stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 81/71 APRIL

G.Y. NIEUWLAND

OMLOOPSGETAL, NULPUNTEN, VERTAKKINGEN

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN
VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Serie Elementaire onderwerpen, 28-4-1971

Omloopsgetal, nulpunten, vertakkingen

door: prof.dr. G.Y. Nieuwland (V.U.A.)

Syllabus

1. Zij X de verzameling van functies $f: \mathbb{C}\supset D\ni z \to f(z)\in\mathbb{C}$, $D = \{z: |z|<1\}$, f continu op $\bar{D}$, holomorf op D. X is een genormeerde ruimte met $||f|| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$. Zij $F = f(\partial D)$.

Stelling 1. Voor iedere $f\in X$ en $w_0\notin F$, is een functie

$$d(f,D,w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_F \frac{dw}{w-w_0}$$

gedefinieerd.

1) d een geheel waardig, en constant op elke component van CF;
2) d is een continue functie van f;
3) d is gelijk aan het aantal nulpunten van $f - w_0$ binnen D, geteld volgens hun orde.

Opm. Meetkundig is d "het aantal malen dat F om w_0 heenloopt"; d heet het omloopsgetal.

Stelling 2 (Rouché). $f_0,f_1\in X$. Zijn $d(f_0,D,0)$ en $d(f_1,D,0)$ gedefinieerd en geldt $\forall z$ zodat $|z| = 1$:

$$|f_0(z) - f_1(z)| < |f_0(z)|,$$

dan is $d(f_0,D,0) = d(f_1,D,0)$.

Gevolg. Zij f_t een continue afbeelding van $[0,1] \times X \to X$ en zij $d(f_0,D,0) \neq d(f_2,D,0)$ (beide gedefinieerd), dan is er een $t\in[0,1]$ zodat f_t een nulpunt op ∂D heeft.

2. Zij X de verzameling van functies f: $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}^n$, D open begrensd, f continu op $\bar{D}$, X genormeerd door $||f|| = \sup_{x\in\bar{D}} |f(x)|$.

Stelling 3 (Brouwer). Zij $F\in X$: $F(x) \neq 0$ voor $x\in\partial D$.
Er is een geheel getal $d(F,D,0)$:
1) d hangt alleen af van de afbeelding van ∂D onder F.
2) d is constant op elke component van $R^n - F(\partial D)$; $d = 0$ indien $\forall x\in\bar{D}$: $F(x) \neq 0$.
3) d is een continue functie van F.
4) Zij H_t: $X \times [0,1] \to X$ continu, en $\forall t\in[0,1]$. $H_t(\partial D) \neq 0$. Dan $d(H_0,D,0) = d(H_1,D,0)$.
5) Zijn $X\ni F$: $D \to R^n$, $X'\ni F'$: $D' \to R^m$, en $d(F,D,0)$ en $d'(F',D',0)$ gedefinieerd. Dan is voor $X\times X'\ni(F,F')$: $D \times D' \to R^n \times R^m$:

$$d((F,F'),D\times D',0) = d(F,D,0).d'(F',D',0).$$

6) Zij $R^m \subseteq R^n$ kanoniek ingebed. F: $\mathbb{R}^m \supset \bar{D} \to R^m$ continu, I+f: $\bar{D} \to \mathbb{R}^n$ met I de identieke afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Indien $0 \notin (I+F)(\partial D)$: $d(I+F,D,0) =$
$= d(I+F|_{\bar{D}\cap R^m}, D\cap R^m, 0)$.

Opm. Zij $F\in C^1(\bar{D})$, zodanig dat $J_F(x) = \det(\partial F/\partial x_i) \neq 0$ indien $F(x) = 0$.
Dan

$$d(F,D,0) = \sum_{\{x:F(x)=0\}} \operatorname{sign} J_F(x).$$

3. Zij X de verzameling van compacte afbeeldingen van een reële Banachruimte in zichzelf, met de norm-topologie. $\{B_n\}$ de verzameling eindigdimensionale deelruimten van B. Zij $D\subset B$ open en begrensd, zodanig dat elke $D\cap B_n$ een begrensde open deelverzameling van B_n is.

Stelling 4 (Leray-Schauder). Zij $F\in X$, en $0\notin(I+F)(\partial D)$. Dan is de afbeeldingsgraad $d(I+F,D,0)$ gedefinieerd:
1) d is een geheelwaardige, continue functie van F.
2) d hangt alleen af van de afbeelding $(I+F)(\partial D)$.
3) Zij H_t: $H\times[0,1] \to X$ compact, en $\forall t\in[0,1]$: $H_t(\partial D) \neq 0$. Dan is $d(H_0,D,0) = d(H_1,D,0)$.
4) Zij $B = B_1 + B_2$, F_1: $F|_{B_1}$, F_2: $F|_{B_2}$, dan
$d(I+F,D,0) = d_1(I+F_1,D\cap B_1,0).d_2(I+F_2,D\cap B_2,0)$.

Stelling 5. Zij $F \epsilon X$ lineair, -1 geen eigenwaarde van F, en $0 \epsilon D$. Dan is $d(I+F,D,0) = (-1)^{\Sigma m_i}$, met m_i de dimensie van de eigenruimte van F, behorend bij de reële eigenwaarden $\lambda_i < -1$.

4. Zij F_λ voor vaste, reële λ, een niet-lineaire continue afbeelding van een reële Banach-ruimte in zichzelf. Laat de operator vergelijking $F_\lambda(u) = 0$ twee verschillende oplossingen $u_0(\lambda)$ en $u_1(\lambda)$ hebben, zodat voor $\lambda \to \lambda_1$, $u_1(\lambda) \to u_0(\lambda_1)$.

Def. λ_0 heet vertakkingspunt van $F_\lambda(u) = 0$ t.o.v. de oplossing $u_0(\lambda)$.

Zij F_λ een niet-lineaire operator van een genormeerde ruimte $X \to X$, en G_λ een lineaire operator: $X \to X$, zodat $F_\lambda(u_0+u) =$
$= F_\lambda(u_0) + G_\lambda(u) + O(||u||)$.

Def. G_λ heet de Fréchet-afgeleide van F_λ in het punt $u_0 \epsilon X$.

Zij X een reële Banach-ruimte. F_λ een niet-lineaire afbeelding van $X \to X$, van de vorm $F_\lambda(u) \overset{\text{def}}{=} I - \lambda F(u) \overset{\text{def}}{=} (I - \lambda(G+H))(u)$,
G: Fréchet-afgeleide van F in het punt $u = 0$, F compact: $X \to X$,
$||H(u)|| = O(||u||^2)$.

Stelling 6. Vertakkingspunten van $F_\lambda(u) = 0$ komen alleen voor bij eigenwaarden van de lineaire operator G.

Stelling 7. Zij $F_\lambda(u) = (I - \lambda(G+H))(u) = 0$, en λ_0 eigenwaarde van G met oneven multipliciteit. Dan is λ_0 vertakkingspunt van $F_\lambda(u) = 0$ t.o.v. $u \equiv 0$.

5. Een toepassing van stelling 7 in het Taylor-probleem uit de theorie der visceuze stromingen wordt gegeven in lit. 4.

6. Literatuur

1. J.T. Schwarz — Nonlinear functional analysis. Lecture notes 1963-64, Courant Institute NYU (1965).

2. M.A. Krasnoselski — Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. New York (1964).

3. J.B. Keller, S. Antman (eds.) — Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems. New York (1969).

4. W. Velte — Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylor-Problem. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 22, 1966, pp. 1-14.