STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 54

Colloquium generalisaties van het dimensiebegrip.

Department pure Mathematics.

1961

ZC 54

Generalisaties van het Dimensiebegrip.

1960/61

Groot J de	Seminar notes on compactification and dimension in metric spaces.	p	1 - 4b
Aarts J M	De nuldimensionale compactificatie van een semicompacte, separabele, metrische ruimte.	p	5 - 14
Vries H de	Over een stelling van Togo Nishiura.	p	15 - 18
Miranda A B de	Over het bestaan van n-compacte ruimten.	p	19 - 22

Seminar notes on compactification and dimension in metric spaces

Collected by J. de Groot

We are investigating the following two related questions. (1) What are internal necessary and sufficient conditions on the separable metric space M such that M can be compactified by adjoining an n-dimensional set? (2) Can one obtain a fruitful generalization of dimension by replacing the empty set by some other class of spaces in the definition? Here we give a summary of results to date. In most cases, details have been omitted. The intention is to outline what has been done, and to point the way to further problems in this area.

ALL SPACES CONSIDERED ARE SEPARABLE AND METRIZABLE

I. DEFINITIONS. Much of our work is based on the notion of "n-compactness", which we define here.

1.1. Definition. A compact space is called -1-compact. M is said to be $\leq$ n-compact (notation: cmp $M \leq n$) if every point in M has arbitrarily small neighbourhoods whose boundaries are $\leq$ n-1-compact.

1.2. Definition. Let p be a point in the space M. Then the compactness of M at p (notation: cmp_p M) is the smallest non-negative integer n such that p has arbitrarily small neighbourhoods whose boundaries are $\leq$ n-1-compact.

II. MAIN CONJECTURE. Much of our work has been concerned with the attemt to prove or disprove the following conjecture, or some modification of it (see VII).

2.1. Conjecture. If cmp M = n, then M can be compactified by an n-dimensional set. (The converse is true - see 3.2.)

III. PROPERTIES OF n-COMPACTNESS, WITH EXAMPLES.

3.1. Proposition. For every M, cmp $M \leq$ dim M. (Hence, e.g., $\mathrm{cmp}(M \times N) \leq \dim M + \dim N$)

3.2. Theorem. Let M be compact, and let $A \subset M$, with dim $A \leq n$. Then $\mathrm{cmp}(M \setminus A) \leq n$.

3.3. Proposition. A closed subspace of an n-compact space is $\leq$ n-compact.

An open subspace of an n-compact space ($n \geq 0$) is $\leq$ n-compact.

3.4. Proposition. If cmp M=n, then M has a countable base consisting of open sets whose boundaries are $\leq$ n-1-compact.

3.5. Theorem. If $M' \subset M$, and $\mathrm{cmp}_p\, M' \leq n$, then p has arbitrarily small neighbourhoods $U \subset M$ such that $\mathrm{cmp}\,[\mathrm{bdry}(U \cap M')] \leq n-1$.

3.6. Theorem. If cmp $M=n$, then for each $-1 \leq k \leq n$, there is a closed subset F_k of M such that cmp $F_k = k$.

3.7. Example. Let M_n be I^{n+1} with an open face removed. We have shown that cmp $M_1=1$, cmp $M_2=2$. It is conjectured that cmp $M_n=n$. See 5.3.

We proceed in 3.8 – 3.13 to establish the existence of n-compact spaces for all n.

3.8. Definition. A space M is said to be <u>totally imperfect</u> if M contains no uncountable compact subset.

3.9. Theorem. Let $S^n = \{ x \text{ in } E^{n-1} : \|x\| = 1\}$. Then S^n can be decomposed into two disjoint totally imperfect sets, which may be constructed so that each is the reflection in the origin of the other.

3.10. Theorem. If the compact, n-dimensional space M is a union of two disjoint totally imperfect sets, M_1, M_2, then cmp M_1 is n or n-1.

3.11. Theorem. For each k such that $-1 \leq k \leq n-1$, E^n contains a set F_k such that cmp $F_k = k$. E^n contains no sets of higher cmp.

3.12. Theorem. If M is extremely disconnected (i.e., if every quasi-component of M is a point) and dim $M \geq 1$, then dim M = cmp M. (See 5.1(c)).

3.13. Remark. Since there are extremely disconnected spaces of each dimension, 3.12 tells us that for each n, there is a space M such that dim M = cmp M = n.

3.14. Problem. If "point" in 1.1 is replaced by "compact set", the class of 0-compact spaces remains the same. Is this true for $n > 0$? (See also VII)

3.15. Remark. If the answer to 3.14 is "no", then Conjecture 2.1 is false.

IV. 0-COMPACT SPACES. We gather together here some results concerning spaces M for which cmp M=0. This is the first (and best explored) special case of our theory.

4.1. Definition. A 0-compact space is often called <u>rim-compact</u> (or semicompact).

4.2. Example. Every locally compact space is rim-compact, but the converse is false, as the following example shows. Remove the sequence $\{1/n\}$ from the closed unit interval. The resulting space is clearly not locally compact, but it is rim-compact (cf 3.2).

4.3. Proposition. Every 0-dimensional space is rim-compact.

4.4. Theorem. If M is rim-compact, then M can be compactified by a 0-dimensional set. (See 2.1.)

4.5. Theorem. If cmp M = 0, then any two disjoint closed subsets in M can be separated by a closed locally compact set. (See also VII)

4.6. Theorem. Let $M = \bigcup_i M_i$, where, for each i, M_i is closed in M, cmp $M_i \leq 0$, and $M_i \cap M_j$ $(i \neq j)$ is locally compact. Suppose further that the collection $\{M_i\}$ is locally finite. Then cmp $M \leq 0$. (See also VI.)

V. STATUS OF CONJECTURE 2.1.

5.1. Conjecture 2.1 has been proved correct in the following cases.

(a) n = 0 (4.4)

(b) dim M = cmp M

(c) dim M $\leq$ 1 (4.4 and (b))

(d) M is a subset of the plane.

5.2. Example. The open ball, with an equator of rational points added, has cmp 1, and it can be compactified by a 1-dimensional set. Such a compactification is not easy to find, however.

5.3. Remark. Each space M_n (3.7) can clearly be compactified by a set of dimension n. Hence cmp $M_n \leq n$. As a matter of fact, M_n cannot be compactified by a set of dimension less than n. Thus if cmp $M_n \neq n$, conjecture 2.1 is false.

VI. SUM AND DECOMPOSITION THEOREMS.

Here the analogy with dimension theory is poor. The conclusion we might draw from the results of this section is that almost any reasonable conjecture in this area is false.

6.1. Example. Adding a single point can raise or lower the cmp of a space by 1. (Consider 3.7, and locally compact, non-compact spaces.)

6.2. Proposition. Adding a point cannot raise the cmp of a space by more than one. The only case adding a point can lower cmp is that which occurs when a locally compact space is compactified by adding a point.

6.3. Example. Adding a compact set can increase the cmp of a space by any amount. (3.7.)

6.4. Example. A, B closed in $M = A \cup B$, cmp A = cmp B = 0, while cmp M = 1.

6.5. Example. A, B closed in $M = A \cup B$, cmp A = cmp B = 1, cmp $A \cap B$ =0, and still cmp M = 2.

6.6. Theorem. If A and B are closed in $M = A \cup B$, then cmp M $\leq$ cmp A + + cmp B + 1.

6.7. Corollary. If $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, where for each i, A_i is closed in A, and cmp A_i = 0, then cmp A $\leq$ n. (See also 4.6.)

6.8. Example. It is not true that every space of cmp n can be decomposed into n+1 closed subsets having cmp 0.

6.9. Example. Not every space of cmp n can be written as a union of a space of cmp $\leq$ 0 and a space of dim $\leq$ n, even if these latter spaces are not required to be closed in their union.

VII. SEPARATION AND Cmp.

It appears to be difficult to prove separation properties for cmp, even in separable metric spaces. However, it seems likely that such properties will be closely bound up with the problem of compactifying a space by a set of small dimension.

We shall proceed as follows. We define a "separation cmp", called Cmp, and investigate its properties independently. Whether or not cmp M = Cmp M for all M, we can conjecture that 2.1 is true if cmp is replaced by Cmp.

7.1. Definition. We define, by induction, the expression Cmp M $\leq$ n. Cmp M = 0 if and only if cmp M = 0. For n $\geq$ 1, Cmp M $\leq$ n if and only if every closed set has arbitrarily small neighbourhoods whose boundaries have Cmp $\leq$ n-1.

7.2. Proposition. If M can be compactified by a k-dimensional set, then Cmp M $\leq$ k.

7.3. Problem. Is it true that for each M, Cmp M = cmp M? (Note that this equality is a consequence of 2.1.)

7.4. Proposition. If M is a subset of the plane, then Cmp M = cmp M. (5.1(d).)

7.5. Remark. It seems to be worthwile to look for a subspace M of E^3 such that Cmp M =2, while cmp M = 1.

7.6. Remark. Theorem 4.6 explains our starting point in defining Cmp.

7.7. Exercise. We must investigate the extent to which our known properties of cmp (for example, those in III) carry over to Cmp. In most cases, this appears to be only a routine check.

The numbering of these results follows the organization of the previously issued notes.

6.4. Proposition. If C_1, C_2 are two countable, dense in themselves sets on the surface of the open sphere O, then $M_1 = O \cup C_1$ and $M_2 = O \cup C_2$ are homeomorphic.

6.5. Example. Let O be the open ball, D an open "disc" on its surface, and B a countable dense set on the boundary of D.
Let $M = O \cup D \cup B$. Then M has cmp 1, and M can be compactified by a one-dimensional set.

6.6. Example. (Essentially due to M. E. Rudin.) Let O be the open ball, I an arc on the surface of O, and C a countable, dense in itself set on O which "spirals down" to I. Then $M = O \cup I \cup C$ has cmp 1, though $O \cup I$ has cmp 2. Using 5.4 a one-dimensional compactification of M can be constructed.

There is some hope that an answer to the main conjecture may be found by "dualizing" certain dimension theoretic results. For example, the decomposition theorem of dimension theory can be replaced by the following structure problem.

6.10. Structure Problem. A space has cmp $\leq n$ $(n \geq 1)$ if it is the intersection of at most $n + 1$ spaces of cmp 0, whose union is compact.

Observe that the decomposition theorem, together with a positive answer to the main conjecture gives a positive solution to this structure problem.

6.11. Definition. Suppose $A \subset B \subset C$. B is said to be closed in C modulo A if $B \setminus A$ is closed in $C \setminus A$.

The counterpart of the sum theorem of dimension might be expressed in the following interesting problem.

6.12. Problem: If $1^\circ)$ $M = \bigcap_i M_i$ $\quad 2^\circ)$ $\bigcup_i M_i = \overline{M}$ (compact), $3^\circ)$ each M_i is closed in $\overline{M}$ modulo M, and $4^\circ)$ for each i, cmp $M_i \leq n$. Then cmp $M \leq n$.

So far, problem 6.12. is known to have an affirmative solution only in the special case of two sets $M_1 \cap M_2 = M$ where cmp M_1 = cmp $M_2 = 0$. Thus we have here an unsolved conjecture concerning cmp 0.

4.7. Example. If dim $M = n$ and cmp $M = 0$, there does not always exist a compactification $\overline{M}$ of M such that dim $\overline{M} = n$ and dim $(\overline{M} \setminus M) = 0$.

Remark. Objection has been raised concerning the appropriateness of the terms n - compact, and cmp. It would perhaps be more accurate to use a term such as "deficiency" or "defect" of compactness, and write def M in place of cmp M.

Colloquium "Generalisaties van het dimensiebegrip"

8 december 1960

De nuldimensionale compactificatie van een semicompacte, separabele, metrische ruimte.

J.M. Aarts

Definitie: Een metrische ruimte heet randcompact, indien ieder punt willekeurig kleine omgevingen bezit met compacte rand.

Een randcompacte ruimte kan zowel compact als semicompact zijn.

Definitie: Een stelsel S van verzamelingen van een topologische ruimte T heet lokaal eindig, als er van ieder punt van T een omgeving te vinden is, welke slechts met eindig veel elementen van S een niet lege doorsnede heeft.

Definitie: Onder de maas van een stelsel verzamelingen $\{U_i\}$ van een metrische ruimte verstaan we sup $\{\delta(G_i)/i=1,2,\dots\}$ waarbij $\delta(G_i)$ de diameter van G_i voorstelt.

Stelling 1: Zij M een randcompacte separabele metrische ruimte. Dan is er een stelsel S van aftelbaar veel verzamelingssystemen $S_1, S_2, \dots$ te construeren, waarbij S_i $(i=1,2,\dots)$ uit hoogstens aftelbaar veel gesloten verzamelingen bestaat:

$$S_1 = \{U_1, U_2, \dots\}$$
$$S_2 = \{U_{11}, U_{12}, \dots, U_{21}, U_{22}, \dots, \dots\}$$
$$S_3 = \{U_{111}, \dots\}$$

dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

1° $U_{a_1 \dots a_k} \supset U_{a_1 \dots a_k a_{k+1}}$

voor ieder stel indices $a_1 \dots a_k a_{k+1}$ en voor alle k.

2° Voor iedere U is R(U) compact.

3° Twee verschillende U's uit een S_i hebben hoogstens randpunten gemeen.

4° Iedere S_i is een lokaal eindige overdekking met maas kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2^i}$.

Bewijs: A. Constructie van S_1: Voor ieder punt $p \in M$ nemen we een open omgeving A(p) met compacte rand en $\delta[A(p)] < \frac{1}{2}$.

$\{A_p\}_{p \in M}$ is een open overdekking van M.

Omdat M een aftelbare basis heeft is er een aftelbare deeloverdekking van M, zeg: $A_1, A_2, A_3, \dots$

<u>Definitie</u>: $B_i = \overline{A_i}$

<u>Definitie</u>: $C_i = B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k$

<u>Definitie</u>: $U_i = \overline{C_i}$ $\qquad S_i = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$

Het stelsel $A_1, A_2, \ldots$ is een open overdekking met compacte rand.

$B_i = \overline{A_i}$.

Het stelsel $B_1, B_2, \ldots$ is een gesloten overdekking van M.

Eigenschappen: a) $R(B_i) \subset R(A_i)$

want $A_i \subset B_i^o \Rightarrow \overline{A_i} \subset B_i^o \Rightarrow \overline{A_i} \setminus A_i \supset B_i \setminus B_i^o \Rightarrow R(A_i) \supset R(B_i)$

b) $R(B_i)$ is compact

want $R(B_i)$ is een gesloten deel van de compacte verzameling $R(A_i)$

c) $R(B_i) = B_i \cap B_i^{c-} = \overline{A_i} \cap B_i^{c-}$

m.a.w. een randpunt van B_i is verdichtingspunt van A_i en B_i^c.

$C_i = B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k$.

Eigenschappen: a) $R(C_i) \subset \bigcup_{k=1}^{i} R(B_i)$

want: $R(C_i) = \overline{C_i} \cap C_i^{c-} =$

$$= \overline{C_i} \cap \left(\left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k\right\} \cup B_i^c\right)^- =$$

$$= \overline{C_i} \cap \left(\left\{\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k\right\} \cup B_i^c\right)^- =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{i-1} (\overline{C_i} \cap B_k) \cup (\overline{C_i} \cap B_i^{c-}) \subset$$

$$\subset \bigcup_{k=1}^{i-1} (B_k^{c-} \cap B_k) \cup (\overline{B_i} \cap B_i^{c-}) = \bigcup_{k=1}^{i} R(B_k)$$

b) $R(C_i)$ is compact

immers $R(C_i)$ is een gesloten deel van $\bigcup_{k=1}^{i} R(B_k)$, welke als eindige vereniging van compacte verzamelingen compact is.

c) $R(C_i) = R(\overline{C_i})$

want als $p \notin R(\overline{C_i})$ dan $p \notin R(B_i)$, en ook $p \notin R(B_k)$ $\quad (k < i)$.

Dit volgt uit het feit, dat een randpunt van B_k verdichtingspunt is van A_k en uit het feit, dat een randpunt van B_i verdichtingspunt is van B_i^c.

Dus $p \notin R(\overline{C_i}) \Rightarrow p \notin \bigcup_{k=1}^{i} R(B_k) \Rightarrow p \notin R(C_i)$ (wegens a).

Dus: $R(C_i) \subset R(\overline{C_i})$.

Anderzijds: $\overline{C_i}^o \supset C_i^o$ dus $\overline{C_i} \setminus \overline{C_i}^o \subset \overline{C_i} \setminus C_i^o$ dus $R(\overline{C_i}) \subset R(C_i)$.

$U_i = \overline{C_i}$

Nu geldt:

1^o $R(U_i)$ is compact

want $R(U_i) = R(\overline{C_i}) = R(C_i)$

2^o $U_i \cap U_j = R(U_i) \cap R(U_j) \qquad (i \neq j)$

immers, neem aan $i > j$, dan $C_i \cap C_j = \emptyset$ dus

$\overline{C_i} \cap \overline{C_j} = R(C_i) \cap R(C_j)$ dus $U_i \cap U_j = R(U_i) \cap R(U_j)$

3^o $\{U_i\}$ is een lokaal eindige overdekking met maas oogstens $\frac{1}{2}$, want de maas van $\{U_i\}$ is hoogstens gelijk aan de maas van $\{A_i\}$. De lokaal eindigheid van $\{U_i\}$ volgt uit het feit, dat voor ieder punt p geldt, $p \in A_i$ voor zekere i. Verder is $C_k \cap A_i \neq 0$ als $k > i$. Hieruit volgt wegens het open zijn van A_i dat $U_k \cap A_i = \emptyset$ als $k > i$. A_i is dus een omgeving van p welke met hoogstens i elementen uit $\{U_i\}$ een niet lege doorsnede heeft.

B. Constructie van S_2: Zij $U_i \in S_1$

U_i is, als gesloten deelruimte van M, randcompact, separabel metrisch. Dan is er volgens de constructie van S_1 in U_1 een hoogstens aftelbaar stelsel van gesloten verzamelingen $U_{i1}, U_{i2}, \ldots$ met:

1) $R_{U_i}(U_{ij})$ is compact

2) Twee verschillende U_{ij} hebben hoogstens randpunten gemeen

3) $\{U_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ is een lokaal eindige overdekking met maas kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2^2}$.

Voer dit proces voor iedere U_i uit.

Dan geldt:

1) U_{ij} is gesloten in M

want U_{ij} is een gesloten deelverzameling van een in M gesloten verzameling.

2) $U_i \supset U_{ij}$ voor alle i en j

3) $R_M(U_{ij}) = R_{U_i}(U_{ij}) \cup \{R_M(U_i) \cap U_{ij}\}$

immers:

$p \in R_M(U_{ij}) \Rightarrow p \in U_{ij}$, omdat U_{ij} gesloten is in M. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ p is verdichtingspunt van $U_{ij}^c \Rightarrow$

p verdichtingspunt van $U_i \setminus U_{ij}$, of p verdichtingspunt van $M \setminus U_i$

dus $p \in R_{U_i}(U_{ij})$ of $p \in R_M(U_i)$.

Triviaal is: $R_M(U_{ij}) \supset R_{U_i}(U_{ij}) \cup \{R_M(U_i) \cap U_{ij}\}$

4) $R_M(U_{ij})$ is compact, want

$R_M(U_i) \cap U_{ij}$ is compact, als gesloten deel van de compacte verzamelin

$R_M(U_i)$, en $R_{U_i}(U_{ij})$ is compact, en dus ook hun vereniging

5) $U_{ij} \cap U_{kl} = R_M(U_{ij}) \cap R_M(U_{kl})$

want als k=i dan geldt:

$U_{ij} \cap U_{il} \subset R_{U_i}(U_{ij}) \subset R_M(U_{ij})$ en

$U_{ij} \cap U_{il} \subset R_{U_i}(U_{il}) \subset R_M(U_{il})$

dus $U_{ij} \cap U_{il} \subset R_M(U_{ij}) \cap R_M(U_{il})$.

Triviaal is: $U_{ij} \cap U_{il} \supset R_M(U_{ij}) \cap R_M(U_{il})$ (omdat U_{ij} gesloten is geldt blijkbaar $R_M(U_{ij}) \subset U_{ij}$).

Als $k \neq i$ dan geldt:

$U_{ij} \cap U_{kl} \subset R(U_i) \cap U_{ij} \subset R_M(U_{ij})$

$U_{ij} \cap U_{kl} \subset R(U_k) \cap U_{kl} \subset R_M(U_{kl})$. Verder analoog met het geval k=i.

6) $\{U_{ij}\}_{i=1}^{\infty}\,{}_{j=1}^{\infty}$ is een overdekking met maas kleiner dan of gelijk $\frac{1}{2^2}$.

7) $\{U_{ij}\}$ is lokaal eindig.

Voor het bewijs van deze laatste eigenschap merken we eerst op, dat de ster van een willekeurig punt p uit M ten opzichte van het stelsel S_1 een <u>omgeving</u> is van dat punt, welke gevormd wordt door een eindig aantal U_i. Want uit de lokaal eindigheid van S_1 volgt, dat er een omgeving is van p, zeg V(p), welke met slechts eindig veel U_i, zeg $U_1 \ldots U_k$, een niet lege doorsnede heeft. De complementen van die elementen uit $U_1 \ldots U_k$, die p niet bevatten, en dus ook niet tot de ster van p behoren, zijn open. De doorsnede van deze complementen met V(p), is een open omgeving van p, die geheel tot de ster van p behoort. Dus is de ster van p een omgeving van p. We noemen het inwendige van de ster van p t.o.v. S_1 O(p) en nemen aan dat de ster van p bestaat uit $U_1, \ldots, U_l$.

Is $1 \leq i \leq l$, dan is er - wegens de lokaal eindigheid van $\{U_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ - in de relatief ruimte U_i een omgeving O_i van p in M zó, dat $p \in O_i \cap U_i$ en zó, dat $O_i \cap U_i$ met slechts eindig veel elementen uit $\{U_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ een niet lege doorsnede heeft.

$O \cap \left\{ \bigcap_{i=1}^{l} O_i \right\}$ is een omgeving van p in M, die met slechts eindig veel elementen van S_2 een niet lege doorsnede heeft. Dit is juist de lokaal eindigheid van S_2.

C. Met volledige inductie construeren we zo het stelsel S.
Voor het stelsel S gelden de volgende eigenschappen:
Gevolg 1: De doorsnede van $U_{a_1} \supset U_{a_1 a_2} \supset \ldots$
bevat hoogstens één punt (wegens 4^o).

Gevolg 2: De ster van een punt ten opzichte van S_i, is een omgeving van p met diameter $\leq \frac{1}{2^{i-1}}$, die slechts uit een eindig aantal verzamelingen $U_{a_1 \ldots a_i}$ bestaat.
Want de ster van p ten opzichte van S_i is een omgeving, die slechts uit eindig veel elementen van S_i bestaat (dit is bij constructie van S_2 onder 7^o bewezen). Ieder element van de ster heeft een diameter kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{2^i}$. Met de driehoeksongelijkheid volgt dan dat de diameter van de ster kleiner dan of gelijk is aan $\frac{1}{2^{i-1}}$.
Gevolg 3: Zij A_i de ster van p t.o.v. S_i.
Dan is $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ een lokale basis voor p (uit gevolg 2).

Gevolg 4: Er is een eindig aantal $U_{a_1 \ldots a_k a_{k+1}}$ dat de rand van $U_{a_1 \ldots a_k}$ overdekt.
Bewijs: $R(U_{a_1 \ldots a_k})$ is een compact deel van $U_{a_1 \ldots a_k}$.
Beschouw nu in de relatiefruimte $U_{a_1 \ldots a_k}$ de volgende overdekking van $R(U_{a_1 \ldots a_k})$: Neem bij ieder punt van de rand van $U_{a_1 \ldots a_k}$ het inwendige van de ster van dat punt t.o.v. $\{U_{a_1 \ldots a_{ki}}\}_{i=1}^{\infty}$.
Wegens het compact zijn van de rand is er een eindig aantal punten, zó dat de sterren van deze punten de rand overdekken. Wegens gevolg 2 is er dan een eindig aantal $U_{a_1 \ldots a_{k+1}}$, dat de rand van $U_{a_1 \ldots a_k}$ overdekt.

Stelling 2: Zij W een verzameling. Zij β een functie, gedefinieerd op W met waarden in de machtsverzameling van W, die aan ieder punt $x \in W$ een lokale basis B_x toevoegt.
Zij $U_x = \{U / \exists B (B \in B_x \,\&\, B \subset U\}$ (het omgevingssysteem van x).
Zij $I = \{U / y \in U \Rightarrow U \in U_y\}$ de verzameling van open omgevingen.

Voldoet β aan de volgende voorwaarden:
1^o. Ieder element van de lokale basis van x, bevat x.
2^o. De doorsnede van twee elementen van B_x is een omgeving van x.
3^o. Ieder element van B_x bevat een open omgeving van x.
Dan is I een topologie voor V en B_x eenbij deze topologie behorende lokale basis en U_x het bij deze topologie behorende omgevingssysteem.
Bewijs: Zij φ de functie, welke aan iedere x U_x toevoegt. φ voldoet blijkbaar aan de volgende eigenschappen: (i) t/m (iv)

(i) $U \in U_x \Rightarrow x \in U$ wegens 1°

(ii) $\left.\begin{matrix} U \in U_x \\ V \in U_x \end{matrix}\right\} \Rightarrow U \cap V \in U_x$ wegens 2°

(iii) $\left.\begin{matrix} U \in U_x \\ U \subset V \end{matrix}\right\} \Rightarrow V \in U_x$ wegens de definitie van U_x

(iv) $U \in U_x \Rightarrow \exists V\{V \in U_x \,\&\, V \subset U \,\&\, (y \in V \Rightarrow V \in U_y)\}$ wegens 3°.

Op grond van (i) t/m (iii) vinden we:

I is een topologie voor W, want:

a. $\emptyset \in I$ want $x \notin \emptyset$; $W \in I$, want voor alle x is U_x niet leeg en $\emptyset \notin U_x$ en dus wegens (iii) $W \in U_x$

b. $A \in I$ betekent $x \in A \Rightarrow A \in U_x$
 $B \in I$ betekent $x \in B \Rightarrow B \in U_x$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \,\&\, x \in B \Rightarrow A \in U_x \,\&\, B \in U_x \overset{(ii)}{\Longrightarrow} A \cap B \in U_x$ dus $A \cap B \in I$

c. Zij $\Gamma = \{\gamma\}$ een indexverzameling. Laat $C_\gamma \in I$.
 $x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma \Rightarrow \exists \gamma_0 \in \Gamma \{x \in C_{\gamma_0}\} \Rightarrow C_{\gamma_0} \in U_x \overset{(iii)}{\Longrightarrow}$

 $\Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_j \in U_x$ dus $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma \in I$.

Zoek met behulp van deze I een omgevingssysteem F_x van x.

$F \in F_x \Longleftrightarrow \{\exists G / G \in I \,\&\, G \subset F \,\&\, x \in G\}$.

Omdat $G \in I$ en $x \in G$ is $G \in U_x$.

Omdat $G \subset F$ en wegens (iii) is $F \in U_x$. Dus $F_x \subset U_x$.

Op grond van (iv) vinden we:

$U \in U_x \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \exists V\{V \in U_x \,\&\, V \subset U \,\&\, (y \in V \Rightarrow V \in U_y)\}$

Uit $V \in U_x$ volgt met (i) $x \in V$.

Uit $(y \in V \Rightarrow V \in U_y)$ volgt $V \in I$.

Dus: $U \in U_x \Rightarrow \exists V\{V \in I \,\&\, x \in V \subset U\}$, dus $U \in F_x$.

Dus: $U_x \subset F_x$

Dus $U_x = F_x$ q.e.d.

<u>Stelling 3</u>: Zij M een semicompacte, separabele metrische ruimte, dan is M nuldimensionaal te compactificeren d.w.z. er is een separabele metrische ruimte M^* zodat:

1° $M \subset M^*$

2° M^* is compact

3° $\overline{M} = M^*$

4° $M^* \setminus M$ is nuldimensionaal.

Bewijs: M is randcompact, separabel metrisch.
Beschouw in M een stelsel $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ zoals geconstrueerd in St.1.
De hele ruimte M noemen we U_o.

Zij $N=\{0,a,b,\ldots\}$ een indexverzameling, waarbij iedere index bestaat uit een rijtje natuurlijke getallen, eventueel gevolgd door nullen, als het rijtje uit eindig veel natuurlijke getallen bestaat.
De lengte van een element uit N is het aantal natuurlijke getallen in dat element. Is dit aantal oneindig dan is de lengte ook oneindig.
$0=(0,0,0,0,\ldots)$.
We noteren nu een $U_{a_1\ldots a_k}$ uit S_k als U_a, waarbij $a=(a_1,\ldots,a_k,0,0,\ldots)\in N$ i.h.b. $M=U_0$ $(0=(0,0,\ldots))$.

Wij voegen aan M de volgende punten toe:

1. Laat de lengte van a gelijk zijn aan k, dan voegen we aan M het punt p_a toe, als U_a oneindig veel elementen bevat van S_{k+1}.

2. Is de lengte van a oneindig en is $a=(a_1,a_2,\ldots)$, dan voegen we aan M het punt p_a toe, als de reeks $U_{a_1}, U_{a_1a_2},\ldots$ een lege doorsnede heeft.

M met de toegevoegde punten noemen we M^*.

Definitie: $U_a^* = U_a \cup \{ p_b / b_i = a_i \ (i=1,\ldots,k)$, waarin k de lengte van a voorstelt $\}$.
Definitie: $S_k^* = \{ U_a^* / \text{lengte van } a \text{ is } k \}$.

Voor ieder punt van M^* definiëren we een lokale basis.

1. $q \in M$.
   Zij A_i^* de ster van q ten opzichte van S_i^*.
   $\{A_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ is de lokale basis voor p.

2. p_a met lengte a is k.
   De lokale basis van p_a zal bestaan uit het complement in U_a^* van een eindig aantal verzamelingen uit S_{k+1}^*.

3. p_a met lengte a is ∞ $\quad a=(a_1,a_2,\ldots)$.
   De lokale basis van p_a zal bestaan uit $U_{a_1}^*, U_{a_1,a_2}^*,\ldots$

⊕ Eigenschappen van $\{S_i^*\}$:

1° $U_a^* \setminus R_m(U_a)$ is een omgeving van p_a, als a een eindige lengte heeft.
Bewijs: Zij de lengte van a gelijk aan k.
Volgens stelling 1, gevolg 4 is er een eindig aantal elementen uit S_{k+1}, en dus ook uit S_{k+1}^*, dat $R_m(U_a)$ overdekt. Het complement hiervan ten

opzichte van U_a is een omgeving van p_a, die bevat is in $U_a^* \setminus R_m(U_a)$
q.e.d.

2^o $a=(a_1,a_2,\ldots)$ b een element van eindige lengte k met $b_i=a_i$ $(i\leq k)$
dan is $U_b^* \setminus R_m(U_b)$ een omgeving van p_a.

Bewijs: Omdat $U_{a_1} \supset U_{a_1a_2} \supset \ldots$ een lege doorsnede heeft is er een index $k_o > k$ zó dat

$R_m(U_{a_1\ldots a_{k_o}}) \cap R_m(U_{a_1\ldots a_k}) \neq 0$, want was dit niet het geval, dan

zou de reeks:

$\{R_m(U_{a_1\ldots a_{k+1}}) \cap R_m(U_{a_1\ldots a_k})\} \supset \{R_m(U_{a_1\ldots a_{k+2}}) \cap R_m(U_{a_1\ldots a_k})\} \supset \ldots$

wegens het compact zijn van de elementen een niet lege doorsnede hebben, hetgeen in tegenspraak is met het feit dat $U_{a_1} \supset U_{a_1a_2} \supset \ldots$ een lege doorsnede heeft.

3^o $a=(a_1,\ldots,a_k,0,0,\ldots)$
$(U_a^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U^*_{a_1\ldots a_k i}) \setminus R_m(U_{a_1\ldots a_k})$ is een omgeving van p_a want deze verzameling is de doorsnede van twee omgevingen van p_a namelijk $U_a^* \setminus R_m(U_a)$ en $U_a^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U^*_{a_1\ldots a_k i}$

I. We bewijzen dat de met behulp van deze lokale basis te definiëren open verzamelingen inderdaad een topologie vormen voor M^* en dat de gedefinieerde bases lokale bases zijn ten opzichte van deze topologie.

We tonen aan, dat de aan ieder punt toegevoegde basis voldoet aan de voorwaarden 1^o t/m 3^o van stelling 2. Aan 1^o en 2^o is triviaal voldaan. De 3^o voorwaarde gaan we na voor de verschillende punten van M

$q \in M$:

Zij A_i^* een element van de lokale basis, A_i de ster van q t.o.v. S_i
$A_i^* \setminus R_M(A_i)$ is een open omgeving van q volgens eigenschappen ⊕ en stelling 1, gevolg 3.

p_a $a = (a_1\ldots a_k,0,0,\ldots)$:

Zij $U_a^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U^*_{a_1\ldots a_k i}$ een element van de lokale basis; $(U_a^* \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U^*_{a_1\ldots a_k i})$
$\setminus R_M(U_a)$ is dan een open omgeving.

p_a lengte a is ∞ $a=(a_1,a_2,\ldots)$:

Zij $U^*_{a_1\ldots a_k}$ een element van de lokale basis.

[illegible] $_{k}$ [illegible]$(U_{a_1 \ldots a_k})$ is een open omgeving volgens eigenschappen ⊕ en stelling 1, gevolg 3.

<u>II $M \subset M^*$</u>

want de lokale basis van een punt $p \in M$ ten opzichte van M^*, beperkt tot M is juist een lokale basis van p ten opzichte van M.

<u>III M^* bezit een aftelbare basis</u>

want voor punten uit M en punten p_a met lengte a is ∞ wordt de lokale basis gevormd uit eindige verenigingen van elementen uit S_i^* $(i=1,2,\ldots)$. Dit aantal is aftelbaar. Verder bezitten de aftelbaar vele punten p_a met lengte a is eindig ieder een aftelbare lokale basis.

<u>IV M^* is Hausdorff's</u> (Hierbij gebruiken we eigenschappen ⊕ $1^o, 2^o, 3^o$)

1^o $p \in M$, $q \in M$.
Er is een k zodat de sterren van p en q t.o.v. S_k disjunct zijn.
(Stelling 1, gevolg 2).
De sterren van p en q t.o.v. S_k^* zijn dan ook disjunct.

2^o $q \in M$, $p_a \in M^*$ a heeft eindige lengte k
Zij A_{k+1}^* de ster van q ten opzichte van S_{k+1}
A_{k+1}^* en $U_a^* \setminus A_{k+1}$ zijn disjuncte omgevingen van q en p_a.

3^o $q \in M$ en $p_a \in M^*$ a heeft lengte ∞ $a=(a_1, a_2, \ldots)$.
Dan is er een i zodat $p \notin U^*_{a_1 \ldots a_i}$, want de reeks $U^*_{a_1} \supset U^*_{a_1 a_2} \supset \ldots$ heeft als doorsnede het punt p_a.
Zij A_i^* de ster van p ten opzichte van S_i^*.
A_i^* en $U^*_{a_1 \ldots a_i} \setminus A_i^*$ vormen de disjuncte omgevingen.

4^o p_a en p_b a en b hebben eindige lengte k resp. l.
Als $k=l$ dan zijn $U_a^* \setminus U_b^*$ en $U_b^* \setminus U_a^*$ disjuncte omgevingen.
Als $l > k$ dan zijn $U_a^* \setminus U_b^*$ en U_b^* disjuncte omgevingen.

5^o p_a en p_b a eindige lengte, zeg k; b heeft lengte ∞; $b=(b_1, b_2, \ldots)$.

$U_a^* \setminus U^*_{b_1 \ldots b_{k+1}}$ en $U^*_{b_1 \ldots b_{k+1}}$ zijn de disjuncte omgevingen.

6^o p_a en p_b a heeft lengte ∞ $a=(a_1, a_2, \ldots)$
b heeft lengte ∞ $b=(b_1, b_2, \ldots)$.

Voor zekere i is $a_i \neq b_i$
dan zijn $U^*_{a_1 \ldots a_i} \setminus U^*_{b_1 \ldots b_i}$ en $U^*_{b_1 \ldots b_i} \setminus U^*_{a_1 \ldots a_i}$ disjuncte omgevingen.

V M^* is compact (rijcompact)

Bewijs: Zij gegeven een oneindige puntenrij uit M^*.
Nu zijn er twee mogelijkheden.

1^o Er is een reeks $U^*_{a_1} \supset U^*_{a_1a_2} \supset \ldots$ zó dat ieder element oneindig veel punten uit de rij bevat.
Dan is een punt uit M of p_a met $a=(a_1,a_2,\ldots)$ verdichtingspunt.
2^o Er is een S^*_k zó dat iedere $U^*_{a_1\ldots a_k}$ slechts eindig veel elementen uit de rij bevat. Kies k minimaal, zeg k_o. Dan is er een $U^*_{a_1\ldots a_{k_o-1}}$ die oneindig veel punten uit de rij bevat, terwijl iedere $U^*_{a_1\ldots a_{k_o}}$ slechts eindig veel elementen bevat. Dan is echter p_a met $a=(a_1,\ldots,a_{k_o-1},0,0,\ldots)$ verdichtingspunt. (Is $k_o=1$ dan is dus p_o verdichtingspunt.)

VI $\bar{M} = M^*$

Zij $a=(a_1,\ldots a_k,0,0,\ldots)$.
Neem uit iedere $U_{a_1\ldots a_{k+1}}$ een punt. p_a is verdichtingspunt van deze verzameling.
Zij $a=(a_1,a_2,\ldots)$.
Neem uit iedere $U^*_{a_1}, U_{a_1a_2},\ldots$ een punt. Dan is p_a verdichtingspunt van deze verzameling.

VII Heeft a een eindige lengte, dan is U^*_a compact (analoog met V).

Conclusies:

a. Uit III en V volgt: M^* is bicompact

b. Uit a en IV: M^* is normaal

c. Uit b en III: M^* is metriseerbaar

d. Uit VII en III: U^*_a is bicompact

e. Uit d en IV: U^*_a is gesloten

f. $R_{M^*}(U^*_a) = R_M(U_a)$.

Bewijs: Triviaal is $R_M(U_a) \subset R_{M^*}(U^*_a)$.
$U^*_a \setminus R_M(U_a)$ is open, en wegens e is U^*_a gesloten dus $R_{M^*}(U^*_a) \subset R_M(U_a)$.

VI $M^* \setminus M$ is nuldimensionaal

Wegens eigenschap f hebben de elementen van de lokale basis van een punt p_a een tot M behorende rand.

Colloquium "Generalisaties van het dimensiebegrip"

8 december 1960

Over een stelling van Togo Nishiura

Alle beschouwde topologische ruimten zullen separabel metriseerbaar verondersteld worden. Zoals bekend (zie W. Hurewicz and Henry Wallman, Dimension Theory), zijn de volgende equivalenties voor een topologische ruimte X van kracht voor $n \geq 0$:

1. $\dim X \leq n \Leftrightarrow \forall\, p \notin A = \overline{A},\ \exists$ open verzameling U, $p \in U \subset X \setminus A$, zó, dat $\dim \mathcal{R}(U) \leq n-1$;

2. $\dim X \leq n \Leftrightarrow \forall\, A, B,\ A \cap B = \emptyset,\ \overline{A} = A,\ \overline{B} = B\ \exists$ open verzameling U, $A \subset U \subset X \setminus B$, zó, dat $\dim \mathcal{R}(U) \leq n-1$;

3. $\dim X \leq n \Leftrightarrow \forall\, p \notin A = \overline{A},\ \exists$ gesloten verzameling C, die $\{p\}$ en A scheidt, met $\dim C \leq n-1$;

4. $\dim X \leq n \Leftrightarrow \forall\, A, B,\ A \cap B = \emptyset,\ \overline{A} = A,\ \overline{B} = B\ \exists$ gesloten verzameling C, die A en B scheidt, met $\dim C \leq n-1$.

Hierbij gebruiken we:

Def. 1. De verzameling W scheidt de verzamelingen U en V in X als er een splitsing $X = U' \cup V' \cup W$ is, zó, dat $U \subset U'$, $V \subset V'$, en U' en V' open in $X \setminus W$, d.w.z. $\overline{U'} \cap V' = \emptyset$, $U' \cap \overline{V'} = \emptyset$; een splitsing is een vereniging van onderling disjuncte verzamelingen.

Stelling 1. Stel $\dim X \leq n$, $Y \subset X$, $\dim Y = 0$. Als A en B twee disjuncte gesloten verzamelingen zijn in X, dan is er een gesloten verzameling C, die A en B scheidt, terwijl $C \cap Y = \emptyset$.

Bewijs. Stel U en V omgevingen van A en B met $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Daar $\dim Y = 0$, worden $\overline{U} \cap Y$ en $\overline{V} \cap Y$ in Y gescheiden door de lege verzameling: er is een splitsing $Y = E \cup F$, met $\overline{U} \cap Y \subset E$, $\overline{V} \cap Y \subset F$, $\overline{E} \cap F = \emptyset$, $E \cap \overline{F} = 0$. Dan ook: $\overline{(A \cup E)} \cap (B \cup F) = \emptyset$, $(A \cup E) \cap \overline{(B \cup F)} = \emptyset$; daar X volledig normaal is, is er een omgeving O van $A \cup E$ met: $\overline{O} \cap (B \cup F) = \emptyset$. Nu is $C = \mathcal{R}(O)$ de gevraagde verzameling.

We gebruiken ook de

Somstelling: Als $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $\overline{F_i} = F_i$, $\dim F_i \leq n$ $(i = 1, 2, \ldots)$, dan $\dim X \leq n$.

Stelling 2. Stel $\dim X = N$; dan is X de vereniging van $n+1$ disjuncte nuldimensionale verzamelingen, waarvan één een F_σ-verzameling is. Als omgekeerd $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$, en $\dim X_i = 0$ $(i = 0, \ldots, n)$, dan $\dim X \leq n$.

Bewijs. Zij $\mathcal{L}$ een aftelbare basis van X, zó, dat de randen van de elementen van $\mathcal{L}$ hoogstens $(n-1)$-dimensionaal zijn. (Als bijv. $\mathcal{L}'$ een aftelbare basis, en we bij ieder paar $U,V \in \mathcal{L}'$ met $\bar{U} \subset V$ een open verzameling B nemen met $U \subset B \subset \bar{B} \subset V$ en $\dim \mathcal{R}(B) \leq n-1$, dan vormen deze verzamelingen een basis $\mathcal{L}$ als vereist.)
Nu geldt: $X_{n-1} = \bigcup\{\mathcal{R}(B) \mid B \in \mathcal{L}\}$ is een F_σ-verzameling, terwijl $\dim X_{n-1} \leq n-1$ volgens de somstelling; $X_0 = X \setminus X_{n-1}$ is nuldimensionaal. Ook is $\dim X_{n-1} = n-1$, daar $\dim X_{n-1} \leq n-2$ met behulp van stelling 1 zou leiden tot $\dim X \leq n-1$.
Passen we nu op X_{n-1} de inductieonderstelling toe: $X_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ een splitsing, met $\dim X_i = 0$, X_n een F_σ-verzameling in X_{n-1}, dan is $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$ een splitsing als gevraagd, daar X_n als F_σ-verzameling van de F_σ-verzameling X_{n-1} ook een F_σ-verzameling van X is.

De rest van de stelling is gemakkelijk bewijsbaar m.b.v. volledige inductie en stelling 1.

Stelling 3. (Nishiura) Stel $\dim X = m$, $\dim Y = n \geq 0$, $Y \subset X$, Y een F_σ-verzameling van X. Dan geldt: bij iedere twee disjuncte gesloten verzamelingen A en B van X is er een gesloten verzameling C die A en B scheidt, met $\dim C \leq m-1$, $\dim(C \cap Y) \leq n-1$.

Bewijs. Gebruik makende van stelling 2 vinden we splitsingen $X = X_0 \cup X_{m-1}$, $Y = Y_0 \cup Y_{n-1}$, met $\dim X_0 = \dim Y_0 = 0$, $\dim X_{m-1} = m-1$, $\dim Y_{n-1} = n-1$, X_0 een F_σ-verzameling van X, Y_0 een F_σ-verzameling van Y, dus ook een F_σ-verzameling van X. Dan $\dim X_0 \cup Y_0 = 0$, m.b.v. de somstelling. Volgens stelling 1 is er nu een gesloten verzameling C die A en B scheidt, met $C \cap (X_0 \cup Y_0) = \emptyset$. Dan $C \subset X_{m-1}$, dus $\dim C \leq m-1$, en $C \cap Y \subset Y_{n-1}$, dus $\dim C \cap Y \leq n-1$, q.e.d.

Opmerking 1. Als in stelling 3 X een gesloten deelverzameling is van de n-dimensionale euclidische ruimte E^n, dan is de beperking dat Y een F_σ-verzameling moet zijn overbodig. Want schrijven we weer $Y = Y_0 \cup Y_{n-1}$, waarbij Y_0 nu niet noodzakelijk een F_σ-verzameling van X is, dan kunnen we volgens stelling 1 een gesloten verzameling C^* in E^n vinden die A en B scheidt; hierbij kunnen we veronderstellen dat C^* de rand is van een open verzameling; maar als A en B niet-leeg zijn, hetgeen we mogen veronderstellen, dan is $\dim C^* = n-1$.

(Hurewicz-Wallman, Ch.IV, § 4, Cor.2.) In dat geval voldoet $C=C^{*}\cap X$.

<u>Stelling 4.</u> Zij C een n-dimensionaal compactum ($n \geq 2$). Dan bevat C een deelruimte X met: 1^{o}. $\dim X = n-1$;
2^{o}. X een G_{δ} -verzameling;
3^{o}. $\dim C \setminus X = 0$;
4^{o}. als X gecompactificeerd is d.m.v. een verzameling N met $\dim N \leq 0$, tot een compactum D, dan $\dim D=n$.

Dit houdt dus in, dat, hoewel X gecompactificeerd kan worden tot een $(n-1)$-dimensionaal compactum (Hurewicz-Wallman, Ch.V, § 6, Th.6), en X ook gecompactificeerd kan worden d.m.v. een hoogstens nuldimensionale verzameling (zie blz.1 3.2 en blz.10 stelling 3), X <u>niet</u> gecompactificeerd kan worden tot een $(n-1)$-dimensionaal compactum d.m.v. een hoogstens nuldimensionale verzameling.

<u>Bewijs.</u> Als $x \notin F=\overline{F}$, en $y \in F \Longrightarrow \exists$ omgeving U_y van y met $x \notin \overline{U}_y$, $\dim \mathcal{R}(U_y) \leq n-2$, dan $\exists$ $y_1,\ldots,y_k \in F$ met $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i} = U \subset \overline{U} \not\ni x$, terwijl dan $\dim \mathcal{R}(U) \leq n-2$, dus x en F gescheiden door een ($\leq n-2$)-dimensionale gesloten verzameling.
Daar $\dim C=n$, is er een punt x_1 en een gesloten verzameling $F \not\ni x_1$, zó, dat x_1 en F niet gescheiden kunnen worden door een ($\leq n-2$)-dimensionale gesloten verzameling. Dan is er blijkens het bovenstaande ook een punt $x_2 \in F$, zó, dat x_1 en x_2 niet gescheiden kunnen worden d.m.v. een ($\leq n-2$)-dimensionale gesloten verzameling.

Stel $C = V_0 \cup V_{n-1}$ een splitsing, met $\dim V_0=0$, $\dim V_{n-1}=n-1$, V_{n-1} een F_{σ}-verzameling, $x_1,x_2 \in V_0$ (vgl. het bewijs van stelling 2; hierin kunnen we volgens stelling 3 ervoor zorgen, dat X_{n-1} een nuldimensionale F_{σ}-verzameling vermijdt, dus zeker een die bestaat uit 2 elementen). Stel $V_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} C_i$ een splitsing met $\dim C_i=0$, C_0 een F_{σ}-verzameling van V_{n-1}, dus ook van C. Neem nu: $X=C \setminus C_0$. Dan dus: $\dim X=n-1$, X een G_{δ}-verzameling, $\dim C \setminus X=0$, $x_1,x_2 \in X$. Stel nu X gecompactificeerd d.m.v. een verzameling N, met $\dim N \leq 0$, tot een compactum D.
Stel $\dim D=n-1$. We dienen nu een tegenspraak af te leiden.
Volgens de stelling van Lavrientieff kunnen we de identieke afbeelding van X op X voortzetten tot een homeomorfisme van een G_{δ}-verzameling in D op een G_{δ}-verzameling in C. Daar X een G_{δ}-verzameling is in C, is dan ook X een G_{δ}-verzameling in D, zoals gemakkelijk is in te zien. Dus N een F_{σ} -verzameling in D.

Volgens stelling 3 is er een $(\leqslant n-2)$-dimensionaal compactum E in D, dat x_1 en x_2 scheidt, met $E \cap N = \emptyset$. Dus is er een splitsing $D = F_1 \cup F_2 \cup E$, met $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, F_1 en F_2 open. Maar dan $X = (X \cap F_1) \cup (X \cap F_2) \cup E$ een splitsing van X; en $C = (X \cap F_1) \cup (X \cap F_2) \cup C_0 \cup E$ een splitsing van C, met $\overline{(X \cap F_1)} \cap (X \cap F_2) = \emptyset$, $(X \cap F_1) \cap \overline{(X \cap F_2)} = \emptyset$. Stel $F = \overline{(X \cap F_1)} \cap \overline{(X \cap F_2)}$. Dan:

$$C = (X \cap F_1) \cup (X \cap F_2) \cup (C_0 \setminus F) \cup (E \cup F) \text{ een}$$

splitsing, waarbij $E \cup F$ gesloten (E was compact!), en $\dim E \cup F \leqslant n-2$ ($E \cup F \subset E \cup C_0$; maar C_0 open in $E \cup C_0$, dus een F_σ-verzameling in $E \cup C_0$; daar $n \geqslant 2$ vinden we m.b.v. de somstelling:

$$\dim E \cup C_0 \leqslant n-2, \text{ dus ook } \dim E \cup F \leqslant n-2).$$

In de deelruimte $C \setminus (E \cup F)$ zijn $X \cap F_1$ en $X \cap F_2$ gesloten; volgens stelling 1 worden zij gescheiden door een gesloten verzameling die $C_0 \setminus F$ vermijdt; dit kan slechts de lege verzameling zijn. Er is dus een splitsing:

$$C = G_1 \cup G_2 \cup (E \cup F), \text{ met } x_1 \in X \cap F_1 \subset G_1,$$

$x_2 \in X \cap F_2 \subset G_2$, G_1 en G_2 open in $C \setminus (E \cup F)$, $E \cup F$ gesloten, $\dim E \cup F \leqslant n-2$, in strijd met het feit dat x_1 en x_2 in C niet gescheiden kunnen worden door een $(\leqslant n-2)$-dimensionale gesloten verzameling, q.e.d.

<u>Opmerking 2.</u> T. Nishiura bewijst stelling 4 voor het geval dat $C = \prod_{i=1}^{n} I$, waarbij $I = [0,1]$. Zijn bewijs gaat ook op voor het geval dat C een Cantor-variëteit is, waarbij dan X willekeurig gekozen kan worden, zó, dat aan de voorwaarden 1°, 2° en 3° van stelling 4 is voldaan. (Een <u>Cantor-variëteit</u> is een compactum, met dimensie $n \geqslant 1$, zó, dat geen twee punten ervan door een verzameling van dimensie $\leqslant n-2$ gescheiden kunnen worden). Hiervan gebruik makende, en met behulp van het feit dat een compactum met dimensie $n \geqslant 1$ een n-dimensionale Cantor-variëteit omvat (zie Hurewicz-Wallman, Ch.VI, § 5, Th.8), is ook stelling 4 gemakkelijk te bewijzen.

Colloquium "Generalisaties van het dimensiebegrip"

2 februari 1961

Over het bestaan van n-compacte ruimten

Definitie 1: Een ruimte M heet totaal imperfect als M geen overaftelbare compacte deelverzamelingen bevat.

Stelling 1: De n-dimensionale eenheidssfeer S^n in E^{n+1} kan gesplitst worden in twee disjuncte totaal imperfecte deelverzamelingen M_1 en M_2 die zo gekozen kunnen worden dat M_1 verkregen wordt uit M_2 door een spiegeling ten opzichte van de oorsprong.

Bewijs: We maken gebruik van de volgende stellingen:

1°. Ieder overaftelbaar compactum heeft machtigheid c.

2°. De familie van alle gesloten deelverzamelingen van een topologische ruimte met aftelbare basis heeft machtigheid $\alpha \leq c$.

Welorden de verzameling van alle overaftelbare deelcompacten van S^n: $C_1, C_2, \ldots, C_\omega, \ldots C_\alpha, \ldots \alpha < \Omega_c$. Zij φ een willekeurige spiegeling van S^n ten opzichte van de oorsprong.
Kies nu in C_1 twee punten p_1 en q_1 zó dat de 4 punten $p_1, q_1, \varphi(p_1)$ en $\varphi(q_1)$ alle verschillend zijn. Zet dit proces transfiniet voort, door uit C_α twee punten p_α en q_α te kiezen zó dat $p_\alpha, q_\alpha, \varphi(p_\alpha)$ en $\varphi(q_\alpha)$ alle verschillend zijn en zo dat ze tevens verschillend zijn van de reeds gekozen punten $p_\beta, q_\beta, \varphi(p_\beta), \varphi(q_\beta), \beta < \alpha$.
In M_1 kiezen we nu de punten p_α en $\varphi(q_\alpha)$ en in M_2 de punten q_α en $\varphi(p_\alpha)$.
Dit proces kan uitgevoerd worden daar volgens st.1° iedere C_α de machtigheid c heeft en volgens st. 2° $\alpha < \Omega_c$.
De punten van S^n die niet reeds in M_1 of M_2 zitten, verdelen we nu zo over M_1 en M_2 dat als $p \in M_1$ dan $\varphi(p) \in M_2$.
S^n is nu gelijk aan $M_1 \cup M_2$, terwijl $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. $\varphi(M_1) = M_2$ en M_1 en M_2 totaal imperfect.

Stelling 2: Als de compacte n-dimensionale ruimte M de vereniging is van twee disjuncte totaal imperfecte verzamelingen M_1 en M_2, dan is cmp M_1 gelijk aan n-1 of n en cmp M_2 gelijk aan n-1 of n.

Bewijs: Als n=0 dan cmp M_1=-1 of 0 en cmp M_2=-1 of 0.
Stel dim M=1 en cmp M_1=-1, dan is M_1 compact en dus aftelbaar. Daar M_1 gesloten is, is M_2 open en dus locaal compact.

M_2 heeft dus een aftelbare basis van verzamelingen U met $\overline{U}$ compact. Daar iedere $\overline{U}$ aftelbaar is, is ook M_2 aftelbaar. Hieruit volgt dat M aftelbaar is en dus dim M=0, in tegenspraak met dim M=1.

Stel nu dim M=n en de stelling reeds bewezen als dim $M \leq n-1$, $n \geq 2$.

Zij p een punt van M met $\dim_p M = n$ en stel $p \in M_1$. Er is dan een omgeving U van p, zó dat als V een omgeving is van p met $V \subset U$ dan dim $R(V) \geq n-1$. In R(V) dus een gesloten deelverzameling k te vinden met dim k=n-1.

Daar K gesloten is in M en dim $K \geq 1$ is k een overaftelbaar compactum.

$$R(V) = (R(V) \cap M_1) \cup (R(V) \cap M_2)$$

$$K = K_1 \cup K_2 \qquad K_1 \subset R(V) \cap M_1$$

$$K_1 \neq \emptyset \quad {}_2 \neq \emptyset \qquad K_2 \subset R(V) \cap M_2.$$

Daar dim K =n-1 en K_1 en K_2 totaal imperfect, is volgens de inductie veronderstelling cmp $K_1 \geq n-2$. Daar K_1 gesloten in $R(V) \cap M_1$ is ook cmp $(R(V) \cap M_1) \geq n-2 \Rightarrow$ cmp $M_2 \geq n-1$ (blz. 2 st. 3.5).

Om te bewijzen dat ook cmp $M_2 \geq n-1$, dienen we slechts aan te tonen dat er ook in M_2 punten p voorkomen met $\dim_p M = n$.

M is een n-dimensionaal compactum en heeft dus een deelverzameling C die een n-dimensionale Cantor manifold is (Hurewicz-Wallman, Ch.VI § 6 Th.8).

Daar C in ieder van zijn punten de dimensie n heeft en C een overaftelbaar compactum is, is $C \cap M_2 \neq \emptyset$ en er is dus een punt $p \in C \cap M_2$ met $\dim_p M = n$. q.e.d.

elling 3: De n-dimensionale Euclidische ruimte E^n heeft voor iedere k, $-1 \leq k \leq n-1$, een deelverzameling F_k met cmp $F_k = k$.
E^n bezit geen deelverzamelingen F met cmp $F \geq n$.

ijs: De totaal imperfecte deelverzamelingen M_1 en M_2 van de S^n geconstrueerd in het bewijs van stelling 1 liggen overal dicht in de $S^n \Rightarrow \dim M_1 \leq n-1$ (Hurewicz-Wallman Ch.IV § 5 Cor.1), dus cmp $M_1 \leq n-1$. Daar volgens st.2 cmp $M_1 \geq n-1 \Rightarrow$ cmp $M_1 = n-1$. M_1 opgevat als deelverzameling van de $E^n \approx S^n \setminus \{p\}$ heeft dus cmp=n-1.

E^m bezit dus inderdaad voor iedere k een deelverzameling F_k met cmp $F_k = k$ $\quad -1 \leq k \leq n-1$ (blz.2 st.3.6).

Iedere deelverzameling van E^0 heeft cmp=-1. Stel nu dat reeds bewezen is dat iedere deelverzameling van de E^{n-1} cmp $\leq n-2$ heeft.
Zij nu $F \subset E^n$, $p \in F$ en U een bolvormige omgeving van p in E^n. $\text{cmp}(R(U) \cap F) = -1$ als $R(U) \subset F$, of $\text{cmp}(R(U) \cap F) \leq n-2$ als $R(U) \not\subset F$. Immers $R(U) \cap F)$ is dan een deelverzameling van $S^{n-1} \setminus \{q\} \approx E^{n-1}$ en volgens de inductie veronderstelling is dus $\text{cmp}(R(U) \cap F) \leq n-2$.
Ieder punt $p \in F$ heeft dus willekeurig kleine omgevingen U met $\text{cmp}(R(U) \cap F) \leq n-2 \Rightarrow \text{cmp}\, F \leq n-1$. q.e.d.

Definitie 2: Een ruimte M heet extreem-onsamenhangend als iedere quasi-component van M uit één punt bestaat.

Stelling 4: Als M extreem-onsamenhangend is en $\dim M \geq 1$ dan is $\text{cmp}\, M = \dim M$.

Bewijs: Stel $\dim M=1$ en kies $p \in M$ zó dat $\dim_p M=1$ en stel $\text{cmp}_p M \leq 0$.
Dan is er een omgeving U van p zó dat als $p \in V \subset U$, $\dim R(V) \geq 0 \Rightarrow R(V) \neq \emptyset$. Daar $\text{cmp}_p M \leq 0$ is er een $V \subset U$ met $\text{cmp}\, R(V)=-1$. $R(V)$ dus compact en niet leeg.
$p = \bigcap_\alpha F_\alpha$ $\quad F_\alpha$ open en gesloten.
$R(V) \cap F_\alpha \neq \emptyset$, $R(V) \cap \bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset \Rightarrow R(V) \cap \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$
$D = \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$. D gesloten en open, en dus $R(D \cap U) = \emptyset$ in tegenspraak met $\dim_p M=1$.
Stel nu dat de stelling reeds bewezen is als $\dim M \leq n-1$ en stel $\dim M=n$, $n \geq 2$.
Dan is er een punt $p \in M$ en een omgeving U van p zó dat als $p \in V \subset U$, $\dim R(V) \geq n-1$.
Kies in $R(U)$ een gesloten deelverzameling F met $\dim F=n-1$.
Volgens de inductie veronderstelling is $\text{cmp}\, F = n-1$.
$\Rightarrow \text{cmp}\, (R(U) \geq n-1 \quad \Rightarrow \text{cmp}\, M \geq n$.
Daar $\text{cmp}\, M \leq \dim M = n \quad \Rightarrow \text{cmp}\, M = n$ q.e.d.

Daar er voor iedere n extreem-onsamenhangende ruimten M bestaan met $\dim M=n$, is er dus voor iedere n een ruimte M zó dat $\dim M = \text{cmp}\, M$.

Definitie 3: Als M compact is dan $\text{cmp}^* M = -1$.
$\text{cmp}^* M \leq n$ als iedere compacte deelverzameling van M willekeurig kleine omgevingen U bezit met $\text{cmp}^* R(U) \leq n-1$.

Stelling 5: Als $\text{cmp}\, M=0 \Leftrightarrow \text{cmp}^* M = 0$.
Uit de definitie volgt direct dat als $\text{cmp}^* M = 0$ dan ook

$\text{cmp } M = 0$.

Stel nu $\text{cmp } M=0$ en zij F een compacte deelverzameling van M. $F \subset W$ open. Bij ieder punt $p \in F$ kunnen we een omgeving V_p vinden met $R(V_p)$ compact en $V_p \subset W$.

De verzameling van alle V_p's vormt een overdekking van F. Daar F compact is overdekken $V_{p_1}, \ldots V_{p_n}$ reeds F.

$V_{p_1} \cup V_{p_2} \cup \ldots \cup V_{p_n}$ is dan een omgeving van F met compacte rand. Immers $R(V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n}) \subset R(V_{p_1}) \cup \ldots \cup R(V_{p_n})$.

$R(V_{p_1} \cup \ldots \cup V_{p_n})$ is een gesloten deelverzameling van een compacte ruimte, dus compact. $\Rightarrow \text{cmp}^* M = 0$.

<u>Stelling 6:</u> Zij M compact en $A \subset M$, met $\dim A \leqslant n$. Dan is $\text{cmp}^*(M \setminus A) \leqslant n$.

<u>Bewijs:</u> Voor $n=-1$ triviaal.

Stel nu de stelling reeds bewezen als $\dim A \leqslant n-1$ en stel $\dim A = n$.

Stel F een willekeurige compacte verzameling van $M \setminus A$.

F bezit dan willekeurig kleine omgevingen U met $\dim(R(U) \cap A) \leqslant n-1$ (Hurewicz-Wallman Ch.III § 6 Pr.B).

Volgens de inductie veronderstelling is dan $\text{cmp}^*(R(U) \setminus (R(U) \cap A)) = \text{cmp}^*(R(U) \cap M \setminus A) \leqslant n-1$ dus $\text{cmp}^*(M \setminus A) \leqslant n$ (blz.2 st.3.5 voor cmp^*).

Uit stelling 6 volgt dat het hoofdvermoeden onjuist is, als er een ruimte M bestaat met $\text{cmp}^* M \neq \text{cmp } M$. Uit def. 3 volgt dat $\text{cmp}^* M \geqslant \text{cmp } M$.

Stel $\text{cmp } M=n$ en $\text{cmp}^* M = n+k$ $\quad k > 0$. Als M gecompactificeerd kan worden door een n-dimensionale verzameling dan $\text{cmp}^* M \leqslant n$ in tegenspraak met $k > 0$.

<u>Opmerking.</u> Het hoofdvermoeden is nu bewezen in de volgende 4 gevallen.

a. $n=0$ zie blz. 10 stelling 3.

b. $\dim M = \text{cmp } M$.

Als $\dim M=n$, dan kan M n-dimensionaal gecompactificeerd worden (Hurewicz-Wallman Ch.V § 6 Th.6). Daar $\text{cmp } M=n$ heeft de compactificerende verzameling juist de dimensie n.

c. $\dim M \leqslant 1$.

Als $\text{cmp } M=1$ dan b.

Als $\text{cmp } M=0$ dan a.

d. M is een deelverzameling van het vlak. Kies M begrensd, dan is $\overline{M}$ compact. $\quad \dim(\overline{M} \setminus M) \leqslant 1$.

Als $\text{cmp } M=1$ dan $\dim \overline{M} \setminus M=1$ (blz.1 st.3.2).

Als $\text{cmp } M=0$ dan a.