STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 43

Avondcursus wiskunde 1956/57.

Analyse 111.

J.Popken.

1957

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

AMSTERDAM-O.

Avondcursus 1956-1957

Analyse III

door

Prof.Dr J. Popken

Functies van meer variabelen

Literatuur: R. Courant, Differential and Integral calculus II.

§1. Herhaling van enkele grondbegrippen (vgl. Analyse I, §§16,17).

n-dimensionale Euclidische ruimte E_n: de verzameling van alle "punten" $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, waarbij $x_1,x_2,\dots,x_n$ willekeurig gekozen reële getallen zijn.

Afstand $\rho(x,y)$ van twee punten x en y:

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 +\dots+(x_n-y_n)^2}.$$

De afstand geeft een metriek in E_n:

$$\rho(x,x) = 0, \quad \rho(x,y) > 0 \text{ als } x\neq y$$
$$\rho(x,y) = \rho(y,x) \qquad \text{(symmetrie)}$$
$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \qquad \text{(driehoeksongelijkheid).}$$

E_n is dus een metrische ruimte.

Gesloten n-dimensionaal interval: verzameling van de punten x met

$$\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1 , \quad \alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq x_n \leq \beta_n.$$

Worden de gelijktekens overal weggelaten, dan krijgt men een open interval.

δ-omgeving van een punt a $U(\delta,a)$: verzameling van de punten x met

$$\rho(x,a) < \delta \quad .$$

Zij A een deelverzameling van E_n. De punten van E_n die niet tot A behoren vormen het complement CA van A.

Een punt a van E_n heet verdichtingspunt van A als elke δ-omgeving (kortweg "omgeving") oneindig vele punten van A bevat. Het punt a zelve behoeft niet tot A te behoren.

Een punt a van E_n heet inwendig punt van A als er een omgeving van a bestaat welke geheel tot A behoort. Dus ook $a \in A$.

Een punt b van E_n heet uitwendig punt voor A als er een omgeving van b bestaat welke geheel tot CA behoort, m.a.w. b is inwendig punt van CA.

Een punt c van E_n heet randpunt voor A als elke omgeving van c minstens één punt van A en minstens één punt van CA bevat. c kan onder omstandigheden tot A behoren, in andere gevallen tot CA.

Een verzameling is open als ze geen enkel randpunt bevat, m.a.w. als elk van haar punten inwendig punt is.

Een verzameling is gesloten als ze al haar randpunten bevat. Anders gezegd: als elk verdichtingspunt tot de verzameling behoort.

Als A open is, is CA gesloten; vice versa.

De $\frac{\text{vereniging}}{\text{doorsnede}}$ van eindig vele open (gesloten) verzamelingen is weer open (gesloten).

Onder een compacte verzameling in E_n verstaan we een verzameling die gesloten en begrensd is. (Begrensd wil zeggen: er bestaat een positief getal M zodat $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leq M$ voor elk punt x van de verzameling). Voor een andere definitie van compactheid zie Analyse I, p.54.

Opmerking. Al het voorgaande blijft juist als men de definitie van omgeving wijzigt in: onder een omgeving van a verstaat men een open interval, dat a bevat.

Elke oneindige begrensde verzameling in E_n heeft minstens één verdichtingspunt (Bolzano-Weierstrass).

Overdekkingsstelling van Heine-Borel (Analyse I, p.58):

Zij A een compacte verzameling in E_n. Laat er een voorschrift bestaan, waardoor aan elk punt a van A een omgeving $U(\delta_a,a)$ van dat punt is toegevoegd. Dan bestaat er een eindig aantal punten $a_1,a_2,\ldots,a_m$, zodat de bijbehorende omgevingen de verzameling A geheel overdekken.

Zij $\{a_n\}$ een oneindige rij punten van E_n. We zeggen dat de rij $\{a_n\}$ convergent is, als er een punt a bestaat, zodat $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n,a)=0$ is. Het punt a heet in dit geval het limietpunt van de rij $\{a_n\}$ en we schrijven

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

In dit geval liggen binnen een willekeurige omgeving $U(\delta,a)$ van a alle punten a_n van de rij met $n \geq n_0$.

Een rij $\{a_n\}$ heet een fundamentaalrij, indien er bij elk positief getal ε een rangnummer n_0 te vinden is, zodat

$$\rho(a_n,a_m) < \varepsilon \quad \text{als } m,n \geq n_0.$$

(z.g. voorwaarde van Cauchy).

Elke fundamentaalrij convergeert. Het omgekeerde: elke convergente rij is ook een fundamentaalrij volgt onmiddellijk uit de driehoeksongelijkheid.

Functie van n variabelen. $f(x)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ zij gedefinieerd op een deelverzameling A van E_n, d.w.z. aan elk punt $x \in A$ is een reële waarde $f(x)$ toegevoegd.

De functie $f(x)$ heet continu in een punt a van A als:

1º a punt-verdichtingspunt van A is.

2º Bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodat

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{zodra } x \in A, \ \rho(x,a) < \delta .$$

Korter geschreven

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De functie heet continu op A als $f(x)$ continu is in elk punt van A.

Is $f(x)$ continu op een compacte verzameling A in E_n, dan vormen de functiewaarden $f(x)$ een compacte verzameling op E_1 (=getallenrechte).

Gevolg: Is $f(x)$ continu op een compacte verzameling A in E_n, dan neemt $f(x)$ op A zijn maximale- en minimale waarde aan.

De functie $f(x)$ heet uniform continu op een verzameling A in E_n als bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden, zodat voor elk puntenpaar x,y uit A

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{zodra } \rho(x,y) < \delta \text{ is.}$$

Is $f(x)$ continu op een compacte verzameling A in E_n, dan is $f(x)$ uniform continu op de verzameling A.

§2. Partiële differentiaalquotienten. Gemakshalve nemen we hier eerst $n=2$. Het punt $x=(x_1,x_2)$ van E_2 zullen we nu aanduiden door (x,y); de functie, vroeger aangeduid door $f(x)$ zullen we nu voorstellen door $f(x,y)$, of door u.

$f(x,y)$ zij voortaan gedefinieerd op een open verzameling A van E_2.

Onder het partiële differentiaalquotient(afgeleide) van $f(x,y)$ naar x in het punt (x_0,y_0) van A verstaan we

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} ;$$

m.a.w. beschouw $f(x,y_0)$ als functie van x alleen en bepaal de afgeleide voor $x=x_0$.

Notaties: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0,y_0}$, $\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)_{x_0,y_0}$, $f_x(x_0,y_0)$, $(D_x f)_{x_0,y_0}$.

<u>Analoog:</u> $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f.$

Meetkundige illustratie.

<u>weede afgeleiden</u> (afgeleiden van de tweede orde):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D^2_{xx}\ f$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{xy} = D^2_{xy}\ f \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{yx} = D^2_{yx}\ f\end{array}\right\}$$ de meest rechtse index duidt op de laatste bewerking

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D^2_{yy}\ f$$

Enz. Er zijn 2^m partiële afgeleiden van de m^{de} orde.

<u>Voorbeelden</u>. a) $f(x,y)=e^{xy}$, $A=E_2$: $f_x=ye^{xy}$, $f_y=xe^{xy}$

$f_{xx}=y^2e^{xy}$, $f_{xy}=f_{yx}=(1+xy)e^{xy}$, $f_{yy}=x^2e^{xy}$

b) $f(x,y) = \sin(x+y^2)$, $A=E_2$: Stel kortheidshalve $x+y^2=u$. $f_x=\cos u$, $f_y=2y\cos u$, $f_{xx}=-\sin u$, $f_{xy}=f_{yx}=-2y\sin u$, $f_{yy}=2\cos u - 4y^2\sin u$.

N.B. Niet steeds is $f_{xy}=f_{yx}$. Zie b.v. Landau, Einführung, p. 210 (Satz 298).

<u>Uitbreiding tot n variabelen</u>: $f(x_1,\ldots,x_n)$. Bijvoorbeeld:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{h_1}$$

enz.

Er zijn n^m partiële afgeleiden van de m^{de} orde.

<u>Stelling 1</u>. Op een open verzameling A zij f_{xy} continu, terwijl f_y bestaat. Dan bestaat ook f_{yx} en er geldt

$$f_{yx} = f_{xy} \text{ op } A.$$

(populair: de tweede afgeleide is onafhankelijk van de differentiatie volgorde).

<u>Bewijs</u>: A is open. Beschouw een δ-omgeving van (x,y) die nog geheel binnen A blijft. Kies daarbinnen $(x+h, y+k)$.

Per definitie:

$$f_{yx} = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{k} - \lim\limits_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}}{h}$$

Stel kortheidshalve

$$\Delta_{hk} = \frac{f(x+h)y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)}{hk}.$$

Het is dus voldoende te bewijzen, dat

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\ \lim\limits_{k\to 0}\ \Delta_{hk}$ bestaat en gelijk f_{xy} is.

Stel daartoe

$$g(x,y) = f(x,y+k) - f(x,y),$$

dan is

$$\Delta_{hk} = \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{hk}.$$

Nu volgt door toepassing van de stelling van het gemiddelde (2x):

$$\begin{aligned} g(x+h,y) - g(x,y) &= hg_x(x+\theta h,y) \\ &= h\left\{f_x(x+\theta h,y+k) - f_x(x+\theta h,y)\right\} \\ &= hk\, f_{xy}\,(x+\theta h,y+\theta' k) \qquad (0<\theta<1,\ 0<\theta'<1). \end{aligned}$$

Dus $\Delta_{hk}=f_{xy}(x+\theta h,y+\theta' k)$, zodat (1) volgt wegens de continuïteit van f_{xy}.

Gevolg: Laat van $f(x,y)$ alle partiële afgeleiden tot en met de n^{de} continu zijn op A, dan zijn er slechts $(n+1)$ afgeleiden van de n^{de} orde; n.l.

$$f_{x\ldots x},\ f_{x\ldots xy},\ f_{x\ldots xyy},\ \ldots\ ,\ f_{yy\ldots y}.$$

Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & f & & & \\ & & f_x & & f_y & & \\ & f_{xx} & & f_{xy} & & f_{yy} & \\ f_{xxx} & & f_{xxy} & & f_{xyy} & & f_{yyy} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

3. (Totaal) differentieerbare functies, De functie $f(x,y)$ heet differentieerbaar op A als op A functies $A(x,y)$ en $B(x,y)$ bestaan, zodat voor het puntenpaar (x,y) en $(x+h,y+k)$ van A geldt

(1) $f(x+h,y+k)=f(x,y)+A(x,y)h+B(x,y)k+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k,$

waar $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ als $h,k \to 0$.

Uitbreiding voor het algemene geval $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Conclusies: 1. Is $f(x,y)$ differentieerbaar op A, dan is $f(x,y)$ continu op A.

2. Door $k=0$, resp. $h=0$ te stellen krijgt men

$$A(x,y) = f_x(x,y),\quad B(x,y) = f_y(x,y).$$

Dus gaat (1) over in

(2) $\Delta f = f(x+h,y+k) - f(x,y) = f_x h + f_y k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k.$

Uitbreiding voor het algemene geval $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Stelling 2. Zijn f_x en f_y continu op A, dan is $f(x,y)$ differentieerbaar op A.

Bewijs: Kies (x,y) in A en tevens een omgeving U van (x,y) welke nog geheel tot A behoort. Kies $(x+h,y+k)$ in U. We hebben

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+h,y+k) - f(x,y)\\ &= f(x+h,y+k) - f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y)\\ &= h\, f_x(x+\theta_1 h,y+k)+ k\, f_y(x,y+\theta_2 k)\\ &\qquad (0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1).\end{aligned}$$

Wegens de continuïteit van f_x en f_y

$$\Delta f = h(f_x+\varepsilon_1) + k(f_y + \varepsilon_2),$$

waar $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ als $h,k \to 0$.

Uitbreiding voor $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Differentialen: Zij (x,y) een punt van A. $dx=\Delta x=h$; $dy=\Delta y=k$, zó klein te kiezen dat $(x+h,y+k)$ binnen A ligt.
Onder de differentiaal van f verstaan we de uitdrukking

$$f_x h + f_y k = f_x\, dx + f_y\, dy$$

Notatie: df. df is een benadering voor Δf.
Uitbreiding tot $f(x_1,\ldots,x_n)$.
Per definitie: $df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu$.

Voorbeeld. Toepassing op foutenrekening. Meetkundige illustratie.

Hogere differentialen: $df = f_x h + f_y k$ is een functie van x,y,h en k. Neem aan dat van $f(x,y)$ op A alle tweede afgeleiden bestaan en continu zijn. Per definitie is de tweede differentiaal d^2f gelijk aan $d(df)$, dus aan

$$(f_x h+f_y k)_x h + (f_x h+f_y k)_y\, k = f_{xx}h^2+2f_{xy}hk+f_{yy}k^2.$$

Symbolisch schrijven we

$$d^2f = (D_x h + D_y k)^2 f.$$

Algemener, als de m^{de} afgeleiden op A bestaan en continu zijn, in symbolische schrijfwijze

$$d^m f = d(d^{m-1}f) = (D_x h + D_y k)^m f,$$

of uitgeschreven:

$$d^m f = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} h^\mu k^{m-\mu} D_{x\ldots x}\, D^{m-\mu}_{y\ldots y}\, f \quad .$$

Toepassing driehoek van Pascal.

4. Kettingregel: Stel $x(t)$ en $y(t)$ zijn differentieerbaar in het open interval (a,b). Laat de bijbehorende punten $(x,y)=(x(t),y(t))$, als t het interval (a,b) doorloopt, liggen in een open verzameling A van E_2. Zij $f(x,y)$ differentieerbaar in A. Stel

$$z(t) = f\left\{x(t),\ y(t)\right\},$$

dan geldt voor elke t in (a,b)

$$\frac{dz}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt},$$

waarbij
$$f_x = f_x\left\{x(t),\ y(t)\right\}, \quad f_y = f_y\left\{x(t),\ y(t)\right\}.$$

(Vergelijk Analyse I, p.67).

Voorbeeld.

Bewijs:
$$\begin{aligned}\Delta z &= z(t+\Delta t) - z(t)\\ &= f\left\{x(t+\Delta t),\ y(t+\Delta t)\right\} - f\left\{x(t),\ y(t)\right\}\\ &= f\left\{x(t)+h,\ y(t)+k\right\} - f\left\{x(t),\ y(t)\right\}\end{aligned}$$

met
$$h = x(t+\Delta t) - x(t), \quad k=y(t+\Delta t) - y(t).$$

Omdat $f(x,y)$ differentieerbaar in A is, geldt

$$\Delta z = h\, f_x\left\{x(t),\ y(t)\right\} + k\, f_y\left\{x(t),\ y(t)\right\} + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k,$$

dus

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{h}{\Delta t} f_x\left\{x(t),\ y(t)\right\} + \frac{k}{\Delta t}\left\{x(t),\ y(t)\right\} + \varepsilon_1 \frac{h}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{k}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$ geeft nu het gewenste resultaat.

Toepassing: Formule van Euler voor homogene functies.

Uitbreiding. Zij t een afkorting voor het punt $(t_1,\dots,t_n)$ uit E_n. Laat de functies $X_\mu(t)$ voor $\mu=1,2,\dots,m$ differentieerbaar zijn in een open verzameling N van E_n. Beschouw de bijbehorende punten $(x_1,x_2,\dots,x_m)=(x_1(t),\ x_2(t),\dots,x_m(t))$ als t de verzameling N doorloopt. Laat deze punten in een open verzameling M van E_m liggen. Stel $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ is differentieerbaar in M. Zij

$$z(t_1,\dots,t_n) = f\left\{x_1(t),\ x_2(t),\dots,x_m(t)\right\}.$$

Dan is $z(t_1,\dots,t_n)$ differentieerbaar in N en er geldt

$$\frac{\partial z}{\partial t_\nu} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_\nu} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_\nu} \qquad (\nu=1,2,\dots,h)$$

Bewijs door generalisatie van voorgaande bewijs.

Voorbeelden.

Toepassing: $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi}$

De gegeneraliseerde kettingregel vindt veelvuldig toepassing in de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 1. Aan de partiële differentiaalvergelijking

(1) $$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

wordt voldaan door elke functie $z(x,y)$ die impliciet gegeven is door een vergelijking

(2) $$f(xy,\ z - xy \log(x)) = 0.$$

Hierbij mag voor $f(u,v)$ een willekeurige functie in u,v met continuë partiële afgeleiden worden gekozen met $f_v \neq 0$.

Bewijs: Door differentiatie van (2) naar x vindt men

(3) $$f_u\, y + f_v\, (z_x - y \log x - y) = 0$$

en door differentiatie van (2) naar y

(4) $$f_u\, x + f_v\, (z_y - x \log x) = 0.$$

Uit (3) en (4) volgt (1) gemakkelijk.

Voorbeeld 2. Laat $u_1(x,y,z)$ en $u_2(x,y,z)$ twee integralen van de differentiaalvergelijking

(5) $$F(x,y,z)\, u_x + G(x,y,z)\, u_y + H(x,y,z)\, u_z = 0$$

zijn. Zij verder $\psi(v,w)$ een willekeurige functie in v en w met continuë partiële afgeleiden, dan voldoet

$$u(x,y,z) = \psi\,(u_1(x,y,z),\ u_2(x,y,z))$$

ook aan (5).

Bewijs:
$$u_x = \psi_v\, u_{1x} + \psi_w\, u_{2x}$$
$$u_y = \psi_v\, u_{1y} + \psi_w\, u_{2y}$$
$$u_z = \psi_v\, u_{1z} + \psi_w\, u_{2z}$$

Door deze drie betrekkingen resp. met $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ en $H(x,y,z)$ te vermenigvuldigen en op te tellen krijgt men de bewering.

Andere vorm van kettingregel: onder de voorwaarden van de vorige stelling geldt

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_m} d\,x_m$$

(m.a.w. voor de differentialen van de eerste orde kan men net doen of $x_1, \ldots, x_m$ onafhankelijke variabelen zijn).

Bewijs.

. Middelwaardestelling: Zij $f(x,y)$ differentieerbaar op een open ...ameling A in E_2. Dan geldt voor elk puntenpaar (x_o,y_o), (x_o+h,y_o+k) ...nig dat de verbindingslijn geheel tot A behoort:

$$f(x_o+h,\ y_o+k) - f(x_o,y_o) = h\ f_x(X,Y) + k\ f_y(X,Y),$$

...r (X,Y) een punt op de genoemde verbindingslijn voorstelt.

Bewijs door

$$F(t) = f(x_o + ht,\ \ y_o + kt)$$

...eschouwen. Volgens de middelwaardestelling voor één variabele (Ana... I, p.69) is n.l.

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) = h\ f_x(x_o+h\theta\ ,\ y_o+k\theta) + k\ f_y(x_o+h\theta\ ,\ y_o+k\theta)$$

$0<\theta<1$ en hieruit volgt de bewering met $X=x_o+h\theta$, $Y=y_o+k\theta$.

...lg. Is $f(x,y)$ differentieerbaar in een gebied A van E_2 en is daar ...0, $f_y \equiv 0$, dan is $f(x,y)$ constant op A.

Reeksontwikkeling van Taylor: Stel van de functie $f(x,y)$ zijn de ...iële differentiaalquotienten tot en met de $(n+1)^{ste}$ continu op een ... verzameling A in E_2. Dan geldt voor elk puntenpaar (x_o,y_o), ...h, $y_o+k)$ zodanig dat de verbindingslijn geheel tot A behoort:

$$f(x_o+h,\ y_o+k) = f(x_o,y_o) + \frac{1}{1!}(h\ D_x + k\ D_y)\ f(x_o,y_o) + \dots + \frac{1}{n!}(h\ D_x + k\ D_y)^n\ f(x_o,y_o) + R_n\ ,$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(h\ D_x + k\ D_y)^{n+1}\ f(x_o + \theta h,\ y_o + \theta k) \qquad (0<\theta<1)$$

...js: met behulp van (1) en door dan de reeksontwikkeling van Maclaurin ...te passen (Analyse I, p.78):

$$F(t) = \sum_{v=0}^{n} \frac{1}{v!} F^{(v)}(0)\ t^{v} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta t).$$

...geleiden van $F(t)$ vindt men met behulp van de kettingregel:

$$F^{(\nu)}(t) = (h\ D_x + k\ D_y)^{\nu}\ f(x_o + ht,\ y_o + kt).$$

...titutie van deze waarden in (2) geeft gemakkelijk de bewering.

. Extreme waarden (één variabele).

Eerst behandelen we het geval E_1. Laat $f(x)$ gedefinieerd zijn op ...untverzameling A; deze behoeft nu niet persé open te zijn.

Definitie. Men zegt dat $f(x)$ voor $x=a$ in A een maximum $f(a)$ aanneemt als er een omgeving U: $a-\delta < x < a+\delta$ van a bestaat, zodat voor elke $x \neq a$ uit $A \cap U$ geldt

$$(1) \qquad f(x) < f(a).$$

Voorbeelden: $f(x) = -(x-1)^2$, $a=1$; $f(x) = e^{-x^2}$, $a=0$; $f(x)=x^4-x^2$, $a=0$. In alle drie gevallen is $A=E_1$.

In de beide eerste voorbeelden geldt de ongelijkheid (1) voor elke $x \neq a$ uit A. Men spreekt dan van een absoluut maximum. In het laatste voorbeeld geldt de ongelijkheid slechts voor zekere omgeving van a. Men noemt dit een locaal (ook wel relatief) maximum.

In de meest voorkomende gevallen is a een inwendig punt van A, kan men dus een omgeving U vinden, die geheel binnen A ligt ("inwendig maximum"). Het kan echter ook voorkomen dat a een randpunt van A is ("rand maximum"). Voorbeeld.

Analoge definities voor minimum, absoluut minimum en locaal minimum krijgt men door in (1) het $<$ teken te vervangen door $>$.

Voorbeelden: $f(x) = |x|$ heeft een absoluut minimum voor $x=0$; $f(x)= e^{-\frac{1}{x^2}}$ heeft een absoluut minimum voor $x=0$ als we $f(0)=0$ stellen. Vervangt men (1) door de zwakkere voorwaarde

$$f(x) \leq f(a)$$

voor elke x uit $U \cap A$, dan heet $f(a)$ nul een maximale waarde of zwak maximum van $f(x)$. Analoog minimale waarde of zwak minimum. Voorbeeld: De functie van Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ voor } x > 0 \\ \frac{1}{2} \text{ voor } x=0 \\ 0 \text{ voor } x<0 \end{cases}$$

heeft maximale waarde 1 en minimale waarde 0.

Is $f(x)$ continu op een compacte verzameling A, dan neemt $f(x)$ op A minstens één keer zijn maximale en minstens één keer zijn minimale waarde aan (pag.3). In het bijzonder geldt dit als $f(x)$ continu op een gesloten interval $[a,b]$ is.

Maxima en minima heten tezamen sterke extrema, maximale en minimale waarden zwakke extrema.

Stelling 1. Heeft $f(x)$ voor een inwendig punt a van A een (zwak) extremum, en bestaat $f'(a)$, dan is noodzakelijk $f'(a)=0$.

Bewijs. Een punt a met $f'(a)=0$ heet een stationair punt. De vorige stelling zegt dat extrema alleen in stationaire punten kunnen voorkomen of in punten waar de afgeleide niet bestaat. Het voorbeeld $f(x)=x^3$, $a=0$ toont aan dat een stationair punt niet noodzakelijk een extreem oplevert.

Bepaling van inwendige extrema met behulp van een getallenlijn voor het teken van $f'(x)$. Eerst zoekt men de "verdachte" punten a, zodat $f'(a)=0$, dan wel $f'(a)$ niet bestaat (a moet in dit geval wel continuïteitspunt zijn:

$a-\delta \quad + \quad a \quad - \quad a+\delta$ $\qquad$ $f(a)$ is maximum

$a-\delta \quad - \quad a \quad + \quad a+\delta$ $\qquad$ $f(a)$ is minimum

$a-\delta \quad + \quad a \quad + \quad a+\delta$ $\qquad$ geen extreem

$a-\delta \quad - \quad a \quad - \quad a+\delta$ $\qquad$ idem

Bewijs: middelwaarde stelling.
Een analoge methode is ook bruikbaar voor sommige randextremen:

$a-\delta \quad + \quad a$ $\qquad$ $f(a)$ is randmaximum

$a \quad - \quad a+\delta$ $\qquad$ idem

enz.

Voorbeeld 1: $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ heeft een minimum voor $x=(a_1+a_2+\ldots+a_n):n$.
Voorbeeld 2: $f(x) = \sin x - \cos x$ $(-2\pi \leq x \leq 2\pi)$ heeft een randmaximum voor $x=-2\pi$, inwendig minimum voor $x=-\pi$, inwendig maximum voor $x=\pi$, randminimum voor $x=2\pi$; $x=0$ is stationair punt echter geen extreem.

Stelling 2. $f(x)$ zij differentieerbaar in $(a-\delta, a+\delta)$, terwijl $f''(a)$ bestaat. Is $f'(a)=0$, dan is $f(a)$ een maximum dan wel een minimum naar gelang $f''(a) < 0$ dan wel $f''(a) > 0$.

Bewijs.

Heeft men $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, dan kan men in veel gevallen gebruik maken van de ontwikkeling van $f(x)$ naar machten van $x-a$.

Voorbeeld: onderzoek of $f(x)= \sin x-x$ een extremum heeft voor $x=0$.

1^0 methode:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$= -\cos(\theta x) \cdot \frac{x^3}{3!},$$

zodat $f(x)$ voor $x=0$ van teken wisselt en dus geen extremum heeft.

2^0 methode

$$f(x) = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = -\frac{x^3}{3!} + O(x^5) \text{ als } x \to 0.$$

Opgave. $f(x)$ zij in $(a-\delta, a+\delta)$ n-maal differentiëerbaar. Zij

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Is n even dan bezit $f(x)$ een extremum voor $x=a$ en wel een maximum als $f^{(n)}(a) < 0$ en een minimum als $f^{(n)}(a) > 0$.

Is n oneven, dan bezit $f(x)$ géén extremum voor $x=a$. Bewijs dit met behulp van de eerste methode.

7. Extreme waarden bij functies van twee en meer variabelen.

Laat $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ gedefiniëerd zijn op een puntverzameling A van E_n. A behoeft niet open te zijn.

Men zegt dat $f(x)$ voor $x=a=(a_1,\ldots,a_n)$ in A een maximum $f(a)=f(a_1,\ldots,a_n)$ aanneemt als er een omgeving $U=U(\delta,a)$ bestaat, zodat voor elke $x\neq a$ uit $A\cap U$ geldt

(1) $$f(x) \leqslant f(a).$$

Voorbeelden: a) $f(x,y) = e^{-x^2y^2}$, $a=(0,0)$, $A=E_2$,

b) $f(x,y) = x^4+2x^2y^2+y^4-x^2-y^2+1$, $a=(0,0)$, $A=E_2$.

c) $f(x,y) = x^2-y^2$, $a=(\pm1,0)$, $A: x^2+y^2 \leqslant 1$.

Analoge definitie voor minimum door in (1) het ongelijkteken om te keren.

Voorbeeld: d) $f(x,y) = x^2-y^2$, $a=(0,\pm1)$, $A: x^2+y^2 \leqslant 1$.

Analoog met § 6 definities voor absoluut maximum (a)), locaal maximum (b), c)), inwendig maximum (a), b)), rand maximum (c)), maximale waarde en de analoge begrippen voor minimum; extremum (a), b), c), d)).

Stelling 1: Heeft $f(x)$ voor een inwendig punt a van A een (zwak) extremum, en bestaat $\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)_a$ $(1\leqslant \nu \leqslant n)$, dan is noodzakelijk $\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)_a=0$.

Bewijs: Pas stelling 1 van § 6 toe op

$$F(x) = f(a_1,\ldots,a_{\nu-1}, x, a_{\nu+1},\ldots,a_n).$$

Een punt a, zodat $\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)_a = 0$ voor $\nu=1,2,\ldots,n$ heet een stationair punt. Het voorbeeld $f(x,y) = xy$, $a=(0,0)$, $A=E_2$ toont aan, dat de functie voor een stationair punt niet altijd een extremum bezit ("zadelpunt").

Beschouw de vorm in de variabelen h,k

$$Q(h,k) = A\,h^2 + 2B\,h\,k + C\,k^2,$$

waarbij A,B en C nog van h en k mogen afhangen. Laten we aannemen dat in een zekere omgeving van $(0,0)$

$$A > 0, \quad \Delta = B^2 - AC < 0$$

is. Nu is blijkbaar

$$AQ = (Ah + Bk)^2 + (AC-B^2)k^2.$$

Wordt nu $(h,k) \neq (0,0)$ in de genoemde omgeving gekozen dan volgt $Q(h,k)>0$; m.a.w. Q is daar positief definiet.

Analoog volgt uit

$$A < 0, \quad \Delta < 0,$$

dat Q negatief definiet is.

Zijn A, B en C constanten, dan is $Q(h,k)$ een bikwadratische vorm en Δ wordt de discriminant. Nemen we nu het geval, dat in tegenstelling met het voorafgaande $\Delta > 0$ is, dan krijgen we een indefiniete vorm: $Q(h,k)$ is nul op twee verschillende rechten door de oorsprong, terwijl in de vier zo gevormde hoeken $Q(h,k)$ afwisselend óf steeds positief óf steeds negatief is.

Stelling 2 (discriminantregel). Laat (a_1,a_2) een stationair punt voor de functie $f(x,y)$ zijn. Laat $f(x,y)$ in een omgeving van (a_1,a_2) continuë tweede afgeleiden bezitten.

Stel

$$\Delta = (f_{xy}{}^2 - f_{xx}\, f_{yy})_{a_1,a_2}\,.$$

Is $\Delta < 0$, dan heeft $f(x,y)$ een sterk extreem voor (a_1,a_2) en wel een minimum als $f_{xx}(a_1,a_2) > 0$ en een maximum als $f_{xx}(a_1,a_2) < 0$.

Is $\Delta > 0$, dan heeft $f(x,y)$ voor (a_1,a_2) geen extremum.

Bewijs. 1) In het geval $\Delta < 0$ passen we de reeksontwikkeling van Taylor toe:

$$f(a_1+h,\ a_2+k) = f(a_1,a_2) + (h\, D_x + k\, D_y)\, f(a_1,a_2) + \frac{1}{2!}(h\, D_x + k\, D_y)^2\, f(a_1+\theta h,\ a_2+\theta k)$$

omdat (a_1,a_2) een stationair punt is volgt

$$f(a_1+h,\ a_2+k) - f(a_1,a_2) = \tfrac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})_{a_1+\theta h,\ a_2+\theta k}$$

Stel nu

$$A = \tfrac{1}{2} f_{xx}(a_1+\theta h,\ a_2+\theta k),\quad B = \tfrac{1}{2} f_{xy}(a_1+\theta h, a_2+\theta k),$$
$$C = \tfrac{1}{2} f_{yy}(a_1+\theta h,\ a_2+\theta k)$$

dan is

$$f(a_1+h,\ a_2+k) - f(a_1,a_2) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2. \tag{2}$$

Uit de opmerking voorafgaande aan stelling 2 volgt nu, dat het rechterlid in (2) definiet is en wel positief definiet als $f_{xx}(a_1,a_2) > 0$ en negatief definiet als $f_{xx}(a_1,a_2) < 0$. In het eerste geval hebben we dus een minimum, in het tweede geval een maximum.

2) In het geval $\Delta > 0$ stellen we

$$F(t) = f(a_1+ht,\ a_2+kt).$$

Dan is $F(0) = f(a_1,a_2)$. Verder

$$F'(t) = (h\,D_x + k\,D_y)\,f(a_1+ht,\ a_2+kt),$$
$$F'(0) = 0,$$
$$F''(t) = \frac{1}{2!}\,(h\,D_x + k\,D_y)^2\,f(a_1+ht,\ a_2+kt)$$
$$F''(0) = \frac{1}{2}\,(h^2 f_{xx} + 2hk\,f_{xy} + k^2 f_{yy})_{a_1,a_2}\ ;$$

m.a.w. $F''(0)$ is een bikwadratische vorm in h en k met constante coëfficiënten en met discriminant

$$\Delta = (f_{xy}{}^2 - f_{xx}\,f_{yy})_{a_1,a_2} > 0.$$

Deze vorm is dus niet definiet en we kunnen in elke omgeving van $h=0$, $k=0$ enerzijds de getallen h en k zo kiezen, dat $F''(0) < 0$, anderzijds zo, dat $F''(0) > 0$. In het eerste geval heeft $F(t)$ voor $t=0$ een maximum, in het tweede geval een minimum (§ 6, stelling 2).

In het eerste geval krijgen we dus in een omgeving van (a_1,a_2) waarden $f(x,y) < f(a_1,a_2)$, in het andere geval waarden $f(x,y) > f(a_1,a_2)$. Dus geen extremum.

Voorbeeld: a) $f(x,y) = x^2+y^2-x^3y^3$. De oorsprong levert een minimum.

b) $f(x,y) = x^2+y^2-4xy$. De oorsprong is een stationair punt, maar levert géén extremum.

Impliciete functies

§1. Inleiding; "locaal" karakter van deze studie.
§2. Iteratie methode (vergelijk syllabus differentiaalvergelijkingen, pag.41 enz.).

Hulpstelling. Laat $F(x,y)$ en $F_y(x,y)$ continu zijn op een open verzameling V in het X-Y vlak. Zij $(a,b) \in V$ en verder

(1) $$b = F(a,b)\ , \quad F_y(a,b) = 0.$$

Dan bestaat er een positief getal δ en een continue functie $y(x)$ zodat

(2) $$y(a) = b, \qquad y(x) = F(x,y(x)) \text{ voor } |x-a| < \delta.$$

Bovendien bestaat er een positief getal ε , zodat in de rechthoek $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \varepsilon$ geen andere oplossingen van de vergelijking $y=F(x,y)$ liggen.

Bewijs. Kies binnen V een gesloten, gerichte rechthoek R_1 met (a,b) als middelpunt, zodat binnen R_1

$$F_y(x,y) \leq \tfrac{1}{2}.$$

Voor twee punten (x,y) en (x,y^*) uit R_1 geldt dan volgens de middelwaardestelling

(3) $$|F(x,y) - F(x,y^*)| \leq \tfrac{1}{2}|y-y^*| .$$

Stel de halve hoogte van R_1 voor door ε en kies $\delta > 0$ zo klein dat $\delta < \varepsilon$ en dat

(4) $$|F(x,b) - F(a,b)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon \text{ voor } |x-a| \leq \delta.$$

Zij R de rechthoek $|x-a| \leq \delta$, $|y-b| \leq \varepsilon$ (tekenen !)
Voor $|x-a| \leq \delta$ definieren we nu

$$y_0(x) = b = F(a,b)$$
$$y_1(x) = F(x,y_0(x))$$
$$- - - - - - - - - - -$$

(5) $$y_n(x) = F(x,y_{n-1}(x))$$
$$- - - - - - - - - - -$$

Neem aan, dat voor elke x met $|x-a| \leq \delta$ het punt $(x,y_{n-1}(x))$ in R ligt, dan volgt

$$y_n(x)-b = F(x,y_{n-1}(x)) - F(x,b) + F(x,b) - F(a,b),$$

dus wegens (3) en (4)

$$|y_n(x) - b| \leq \tfrac{1}{2}\ |y_{n-1}(x)-b| + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon,$$

zodat dan ook $(x,y_n(x))$ in R ligt. Door volledige inductie volgt dat $y_n(x)$ continu is en dat $y_n(a)=b$.

Nu is voor $|x-a| \leq \delta$ wegens (3)

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = |F(x,y_n) - F(x,y_{n-1})| \leq \tfrac{1}{2}|y_n(x) - y_{n-1}(x)|,$$

zodat de reeks

(6) $$y(x) = y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots$$

afbreekt of convergeert. In het laatste geval uniform in $|x-a| \leq \delta$ (Weierstrass).

Voor $|x-a| \leq \delta$ is elke term in (6) continu, dus $y(x)$ is continu. $n \to \infty$ levert wegens $y_n(x) \to y(x)$ en (5)

$$y(x) = F(x,y(x)), \quad y(a) = b,$$

waarmee het eerste deel van de hulpstelling is bewezen.

Stel voor zekere x met $|x-a| \leq \delta$ is (x,y^*) een oplossing van $y=F(x,y)$, dan volgt uit (3)

$$|y(x) - y^* = |F(x,y(x)) - F(x,y^*)| \leq \tfrac{1}{2}|y(x)-y^*|,$$

dus $y^*=y(x)$.

§ 3. Stelling der impliciete functies. Laat $f_x(x,y)$ en $f_y(x,y)$ continu zijn op een open verzameling V. Zij $(a,b) \in V$ en verder

(7) $$f(a,b) = 0, \quad f_y(a,b) \neq 0.$$

Dan is er een positief getal δ en een differentiëerbare functie $y(x)$, zodat

(8) $$y(a) = b, \quad f(x,y(x)) \equiv 0 \text{ voor } |x-a| < \delta.$$

Voor deze functie geldt

$$\frac{dy}{dx} = -f_x/f_y \qquad (|x-a| < \delta).$$

Bovendien bestaat er een positief getal ε, zodat in de rechthoek $|x-a| < \delta$, $|y-b| < \varepsilon$ alle oplossingen van $f(x,y)=0$ door $y=y(x)$ gegeven worden.

Voorbeeld.

Bewijs: Beschouw

$$F(x,y) = y - c\, f(x,y),$$

waarbij de constante c bepaald wordt door de voorwaarde

$$F_y(a,b) = 1 - c\, f_y(a,b) = 0.$$

Dan is $F(a,b) = b-c\, f(a,b) = b$, terwijl ook de overige voorwaarden van de vorige hulpstelling vervuld zijn. Kies δ_1 en ε als in deze hulpstelling ($\delta_1=\delta$). Voor $|x-a| < \delta_1$ bestaat er dus een continue functie $y(x)$ met $y(x) \equiv F(x,y(x))$, dus met $f(x,y(x)) \equiv 0$, en met $y(a)=b$.

Bovendien is er in $|x-a| < \delta_1$, $|y-b| < \varepsilon$ géén andere oplossing van $y=F(x,y)$, dus van $f(x,y)=0$.

We bewijzen nu, dat $y(x)$ zelfs differentiëerbaar is. Stel $f_y(a,b)=\Delta\neq 0$ en $f_y(x,y)$ is continu op V, dus $f_y(x,y(x))\to\Delta$ als $x\to a$. Kies het positieve getal $\delta<\delta_1$, zodat

$$|f_y(x,y(x))| > \frac{|\Delta|}{2} \quad \text{voor } |x-a|<\delta.$$

Zij $|x-a|<\delta$, $|x+h-a|<\delta$. Stel $y(x+h) = y(x)+k$. $f(x,y)$ is totaal differentiëerbaar op V. Dus

$$f(x+h,\ y(x)+k) - f(x,y(x)) = (f_x+\varepsilon_1)h + (f_y+\varepsilon_2)k=0,$$

met $\varepsilon_1, \varepsilon_2\to 0$ als $h\to 0$. Kies $h\neq 0$, maar $|h|$ zo klein, dat $|\varepsilon_2|<\frac{|\Delta|}{2}$, dan volgt $f_y+\varepsilon_2\neq 0$ en dus

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{f_x+\varepsilon_1}{f_y+\varepsilon_2}\ .$$

$h\to 0$ levert $\frac{dy}{dx} = -f_x/f_y$.

Bijzonder geval: inverse functie: $x = F(y)$, $a=F(b)$, $F'(y)$ continu en $F'(b)\neq 0$.

Berekening van $\frac{d^2y}{dx^2}$ als de tweede partiële afgeleiden van $f(x,y)$ contin zijn op V.

Voorbeeld.

§ 4. Uitbreiding van het aantal onafhankelijke variabelen.

Laat $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ continue eerste partiële afgeleiden bezitten op een open verzameling van E_{n+1}. Zij $(a_1,a_2,\ldots,a_n,b)\in V$ en

$$f(a_1,\ldots,a_n,b) = 0\ ,\quad f_y(a_1,\ldots,a_n,b)\neq 0.$$

Dan is er een positief getal δ en een differentieerbare functie $y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zodat

$$y(a_1,\ldots,a_n) = b,\quad f(x_1,\ldots,x_n,\ y(x_1,\ldots,x_n))\equiv 0 \text{ voor } |x_\nu-a_\nu|<\delta$$

Voor deze functie geldt

$$\frac{\partial y}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\Big/\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n).$$

Bovendien bestaat er een positief getal $\varepsilon>0$, zodat in $|x_\nu-a_\nu|<\delta$, $|y-b|<\varepsilon$ géén andere oplossingen van $f(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ liggen.

Bewijs: analoog aan dat van de voorgaande stelling.

Voorbeeld.

5. Uitbreiding van het aantal afhankelijke variabelen.

Hulpstelling: Laat

$$F(x,y_1,y_2)\ ,\ G(x,y_1,y_2),\ F_{y_1},\ F_{y_2},\ G_{y_1},\ G_{y_2}$$

continu op een open verzameling V van E_3 zijn. Zij $(a,b_1,b_2) \in V$ en verder

$$(1^*)\quad \begin{array}{ll} F(a,b_1,b_2) = b_1\ , & F_{y_1}(a,b_1,b_2) = F_{y_2}(a,b_1,b_2) = 0 \\ G(a,b_1,b_2) = b_2\ , & G_{y_1}(a,b_1,b_2) = G_{y_2}(a,b_1,b_2) = 0. \end{array}$$

Dan is er een positief getal δ en een paar van continue functies $y_1(x)$, $y_2(x)$, zodat

$$(2^*)\quad \begin{array}{ll} y_1(a)=b_1, & y_1(x)\equiv F(x,y_1(x),y_2(x)) \\ y_2(a)=b_2, & y_2(x)\equiv G(x,y_1(x),y_2(x)) \end{array} \text{ voor } |x-a| < \delta.$$

Bewijs: Kies $\varepsilon > 0$ zo klein, dat

$$|F_{y_1}|\ ,\ |F_{y_2}|\ ,\ |G_{y_1}|\ ,\ |G_{y_2}| \leq \tfrac{1}{4}$$

voor de gesloten balk R: $|x-a| \leq \varepsilon$, $|y_1-b_1| \leq \varepsilon$, $|y_2-b_2| \leq \varepsilon$.

Voor twee punten (x,y_1,y_2) én (x,y_1^*,y_2^*) van R_1 is dan volgens de middelwaardestelling

$$(3^*)\quad \begin{array}{l} |F(x,y_1,y_2) - F(x,y_1^*,y_2^*)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Max}(|y_1-y_1^*|,\ |y_2-y_2^*|) \\ |G(x,y_1,y_2) - G(x,y_1^*,y_2^*)| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Max}(|y_1-y_1^*|,\ |y_2-y_2^*|) \end{array}$$

Kies nu $\delta < \varepsilon$ zo klein, dat voor $|x-a| < \delta$

$$(4^*)\quad |F(x,b_1,b_2)-F(a,b_1,b_2)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,\ \ |G(x,b_1,b_2)-G(a,b_1,b_2)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

Zij R de balk: $|x-a| \leq \delta$, $|y_1-b_1| \leq \varepsilon$, $|y_2-b_2| \leq \varepsilon$.

Voor $|x-a| \leq \delta$ definiëren we nu:

$$y_{10}(x) = b_1\ ,\quad y_{20}(x) = b_2$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$$(5^*)\quad y_{1n}(x)=F(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1}),\ y_{2n}(x)=G(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1})$$

- -

Neem aan, dat $(x,y_{1,n-1},\ y_{2,n-1})$ in R ligt, dan is

$$\begin{aligned} |y_{1n}(x)-b_1| &= |F(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1}) - F(a,b_1,b_2)| \\ &= |F(x,y_{1,n-1},y_{2,n-1}) - F(x,b_1,b_2) + \\ &\qquad + |F(x,b_1,b_2) - F(a,b_1,b_2)| \\ &\leq \tfrac{1}{2} \operatorname{Max}(|y_{1,n-1}-b_1|\ ,\ |y_{2,n-1}-b_2|) + \tfrac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon \end{aligned}$$

en analoog $|y_{2n}(x) - b_2| \leq \varepsilon$, zodat dan ook (x,y_{1n},y_{2n}) in R ligt. Door volledige inductie volgt hieruit, dat $y_{1n}(x)$, $y_{2n}(x)$ continu zijn en dat $y_{1n}(a) = b_1, y_{2n}(a) = b_2$ zijn.

Als in het bewijs van § 2 volgt dat voor i=1,2

$$(6^*) \qquad y_i(x) = y_{io}(x) + (y_{i1}(x) - y_{io}(x)) + \ldots + (y_{in}(x) - y_{i,n-1}(x)) + \ldots$$

elk der reeksen hetzij afbreekt, hetzij uniform convergent is voor $|x-a| \leq \delta$. De functies $y_i(x)$ zijn dus continu, $y_i(a) = \lim_{n\to\infty} y_{in}(a) = b_i$, en uit (5*) volgt voor $n \to \infty$

$$y_1(x) = F(x,y_1,y_2) \quad , \quad y_2(x) = G(x,y_1,y_2).$$

Stelling: Laat van de functies $f(x,y_1,y_2)$, $g(x,y_1,y_2)$ alle eerste partiële afgeleiden continu zijn op een open verzameling V van E_3. Zij $(a,b_1,b_2) \in V$ en verder

$$(7^*) \qquad f(a,b_1,b_2) = 0, \quad g(a,b_1,b_2) = 0, \quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \neq 0 \text{ voor } x=a, \; y_1=b_1, y_2=b_2.$$

Dan is er een positief getal δ en een paar continue functies $y_1(x)$, $y_2(x)$, zodat

$$(8^*) \qquad \begin{matrix} y_1(a) = b_1 & , & f(x,y_1(x), y_2(x)) \equiv 0 \\ y_2(a) = b_2 & , & g(x,y_1(x), y_2(x)) \equiv 0 \end{matrix} \qquad \text{voor } |x-a| < \delta .$$

Bewijs: Beschouw de functies F en G gedefiniëerd door

$$F(x,y_1,y_2) = y_1 - c_1 f(x,y_1,y_2) - c_2 g(x,y_1,y_2)$$

$$G(x,y_1,y_2) = y_2 - c_3 f(x,y_1,y_2) - c_4 g(x,y_1,y_2),$$

waarbij de constanten c_1 en c_2 worden bepaald door de voorwaarden

$$\begin{matrix} F_{y_1} = 1 - c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_1} - c_2 \dfrac{\partial g}{\partial y_1} = 0 \\ F_{y_2} = \quad - c_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_2} - c_2 \dfrac{\partial g}{\partial y_2} = 0 \end{matrix} \qquad \text{voor } x=a, y_1=b_1, y_2=b_2$$

(omdat $\frac{\partial(f,g)}{\partial(y_1,y_2)} \neq 0$ is, is dit mogelijk).
Analoog worden de constanten c_3 en c_4 bepaald door de voorwaarden $G_{y_1} = G_{y_2} = 0$ voor $x=a, y_1=b_1, y_2=b_2$.

Voor de functies F en G zijn nu de voorwaarden van de vorige hulpstelling vervuld. Er bestaat dus een $\delta > 0$ en een paar continue functies $y_1(x), y_2(x)$, zodat (2*) geldt, m.a.w.

$$y_1(a) = b_1 \;, \quad y_1(x) \equiv y_1(x) - c_1 f(x,y_1,y_2) - c_2 g(x,y_1,y_2)$$

$$y_2(a) = b_2 \;, \quad y_2(x) \equiv y_2(x) - c_3 f(x,y_1,y_2) - c_3 g(x,y_1,y_2)$$

Bovendien is

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} f_{y_1} & g_{y_1} \\ f_{y_2} & g_{y_2} \end{vmatrix}_{a,b_1,b_2} = 1,$$

dus

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hieruit volgt

$$f(x,y_1,y_2) \equiv 0 \quad , \quad g(x,y_1,y_2) \equiv 0.$$

Supplement. Onder de voorwaarden van de stelling, zijn $y_1(x)$ en $y_2(x)$ differentieerbaar voor $|x-a| < \delta$ en er geldt daar

$$\begin{cases} f_x + f_{y_1} \dfrac{dy_1}{dx} + f_{y_2} \dfrac{dy_2}{dx} = 0 \\ g_x + g_{y_1} \dfrac{dy_1}{dx} + g_{y_2} \dfrac{dy_2}{dx} = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld.

Uitbreiding: Laat van de functies $f_\mu(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ $(\mu=1,\ldots,m)$ alle eerste partiële afgeleiden continu zijn op een open verzameling V van E_{n+m}. Zij $(a_1,\ldots,a_n, b_1,\ldots,b_m) \in V$ en verder

$$f_\mu(a_1,\ldots,a_n, b_1,\ldots,b_m)=0 \ , \quad \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)} \neq 0 \text{ voor } x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n, \; y_1=b_1,\ldots,y_m=b_m.$$

Dan is er een positief getal δ en een stelsel van m differentiëerbare functies $y_1=y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_m=y_m(x_1,\ldots,x_n)$, zodat voor $\mu=1,2,\ldots,m$

$$y_\mu(a_1,\ldots,a_n) = b_\mu \ , \quad f_\mu(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) \equiv 0$$

voor $|x_\nu - a_\nu| < \delta$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$.

Toepassingen

§6. Afbeelding van het X-Y vlak op een u-v vlak.

Laat $f(x,y)$, $g(x,y)$ functies zijn met continue eerste afgeleiden op een open verzameling V. $(a,b) \in V$; $\alpha=f(a,b)$, $\beta=g(a,b)$. Met elk punt (x,y) van V correspondeert een punt (u,v)

(1) $\qquad u = f(x,y)\ , \qquad v = g(x,y).$

(u,v) heet beeldpunt van (x,y); (x,y) heet een origineel van (u,v). Met V correspondeert zo het beeld Ω in het u-v vlak. Vlaktransformaties, coördinaten transformaties.

Voorbeelden: 1) identieke afbeelding: $u=x$, $v=y$.
2) affiene transformatie: $u=ax+by$, $v=cx+dy$ $\left(D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right)$.
3) poolcoördinaten: $u=r=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\varphi=\text{arc tg}\,\frac{y}{x}$.
4) inversie: $u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{y}{x^2+y^2}$.

Determinant van Jacobi:

1) 1 ; 2) D ; 3) $\frac{1}{r}$; 4) -1.

We kunnen successievelijk twee afbeeldingen (transformaties) na elkaar uitvoeren. Bv. eerst (1) en daarna

(2) $\qquad U = F(u,v)\ , \qquad V = G(u,v).$

We krijgen dan de resulterende transformatie

$$U = F(f(x,y),\ g(x,y)), \qquad V = G(f(x,y),\ g(x,y)).$$

Uit de kettingregel volgt

$$U_x = F_u\, f_x + F_v\, g_x\ , \qquad V_x = G_u\, f_x + G_v\, g_x$$
$$U_y = F_u\, f_y + F_v\, g_y\ , \qquad V_y = G_u\, f_y + G_v\, g_y\ ,$$

en dus

(3) $$\frac{\partial(U,V)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(U,V)}{\partial(u,v)}\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\ .$$

De determinant van Jacobi van de resulterende transformatie is gelijk aan het product van de overeenkomstige determinanten van de samenstellende transformaties.

In de voorbeelden 1), 2), 3) en 4) behoort bij elk beeldpunt (u,v) slechts één origineel (x,y) (behalve voor het punt $u=0$, $v=0$ in de gevallen 3) en 4)). We hebben de inverse afbeeldingen:

1) $x=u$, $y=v$
2) $x=\frac{d}{D}u - \frac{b}{D}v$, $y=-\frac{c}{D}u + \frac{a}{D}v$
3) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$
4) $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{v}{u^2+v^2}$.

(Voor de afleiding van 4) merke men op $u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}$).

In deze gevallen hebben we dus een omkeerbaar eenduidige afbeelding tussen origineel en beeld.

In het algemeen kunnen echter bij eenzelfde beeldpunt meerdere punten uit het origineel behoren. Voorbeeld:

$$u = x^2-y^2 \ , \ v = 2xy$$

Bij (x,y) en $(-x,-y)$ behoort hetzelfde punt (u,v). Men kan hier dus niet zonder meer van een inverse afbeelding spreken.

Stelling: Laat voor de transformatie $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ de voorwaarden, in het begin van deze paragraaf genoemd, vervuld zijn. Zij bovendien $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \neq 0$ voor $x=a$, $y=b$.

Dan bestaat er een positief getal ε , zodat het vierkant K: $|x-a| < \varepsilon$, $|y-b| < \varepsilon$ omkeerbaar eenduidig afgebeeld wordt op zijn beeld B in het u-v vlak.

Hiervoor gelden "inverse transformatie formules"

$$x = \varphi(u,v), \ y=\psi(u,v)$$

met totaaldifferentieerbare functies $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, zodat $a= \varphi(\alpha,\beta)$, $b= \psi(\alpha,\beta)$.

Bewijs. Pas de stelling over impliciete functies toe met $n=m=2$ op het vergelijkingsstelsel

(4) $\quad f(x,y)-u = 0, \quad g(x,y)-v = 0.$

We vinden dan, dat er een $\delta > 0$ en twee totaal differentieerbare functies $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ bestaan, zodat

$$\varphi(\alpha,\beta) = a \ , \quad \psi(\alpha,\beta) = b$$

(5) $\quad f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) = u, \quad g(\varphi(u,v), \psi(u,v)) = v$

$$(|u-\alpha| < \delta, |v-\beta| < \delta).$$

Kies $\varepsilon > 0$ zo klein, dat voor $|x-a| < \varepsilon$, $|y-b| < \varepsilon$ geldt $|f(x,y)-\alpha| < \delta$, $|g(x,y)-\beta| < \delta$.

Kies verder ε zo klein, dat (4) in

$$|x-a| < \varepsilon \ , |y-b| < \varepsilon \ , \ |u-\alpha| < \delta, \ |v-\beta| < \delta$$

slechts de ene oplossing $x= \varphi(u,v)$, $y= \psi(u,v)$ toelaat.

De afgeleiden van φ en ψ vinden we met behulp van de kettingregel uit (5):

$$f_x \varphi_u + f_y \psi_u = 1 \qquad , \quad g_x \varphi_u + g_y \psi_u = 0$$
$$f_x \varphi_v + f_y \psi_v = 0 \qquad , \quad g_x \varphi_v + g_y \psi_v = 1$$

Dus, als $D = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ gesteld wordt,

$$\begin{cases} \varphi_u = \frac{g_y}{D}, & \psi_u = \frac{-g_x}{D} \\ \varphi_v = -\frac{f_y}{D}, & \psi_v = \frac{f_x}{D} \end{cases}$$

contrôle: $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = 1.$

Voorbeeld.

Voor de betekenis van het teken van de determinant van Jacobi voor de bijbehorende transformatie: zie Courant II, 151 (Bij positief teken blijft na transformatie de rotatie zin behouden, bij negatief teken keert deze van richting om).

Afhankelijkheid van twee functies $f(x,y)$, $g(x,y)$:
Laat de functies gegeven zijn in een gebied G van het x-y vlak waar ze continue eerste afgeleiden bezitten. Laat het punt (u,v) met $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ liggen in een gebied Γ van het u-v vlak als $(x,y) \in G$.

De functies heten afhankelijk als er in Γ een totaal differentieerbare functie $F(u,v)$ bestaat, zodat nergens in Γ geldt $F_u=F_v=0$, terwijl

(6) $$F(f(x,y),\ g(x,y)) \equiv 0 \text{ in } G$$

is. Uit (6) volgt door toepassing van kettingregel,

(7) $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \equiv 0 \text{ in } G.$$

Omgekeerd volgt uit (7), dat $f(x,y)$ en $g(x,y)$ afhankelijk zijn. Het bewijs ligt echter dieper (Courant II, 155).

Voorbeeld: $f = x-y$, $g = (x-y)^2$.

Afbeelding $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ bij afhankelijke functies.

§7. Extrema met nevenvoorwaarden.

Probleemstelling:
Bepaal de extrema van de functie $u=f(x,y)$, wanneer tussen x en y de relatie $\varphi(x,y)=0$ bestaat. We nemen daarbij aan, dat $f(x,y)$ totaal differentieerbaar is op een open V, terwijl $\varphi(x,y)$ daar continue eerste afgeleiden heeft; $\varphi_y \neq 0$ op V.

De multiplicatorenregel van Lagrange geeft een noodzakelijke voorwaarde voor de extrema:
Beschouw de functie

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

en schrijf de voorwaarden voor stationair punt van $F(x,y,\lambda)$ op:

$$f_x + \lambda\varphi_x = 0, \quad f_y + \lambda\varphi_y = 0, \quad \varphi(x,y) = 0.$$

Los hieruit x en y op.

Voorbeeld: $f(x,y)=xy$, $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1=0$

$$F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1) = 0.$$

De multiplicatorenregel geeft:

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dit geeft bij oplossing

$$\left.\begin{array}{l} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\} u = \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\} u = -\tfrac{1}{2}$$

Men bewijst achteraf dat dit inderdaad extreme waarden zijn (continue functie op compacte verzameling).

Bewijs: Stel $(a,b) \in V$ levert een extreme waarde. Wegens $\varphi_y \neq 0$ kunnen we in een omgeving van $x=a$ een differentieerbare functie $y(x)$ vinden met $y(a)=b$ en $\varphi(x,y(x)) \equiv 0$. Dus $u=f(x,y(x))$. Voor extreme waarde moet

$$\frac{du}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ zijn voor } x=a$$

Tevens is daar $\varphi_x + \varphi_y \dfrac{dy}{dx} = 0$. Dus

$$\left.\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}\right|_{x=a,\,y=b} = 0$$

Gemakkelijk bewijst men hieruit het bestaan van een getal λ met

$$f_x(a,b) + \lambda\varphi_x(a,b)=0, \quad f_y(a,b)+\lambda\varphi_y(a,b)=0, \quad \varphi(a,b)=0.$$

Generalisatie. Stel $f(x_1,\ldots,x_n)$ totaal differentieerbaar op open V, stel $\varphi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\varphi_k(x_1,\ldots,x_n)$ bezitten daar continue eerste afgeleiden. Verder zij voor elk punt van V

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ - & - - - - - - - - & - \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k$$

De extrema van $u=f(x_1,\dots,x_n)$ onder de nevenvoorwaarden $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0,\dots,\varphi_k(x_1,\dots,x_n)=0$ vindt men door de functie

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_k) = f + \lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_k\varphi_k$$

te beschouwen en dan hiervoor de voorwaarden voor stationair punt op te schrijven en daaruit $x_1,\dots,x_n$ op te lossen.
Literatuur: Courant II, 138.

<u>Toepassing</u>: Elke extreme waarde van een kwadratische vorm

$$u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j\ ,\quad a_{ij} = a_{ji}$$

op de eenheidsbol $\sum_1^n x_i^2=1$ is gelijk aan een eigenwaarde van de matrix (a_{ij}).

<u>Voorbeeld</u>: $u=xy$, $x^2+y^2=1$; eigenwaarden $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.