijd is met bovenstaande ongelijkheid. Dit voltooit het bewijs.

Dit resultaat wijst er op dat in de theorie van de Hadamardneutrices niet het begrip van gewone convergentie, doch dat van asymptotische convergentie het meest geschikte instrument is. Van meer belang is het dat het resultaat ons waarschuwt tegen een voor de hand liggende fout. Als een functie een convergente reeksontwikkeling bezit die tevens asymptotisch convergeert, is dan die functie asymptotisch gelijk aan de asymptotische som van de reeks? Reeds bij reeksen van eenvoudige gedaante blijkt dat niet altijd het geval te zijn, zelfs niet bij uniform convergente reeksen met uitsluitend positieve termen. Laten wij bijvoorbeeld de reeks (13) beschouwen, waarin wij de coefficient χ_h zó kiezen dat $\chi_h x^h \log^{h^2} x$ in het punt $x = e^{-h}$ de waarde $\frac{1}{h^2}$ aanneemt. Dan is iedere term in de reeks positief en neemt bij gegeven rangnummer h zijn grootste waarde aan voor $x = e^{-h}$, dus

$$\chi_h x^h \log^{h^2} x \leqq \frac{1}{h^2},$$

zodat de beschouwde reeks uniform convergeert.
Bovendien geldt voor $x = e^{-m}$, waarin m een willekeurig geheel positief getal voorstelt, de ongelijkheid

$$\sum_{h=m}^{\infty} \chi_h x^h \log^{h^2} x > \chi_m x^m \log^{m^2} x = \frac{1}{m^2} = \frac{1}{(\log \frac{1}{x})^2}.$$

Hieruit volgt dat u(x) niet voor kleine positieve x asymptotisch gelijk is aan de asymptotische som van de reeks $\sum_{h=1}^{\infty}{}' \chi_h x^h \log^{h^2} x$, want in dat geval zou het mogelijk zijn bij elk van ξ onafhankelijk geheel positief getal m een van ξ onafhankelijk getal q_m te vinden dat voor $m \rightarrow \infty$ onbegrensd aangroeit, met de eigenschap dat

$$\sum_{h=1}^{m-1} \chi_h x^h \log^{h^2} x - u(x) = - \sum_{h=m}^{\infty} \chi_h x^h \log^{h^2} x$$

voor kleine positieve x hoogstens dezelfde orde van grootte bezit als x^{q_m}; dit zou impliceren dat $\frac{1}{(\log \frac{1}{x})^2}$ hoogstens dezelfde orde van grootte zou bezitten als x^{q_m}, hetgeen niet zo is.
Aan het hier gesignaleerde phenomeen dat tot een niet steeds in acht genomen voorzichtigheid dient te manen, heb ik een artikeltje gewijd dat verschijnen zal in het aan G. Polya opgedragen gedenkschrift.

Dat het in het hierboven beschouwde voorbeeld spaak loopt zit hem in het feit dat $\frac{k_h}{\mathrm{Re}\,\psi_h} = h$ voor $h \to \infty$ onbegrensd aangroeit. In de theorie van de Hadamard neutrices kunnen wij de asymptotische conditie vervangen door de niet-asymptotische voorwaarde (12), als wij dan maar aan de getallen k_h de supplementaire voorwaarde opleggen dat $\frac{k_h}{\mathrm{Re}\,\psi_h}$ voor grote gehele positieve h begrensd is, dus dat

(14) $$0 \leqq k_h \leqq c\ \mathrm{Re}\,\psi_h ,$$

waarin c een geschikt gekozen van n onafhankelijk positief getal voorstelt. De juistheid van deze uitspraak blijkt uit het volgende.

<u>Stelling:</u> Indien arg $(\xi - a)$ op $\mathfrak{P}$ begrensd is, indien $\mathrm{Re}\,\psi_h \to \infty$ voor $h \to \infty$ en indien voor iedere voldoend grote gehele h de ongelijkheden (14) en

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \psi_h < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

gelden, waarin c en ε van h onafhankelijke positieve getallen voorstellen, dan is voor de in de omgeving van a op $\mathfrak{P}$ gelegen punten ξ

(15) $$\sum_{n=0}^{\infty}{}' \chi_n (\xi - a)^{\psi_n} \log^{k_n}(\xi - a) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n (\xi - a)^{\psi_n} \log^{k_n}(\xi - a),$$

aangenomen dat de laatste reeks absoluut convergeert in minstens één punt $\xi \neq a + 1$ van $\mathfrak{P}$.

In het hier volgende bewijs stellen c_1, c_2 en c_3 geschikt gekozen van ξ onafhankelijke positieve getallen voor. Eenvoudigheidshalve duid ik $(\xi - a)^{-1}$ met ω aan, zodat $|\omega| \to \infty$ als ξ tot a nadert. Omdat $\arg(\xi - a) = -\arg \omega$ begrensd is, is

$$|\log \omega| \leqq \log|\omega| + c_1.$$

Voor voldoend grote gehele n is dus

$$|\log^{k_n} \omega| = (\log|\omega| + c_1)^{k_n} \leqq (\log|\omega| + c_1)^{c\ \mathrm{Re}\,\psi_n}$$

en

$$\left|\omega^{-\psi_n}\right| = e^{-(\operatorname{Re}\psi_n)\log|\omega| + (\arg\omega)\operatorname{Im}\psi_n}$$

$$\leq e^{-(\operatorname{Re}\psi_n)(\log|\omega| - c_2)},$$

daar arg ω begrensd en $|\operatorname{Im}\psi_n| \leq (\cot\varepsilon)\operatorname{Re}\psi_n$ is. Derhalve is

$$\left|\omega^{-\psi_n}\log^{k_n}\omega\right| \leq e^{-(\operatorname{Re}\psi_n)(\log|\omega| - c\log(\log|\omega| + c_1) - c_2)}.$$

Indien η een punt $\neq a+1$ van $\mathfrak{P}$ voorstelt, waar de in het rechterlid van (15) genoemde reeks absoluut convergeert, dan is

$$\left|(\eta - a)^{\psi_n}\log^{-k_n}(\eta - a)\right| \geq e^{-c_3\operatorname{Re}\psi_n},$$

dus

$$\left|\chi_n\,\omega^{-\psi_n}\log^{k_n}\omega\right| \leq e^{-(\operatorname{Re}\psi_n)(\log|\omega| - c\log(\log|\omega| + c_1) - c_2 - c_3)}$$

$$\left|\chi_n(\eta - \alpha)^{-\psi_n}\log^{k_n}(\eta - \alpha)\right|.$$

Elk voldoend groot geheel positief getal h heeft dus de eigenschap dat deze ongelijkheid geldt voor iedere gehele $n \geq h$, dus

(16) $$\left|\sum_{n=h}\chi_n\,\omega^{-\psi_n}\log^{k_n}\omega\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\chi_n(\eta-a)^{-\psi_n}\log^{k_n}(\eta-a)\right|.\max_{n\geq h} e^{-(\operatorname{Re}\psi_n)(\log|\omega| - c\log(\log|\omega|+c_1) - c_2 - c_3)}.$$

De som $\sum_{n=0}^{\infty}$ is een van ω, dus van ξ onafhankelijk eindig getal. Voor voldoend grote $|\omega|$ is
$\frac{1}{2}\log|\omega| - c\log(\log|\omega| + c_1) - c_2 - c_3 > 0$
en bij elk vast bestaanbaar getal q is het mogelijk een vast positief geheel getal h te vinden zodanig dat
$\operatorname{Re}\psi_n \geq 2q$ voor $n \geq h$.
In dat geval is het in (16) genoemde maximum

$$\leq e^{-2q\,.\,\frac{1}{2}|\log\omega|} = |\omega|^{-q} = |\xi - a|^{q},$$

zodat dit maximum voor $h \to \infty$ asymptotisch tot nul nadert.

Dat is dan ook het geval met het linkerlid van (16), zodat

$$\sum_{n=0}^{h-1} \chi_n (\xi - a)^{\psi_n} \log^{k_n} (\xi - a) \text{ asymptotisch tot}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n (\xi - a)^{\psi_n} \log^{k_n} (\xi - a)$$

nadert. Dit geeft het gevraagde resultaat (15).

§ 4. Over het analytisch gedrag van functies voorgesteld door geneutraliseerde integralen.

Stel twee verschillende punten a en b worden verbonden door een continue rectificeerbare kromme Γ die in a een raaklijn bezit en die a niet bevat; het eindpunt b wordt wèl tot de kromme gerekend. Zij Λ een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen gebied. Zij $u(\xi, \eta)$ een continue functie van ξ op Γ en een analytische functie van η in Λ. Tenslotte nemen wij aan dat $u(\xi, \eta)$, uniform in η, op Γ een Hadamardontwikkeling

$$u(\xi,\eta) \backsim \sum_{h=0}^{\infty}{}' \chi_h(\eta) (\xi - a)^{\psi_h(\eta) - 1} \log^{k_h} (\xi - a)$$

naar machten van $\xi - a$ bezit, waarin de coefficienten $\chi_h = \chi_h(\eta)$ en de exponenten $\psi_h = \psi_h(\eta)$ analytische functies van η in Λ zijn, terwijl de gehele getallen k_h onafhankelijk, niet alleen van ξ, maar ook van η zijn. Volgens voorbeeld 2 in § 2 heeft de integraal

$$\int_{H_a}^{b} u(z,\eta)\, dz$$

voor elk in Λ gelegen punt η een eindige waarde.
Thans zullen wij bewijzen dat deze integraal een analytische functie van η voorstelt overal in Λ waar iedere niet constante exponent $\psi_h(\eta)$ ongelijk -1 is, terwijl de in Λ gelegen punten η waar minstens een der niet-constante exponenten $\psi_h(\eta)$ de waarde -1 aanneemt, een

pool of een regulier punt van die functie is.

Volgens afspraak is het domein $\mathfrak{P}$ van H_a een boog van Γ met beginpunt a.

Dat de Hadamardontwikkeling van $u(\xi,\eta)$ uniform in η geldt, betekent dat in formule (4), waarin χ_h en ψ_h door $\chi_h(\eta)$ en $\psi_h(\eta)-1$ vervangen worden, de getallen m_o, ε_o en c_m onafhankelijk van η gekozen kunnen worden. Kiezen wij in formule (4) $q > 0$, dan nadert het rechterlid tot nul als ξ op $\mathfrak{P}$ tot a nadert.

Dus

$$u(\xi,\eta) = \sum_{h=0}^{m-1} \chi_h(\eta)(\xi-a)^{\psi_h(\eta)-1} \log^{k_h}(\xi-a) + r(\xi,\eta)$$

waarin $r(\xi,\eta)$ voor $\xi \rightarrow a$ tot nul nadert en wel uniform in η. Volgens hypothese is $u(\xi,\eta)$ een op Γ continue functie van ξ en een in Λ analytische functie van η. Dit is ook het geval met elk der m termen

$\chi_h(\eta)(\xi-a)^{\psi_h(\eta)} \log^{k_h}(\xi-a)$, dus eveneens met de rest $r(\xi,\eta)$. Omdat $r(\xi,\eta)$ uniform in η tot nul nadert als ξ op $\mathfrak{P}$ tot a nadert, stelt dus

$$\int_{H_a}^{b} r(z,\eta)\,dz = \int_{a}^{b} r(z,\eta)\,dz$$

een in Λ analytische functie van η voor. Indien $\psi_h(\eta)$ onafhankelijk van η is, dan stelt

$$(17) \qquad \chi_h(\eta) \int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi_h(\eta)-1} \log^{k_h}(z-a)\,dz$$

evidenterwijze een in Λ analytische functie van η voor, omdat dan de integraal constant is. Indien $\psi_h(\eta)$ wèl van η afhangt, dan volgt uit voorbeeld 1 in § 2 dat (17) in Λ een analytische functie van η voorstelt overal waar $\psi_h(\eta) \neq 0$ is en dat die functie in elk in Λ liggend punt met $\psi_h(\eta) = 0$ een pool of een regulier punt heeft. Dit voltooit het bewijs.

Voorbeeld 3 (Gammafunction): Voor iedere complexe s, de punten s=0, -1, -2, ... uitgezonderd, is

(18) $$\int_{H_o}^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(s).$$

Volgens afspraak is het domein van H_o een interval $0 < \xi \leqq \beta$, waarin β positief is.

Het bewijs is eenvoudig. Formule (18) geldt in het halfvlak Re $s > 0$, omdat in dat halfvlak het linkerlid van (18) gelijk is aan de corresponderende convergente integraal met grenzen 0 en ∞. De integraal $\int_1^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x} dx$

is een gehele functie van s. Omdat $\xi^{s-1}\, e^{-x}$ voor de in de omgeving van de oorsprong gelegen punten $\xi > 0$ de Hadamardontwikkeling

$$\sum_{h=0}^{\infty}{}' \frac{(-)^h}{h!} \xi^{s+h-1}$$

bezit, stelt $\int_{H_o}^{1} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx$ volgens de voorgaande paragraaf voor iedere complexe s, de punten 0, -1, -2,... uitgezonderd, een analytische functie van s voor. Dit is dus ook het geval met de in de in (18) voorkomende integraal. De door deze integraal voorgestelde functie is identiek met de gammafunctie $\Gamma(s)$ in het halfvlak Re $s > 0$, dus dit geldt dus voor iedere complexe s, de punten s=0, -1, -2, ... uitgezonderd.

Op overeenkomstige manier vinden wij:

Voor iedere gehele $k \geqq 0$ en voor iedere complexe s, de punten s = 0, -1, -2, ... uitgezonderd, is

$$\int_{H_o}^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x} \log^k x\, dx = \Gamma^{(k)}(s).$$

Formule (18) geldt niet als s een geheel getal $\leqq 0$ is, want in zulk een punt is het rechterlid oneindig, terwijl iedere geneutraliseerde waarde, dus ook het linkerlid van (18), eindig is.

Welke die eindige waarde is, zullen wij in voorbeeld 15 van § 8 zien.

Op dezelfde manier vinden wij de volgende twee voorbeelden.

Voorbeeld 4 (Zetafunctie van Riemann).

Zij $0 < \theta \leq 1$. Voor iedere complexe s, de punten s=0, -1, -2,... uitgezonderd, is

$$\int_{H_0}^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-\theta x}}{1-e^{-x}}\, dx = \Gamma(s)\ \zeta(s,\theta),$$

waarin $\zeta(s,\theta)$ de analytische functie voorstelt die in het halfvlak Re $s>1$ door de reeks

$$\zeta(s,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\theta)^s}$$

wordt gerepresenteerd.

Voorbeeld 5: Indien $-\pi < \arg z < \pi$ en indien $k-m-\frac{1}{2}$ niet een geheel getal ≥ 0 is, dan is

$$\int_{H_0}^{\infty} t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}-k+m\right)e^{\frac{1}{2}z}z^k\, W_{k,m}(z),$$

waarin $W_{k,m}(z)$ de Whittakerfunctie voorstelt.

§ 5. De Hadamardneutrix $\tilde{H}_b$.

In § 2 hebben wij de Hadamardneutrix H_a ingevoerd en thans zullen wij op overeenkomstige manier een analoge neutrix invoeren.

Zij $\mathfrak{P}$ een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen puntverzameling met een in het eindige en niet tot $\mathfrak{P}$ behorend limiet punt b, met de eigenschap dat een punt η op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot b kan naderen dat arg $(b-\eta)$ tot een eindige limiet nadert. Ik zeg dat een functie $v(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $b-\eta$ bezit als ze op $\mathfrak{P}$ gedefinieerd is en voor de in de omgeving van b op $\mathfrak{P}$ gelegen punten η een asymptotische ontwikkeling bezit van de gedaante

$$v(\eta) \backsim \sum_{h=0}^{\infty}{}' \, \chi_h \, (b-\eta)^{\psi_h} \log^{k_h} (b-\eta),$$

waarin χ_h, ψ_h en k_h onafhankelijk van η zijn, waarin Re $\psi_h \to \infty$ voor $h \to \infty$ en waarin verder k_h geheel ≥ 0 is. Desgewenst mag de voorwaarde dat η op zodanige wijze op $\mathfrak{P}$ continu tot b kan naderen, dat arg(b-η) tot een eindige limiet nadert, vervangen worden door de zwakkere conditie dat $\mathfrak{P}$ een rij tot b naderende punten $\eta_0, \eta_1, \ldots$ bevat met de eigenschap dat bij onbegrensd aangroeiende n arg(b-η) tot een eindige limiet en $\dfrac{b-\eta_{n+1}}{b-\eta_n}$ tot 1 nadert.

De op $\mathfrak{P}$ gedefinieerde functies $\nu(\eta)$, die voor de in de omgeving van b op $\mathfrak{P}$ gelegen punten η geschreven kunnen worden als een som $v(\eta) + \delta(\eta)$, waarin $v(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van b-η zonder constante term bezit en waarin $\delta(\eta)$ tot nul nadert, als η op $\mathfrak{P}$ tot b nadert, vormen een neutrix, die de Hadamardneutrix $\tilde{H}_b$ genoemd wordt. Dat die functies een neutrix vormen, blijkt uit de volgende isomorphie-overwegingen. Stel $\eta = p - \xi$, waarin p een willekeurig gekozen punt voorstelt. Doorloopt η de gegeven verzameling $\mathfrak{P}$, dan doorloopt ξ een zekere verzameling $\mathfrak{P}^*$, die a= p-b als limietpunt heeft. De functies $\nu(p-\xi)$ vormen de Hadamardneutrix H_a met drager a, domein $\mathfrak{P}^*$ en veranderlijke ξ. Omdat er een (1,1)-verwantschap bestaat tussen de functies $\nu(\eta)$ en de tot H_a behorende functies $\nu(p-\xi)$, vormen deze functies dus een met H_a isomorphe neutrix volgens voorbeeld 6, gegeven in §5 van voordracht II.

Twee Hadamardneutrices H_a en $\tilde{H}_a$ met dezelfde drager a, hetzelfde domein $\mathfrak{P}$ en dezelfde veranderlijke ξ, zijn toch verschillend. Immers de eerste neutrix bevat log(ξ -a) en de tweede bevat log(a-ξ); indien deze neutrices dezelfden waren, dan zouden ze ook het verschil log(ξ -a)- log(a-ξ) bevatten, hetgeen buitengesloten is, omdat dit verschil een constant oneven veelvoud van πi, dus gelijk aan een constante $\neq 0$ is.

Omdat $\tilde{H}_b$ isomorph is met H_a, is het niet nodig de eigenschappen af te leiden van de eerstgenoemde neutrix, die door middel van de transformatie $\eta = p - \xi$ herleid wordt tot de neutrix H_a waarvan wij de eigenschappen reeds kennen.

In de volgende voorbeelden worden beta-integralen behandeld.

<u>Voorbeeld 6</u>: <u>Indien twee verschillende punten a en b verbonden worden door een continue rectificeerbare kromme Γ die noch het punt a noch het punt b bevat en indien geen der twee complexe getallen s en t gelijk is aan een geheel getal ≤ 0, dan is</u>

$$(19)\qquad \int_{H_a}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{s-1} (b-z)^{t-1}\, dz = (b-a)^{s+t-1} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} .$$

Volgens afspraak vormen de in de omgeving van a op Γ gelegen punten het domein van H_a, terwijl de in de omgeving van b op Γ gelegen punten het domein van $\tilde{H}_b$ vormen.

Dat formule (19) voor Re $s > 0$; Re $t > 0$ geldt, is evident, want dan is het linkerlid gelijk aan de corresponderende convergente integraal met grenzen a en b. Zij p een willekeurig punt van Γ. Omdat de integrand op Γ in de nabijheid van a de Hadamardontwikkeling

$$\sum_{h=0}^{\infty}{}' \binom{t-1}{h} (b-a)^{t-1-h} (z-a)^{s+h-1}$$

naar machten van z-a bezit, stelt volgens § 4 de integraal

$$(20)\qquad \int_{H_a}^{p} (z-a)^{s-1} (b-z)^{t-1}\, dz$$

een analytische functie van s voor voor iedere complexe s, de punten s=0, -1, -2,... uitgezonderd, en tevens een gehele functie van t, omdat iedere exponent s+h-1 onafhankelijk van t is. Met behulp van de transformatie b-z = w vinden wij op dezelfde manier dat

$$(21)\qquad \int_{p}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{s-1} (b-z)^{t-1}\, dz$$

een analytische functie van t voorstelt voor iedere complexe t, de punten $t = 0,-1,-2,\ldots$ uitgezonderd, en tevens een gehele functie van s. De integraal (19), die de som van (20) en (21) is, stelt dus een analytische functie van s en t voor, indien de punten $s = 0,-1,-2,\ldots$ en ook de punten $t = 0,-1,-2,\ldots$ uitgezonderd worden. Formule (19), die voor $\mathrm{Re}\, s > 0$; $\mathrm{Re}\, t > 0$ geldt, geldt derhalve voor elke s en elke t, indien geen der twee getallen s en t gelijk is aan een geheel getal $\leqq 0$.

Op dezelfde manier bewijzen wij de volgende resultaten.

Voorbeeld 7: Onder de voorwaarden van het voorgaande voorbeeld is voor elk geheel getal $k \geqq 0$ en elk geheel getal $l \geqq 0$

$$\int_{H_a}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{s-1}(b-z)^{t-1}\log^k(z-a)\log^l(b-z)\,dz =$$

$$= \frac{\partial^{k+l}}{\partial s^k\,\partial t^l}\,(b-a)^{s+t-1}\,\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \;.$$

Voorbeeld 8: Indien geen van de twee complexe getallen s en t een geheel getal $\leqq 0$ is en indien verder λ positief is, dan is

$$\lambda \int_{H_0}^{H_1} x^{\lambda s-1}\,(1-x^\lambda)^{t-1}\,dx = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} ,$$

dus

$$\lambda \int_{H_0}^{\tilde{H}_1} x^{\lambda s-1}\,(1-x^\lambda)^{t-1}\,dx = \int_{H_0}^{\tilde{H}_1} y^{s-1}\,(1-y)^{t-1}\,dy .$$

Wij drukken dit uit door te zeggen dat hier de substitutie $y = x^\lambda$ kan worden toegepast. Wij zullen in § 9 zien in hoeverre de methode van de invoering van een nieuwe integratieveranderlijke in de theorie van de geneutraliseerde integralen geoorloofd is.

§ 6. De waarde welke aan de een functie voorstellende uitdrukking wordt toegekend in een singulier punt van die functie.

Verdient het aanbeveling aan de functie $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor $s=1$; $t=0$ een bepaalde eindige waarde toe te kennen? Domweg substitueren gaat niet, omdat dan $\Gamma(s)$ en $\Gamma(s+t)$ de waarde 1 aannemen en $\Gamma(t)$ oneindig wordt. Het afwijzende standpunt volgens hetwelk een dergelijke waaghalzerij ten enemale verboden is, is wel te verdedigen, maar dient toch nader bekeken te worden. De analyse bevat formules waarin de uitdrukking $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voorkomt. Een zodanige formule heeft niet zonder meer geldigheid voor $s=1$; $t=0$, omdat $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor die waarden van s en t geen betekenis heeft. Het zou prachtig zijn indien de bewuste formule in een geldige relatie zou overgaan doordat aan $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor die waarden van s en t een bepaalde eindige waarde γ wordt toegekend. Immers dan zouden wij eens en voor al kunnen afspreken dat $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor $s=1$; $t=0$ de waarde γ bezit, waardoor het geldigheidsgebied van de optredende formules een uitbreiding, misschien zelfs een belangrijke uitbreiding zou ondergaan.

In werkelijkheid is de situatie niet zo eenvoudig als hier geschetst. Weliswaar treedt in de analyse een uitgebreide klasse van problemen op waarbij het zeker aanbeveling verdient aan $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor $s=1$; $t=0$ een bepaalde eindige waarde γ toe te kennen en als wij ons tot die klasse van problemen beperken, dan zijn wij vermoedelijk geneigd om γ de "voor de hand liggende" of de "natuurlijke" waarde van $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor $s=1$; $t=0$ te noemen, maar daar staat tegenover dat er andere, eveneens uitgebreide klassen van problemen bestaan, waarbij een andere waarde inplaats van γ de voorkeur verdient. Er is dan ook geen "voor de hand liggende" of "natuurlijke", van eeuwigheid bepaalde eindige waarde die aan $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor s=1; t=0 noodzakelijkerwijze moet worden toegekend. Niettemin is het verkeerd de poging als hopeloos op te geven. Wij gaan als volgt te werk.

Wij representeren $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voor de in de omgeving van 1 gelegen punten s en voor de in de omgeving van 0 gelegen punten $t \neq 0$ door een geneutraliseerde uitdrukking die ook voor s=1; t=0 betekenis heeft. Iedere zinvolle geneutraliseerde uitdrukking stelt een eindig getal voor en nu kunnen wij afspreken dat wij de waarde gebruiken die de bewuste geneutraliseerde uitdrukking voor s=1; t=0 aanneemt. In voorbeeld 6 van § 5 hebben wij gezien dat de uitdrukking

$$\int_{H_0}^{\tilde{H}_1} x^{s-1}\,(1-x)^{t-1}\,dx \tag{22}$$

de functie $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voorstelt indien noch s noch t een geheel getal $\leqq 0$ is. Voor s=1; t=0 gaat (22) over in

$$\int_{H_0}^{\tilde{H}_1} (1-x)^{-1}\,dx = -\log\,(1-x)\Big|_{H_0}^{\tilde{H}_1} = 0\,,$$

zodat wij op die manier de waarde nul krijgen. Maar als geen der twee getallen s en t geheel $\leqq 0$ is, dan wordt $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{(s+t)}$ volgens voorbeeld 8 eveneens door de geneutraliseerde integraal

$$\lambda \int_{H_0}^{\tilde{H}_1} x^{\lambda s-1}\,(1-x^{\lambda})^{t-1}\,dx \tag{23}$$

voorgesteld, waarin λ een willekeurig positief getal aanduidt. Deze integraal gaat voor s=1; t=0 over in

$$\lambda \int_{H_0}^{H_1} \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{\lambda}}\,dx = -\log\lambda\,,$$

omdat

$$\lambda\int_{\xi}^{\eta}\frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{\lambda}}\,dx = \log(1-\xi^{\lambda})-\log(1-\eta^{\lambda})=\log(1-\xi^{\lambda})-\log(1-\eta)-\log\frac{1-\eta^{\lambda}}{1-\eta},$$

waarin $\log(1-\xi^{\lambda})$ voor $\xi\to 0$ tot nul nadert en dus tot H_0 behoort, waarin $\log(1-\eta)$ tot $\tilde{H}_1$ behoort en waarin $-\log\frac{1-\eta^{\lambda}}{1-\eta}$ voor $\eta\to 1$ tot $-\log\lambda$ nadert.

Op die manier vinden wij als antwoord $-\log\lambda$, waarin λ een willekeurig positief getal voorstelt, zodat elk bestaanbaar getal uit de bus kan komen. Nog sterker, wij kunnen zelfs elk complex getal krijgen door maar een geschikte, of liever gezegd ongeschikte, geneutraliseerde uitdrukking te kiezen die $\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ voorstelt. Het antwoord hangt dus geheel af van de manier waarop de functie wordt voorgesteld door een geneutraliseerde uitdrukking.

Zo hopeloos als het er nu uitziet is het in werkelijkheid niet, want in de problemen met welke wij te maken hebben komen juist de uitdrukkingen zelf voor, wier geneutraliseerde waarden in aanmerking komen.
Stel wij onderzoeken een integraal met integrand

$$\lambda x^{\lambda s-1}\,(1-x^{\lambda})^{t-1}\,f(1-x^{\lambda}) \qquad (0<x<1),$$ waarin $\lambda>0$, $\operatorname{Re} s>0$ en waarin $f(w)$ analytisch is voor $|w|\leq 1$. De integrand is integreerbaar van 0 naar elk tussen 0 en 1 gelegen punt, maar ze is misschien niet integreerbaar van 0 naar 1. Wij kunnen echter een veelterm $\sum_{h=0}^{p} c_h\, t^h$ vinden zodanig dat

$$g(x)=\lambda x^{\lambda s-1}\,(1-x^{\lambda})^{t-1}\,f(1-x^{\lambda})-\sum_{h=0}^{p} c_h(1-x)^{t-1+h}$$

integreerbaar is van 0 naar 1. Indien nu gevraagd wordt voor de integraal

$$\int_0^1 g(x)\,dx$$

een convergente ontwikkeling af te leiden, dan schrijven wij

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^{\tilde{H}_1} g(x)\, dx =$$

$$= \lambda \int_0^{\tilde{H}_1} x^{\lambda s-1} (1-x^\lambda)^{t-1} f(1-x^\lambda) dx - \sum_{h=0}^{o} c_h \int_0^{\tilde{H}_1} (1-x)^{t-1+h} dx$$

$$= \sum_{n=0} \frac{\gamma_n}{n!} f^{(n)}(0) - \sum_{\substack{h=0 \\ h \neq -t}}^{p} \frac{c_h}{t+h},$$

waarin

$$(24) \qquad \gamma_n = \lambda \int_0^{\tilde{H}_1} x^{\lambda s-1} (1-x^\lambda)^{t+n-1} dx.$$

Iedere in de gevraagde ontwikkeling optredende coëfficient γ_n is dus juist de waarde van een geneutraliseerde uitdrukking van de gedaante (23), waarin slechts t door t+n vervangen is. Indien t+n niet geheel ≤ 0 is, dan is

$$\gamma_n = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t+n)}{\Gamma(s+t+n)},$$

maar als t+n wèl een geheel getal ≤ 0 voorstelt, dan gebruiken wij de door (24) bepaalde waarde van γ_n. Uit dit eenvoudige voorbeeld (en tal van andere, meer gecompliceerde problemen) blijkt dat het inderdaad aanbeveling verdient geneutraliseerde integralen van deze vorm in te voeren, omdat ze ons een eenvoudige notatie aan de hand doen voor de coëfficienten die in de gevraagde reeksontwikkelingen optreden.

Bijvoorbeeld de keuze s=1; t=0 geeft $\gamma_0 = -\log \lambda$, terwijl voor iedere positieve gehele n

$$\gamma_n = \frac{(n-1)!}{n} = \frac{1}{n}.$$

Verder kunnen wij hier p=0 en $c_0 = f(0)$ kiezen, zodat

$$\int_0^1 (\lambda x^{\lambda-1}(1-x^\lambda)^{-1} f(1-x^\lambda) - \frac{f(0)}{1-x}\, dx =$$

$$= -f(0) \log \lambda + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!\,n} .$$

Natuurlijk is dit eenvoudige antwoord heel gemakkelijk direct te vinden door de integraal te schrijven in de vorm

$$f(0) \int_0^1 (\lambda\, x^{\lambda-1} (1-x^\lambda)^{-1} - (1-x)^{-1}) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 \lambda x^{\lambda-1} (1-x^\lambda)^{n-1} dx,$$

waarin de eerste integraal gelijk is aan

$$-\lim_{\eta \to 1} \left\{ \log(1-\eta^\lambda) - \log(1-\eta) \right\} = -\lim_{\eta \to 1} \log \frac{1-\eta^\lambda}{1-\eta} = -\log \lambda$$

en waarin de laatste ingegraal gelijk is aan

$$\int_0^1 (1-y)^{n-1}\, dy = \frac{1}{n},$$

maar bij andere, meer gecompliceerde problemen, bijvoorbeeld als t een willekeurig geheel getal ≤ 0 is, gaat het niet zo eenvoudig, zodat het aanbeveling verdient een algemene methode te gebruiken die aan bepaalde uitdrukkingen een geschikte waarde toekent in die punten waar directe substitutie faalt of waar niet overwegingen van continuiteit of analyciteit een "natuurlijke" waarde aan de hand doen.

Wij gaan zelfs verder. Soms kennen wij aan een analytische functie in een regulier punt een waarde toe die niet overeenstemt met de waarde die de functie zelf in dat punt aanneemt. Indien geen van de twee getallen s en t geheel ≤ 0 is, dan hebben wij hierboven voor iedere positieve λ gevonden

$$(25) \quad \int_{H_0}^{\tilde{H}_1} (x^{s-1}(1-x)^{t-1} - \lambda x^{\lambda s-1}(1-x^\lambda)^{t-1})\, dx = 0,$$

maar voor $s=1$, $t=0$ is het antwoord $\log \lambda$, dus $\neq 0$, indien $\lambda \neq 1$ is. Dus hier hebben wij met een door een eenvoudige geneutraliseerde uitdrukking gedefinieerde functie van s en t te maken, die voor bijna iedere s en bijna iedere t gelijk is aan 0 en die toch voor $s=1$; $t=0$ een waarde $\neq 0$ aanneemt. Onnodig te zeggen dat overwegingen van continuiteit of analyciteit de waarde nul zouden opleveren. Kan dit verschijnsel als een bezwaar tegen de neutrixrekening worden aangevoerd?

De lezer kent het antwoord reeds. Op een dergelijke rhetorische vraag luidt het antwoord steeds ontkennend, maar ik ga verder in mijn repliek. Ik ben van mening dat dit juist een van de kenmerkende voordelen van de neutrixrekening is. De analyse, in het bijzonder de asymptotiek, bevat nu eenmaal formules, een of meer parameters bevattend, die gelden voor bijna alle waarden van die parameters, maar die voor bepaalde waarden van die parameters hun geldigheid verliezen, hetzij omdat die formules dan zinloos worden, hetzij omdat ze wèl zin hebben doch een onjuist resultaat opleveren. In het eerste geval moeten wij met behulp van geschikt gekozen neutrices aan die formules een zódanige zin geven dat ze ook gelden voor de bewuste uitzonderingswaarden van de parameters. In het tweede geval moeten wij aan een der twee leden van de beschouwde formule een term toevoegen, die voor bijna alle waarden van de parameters gelijk is aan nul en die voor de genoemde uitzonderingswaarden van de parameters $\neq 0$ is. Dat zo iets met behulp van neutrices op eenvoudige wijze geschieden kan, berust op het hier besproken verschijnsel.

Om het hier geschetste programma uit te voeren voor Hadamardneutrices heb ik een bijzonder soort Hadamardontwikkelingen nodig, die ik in de volgende paragraaf ga invoeren.

§ 7. Speciale Hadamardontwikkelingen.

Een Hadamardontwikkeling

(26) $$\sum_{h=0}^{\infty}{}' \chi_h (\xi - a)^{\psi_h} \log^{k_h} (\xi - a)$$

wordt een speciale Hadamardontwikkeling genoemd als

$\chi_o \neq 0$; $\psi_o = 0$; $k_o = 0$; $\mathrm{Re}\,\psi_h > 0$ $(h=1,2,\ldots.)$

is.

De voorbeelden 9 en 10 zijn evident.

Voorbeeld 9: Als $u(\xi)$ op $\mathfrak{B}$ een speciale Hadamardontwikkeling bezit, dan nadert $u(\xi)$ tot de beginterm χ_o van die ontwikkeling, als ξ op $\mathfrak{B}$ tot a nadert. Volgens definitie is de beginterm $\neq 0$.

Voorbeeld 10: Het produkt van twee functies met speciale Hadamardontwikkelingen naar machten van ξ-a is weer een functie met een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van ξ-a en iedere exponent van ξ-a in de ontwikkeling van het produkt kan worden geschreven als een som van twee termen, waarvan de eerste een exponent in de eerste factor en waarvan de tweede een exponent in de tweede factor is. De beginterm van het produkt is het produkt van de begintermen der twee factoren.

Hierbij herinner ik er de lezer aan dat een exponent in een Hadamardontwikkeling volgens afspraak een exponent van ξ-a en niet van log(ξ-a) is.

Voorbeeld 11: Indien $u(\xi)$ op $\mathfrak{B}$ een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van ξ-a bezit, dan heeft $(u(\xi))^s$ voor elke complexe s een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van ξ-a. De beginterm van $(u(\xi))^s$ is gelijk aan de s^{de} macht van de beginterm van $u(\xi)$. Verder kan iedere exponent van ξ-a in de speciale Hadamardontwikkeling van $(u(\xi))^s$ geschreven worden als een som waarvan elke term een exponent in de gegeven speciale Hadamardontwikkeling van $u(\xi)$ is.

Inderdaad, indien (26) de speciale Hadamardontwikkeling van $u(\xi)$ voorstelt, dan is

$$(u(\xi))^s \backsim \chi_o^s(1+\sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\chi_h}{\chi_o}(\xi-a)^{\psi_h}\log^{k_h}(\xi-a))^s$$

$$\backsim \chi_o^s(1+\sum_{n=1}^{\infty}{}' \binom{s}{n}(\sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\chi_h}{\chi_o}(\xi-a)^{\psi_h}\log^{k_h}(\xi-a))^n,$$

zodat formele ontwikkeling naar machten van ξ -a een speciale Hadamardontwikkeling van $(u(\xi))^s$ oplevert met beginterm χ_o^s en met de eigenschap dat iedere in die ontwikkeling optredende exponent geschreven kan worden als een som waarvan elke term voorkomt in het systeem gevormd door de exponenten ψ_o, ψ_1, ψ_2, ...

Voorbeeld 12: Indien $u(\xi)$ op $\mathfrak{F}$ een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van ξ -a bezit, dan heeft log $u(\xi)$ een Hadamardontwikkeling naar machten van ξ -a en iedere in die ontwikkeling optredende exponent kan worden geschreven als een som waarvan elke term een exponent in de gegeven speciale Hadamardontwikkeling van $u(\xi)$ is.

Immers, indien (26) de gegeven speciale Hadamardontwikkeling van $u(\xi)$ is, dan is

$$\log u(\xi) \backsim \log\chi_o + \log(1+\sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\chi_h}{\chi_o}(\xi-a)^{\psi_h}\log^{k_h}(\xi-a))$$

$$\backsim \log\chi_o + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-)^{n-1}}{n}(\sum_{h=1}^{\infty}{}' \frac{\chi_h}{\chi_o}(\xi-a)^{\psi_h}\log^{k_h}(\xi-a))^n,$$

zodat formele ontwikkeling naar machten van ξ-a een Hadamardontwikkeling voor log $u(\xi)$ oplevert met de genoemde eigenschap.

§ 8. Singuliere punten.

In het volgende voorbeeld gaat het om een functie van twee onafhankelijk veranderlijken ξ en η, namelijk

(27) $\int_{\xi}^{b} f(z,\eta)\,dz$, waarin $f(z,\eta) = \chi(\eta)(z-a)^{\psi(\eta)-1}\log^k(z-a)$;

k is een van z, ξ en η onafhankelijk geheel getal ≥ 0.

De integratieweg ligt op een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen continue rectificeerbare kromme Γ die in het niet tot Γ behorend beginpunt a een raaklijn bezit, terwijl het eindpunt b van Γ wèl tot Γ behoort. Verder stelt η een willekeurig punt voor van een gegeven puntverzameling $\mathfrak{P}$ die een niet tot $\mathfrak{P}$ behorend limietpunt α bezit met de eigenschap dat η op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot α kan naderen dat $\log(\eta - \alpha)$ tot een eindige limiet nadert (de laatste voorwaarde mag worden vervangen door de zwakkere conditie dat $\mathfrak{P}$ een rij punten $\eta_0, \eta_1, \ldots.$ bevat met de eigenschap dat voor $n \to \infty$ $\log(\eta_n - \alpha)$ tot een eindige limiet en dat $\dfrac{\eta_{n+1} - \alpha}{\eta_n - \alpha}$ tot 1 nadert).

<u>Voorbeeld 13:</u> Stel dat $\chi(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $\eta - \alpha$ bezit en dat

(28) $$\psi(\eta) = k + (\eta - \alpha)^{\rho}\, u(\eta),$$

waarin k en ρ onafhankelijk van η zijn met Re $\rho > 0$ en waarin $u(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van $\eta - \alpha$ bezit. Onder deze voorwaarden hebben de twee geneutraliseerde uitdrukkingen

(29) $$j = \int_{H'_a}^{b} f(z, H_\alpha)\, dz \quad \text{en} \quad j^* = \int_{H_a}^{b} f(z, H'_\alpha)\, dz$$

betekenis; hierin is $f(z,\eta)$ door (27) gedefinieerd; H_α is een Hadamardneutrix met drager α , domein $\mathfrak{P}$ en veranderlijke η ; verder is H_a een Hadamardneutrix met drager a, veranderlijke ξ en met domein een boog van Γ waarvan het beginpunt met a samenvalt.

Zoals in § 2 van voordracht II uiteengezet is, geeft het in (29) gebruikte accent te kennen dat in de definitie van j eerst de neutrix H_α , daarna pas de neutrix H_a toegepast wordt, terwijl omgekeerd in de definitie van j^* eerst H_a en daarna H_α wordt toegepast.

<u>De hoofdzaak echter is dit: Indien $k \neq 0$ is, dan is $j=j^*$. Indien k=0 is, dan is $j-j^*$ gelijk aan de constante term in de Hadamardontwikkeling van</u>

(30) $$(-)^{k+1}\, k!\ \chi(\eta)\ (\psi(\eta))^{-k-1}$$

naar machten van $\eta - \alpha$.

Opmerking: Dit betekent dat j en j^* "bijna" steeds aan elkaar gelijk zijn. Vooreerst als $k \neq 0$ is. En zelfs in het geval k=0 is het nog een uitzondering dat de Hadamard-ontwikkeling van (30) naar machten van $\eta - \alpha$ een constante term $\neq 0$ bevat. Dus hier treedt opnieuw het reeds in § 6 gesignaleerde verschijnsel op dat een eenvoudige geneutraliseerde uitdrukking (in dit geval $j-j^*$) "bijna" overal nul is en toch in uitzonderingsgevallen een waarde $\neq 0$ aanneemt.

In het bewijs zullen wij eerst het geval behandelen dat $k \neq 0$ is. Aan de ene kant neemt

$$f(z,\eta) = \chi(\eta)\ (z-a)^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\psi(\eta)-k)^m}{m\,!} \log^{m+k}(z-a) \quad \text{voor}$$

$\eta = H_\alpha$ de waarde

(31) $$f(z,H_\alpha) = (z-a)^{k-1} \sum_m \frac{\gamma_m}{m\,!} \log^{m+k}(z-a)$$

aan, waarin γ_m de constante term in de Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)(\psi(\eta)-k)^m$ naar machten van $\eta - \alpha$ voorstelt en waarin de som $\sum\limits_m$ uitgestrekt wordt over de gehele getallen $m \geqq 0$ met $\gamma_m \neq 0$. De som $\sum\limits_m$ is eindig, omdat $\gamma_m = 0$ is voor ieder voldoend groot geheel getal $m \geqq 0$. Derhalve is, in verband met voorbeeld 1 in § 2

$$j = \sum_m \frac{\gamma_m}{m\,!} \int_{H_a}^{b} (z-a)^{k-1} \log^{m+k}(z-a)\, dz$$

(32) $$= \sum_m \frac{\gamma_m}{m\,!} \left(\frac{\partial}{\partial k}\right)^{m+k} \frac{(b-a)^k}{k}$$

$$= \sum_m \frac{\gamma_m}{m\,!} \sum_{h=0}^{m+k} \binom{m+k}{h} \frac{(-)^{m+k-h}(m+k-h)!}{k^{m+k-h+1}} (b-a)^k \log^h (b-a)$$

Aan de andere kant is voor $|\lambda| < |k|$

$$\frac{(b-a)^{\lambda}}{\kappa+\lambda} = \frac{e^{\lambda \log(b-a)}}{\kappa+\lambda} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda^h \log^h(b-a)}{h!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-)^q \lambda^q}{\kappa^{q+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{h=0}^{n} \frac{(-)^{n-h}}{h!\,\kappa^{n-h+1}} \log^h(b-a),$$

zodat uit voorbeeld 1 volgt

$$\int_{H_a}^{b} f(z,\eta)\, dz = \chi(\eta) \left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^k \frac{(b-a)^{\psi}}{\psi}$$

$$= (b-a)^{\kappa} \chi(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (\psi(\eta)-\kappa)^n \sum_{h=0}^{n} \frac{(-)^{n-h}}{h!\,\kappa^{n-h+1}} \log^h(b-a)$$

$$= (b-a)^{\kappa} \chi(\eta) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!\,(\psi(\eta)-\kappa)^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{h=0}^{n} \frac{(-)^{n-h}}{h!\,\kappa^{n-h+1}} \log^h(b-a)$$

$$= (b-a)^{\kappa} \chi(\eta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k)!\,(\psi(\eta)-\kappa)^m}{m!} \sum_{h=0}^{m+k} \frac{(-)^{m+k-h}}{h!\,\kappa^{m+k-h+1}} \log^h(b-a),$$

dus $j^* = (b-a)^{\kappa} \sum_{m} \frac{(m+k)!}{m!} \gamma_m \sum_{h=0}^{m+k} \frac{(-)^{m+k-h}}{h!\,\kappa^{m+k-h+1}} \log^h(b-a)$

en dit is hetzelfde antwoord als wij hierboven voor j gevonden hebben. Dus indien $\kappa \neq 0$ is, dan is $j=j^*$.

Laten wij tenslotte het geval behandelen dat $\kappa=0$ is. Aan de ene kant neemt

$$f(z,\eta) = \chi(\eta)(z-a)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi^m(\eta)}{m!} \log^{m+k}(z-a)$$

voor $\eta = H_{\alpha}$ de waarde

(33) $$f(z,H_{\alpha}) = \sum_{m} \frac{\gamma_m}{m!} (z-a)^{-1} \log^{m+k}(z-a)$$

aan, dus

(34) $$j = \sum_{m} \frac{\gamma_m}{m!} \frac{(b-a)^{m+k+1}}{m+k+1} .$$

Aan de andere kant is

$$\chi(\eta)\int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi(\eta)} \log^k(z-a)\, dz = \chi(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^k \frac{(b-a)^{\psi(\eta)}}{\psi(\eta)}$$

$$= \chi(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)^k \left\{\frac{1}{\psi(\eta)} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\psi^{h-1}(\eta)}{h!} \log^h(b-a)\right\}$$

$$= \frac{(-)^k k!\,\chi(\eta)}{\psi^{k+1}(\eta)} + \chi(\eta) \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{\psi^{h-k-1}(\eta)}{(h-k-1)!\,h} \log^h(b-a) =$$

$$= \frac{(-)^k k!\,\chi(\eta)}{\psi^{k+1}(\eta)} + \chi(\eta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\psi^m(\eta)}{m!\,(m+k+1)} \log^{m+k+1}(b-a) ,$$

dus

$$j^* = -\gamma + \sum_m \frac{\gamma_m}{m!} \frac{(b-a)^{m+k+1}}{m+k+1} ,$$

waarin γ de constante term in de Hadamardontwikkeling van (30) naar machten van $\eta - \alpha$ voorstelt. Dit, in combinatie met (34), geeft dus de gevraagde betrekking $j - j^* = \gamma$, waarmede het bewijs geleverd is.

Het voorgaande voorbeeld is zeer algemeen, zelfs zo algemeen dat de lezer misschien niet direct interessante toepassingen ziet. In verband hiermede behandel ik een bijzonder geval.

Voorbeeld 14: Indien $\chi(\eta)$ en $\psi(\eta)$ in een gegeven gebied Λ analytisch zijn, waarbij $\psi(\eta)$ niet identiek 0 is, en indien k geheel ≥ 0 is, dan stelt

$$(35) \qquad \chi(\eta) \int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi(\eta)-1} \log^k (z-a)\, dz$$

een analytische functie van η in Λ voor overal waar $\psi(\eta) \neq 0$ is. Een in Λ gelegen nulpunt α van $\psi(\eta)$ met multipliciteit $p \geq 1$ is een pool met multipliciteit $(k+1)p$ van de door (35) voorgestelde functie en dan is

$$(36) \qquad \varphi(\eta) = (\eta - \alpha)^{(k+1)p}\, \chi(\eta)\, (\psi(\eta))^{-k-1}$$

een in α analytische functie van η. Verder is

$$(37) \qquad \chi(\alpha) \int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi(\alpha)-1} \log^k (z-a)\, dz = \chi(\alpha) \frac{\log^{k+1}(z-a)}{k+1} = \gamma + \sigma ,$$

waarin γ de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (35) naar machten van $\eta - \alpha$, terwijl

$$(38) \qquad \sigma = \frac{(-)^{k+1} k!}{((k+1)p)!}\, \varphi^{((k+1)p)}(\alpha) .$$

Het bewijs is als volgt. Indien $\psi(\eta) \neq 0$ is, dan is volgens voorbeeld 1 uitdrukking (35) gelijk aan

$$\chi(\eta)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^k \frac{(b-a)^\zeta}{\zeta}\right\}_{\zeta=\psi(\eta)}$$

en dit stelt een analytische functie van η voor. Zij nu α een in Λ gelegen nulpunt van $\psi(\eta)$ met multipliciteit $p \geqq 1$. Het linkerlid van (37) is gelijk aan

$$j = \chi(H_\alpha) \int_{H'_a}^{b} (z-a)^{\psi(H_\alpha)-1} \log^k (z-a)\, dz.$$

Verder is

$$j^* = \chi(H'_\alpha) \int_{H_a}^{b} (z-a)^{\psi(H'_\alpha)-1} \log^k (z-a)\, dz$$

gelijk aan de waarde die (35) in $\eta = H_\alpha$ aanneemt en dus gelijk aan de constante term in de Laurentontwikkeling van (35) naar machten van $\eta - \alpha$. Volgens voorbeeld 13 is $j-j^*$ gelijk aan de constante term in de Hadamardontwikkeling van

$$(-)^{k+1}\, k!\ \chi(\eta)\ (\psi(\eta))^{-k-1} = (-)^{k+1}\, k!\ (\eta-\alpha)^{-(k+1)p}\ \varphi(\eta)$$

naar machten van $\eta - \alpha$, dus gelijk aan de coëfficient van $(\eta-\alpha)^{(k+1)p}$ in de Taylorontwikkeling van $(-)^{k+1}k!\varphi(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$. Deze coëfficient is gelijk aan het rechterlid van (38), waarmede het bewijs geleverd is.

<u>Voorbeeld 15 (Gamma-integraal): Voor elk geheel getal $s \leqq 0$ en voor ieder geheel getal $k \geqq 0$ is</u>

(39) $$\frac{1}{k\,!} \int_{H_0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x} \log^k x\, dx$$

<u>gelijk aan de coëfficient van $(\eta - s)^k$ in de Laurentontwikkeling van $\Gamma(\eta)$ naar machten van $\eta - s$.</u>

Om dit te bewijzen schrijven wij voor de in de omgeving van s gelegen punten η

$$x^{\eta-1} e^{-x} \log^k x = \sum_{h=0}^{1-s} \frac{(-)^h}{h!}\, x^{\eta+h-1} \log^k x + r(x,\eta),$$

waarin $r(x,\eta)$ een continue functie van x in het interval

$0 \leqq x \leqq 1$ voorstelt en tevens een in s analytische functie van η aanduidt. Dus

$$(40)\qquad \frac{1}{k!}\int_{H_0}^{\infty} x^{\eta-1}\, e^{-x}\, \log^k x\; dx =$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{h=0}^{1-s}\frac{(-)^h}{h\,!}\int_{H_0}^{1} x^{\eta+h-1}\,\log^k x\; dx + \frac{1}{k!}\int_0^1 r(x,\eta)\,dx + \frac{1}{k!}\int_1^{\infty} x^{\eta-1}e^{-x}\log^k x\; dx.$$

De twee laatste integralen stellen functies van η voor die in het punt $\eta = s$ analytisch zijn. Volgens voorbeeld 14, toegepast met

$a=0$; $b=1$; $\alpha=s$; $p=1$; $\chi(\eta)=1$; $\psi(\eta)=\eta+h$,

is (39) gelijk aan $\gamma+\sigma$, waarin γ de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (40) naar machten van η -s en waarin

$$\sigma = \frac{(-)^{k+1}}{k+1}\;\varphi^{(-k+1)}(s);$$

hierin is $\varphi(\eta)$ volgens (36) de waarde die $(\eta-s)^{k+1}(\eta+h)^{-k-1}$ voor h= -s aanneemt. Dus $\varphi(\eta)=1$, waaruit volgt $\sigma=0$. Omdat (40) voor de in de omgeving van s gelegen punten $\eta \neq s$ volgens voorbeeld 3 in § 4 gelijk is aan $\frac{\Gamma^{(k)}(\eta)}{k\,!}$, is γ de coëfficient van $(\eta-s)^k$ in de Laurentontwikkeling van $\Gamma(\eta)$ naar machten van η -s. Dit voltooit het bewijs.

<u>Voorbeeld 16 (Beta-integraal):</u> <u>Indien k en l geheel $\geqq 0$ zijn, s een geheel getal $\leqq 0$ en t niet een geheel getal $\leqq 0$ is, dan is</u>

$$(41)\qquad \int_{H_a}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{s-1}(b-z)^{t-1}\,\log^k(z-a)\,\log^l(b-z)\;dz$$

<u>gelijk aan de constante term in de Laurentontwikkeling van</u>

$$(42)\qquad \frac{\partial^{k+l}}{\partial\eta^k\,\partial t^l}\;\frac{\Gamma(\eta)\,\Gamma(t)}{\Gamma(\eta+t)}\;(b-a)^{\eta+t-1}$$

naar machten van η-s.

Dit blijkt als volgt. Voor $|z-a|<|b-a|$ is

$$(z-a)^{\eta-1}(b-z)^{t-1}=\sum_{h=0}^{\infty}(-)^h\binom{t-1}{h}(b-a)^{t-1-h}(z-a)^{\eta+h-1},$$

dus

$$(43)\quad (z-a)^{\eta-1}(b-z)^{t-1}\log^k(z-a)\log^l(b-z)=$$

$$=\sum_{h=0}^{\infty}(-)^h\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l\binom{t-1}{h}(b-a)^{t-1-h}\right\}(z-a)^{\eta+h-1}\log^k(z-a).$$

Het is dus mogelijk op de integratieweg die a en b verbindt een punt z_o te vinden met de eigenschap dat, voor elk op de boog (a,z_o) gelegen punt z en voor de in de omgeving van s gelegen punten η, het rechterlid van (43) geschreven kan worden in de vorm

$$\sum_{h=0}^{1-s}(-)^h\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l\binom{t-1}{h}(b-a)^{t-1-h}\right\}(z-a)^{\eta+h-1}\log^k(z-a)+r(z,\eta),$$

waarin de restterm $r(z,\eta)$ op de integratieweg, het punt a inbegrepen, continu van z en bovendien analytisch van η afhangt. Wij schrijven nu

$$\int_{H_a}^{\tilde{H}_b}(z-a)^{\eta-1}(b-z)^{t-1}\log^k(z-a)\log^l(b-z)\,dz=$$

(44)

$$\sum_{h=0}^{1-s}(-)^h\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l\binom{t-1}{h}(b-a)^{t-1-h}\right\}\int_{H_a}^{z_o}(z-a)^{\eta+h-1}\log^k(z-a)\,dz+$$

$$+\int_a^{z_o}r(z,\eta)dz+\int_{z_o}^{\tilde{H}_b}(z-a)^{\eta-1}(b-z)^{t-1}\log^k(z-a)\log^l(b-z)\,dz.$$

De voorlaatste integraal stelt een functie van η voor die in het punt $\eta=s$ analytisch is, omdat de integrand begrensd is en continu van z, analytisch van η afhangt.
De substitutie z= -w voert de laatste integraal over in de geneutraliseerde integraal

$$\int_{H_{-b}}^{-z_o} (w+b)^{t-1}(-a-w)^{\eta -1} \log^l(w+b) \log^k(-a-w)\, dw ,$$

die volgens § 4 een gehele functie van η voorstelt. Volgens voorbeeld 14, toegepast met $\chi(\eta)=1$; $\psi(\eta)=\eta+h$; b vervangen door z_o, is (41) gelijk aan $\gamma+\sigma$, waarin γ de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van het linkerlid van (44), dus van (42), terwijl σ de waarde is die

$$(-)^h \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^l \binom{t-1}{h}(b-a)^{t-1-h} \right\} \varphi_h'(\eta)$$

voor h=-s aanneemt; hierin is $\varphi_h(\eta)$ volgens (36) de functie

$$\varphi_h(\eta) = (\eta-s)^{k+1}(\eta+h)^{-k-1}.$$

Voor h=-s is dus $\varphi_h(\eta)=1$; $\varphi_h'(\eta)=0$, derhalve $\sigma=0$, waarmede het bewijs geleverd is.

Door in het bovenstaande a en b, s en t, k en l te verwisselen, vinden wij tevens:

Indien k en l geheel ≥ 0 zijn, indien t een geheel getal ≤ 0 en s niet een geheel getal ≤ 0 is, dan is (41) gelijk aan de constante term in de Laurentontwikkeling van

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial s^k \partial\eta^l} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\eta)}{\Gamma(s+\eta)} (b-a)^{s+\eta-1}$$

naar machten van $\eta-t$.

Er blijft nog één geval ter behandeling over, namelijk het geval dat s en t beide geheel en ≤ 0 zijn. Dit geval wordt behandeld in het volgende voorbeeld, waarin s=-p en t=-q gesteld is, maar daarin beperk ik mij tot het speciale geval k=l=0.

Voorbeeld 17: Indien p en q geheel ≥ 0 zijn, dan is

$$\int_{H_a}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{-p-1}(b-z)^{-q-1} dz =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!\, q!}(b-a)^{-p-q-1}\left(2\log(b-a) - \sum_{h=p+1}^{p+q}\frac{1}{h} - \sum_{h=q+1}^{p+q}\frac{1}{h}\right).$$

Met het oog op het hier gegeven bewijs is de volgende opmerking gewenst. In het voorgaande voorbeeld was s geheel ≤ 0 en t niet geheel ≤ 0, hetgeen tengevolge had dat s een singulier punt, t een regulier punt was. In verband daarmede heb ik in het bewijs eerst s vervangen door een in de omgeving van s gelegen veranderlijke $\eta \neq s$, waarna ik, met behulp van de vroegere resultaten, de gevraagde waarde in het singuliere punt s zelf kon bepalen. In het onderhavige probleem hebben wij echter met twee singuliere punten, p en q, te maken. Nu kan ik twee onafhankelijk veranderlijken invoeren, de ene gelegen in de omgeving van p en de andere gelegen in de omgeving van q. Inderdaad stellen de vroegere resultaten ons aldus in dit geval in staat de gevraagde waarde te bepalen. Het is echter eenvoudiger om met één veranderlijke te werken, zodat wij bijvoorbeeld $p+\eta$ en $q+\eta$ kunnen invoeren, waarin η een in de omgeving van de oorsprong gelegen veranderlijke $\neq 0$ voorstelt. Maar wij kunnen ook bijvoorbeeld $p+3\eta$ en $q-4\eta$ gebruiken, zodat er tal van keuzen mogelijk zijn. De keuze die tot het eenvoudigste bewijs voert is $p-\eta$ en $q+\eta$, in verband met het feit dat

(45) $$\frac{\Gamma(-p+\eta)\,\Gamma(-q-\eta)}{\Gamma(-p-q)} = 0 \text{ wegens } \Gamma(-p-q) = \infty$$

is. In het bewijs gebruiken wij daarom deze keuze.

Nu het bewijs. Op de integratieweg die a en b verbindt is het mogelijk een punt z_o te vinden zodanig

$$(z-a)^{\eta-p-1}(b-z)^{-\eta-q-1} =$$

$$= \sum_{h=0}^{p+1} (-)^h \binom{-\eta-q-1}{h} (b-a)^{-\eta-q-h-1}(z-a)^{\eta-p+h-1} + r(z,\eta),$$

waarin $r(z,\eta)$ op de boog (a, z_o), het beginpunt a inbegrepen, een continue functie van z en een in de oorsprong analytische functie van η voorstelt. Volgens voorbeeld 14, toegepast met p vervangen door 1 en met

$$\alpha=0; \quad \chi(\eta)=(-)^h\binom{-\eta-q-1}{h}(b-a)^{-\eta-q-h-1}; \quad \psi(\eta)=\eta-p+h; \quad k=0,$$

(46) neemt $$\int_{H_a}^{z_o} (z-a)^{\eta-p-1} (b-z)^{-\eta-q-1} dz$$

voor $\eta=0$ de waarde $\gamma+\sigma$ aan, waarin γ de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (46) naar machten van η en waarin $\sigma = -\varphi_p'(0)$; hierin is volgens (36)

$$\varphi_h(\eta)=(-)^h \binom{-\eta-q-1}{h} (b-a)^{-\eta-q-h-1} ,$$

dus

$$\varphi_p(\eta)=(-)^p\binom{-\eta-q-1}{p}(b-a)^{-\eta-q-p-1}=\binom{\eta+p+q}{p}(b-a)^{-\eta-p-q-1} ,$$

zodat

$$-\varphi_p'(\eta)=\binom{\eta+p+q}{p}(b-a)^{-\eta-p-q-1}\left\{\log(b-a)-\sum_{h=q+1}^{p+q}\frac{1}{h}\right\} .$$

Aldus vinden wij

$$\sigma=-\varphi_p'(0)=\frac{(p+q)!}{p!\,q!}(b-a)^{-p-q-1}\left\{\log(b-a)-\sum_{h=q+1}^{p+q}\frac{1}{h}\right\} .$$

Op dezelfde manier vinden wij op de integratieweg een punt z_1 zodanig dat

(47) $$\int_{z_1}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{\eta-p-1} (b-z)^{-\eta-q-1} dz$$

voor $\eta=0$ de waarde $\gamma'+\sigma'$ aanneemt, waarin γ' de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (47) naar machten van η en waarin

$$\sigma' = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}(b-a)^{-p-q-1}\left\{\log(b-a)-\sum_{h=p+1}^{p+q}\frac{1}{h}\right\} .$$

De integraal $$\int_{z_o}^{z_1} (z-a)^{\eta-p-1} (b-z)^{-\eta-q-1} dz$$

is een gehele functie van η . Derhalve neemt

(48) $$\int_{H_a}^{\tilde{H}_b} (z-a)^{\eta-p-1} (b-z)^{-\eta-q-1} dz$$

voor $\eta=0$ de waarde $\gamma''+\sigma+\sigma'$ aan, waarin γ'' de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (48) naar machten van η. Omdat (48) gelijk is aan (45) en dus voor iedere in de omgeving van de oorsprong gelegen $\eta \neq 0$ identiek nul is, is $\gamma'' = 0$, waarmede het bewijs geleverd is.

Opmerking: De neutrixcalculus stelt ons vaak in staat om op eenvoudige manier bepaalde identiteiten af te leiden, bijvoorbeeld: voor elk paar gehele getallen $p \geqq 0$ en $q \geqq 0$ is

$$\text{(49)}\quad \begin{cases} \sum_{h=0}^{p-1} \binom{q+h}{h} \frac{1}{p-h} + \sum_{h=0}^{q-1} \binom{p+h}{h} \frac{1}{q-h} \\ = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \left(\sum_{h=q+1}^{p+q} \frac{1}{h} + \sum_{h=p+1}^{p+q} \frac{1}{h} \right). \end{cases}$$

Om dit te bewijzen merken we op dat het rechterlid volgens het voorgaande voorbeeld gelijk is aan

$$\text{(50)}\qquad -\int_{H_o}^{\tilde{H}_1} x^{-p-1} (1-x)^{-q-1}\, dx.$$

De integrand gesplitst in partieelbreuken neemt de vorm

$$\frac{a_o}{x^{p+1}} + \frac{a_1}{x^p} + \ldots\ldots + \frac{a_p}{x} + \frac{b_o}{(1-x)^{q+1}} + \frac{b_1}{(1-x)^q} + \ldots\ldots + \frac{b_q}{1-x}$$

aan met constante tellers. Dan heeft de functie

$$(1-x)^{-q-1} - (a_o + a_1 x + \ldots\ldots + a_p x^p)$$

in de oorsprong een $(p+1)$-voudig nulpunt zodat $a_o + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ de som voorstelt van de eerste $p+1$ termen in de binomiumontwikkeling van $(1-x)^{-q-1}$. Hieruit volgt

$$a_h = (-)^h \binom{-q-1}{h} = \binom{q+h}{h}$$

en op dezelfde manier vinden we

$$b_h = \binom{p+h}{h}.$$

Uit

$$-\int_{H_o}^{\tilde{H}_1} x^{h-p-1}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{voor } h=p \\ \frac{1}{p-h} & \text{voor } 0 \leqq h < p \end{cases}$$

$$-\int_{H_o}^{\tilde{H}_1} (1-x)^{h-q-1}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{voor } h=q \\ \frac{1}{q-h} & \text{voor } 0 \leqq h < q \end{cases}$$

blijkt dat (50) ook gelijk is aan het linkerlid van (49). Dit geeft de gevraagde identiteit.

§ 9. Invoering van een nieuwe integratieveranderlijke.

Zij $w(z)$ langs een continue rectificeerbare kromme Γ, eindpunten inbegrepen, continu differentieerbaar. Stel $w= w(z)$ doorloopt een kromme Γ^* als z de gegeven kromme Γ doorloopt. Het is bekend dat dan iedere langs Γ^* continue functie $g(w)$ de eigenschap bezit

$$\int_{\Gamma^*} g(w)\, dw = \int_{\Gamma} f(z)\, dz, \text{ waarin } f(z) = g(w(z)) \frac{dw}{dz}.$$

Onder algemenere voorwaarden geldt een overeenkomstige regel in de neutrixrekening, maar dat daarbij voorzichtigheid geboden is, blijkt reeds uit het volgende eenvoudige voorbeeld.

Voorbeeld 18: Indien $b \neq 0$, $c \neq 0$ en k geheel ≥ 0 is, dan is

$$\int_{H_o}^{b} y^{s-1} \log^k y\, dy - c^s \int_{H_o}^{\frac{b}{c}} x^{s-1} (\log cx)^k\, dx$$

gelijk aan

$$\begin{cases} 0 & \text{voor } s \neq 0 \\ \frac{1}{k+1} \log^{k+1} c & \text{voor } s = 0 \end{cases}$$

De transformatie $y=cx$ laat dus de waarde van de geneutraliseerde integraal

$$\int_{H_o}^{b} y^{s-1} \log^k y\, dy$$

onveranderd als $s \neq 0$ is, maar verandert de waarde als $s = 0$; $c \neq 1$ is.

In het bewijs behandelen wij eerst het geval $s \neq 0$. Dan is, volgens voorbeeld 1, de eerste in (51) voorkomende term gelijk aan $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \frac{b^s}{s}$, terwijl de tweede term gelijk is aan

$$- \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} c^s (\log c)^{k-h} \int_{H_o}^{\frac{b}{c}} x^{s-1} \log^h x \, dx$$

$$= - \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{h-k} c^s \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{h} \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^s}{s} \right\} = -\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \frac{b^s}{s} ,$$

hetgeen het gevraagde resultaat voor $s \neq 0$ oplevert.
Nu het geval $s = 0$. Men heeft

$$\int_{H_o}^{\frac{b}{c}} x^{-1} (\log cx)^k \, dx = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (\log c)^{k-h} \int_{H_o}^{\frac{b}{c}} x^{-1} \log^h x \, dx$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (\log c)^{k-h} \frac{1}{h+1} \left(\log \frac{b}{c}\right)^{h+1}$$

$$= \frac{1}{k+1} \sum_{h=0}^{k} \binom{k+1}{h+1} (\log c)^{k-h} \left(\log \frac{b}{c}\right)^{h+1}$$

$$= \frac{1}{k+1} \left(\left(\log c + \log \frac{b}{c}\right)^{k+1} - (\log c)^{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{k+1} \left(\log^{k+1} b - \log^{k+1} c\right)$$

$$= \int_{H_o}^{b} x^{-1} \log^k x \, dx - \frac{1}{k+1} \log^{k+1} c ,$$

waaruit het verlangde resultaat voor $s=0$ volgt.

Een ander voorbeeld van het verschijnsel dat zelfs een eenvoudige transformatie de waarde van een integraal veranderen kan, merken wij op in voorbeeld 17, dat, met $a=0$ en $b \neq 0$ toegepast, voor elke keuze der gehele getallen $p \geqq 0$ en $q \geqq 0$ oplevert

$$(52) \quad \int_{H_o}^{\tilde{H}_b} y^{-p-1} (b-y)^{-q-1} dy = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \, b^{-p-q-1} \left(2\log b - \sum_{h=p+1}^{p+q} \frac{1}{h} - \sum_{h=q+1}^{p+q} \frac{1}{h} \right),$$

terwijl deze geneutraliseerde integraal door de transformatie $y=bx$ overgaat in

$$(53)\qquad b^{-p-q-1}\int_{H_o}^{\tilde{H}_1} x^{-p-1}(1-x)^{-q-1}dx =$$

$$= -\frac{(p+q)!}{p!\ q!}\, b^{-p-q-1}\left(\sum_{h=p+1}^{p+q}\frac{1}{h} + \sum_{h=q+1}^{p+q}\frac{1}{h}\right),$$

dus

$$(54)\qquad \int_{H_o}^{\tilde{H}_b} y^{-p-1}(b-y)^{-q-1}dy - b^{-p-q-1}\int_{H_o}^{\tilde{H}_1} x^{-p-1}(1-x)^{-q-1}dx =$$

$$= 2\,\frac{(p+q)!}{p!\ q!}\, b^{-p-q-1}\log b\ .$$

Deze formule kan ook als volgt bewezen worden. Zij y_o een willekeurig punt gelegen in de omgeving van de oorsprong op de integratieweg die de punten 0 en b verbindt. Dan is $x_o = \frac{y_o}{b}$ het corresponderende punt gelegen op de integratieweg die de punten 0 en 1 verbindt. De restterm $r(y)$ gedefinieerd door

$$y^{-p-1}(b-y)^{q-1} = \sum_{h=0}^{p+1} (-)^h \binom{-q-1}{h}\, b^{-q-h-1} y^{h-p-1} + r(y)$$

is een continue functie van y op de boog $(0, y_o)$, zodat de transformatie $y=bx$ de integraal

$$\int_{H_o}^{y_o} r(y)\ dy = \int_{o}^{y_o} r(y)\ dy$$

onveranderd laat. Volgens het voorgaande voorbeeld laat deze transformatie ook de waarden van de geneutraliseerde waarden

$$\int_{H_o}^{y_o} y^{h-p-1}\ dy \qquad (0 \leqq h \leqq p+1;\quad h \neq p)$$

onveranderd. Dit geldt niet voor $h=p$, omdat

$$\int_{H_o}^{y_o} y^{-1}\ dy = \int_{H_o}^{x_o} x^{-1}dx + \log b$$

is. Op die manier vinden wij

$$(55)\qquad \int_{H_0}^{y_0} y^{-p-1}\,(b-y)^{-q-1}dy - b^{-p-q-1}\int_{H_0}^{x_0} x^{-p-1}(1-x)^{-q-1}\,dx =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!\;q!}\, b^{-p-q-1}\log b.$$

Zij verder y_1 een punt gelegen in de omgeving van b op de integratieweg die O en b verbindt en zij $x_1 = \frac{y_1}{b}$. Dan is

$$\int_{y_1}^{\tilde{H}_b} y^{-p-1}(b-y)^{-q-1}dy - b^{-p-q-1}\int_{x_1}^{\tilde{H}_1} x^{-p-1}(1-x)^{-q-1}dx =$$

$$= \int_{H_0}^{b-y_1} y^{-q-1}(b-y)^{-p-1}\,dy - b^{-p-q-1}\int_{H_0}^{1-x_1} x^{-q-1}(1-x)^{-p-1}dx$$

en dit is eveneens gelijk aan het rechterlid van (55), zoals wij zien door in die formule p en q te verwisselen. Dit, gecombineerd met (55), geeft het gevraagde resultaat (54), omdat de substitutie y=bx de waarde van de integraal

$$\int_{y_0}^{y_1} y^{-p-1}\,(b-y)^{-q-1}\,dy$$

onveranderd laat.

Op die manier beschikken wij nu over twee bewijzen van formule (54), namelijk het bewijs dat steunt op het in § 8 gevonden resultaat en de in deze paragraaf gegeven redenering. In het eerste bewijs worden de twee in de linkerleden van (52) en (53) optredende geneutraliseerde integralen berekend met behulp van de constante termen in de corresponderende Laurentontwikkelingen, waarna aftrekking van de twee aldus verkregen resultaten het gevraagde resultaat (54) oplevert. Deze methode eist echter de kennis van de integrand in het gehele integratie-interval. In het tweede bewijs beperken wij ons tot het onderzoek van de integrand op de bogen (O,y_0) en (y_1,b), dus tot het onderzoek van het gedrag van de integrand in de nabijheid van de eindpunten O en b. Op grond hiervan moet de tweede redenering eenvoudiger genoemd worden dan de eerste. Het doel van deze paragraaf is dan ook onder zeer algemene voorwaarden een bewijsmethode af te leiden, die met de tweede redenering overeenkomt en waarbij alleen gelet wordt op het gedrag van de integrand in de omgeving van de eindpunten van de integratieweg.

Stel
$$f(z,\eta)= \chi(\eta)\ (z-a)^{\psi(\eta)-1}\ \log^k (z-a),$$
waarin z een continue rectificeerbare kromme Γ doorloopt die in het niet tot Γ behorend beginpunt a een raaklijn bezit, terwijl het eindpunt b van Γ wèl tot de kromme gerekend wordt; verder stelt η een willekeurig punt van een gegeven puntverzameling $\mathfrak{P}$ voor die een niet tot $\mathfrak{P}$ behorend limietpunt α bezit met de eigenschap dat η op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot α kan naderen dat log $(\eta-\alpha)$ tot een eindige limiet nadert (de laatste voorwaarde mag worden vervangen door de zwakkere conditie dat $\mathfrak{P}$ een rij punten $\eta_0, \eta_1, \dots$ bevat met de eigenschap dat voor $n \to \infty$ $\log(\eta_n - \alpha)$ tot een eindige limiet en $\dfrac{\eta_{n+1}-\alpha}{\eta_n - \alpha}$ tot 1 nadert).

Daarbij nemen wij aan dat $\chi(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $\eta-\alpha$ bezit en dat
$$\psi(\eta) = \kappa + (\eta-\alpha)^{\rho}\ u(\eta),$$
waarin κ en ρ onafhankelijk van η zijn met Re $\rho > 0$ en waarin $u(\eta)$ op $\mathfrak{P}$ een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van $\eta-\alpha$ bezit. Volgens voorbeeld 13 heeft dan de geneutraliseerde integraal
$$j = \int_{H'_a}^{b} f(z,H_\alpha)\ dz$$
betekenis.

Thans voeren wij een transformatie in en wel als volgt. Zij Γ^* een continue rectificeerbare kromme met een niet tot Γ^* behorend beginpunt a^* en een wèl tot Γ^* behorend eindpunt b^*. Zij $\varphi(w)$ een op Γ^* gedefinieerde continue functie die voor de in de omgeving van a^* op Γ^* gelegen punten w geschreven kan worden in de vorm

$$\varphi(w) = a + (w-a^*)^{\tau}\, v(w),$$

waarin Re $\tau > 0$ en waarin $v(w)$ een speciale Hadamardontwikkeling naar machten van $w-a^*$ bezit. Wij nemen aan dat de transformatie $z = \varphi(w)$ de eigenschap bezit dat, als w de kromme Γ^* doorloopt, het corresponderende punt $z = \varphi(w)$ de oorspronkelijke kromme Γ doorloopt. Wij zullen zien dat onder deze voorwaarden ook de geneutraliseerde integraal

$$j' = \int_{H'_a}^{b^*} f(\varphi(w), H_\alpha)\, \varphi'(w)\, dw$$

betekenis heeft; hierin is H_{a^*} een Hadamardneutrix met drager a^* en met als domein een boog van Γ^* met beginpunt a^*.

Van belang is het te weten of j en j' aan elkaar gelijk zijn of niet. Het antwoord hierop luidt als volgt.

Voorbeeld 19: Stel de hierboven genoemde voorwaarden zijn vervuld.

Indien $\kappa \neq 0$ is, dan is

$$(56) \quad j-j' = \sum_m \frac{\gamma_m}{m!} \sum_{n=0}^{m+k} (-)^{m+k-n} \frac{(m+k)!\, \Gamma_n}{n!\, \kappa^{m+k-n+1}},$$

waarin γ_m de constante term voorstelt in de Hadamardontwikkeling van

$$(57) \quad (\eta - \alpha)^{\rho_m}\, \chi(\eta)\, u^m(\eta)$$

naar machten van $\eta - \alpha$ en waarin Γ_n de constante term voorstelt in de Hadamardontwikkeling van

$$(58) \quad (w-a^*)^{\kappa\tau}\, v^{\kappa}(w) \log^n v(w)$$

naar machten van $w-a^*$. De som $\sum_m$ wordt uitgestrekt over de gehele getallen $m \geq 0$ waarvoor $\gamma_m \neq 0$ is, zodat het aantal termen van deze som eindig is in verband met het feit dat γ_m voor voldoend grote gehele m gelijk aan nul is.

Indien $\kappa = 0$ is, dan is

$$(59) \quad j-j' = \sum_m \gamma_m \frac{(\log c)^{m+k+1}}{m!\,(m+k+1)},$$

waarin c de constante term in de speciale Hadamardontwikkeling van $v(w)$ naar machten van $w-a^*$ voorstelt.

Opmerking: Uit deze bewering volgt dat de waarde van $j-j'$ bij gegeven ρ, κ en τ volkomen bepaald is als de Hadamardontwikkelingen van $\chi(\eta)$ en $u(\eta)$ naar machten van $\eta-\alpha$ en de Hadamardontwikkeling van $v(w)$ naar machten van $w-a$ bekend zijn. Dit betekent dat $j-j'$ ondubbelzinnig bepaald is als vooreerst het gedrag van de integrand $f(z,\eta)$ voor de punten z in de omgeving van a en de punten η in de omgeving van α bekend is en als verder het gedrag van de transformatie $z = \varphi(w)$ in de omgeving van $w = a^*$ bekend is.

In de Hadamardontwikkelingen van $\chi(\eta)$ en $u(\eta)$ komen misschien termen voor die één of meer factoren $\log(\eta-\alpha)$ bevatten. Die termen hebben geen invloed op de waarden van de getallen γ_m, dus ook niet op de waarde van $j-j'$.
In de berekening van $j-j'$ kunnen wij dus beginnen met in de Hadamardontwikkelingen van $\chi(\eta)$ en $u(\eta)$ de genoemde termen te schrappen. Evenzo zien wij dat bij de berekening van $j-j'$ in de Hadamardontwikkeling van $v(w)$ naar machten van $w-a^*$ eveneens de termen geschrapt mogen worden die door minstens één factor $\log(w-a^*)$ deelbaar zijn, omdat die termen geen invloed hebben op de waarden van de getallen Γ_n.
Het bewijs van voorbeeld 19 verloopt als volgt. Indien ζ een punt van Γ^* is en $\xi = \varphi(\zeta)$ het op Γ gelegen corresponde-rende punt voorstelt, dan is

$$(60) \quad \int_{\zeta}^{b^*} f(\varphi(w),\eta)\ \varphi'(w)\ dw = \int_{\xi}^{b} f(z,\eta)\ dz.$$

Beschouw eerst het geval $\kappa \neq 0$. Uit (60) en (31) volgt

$$(61) \quad \int_{\zeta}^{b^*} f(\varphi(w),H_\alpha)\ \varphi'(w)\ dw = \sum_m \frac{\gamma_m}{m!} \int_{\xi}^{b} (z-a)^{\kappa-1} \log^{m+k}(z-a)\ dz$$

$$= \sum_m \frac{\gamma_m}{m!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)^{m+k} \frac{(b-a)^\kappa}{\kappa} - \left(\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)^{m+k} \frac{(\xi-a)^\kappa}{\kappa} \right\}.$$

Dit is volgens (32) gelijk aan $j-p$, waarin

$$p=(\xi-a)^{\kappa}\sum_m \frac{\gamma_m}{m!}\sum_{n=0}^{m+k}(-)^{m+k-n}\binom{m+k}{n}\frac{(m+k-n)!}{m+k-n+1}(\log(\xi-a))^n .$$

Hierin is

$$(\xi-a)^{\kappa}\ (\log(\xi-a))^n=(\zeta-a^*)^{\kappa\tau}\ (v(\zeta))^{\kappa}\ (\tau\log(\zeta-a^*)+\log v(\zeta))^n$$

$$=(\zeta-a^*)^{\kappa\tau}\ (v(\zeta))^{\kappa}\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}(\tau\log(\zeta-a^*))^{n-h}(\log v(\zeta))^h.$$

Elke term met $0\leqq h\leqq n-1$ is door $\log(\zeta-a^*)$ deelbaar, zodat zijn Hadamardontwikkeling naar machten van $\zeta-a^*$ geen constante term bevat. Dus de constante term γ' in de Hadamardontwikkeling van p naar machten van $\zeta-a^*$ is gelijk aan de constante term in de Hadamardontwikkeling van

$$(\zeta-a^*)^{\kappa\tau}\ v^{\kappa}(\zeta)\sum_m\frac{\gamma_m}{m!}\sum_{n=0}^{m+k}(-)^{m+k-n}\frac{(m+k)!}{n!\ \kappa^{m+k-n+1}}\log^n v(\zeta)$$

naar machten van $\zeta-a^*$. Die constante term γ' is dus gelijk aan het rechterlid van (56). Omdat p, afgezien van een in H_{a^*} verwaarloosbare functie, gelijk is aan γ' en omdat j-p, afgezien van een in H_{a^*} verwaarloosbare functie, gelijk is aan j', vinden wij de gevraagde betrekking $j'=j-\gamma$. Dit voltooit het bewijs voor $\kappa\neq 0$, zodat wij nu kunnen overgaan tot het geval $\kappa=0$.

Uit (60) en (33) volgt

(62) $$\int_{\zeta}^{b^*} f(\varphi(w),H_{\alpha})\ \varphi'(w)\ dw=\sum_m\frac{\gamma_m}{m!}\int_{\xi}^{b}(z-a)^{-1}\log^{m+k}(z-a)\ dz$$

$$=\sum_m\frac{\gamma_m}{m!\ (m+k+1)}(\log(b-a))^{m+k+1}-q=j-q$$

volgens (34), waarin

$$q=\sum_m\frac{\gamma_m}{m!\ (m+k+1)}(\log(\xi-a))^{m+k+1} .$$

Hierin is

$$(\log(\xi-a))^{m+k+1}=(\tau\log(\zeta-a^*)+\log v(\zeta))^{m+k+1}$$

$$=\sum_{h=0}^{m+k+1}\binom{m+k+1}{h}(\tau\log(\zeta-a^*))^{m+k+1-h}(\log v(\zeta))^h.$$

Elke term met $0 \leq h \leq m+k$ is door $\log(\zeta - a^*)$ deelbaar, zodat zijn Hadamardontwikkeling geen constante term bevat. De constante term in de Hadamardontwikkeling van $(\log v(\zeta))^{m+k+1}$ naar machten van $\zeta - a^*$ is gelijk aan $(\log c)^{m+k+1}$, zodat de constante term γ'' in de Hadamardontwikkeling van q naar machten van $\zeta - a^*$ gelijk is aan het rechterlid van (59). Omdat q, afgezien van een in H_{a^*} verwaarloosbare functie, gelijk is aan γ'' en omdat j-q gelijk is aan het linkerlid van (62) en dus, afgezien van een in H_{a^*} verwaarloosbare term, gelijk is aan j', vinden wij de gevraagde betrekking $j' = j - \gamma''$. Dit voltooit het bewijs.

Voorbeeld 20: Indien de voorwaarden van het voorafgaande voorbeeld vervuld zijn, dan is $j = j'$ in elk van de vijf volgende gevallen.

(1) Iedere in de Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)$ voorkomende term is door minstens één factor $\log(\eta - \alpha)$ deelbaar.

Immers dan is elke term in de Hadamardontwikkeling van (57) naar machten van $\eta - \alpha$ deelbaar door $\log(\eta - \alpha)$. Derhalve is de constante term γ_m in die ontwikkeling gelijk aan nul, dus $j = j'$ volgens (56) en (59).

(2) $\kappa = 0$ en de constante term c in de Hadamardontwikkeling van v(w) naar machten van $w - a^*$ is gelijk aan 1.

Immers in dit geval leert (59) ons dat $j - j' = 0$ is.

(3) $\kappa \neq 0$ en de transformatie $z = \varphi(w)$ heeft de vorm

$$\varphi(w) = a + c\,(w - a^*)^{\tau} .$$

Immers in dit geval is v(w) gelijk aan de constante c, zodat Γ_n volgens definitie de constante term voorstelt in de Hadamardontwikkeling van

$$(\zeta - a^*)^{\kappa\tau}\, c^{\kappa} \log^n c$$

naar machten van $\zeta - a^*$. Wegens $\kappa\tau \neq 0$ is $\Gamma_n = 0$, derhalve $j - j' = 0$ wegens (56).

(4) De Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$ bevat geen enkele exponent die, met -1 vermenigvuldigd, een som oplevert waarvan elke term of wel gelijk is aan ρ of wel gelijk is aan een exponent in de Hadamardontwikkeling van $u(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$.

Inderdaad, volgens definitie is γ_m de constante term in de Hadamardontwikkeling van (57) naar machten van $\eta - \alpha$. Elke exponent in de Hadamardontwikkeling van $u^m(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$ kan volgens voorbeeld 11 in § 7 geschreven worden als een som waarvan elke term gelijk is aan een exponent in de Hadamardontwikkeling van $u(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$. Als $\gamma_m \neq 0$ is, dan bevat de Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$ minstens één exponent die, met -1 vermenigvuldigd, gelijk is aan $m\rho$ vermeerderd met een exponent in de Hadamardontwikkeling van $u^m(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$. Dit geval hebben wij in de veronderstelling buitengesloten, zodat iedere γ_m de waarde nul bezit en dus, wegens (56) en (59), ook $j-j' = 0$ is.

(5) <u>$\kappa \neq 0$; $-\kappa\tau$ kan niet worden geschreven als een som waarvan elke term een exponent in de Hadamardontwikkeling van $v(w)$ naar machten van $w-a^*$ voorstelt.</u>

Immers, omdat $v^\kappa(w) \log^n v(w)$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $w-a^*$ bezit, waarin iedere exponent, volgens de voorbeelden 10, 11 en 12 in § 7 gelijk is aan een som waarvan iedere term een exponent in de Hadamardontwikkeling van $v(w)$ naar machten van $w-a^*$ voorstelt, volgt uit de veronderstelling dat de Hadamardontwikkeling van (58) naar machten van $w-a^*$ geen constante term bevat, zodat iedere Γ_n gelijk is aan nul en dus volgens (56) ook $j-j' = 0$ is.

Bewering (4) wordt nog nader bekeken en wel als volgt.

<u>Voorbeeld 21: Stel de voorwaarden van voorbeeld 19 zijn vervuld. Stel de Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$ bevat geen enkele exponent $\neq 0$ die, met -1 vermenigvuldigd, een som oplevert waarvan elke term of wel gelijk is aan ρ of wel gelijk aan een exponent in de Hadamardontwikkeling van $u(\eta)$ naar machten van $\eta - \alpha$. Dan is</u>

$$j-j' = \begin{cases} \dfrac{\gamma_0 (\log c)^{k+1}}{k+1} & \text{indien } \kappa=0 \\ \gamma_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{k} (-)^{k-n} \frac{k!\,\Gamma_n}{n!\,\kappa^{k-n+1}} & \text{indien } \kappa \neq 0 \end{cases}$$

hierin is γ_0, evenals in de voorgaande voorbeelden, de constante term in de Hadamardontwikkeling van $\chi(\eta)$ naar machten van $\eta-\alpha$, terwijl c de constante term voorstelt in de speciale Hadamardontwikkeling van v(w) naar machten van $w-a^*$.

Het speciale geval $\gamma_0=0$ levert bewering (4) van het voorgaande voorbeeld.

Het bewijs luidt als volgt. Uit de veronderstelling volgt dat voor ieder geheel getal $m \geqq 0$ de Hadamardontwikkeling van

$$(\eta-\alpha)^{\rho m}\ (\chi(\eta)-\gamma_0)\ u^m(\eta)$$

naar machten van $\eta-\alpha$ geen constante term bevat. Voor $m \geqq 1$ bevat de Hadamardontwikkeling van

$$(\eta-\alpha)^{\rho m}\ \gamma_0 . u^m(\eta)$$

naar machten van $\eta-\alpha$ geen constante term, omdat Re $\rho > 0$ is en omdat iedere exponent in de Hadamardontwikkeling van $u^m(\eta)$ naar machten van $\eta-\alpha$ een bestaanbaar deel $\geqq 0$ bezit. Voor ieder geheel getal $m \geqq 1$ bezit dus de Hadamardontwikkeling van (57) naar machten van $\eta-\alpha$ geen constante term, zodat $\gamma_m=0$ is en de bewering dus uit (56) en (59) volgt.

Voorbeeld 22: Stel wij passen op de geneutraliseerde integraal

$$j = \int_{H_0}^{\tilde{H}_b} z^{s-1}\ (b-z)^{t-1}\ \log^k z\ dz\ ,$$

waarin $b \neq 0$ en k geheel $\geqq 0$ is, de transformatie $z = w^\lambda$ toe, waarin Re $\lambda > 0$. Dan gaat j over in

$$j' = \lambda^{k+1} \int_{H_0}^{\tilde{H}_{b^*}} w^{\lambda s-1}\ (b-w^\lambda)^{t-1} \log^h w\ dw\ ,$$

waarin $b^* = b^{\frac{1}{\lambda}}$. Als t niet geheel $\leqq 0$ is, dan is $j=j'$. Als t wèl geheel $\leqq 0$ is, dan is

$$j-j' = \sum_{h=0}^{-t-1} \frac{(-)^h}{(-h-t)!\ (h+t)} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{-h-t} \left(\frac{b-(b^*-w)^\lambda}{w}\right)^{h+t} \right\}_{w=0} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \binom{s-1}{h}\ b^{s-1-h} \right\}$$

$$+ (-)^{-t}\left(\log\lambda + \frac{\lambda-1}{\lambda}\log b\right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \binom{s-1}{-t}\ b^{s-1+t} \right\} .$$

Het bijzondere geval b=1; k=0; s=1; t=0, $\lambda > 0$ hebben wij reeds in formule (25) behandeld.

In het bewijs kiezen wij op de integratieweg die de punten 0 en b verbindt een punt z_o in de omgeving van de oorsprong. Voor voldoend grote gehele $p \geqq 0$ is

$$z^{s-1}(b-z)^{t-1}\log^k z = \sum_{h=0}^{p-1} (-)^h \binom{t-1}{h} z^{s+h-1}\log^k z + r(z),$$

waarin r(z) op de boog $(0,z_o)$, de oorsprong inbegrepen, een continue functie van z voorstelt. De transformatie $z=w^\lambda$ laat de waarde van de integraal

$$\int_{H_o}^{z_o} r(z)\,dz = \int_0^{z_o} r(z)\,dz$$

onveranderd. Die transformatie laat ook de waarde van de integraal

$$\int_{H_o}^{z_o} z^{s+h-1} \log^k z\,dz \qquad (0 \leqq h \leqq p-1)$$

onveranderd; dit volgt voor $s+h = 0$ uit bewering (2) en voor $s+h \neq 0$ uit bewering (3) van voorbeeld 20. Aldus blijkt dat de waarde van de integraal

$$(63) \qquad \int_{H_o}^{z_o} z^{s-1} (b-z)^{t-1} \log^k z\,dz$$

door de transformatie $z = w^\lambda$ niet verandert.

Nu de integraal

$$(64) \quad \int_{z_1}^{\tilde{H}_b} z^{s-1}(b-z)^{t-1}\log^k z\,dz = \int_{H_o}^{b-z_1} z^{t-1}(b-z)^{s-1}\log^k(b-z)\,dz\,,$$

waarin z_1 een op de oorspronkelijke integratieweg in de omgeving van b gelegen punt voorstelt. Als z deze integratieweg doorloopt, dan doorloopt b-z de integratieweg van de in het rechterlid van (64) genoemde integraal; uit de in § 5 gegeven definitie van de Hadamardneutrix $\tilde{H}_b$ blijkt de gelijkheid van de twee leden in (64).

De vraag is wat er met de eerste van de twee integralen geschiedt als daarop de transformatie $z=w^{\lambda}$ wordt toegepast. Dat komt neer op de vraag wat er met de laatstgenoemde integraal gebeurt, als daarop de transformatie $b-z = (b^{*}-w)^{\lambda}$, dus

(65) $$z= b-(b^{*}-w)^{\lambda} = w \sum_{n=0}^{\infty} (-)^{n}\binom{\lambda}{n+1} b^{*\,\lambda-n-1} w^{n} ,$$

wordt toegepast. Men heeft voor $|z|<|b|$

$$(b-z)^{s-1} = \sum_{h=0}^{\infty} (-)^{h}\binom{s-1}{h} b^{s-1-h} z^{h} ,$$

dus

$$(b-z)^{s-1}\log^{k}(b-z) = \sum_{h=0}^{\infty} (-)^{h} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k}\binom{s-1}{h} b^{s-1-h} \right\} z^{h} ,$$

zodat voor voldoend grote gehele $q \geq 0$

$$z^{t-1}(b-z)^{s-1}\log^{k}(b-z)=\sum_{h=0}^{q-1} (-)^{h}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k}\binom{s-1}{h}b^{s-1-h}\right\}z^{t+h-1}+ r^{*}(z),$$

waarin $r(z)$ op de boog $(0, b-z_1)$ van de nieuwe integratieweg (de oorsprong inbegrepen) een continue functie van z voorstelt. Dus transformatie (65) laat de waarde van de integraal

$$\int_{H_0}^{b-z_1} r^{*}(z)\, dz = \int_{0}^{b-z_1} r^{*}(z)\, dz$$

onveranderd. Diezelfde transformatie laat de waarde van de integraal

$$j_h = \int_{H_0}^{b-z_1} z^{t+h-1}\, dz$$

onveranderd, als $t+h$ niet een geheel getal ≤ 0 is; dit volgt uit bewering (5) van voorbeeld 20, toegepast met $\psi(\eta) = \eta +h$ en $\alpha = t$, omdat $-\kappa = -\kappa\tau = -t-h$ dan niet geschreven kan worden als een som waarin elke term geheel ≥ 0 is.

De voorwaarde dat $t+h$ niet een geheel getal ≤ 0 is, is zeker vervuld als t niet een geheel getal ≤ 0 is.

Dus als t niet geheel ≤ 0 is, dan verandert transformatie (65) de waarden van de integralen j_h niet, dus evenmin de waarde van de in het rechterlid van (64) voorkomende integraal. Dus de transformatie $z = w^{\lambda}$ verandert de waarde van de integraal (63) niet, evenmin van de integraal voorgesteld door het linkerlid van (64) en natuurlijk ook niet van de convergente integraal

$$\int_{z_0}^{z_1} z^{s-1} (b-z)^{t-1} \log^k z \, dz$$

Op die manier vinden wij, in het geval waarin t niet een geheel getal ≤ 0 is, dat de transformatie $z = w^{\lambda}$ de integraal j niet verandert, dus dat $j=j'$ is.

Indien t wèl een geheel getal ≤ 0 is, dan veranderen in het bovenstaande alleen de integralen j_h met $h=0,1,\ldots,-t$ van waarden. Stel j_h gaat door transformatie (65) over in j'_h. Volgens voorbeeld 21, toegepast met $\kappa = h+t = 0$ is

$$j_{-t} - j'_{-t} = \gamma_0 \log c \; ;$$

hierin is γ_0 de constante term van $\chi(\eta) = 1$ naar machten van η^{-t}, dus $\gamma_0 = 1$; verder is c de constante term optredende in de in (65) voorkomende reeks, dus

$$c = \lambda b^{*\,\lambda-1} = \lambda b^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \text{, derhalve } j_{-t} - j'_{-t} = \log\lambda + \frac{\lambda-1}{\lambda} \log b \; .$$

Volgens voorbeeld 21 is voor $0 \leq h < -t$

$$j_h - j'_h = \frac{\gamma_0 \Gamma_0}{\kappa} = \frac{\Gamma_0}{h+t} \, ,$$

waarin Γ_0 de constante term voorstelt in de Hadamardontwikkeling van

$$w^{h+t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \binom{\lambda}{n+1} b^{*\,\lambda-n-1} w^n \right)^{h+t}$$

Dus Γ_0 is gelijk aan de coëfficient van w^{-h-t} in de Maclaurinontwikkeling van

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \binom{\lambda}{n+1} b^{\frac{\lambda-n-1}{\lambda}} w^n \right)^{h+t} = \left(\frac{b-(b^*-w)^{\lambda}}{w} \right)^{h+t} ,$$

zodat

$$\Gamma_o = \frac{1}{(-h-t)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial w}\right)^{-h-t}\left(\frac{b-(b^*-w)^{\lambda}}{w}\right)^{h+t}\right\}_{w=0} .$$

Dit voltooit het bewijs.

§ 10. De Hadamardneutrix H_∞ .

In de paragrafen 2 en 5 hebben wij de isomorphe Hadamardneutrices H_a en $\tilde{H}_b$ ingevoerd. Thans ga ik een derde neutrix invoeren, isomorph met deze twee, en wel de Hadamardneutrix H_∞ met parameter a, waarin a een willekeurig complex getal aanduidt. Het domein van deze neutrix is een in het complexe vlak of op een Riemann oppervlak gelegen puntverzameling $\mathfrak{P}$ die het punt a niet bevat en die de eigenschap bezit dat een punt ζ op $\mathfrak{P}$ op zodanige wijze continu tot het oneindige kan naderen dat arg ζ tot een eindige limiet nadert; de laatste voorwaarde mag vervangen worden door de zwakkere conditie dat $\mathfrak{P}$ een rij punten $\zeta_o, \zeta_1, \ldots$ bevat zodanig dat voor $n \to \infty$ $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n}$ tot 1 en arg ζ_n tot een eindige limiet nadert.

Ik zeg dat een functie $u(\zeta)$ op $\mathfrak{P}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $(\zeta-a)^{-1}$ bezit als ze op $\mathfrak{P}$ gedefinieerd is en voor de op $\mathfrak{P}$ gelegen punten ζ met voldoend grote $|\zeta|$ een asymptotische ontwikkeling bezit van de gedaante

$$(66) \qquad u(\zeta) \backsim {\sum_{h=0}^{\infty}}' \; \chi_h \, (\zeta-a)^{\psi_h} \log^{k_h}(\zeta-a) ,$$

waarin χ_h, ψ_h en k_h onafhankelijk van ζ zijn, waarin Re $\psi_h \to -\infty$ voor $h \to \infty$ en waarin k_h geheel ≥ 0 is. Deze ontwikkeling heeft dus dezelfde gedaante als (3) met het verschil dat in (3) Re ψ_h tot ∞ nadert, terwijl Re ψ_h in (66) tot $-\infty$ nadert. Dit spreekt trouwens vanzelf, omdat (3) geldt voor de op $\mathfrak{P}$ in de omgeving van a gelegen punten ξ , terwijl (66) geldt voor de punten ζ van $\mathfrak{P}$ waarvan $|\zeta-a|$ groot is.

De op $\mathfrak{B}$ gedefinieerde functies $\nu(\zeta)$, die voor de op $\mathfrak{B}$ gelegen punten ζ met voldoend grote $|\zeta|$ geschreven kunnen worden als een som $u(\zeta) + \delta(\zeta)$, waarin $u(\zeta)$ op $\mathfrak{B}$ een Hadamardontwikkeling naar machten van $(\zeta - a)^{-1}$ zonder constante term bezit en waarin $\delta(\zeta)$ voor de op $\mathfrak{B}$ gelegen punten ζ met $|\zeta| \to \infty$ tot nul nadert, vormen een neutrix met domein $\mathfrak{B}$. Inderdaad, als ζ de verzameling $\mathfrak{B}$ doorloopt, dan doorloopt $\xi = (\zeta - a)^{-1}$ een verzameling $\mathfrak{B}^*$ die de oorsprong niet bevat met de eigenschap dat ξ op $\mathfrak{B}^*$ op zodanige wijze continu tot 0 kan naderen dat arg ξ tot een eindige limiet nadert. Wordt $u(\zeta) = v(\xi)$ en $\delta(\zeta) = \varepsilon(\xi)$ gesteld, dan bezit $v(\xi)$ op $\mathfrak{B}^*$ een Hadamardontwikkeling naar machten van ξ en dan nadert $\varepsilon(\xi)$ tot 0 als ξ op $\mathfrak{B}^*$ tot nul nadert. Dus de klasse gevormd door de genoemde functies $\nu(\zeta)$ is isomorph met de neutrix H_o gevormd door de functies $v(\xi) + \varepsilon(\xi)$. Die klasse is derhalve volgens § 5 in voordracht II een neutrix. Deze neutrix heet de Hadamardneutrix H_∞ met drager ∞ , met parameter a, met domein $\mathfrak{B}$ en met veranderlijke ζ .

Twee Hadamardneutrices met drager ∞ , met hetzelfde domein en met dezelfde veranderlijke zijn verschillend als hun parameters a en b verschillend zijn. Want in de eerste neutrix is ζ-a verwaarloosbaar en in de tweede neutrix is ζ-b verwaarloosbaar; waren deze twee neutrices dezelfden, dan zouden ze ook het constante verschil $b-a \neq 0$ bevatten, hetgeen buitengesloten is.

Omdat H_∞ isomorph is met een neutrix H_o waarvan de eigenschappen bekend zijn, is het niet nodig de eigenschappen van de neutrix H_∞ afzonderlijk af te leiden, omdat laatstgenoemde neutrix met behulp van de transformatie $(\zeta - a)^{-1} = \xi$ tot H_o kan worden herleid.

<u>Voorbeeld 23</u>: <u>Voor iedere complexe s en voor iedere gehele $k \geq 0$ is</u>

$$\int_{H_a}^{H_\infty} (z-a)^{s-1} \log^k (z-a)\, dz = 0, \tag{67}$$

<u>als het punt a niet op de integratieweg ligt en H_∞ de Hadamardneutrix met parameter a voorstelt.</u>

Immers,

$$\int_\xi^\zeta (z-a)^{s-1}\log^k(z-a)\,dz = \begin{cases} \dfrac{\log^{k+1}(\zeta-a)}{k+1} - \dfrac{\log^{k+1}(\xi-a)}{k+1} & \text{voor } s=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^k \dfrac{(\zeta-a)^s}{s} - \left(\dfrac{\partial}{\partial s}\right)^k \dfrac{(\xi-a)^s}{s} & \text{voor } s \neq 0, \end{cases}$$

waarbij in het rechterlid de eerste term verwaarloosbaar in H_∞, de tweede verwaarloosbaar in H_0 is.

<u>Voorbeeld 24: Indien</u>

<u>$-\pi < \arg p < \pi$; $\lambda > 0$; k geheel ≥ 0; s niet geheel ≤ 0; s+t niet geheel ≥ 0 is, dan is</u>

(68) $$\int_{H_0}^{H_\infty} x^{\lambda s-1}(p+x^\lambda)^t\log^k x\,dx = \frac{1}{\lambda^{k+1}}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(-s-t)}{\Gamma(-t)}\,p^{s+t}.$$

In dit en het volgende voorbeeld is de integratieweg de positieve bestaanbare as en is H_∞ de Hadamardneutrix met parameter 0.

Merk op dat de waarde van de integraal door de substitutie $x^\lambda = y$ niet verandert. Merk verder op dat de integraal nul is, als t een geheel getal ≥ 0 is, maar dit is evident, zelfs als s geheel ≤ 0 of s+t geheel ≥ 0 is, omdat dan het linkerlid van (68) gelijk is aan

$$\sum_{h=0}^{t} \binom{t}{h} p^{t-h} \int_{H_0}^{H_\infty} x^{\lambda(s+h)-1}\log^k x\,dx = 0$$

volgens het voorgaande voorbeeld.

In het hier volgende bewijs stelt s een willekeurig punt voor gelegen in de omgeving van een getal s_0 dat niet geheel ≤ 0 is, terwijl t een willekeurig punt voorstelt gelegen in de omgeving van een punt t_0 met de eigenschap dat $s_0 + t_0$ niet geheel ≥ 0 is. Indien

(69) $$-\frac{\pi}{2} < \arg s < \frac{\pi}{2} \quad \text{en} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(-s-t) < \frac{\pi}{2}$$

is, dan is het linkerlid van (68) gelijk aan de corresponderende convergente integraal van 0 naar ∞ en dus, in verband met de transformatie $x^{\lambda} = y$, gelijk aan

$$\frac{1}{\lambda^{k+1}} \int_0^{\infty} y^{s-1}(p+y)^t \log^k y \, dy = \frac{1}{\lambda^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \int_0^{\infty} y^{s-1}(p+y)^t \, dy,$$

derhalve gelijk aan het rechterlid van (68).

Stel x_0 en x_1 zijn willekeurige positieve getallen met $x_0 < |p|^{\frac{1}{\lambda}} < x_1$.

Voor voldoend grote gehele $q \geqq 0$ is

$$x^{\lambda s-1}(p+x^{\lambda})^t \log^k x = \sum_{h=0}^{q-1} \binom{t}{h} p^{t-h} x^{\lambda(s+h)-1} \log^k x + r(x,s,t),$$

waarin $r(x,s,t)$ in het interval $0 \leqq x \leqq x_0$ continu van x en analytisch van s en t afhangt, dus

$$(70) \quad \int_{H_0}^{x_0} x^{\lambda s-1}(p+x^{\lambda})^t \log^h x \, dx = \sum_{h=0}^{q-1} \binom{t}{h} p^{t-h} \int_{H_0}^{x_0} x^{\lambda(s+h)-1} \log^h x \, dx + \int_{H_0}^{x_0} r(x,s,t) \, dx ,$$

waarin de laatste integraal een analytische functie van s en t voorstelt. Volgens voorbeeld 1 is elke in de som $\sum_{h=0}^{q-1}$ voorkomende integraal wegens $\lambda(s+h) \neq 0$ een analytische functie van s, zodat (70) een analytische functie van s en t voorstelt.

De transformatie $x = \frac{1}{y}$ geeft

$$(71) \quad \int_{x_1}^{H_\infty} x^{\lambda s-1}(p+x^{\lambda})^t \log^h x \, dx = $$

$$= (-)^k p^t \int_{H_0}^{x_1^{-1}} y^{-\lambda(s+t)-1}(p^{-1} + y^{\lambda})^t \log^h y \, dy$$

Door in de bovenstaande redenering s, p en x_0 door $-s-t$, p^{-1} en x_1^{-1} te vervangen, vinden wij dat (71) eveneens een analytische functie van s en t voorstelt.

Dit is eveneens het geval met de convergente integraal

$$\int_{x_0}^{x_1} x^{\lambda s-1} (p+x^{\lambda})^t \log^k x \, dx,$$

dus ook met de integraal (68). Deze integraal is dus een analytische functie van s en t voor iedere complexe s en iedere complexe t, de punten $s=0,-1,-2,\ldots\ldots$ en de punten $s+t = 0,-1,-2,\ldots\ldots$ uitgezonderd. Omdat formule (68) in het geval (69) geldt, geldt ze dus voor elke s en elke t, de punten $s=0,-1,\ldots\ldots$ en de punten $s+t = 0,-1,\ldots\ldots$ uitgezonderd.

Voorbeeld 25: Indien $-\pi < \arg p < \pi$; $\lambda > 0$; k geheel ≥ 0; s+t geheel $\geq k$; s niet geheel ≤ 0 is, dan is

(72) $$\int_{H_0}^{H_\infty} x^{\lambda s-1}(p+x^{\lambda})^t \log^k x \, dx$$

gelijk aan de constante term γ in de Laurentontwikkeling van

(73) $$\frac{1}{\lambda^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(-s-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \quad p^{s+\eta}$$

naar machten van $\eta - t$.

Indien de voorwaarde dat s+t geheel $\geq$ k is, vervangen wordt door de conditie dat s+t geheel ≥ 0 en $<$ k is, dan is (72) gelijk aan γ vermeerderd met de waarde die

(74) $$\frac{(-)^k \quad p^h}{h!\ (k+1)\,\lambda^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k+1} t(t-1)\ldots\ldots(t+1-h)$$

in het punt h= s+t aanneemt.

Het bewijs is analoog aan dat van het voorgaande voorbeeld. Op dezelfde manier als daar bewijzen wij dat

$$\int_{H_0}^{x_1} x^{\lambda s-1} (p+x^{\lambda})^{\eta} \log^k x \, dx$$

een in $\eta = t$ analytische functie van η voorstelt. Verder neemt volgens voorbeeld 14 in § 8 de geneutraliseerde integraal

$$\int_{x_1}^{H_\infty} x^{\lambda s-1}(p+x^{\lambda})^{\eta} \log^k x \, dx = (-)^k \int_{H_o}^{x_1^{-1}} w^{-\lambda s-1}(p+w^{-\lambda})^{\eta} \, dw \tag{75}$$

in het punt $\eta = t$ een waarde $\gamma^* + \sigma$ aan, waarin γ^* de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (74) naar machten van $\eta - t$ en waarin, volgens (38),

$$\sigma = \frac{(-)^{k+1}}{k+1} \varphi^{(k+1)}(t) .$$

Hierin is, blijkens (36), $\varphi(\eta)$ de waarde die

$(-)^k(\eta - t)^{k+1} \binom{\eta}{h} p^h (\lambda (h-s-\eta))^{-k-1}$

aanneemt voor $h = s+t$, dus

$$\varphi(\eta) = -\lambda^{-k-1} p^h \binom{\eta}{h} = - \frac{\lambda^{-k-1} p^h}{h!} \eta(\eta-1)\ldots(\eta+1-h),$$

zodat σ de waarde is die (74) in het punt $h = s+t$ aanneemt.

Aldus komen wij tot het besluit dat

$$\int_{H_o}^{H_\infty} x^{\lambda s-1} (p+x^{\lambda})^{\eta} \log^h x \, dx \tag{76}$$

in het punt $\eta = t$ de waarde $\gamma + \sigma$ aanneemt, waarin γ de constante term voorstelt in de Laurentontwikkeling van (76) naar machten van $\eta - t$. Volgens het voorgaande voorbeeld is (76) voor de in de omgeving van t gelegen punten $\eta \neq t$ gelijk aan (73), zodat γ inderdaad de constante term in de Laurentontwikkeling van (73) naar machten van $\eta - t$ is. Hiermede is het bewijs geleverd, want als $s+t$ geheel $\geq h$ is, dan is in uitdrukking (74) $0 \leq h < k$, zodat (74) de waarde 0 bezit.