STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 7.

Laplace transformatie.

Cursus najaar 1948.

Waerden B.L.

1948

ABC

<u>Laplacetransformatie</u>

door

Prof. B.L. van der Waerden.

<u>Syllabus eerste voordracht 9 October 1948</u>

De Laplacetransformatie is een toverstaf, waarmee men sommige differentiaal- of integraalvergelijkingsproblemen maar hoeft aan te raken, en ze worden ineens veel eenvoudiger. De kunst is alleen, na de oplossing de betovering weer ongedaan te maken, d.w.z. de oplossing terug te transformeren.

De problemen moeten <u>lineair</u> zijn, en bij voorkeur <u>beginwaardeproblemen</u>, waarbij de toestand voor t = 0 gegeven is, b.v.:

A. <u>Inschakelingsprobleem in de elektrotechniek</u>:

(1) $$a\frac{d^2Y}{dt^2} + b\frac{dY}{dt} + cY = G(t)$$ met Y en Y' = 0 voor t = 0

B. <u>Diffusie of Warmtegeleiding</u>:

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ met gegeven beginwaarden voor t = 0 en randwaarden voor x = 0 en x = 1 of x = ∞

Definitie van de Laplacegetransformeerde:

(3) $$f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Neem aan dat F(t) sterk naar nul streeft of nul wordt voor $t \to -\infty$, en dat F(t) niet te sterk aangroeit voor $t \to +\infty$, zodat de integraal (3) absoluut convergeert voor $p > c$. Dan convergeert de integraal vanzelf voor complexe $p = u + i\,v$ met $u > c$, dus in een halfvlak rechts van de lijn $p = c + i\,v$.

De omkering van (3) luidt nu:

(4) $$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp \qquad (\varepsilon > c)$$

Door f(p) is F(t) dus eenduidig bepaald. Door verschuiving van de integratieweg of uit een tabel (zie hierna) kan men vaak F(t) bepalen, als de getransformeerde f(p) bekend is.

Speciaal geval $\varepsilon = 0$, $p = i\,v$: <u>Fourier-integraal</u>.

Voortaan zullen we aannemen F(t) = 0 voor negatieve t. In plaats van (3) heeft men dan een integraal van 0 tot ∞.

Belangrijke stellingen

I.	$f(p) + g(p)$	beantwoordt aan	$F(t) + G(t)$
II.	$c\, f(p)$	" "	$c\, F(t)$
III.	$\frac{1}{p} f(p)$	" "	$\int_0^t F(s)\, ds$
IV.	$p\, f(p) - F(0)$	" "	$\frac{dF}{dt}$
V.	$f\,(p-a)$	" "	$e^{at}\, F(t)$
VI.	$e^{-ap}\, f(p)$	" "	$F\,(t-a)$
VII.	$f(p)\, g(p)$	" "	de "convolutie"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)\, G(t-s)\, dx$$

Vaak voorkomende Laplacegetransformeerden.

$f(p) = 1$ beantwoordt aan "Dirac's deltafunctie" $\delta(t)$

$\frac{1}{p}$	"	"	1
$\frac{1}{p-a}$	"	"	e^{at}
$\frac{1}{p^n}$	"	"	$\frac{t^n}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(p-a)^n}$	"	"	$e^{at} \cdot \frac{t^n}{(n-1)!}$

Elke rationale functie van p, die voor $p \longrightarrow \infty$ tot nul nadert, kan als som van partiele breuken geschreven worden:

$$(5)\quad f(p) = \frac{g(p)}{h(p)} = \frac{c_1}{p-a_1} + \frac{c_2}{(p-a_1)^2} + \dots + \frac{c_k}{(p-a_1)^k} + \frac{c_{k+1}}{p-a_2} + \dots$$

De bijbehorende t-functie is dus

$$(6)\quad F(t) = c_1\, e^{a_1 t} + c_2\, t\, e^{a_1 t} + \dots + c_{k+1}\, e^{a_2 t} + \dots$$

In 't eenvoudigste geval van enkelvoudige wortels wordt F(t) een som van exponentiele functies met coefficienten

$$(7)\qquad c_k = \frac{g(a_k)}{h'(a_k)}$$

Oplossing van gewone differentiaalvergelijkingen met constante coefficienten.

Schema

Differentiaalvergelijking		Oplossing differentiaalvergelijking
$\downarrow$	$\longrightarrow$	$\uparrow$
Algebraische vergelijking		Oplossing algebraische vergelijking

Voorbeeld

(8) $\frac{d^2Y}{dt^2} + Y = 1$ met $Y = 0$ en $Y' = 0$ voor $t = 0$.

Volgens (4) voldoet de getransformeerde functie y aan
$p(py - y(0)) - y'(0) + y = \frac{1}{p}$
of in ons geval

(9) $(p^2 + 1)\, y = \frac{1}{p}$.

Zo hebben we dus een differentiaalvergelijking in een algebraische vergelijking getransformeerd. De oplossing luidt:

(10)
$$y = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p-i} + \frac{c_3}{p+i}$$

Teruggetransformeerd:

(11) $Y = c_1 + c_2\, e^{it} + c_3\, e^{-it}$

$$c_1 = \frac{1}{3.0^2 + 1} = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{3.i^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{3(-i)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

of $Y = 1 - \cos t$.

LAPLACETRANSFORMATIE, door B.L.v.d. Waerden.

Syllabus 2de voordracht 23 Oct. 1948.

Ontwikkelingsstelling van Heaviside

Aan de splitsing in partiele breuken

(1) $$f(p) = \frac{g(p)}{h(p)} = \sum \frac{g(a_k)}{h^1(a_k)} \frac{1}{p-a_k}$$

beantwoordt in het gebied van de tijdfuncties

(2) $$F(t) = \sum \frac{g(a_k)}{h(a_k)} e^{a_k t}$$

Stabiliteitscriterium. F(t) blijft beperkt, als de reële delen van alle wortels negatief of nul zijn. Zijn ze alle negatief, dan nadert F(t) tot nul voor $t \to \infty$. Is er één wortel nul bij, en liggen de overigen links van de imaginaire as, dan nadert F(t) tot een constante limiet, en deze limiet is gelijk aan het residu van de pool $p=0$.

Vaak kan de ontwikkeling (2) ook worden toegepast als f(p) geen rationale functie van p is. Laat b.v. f(p) oneindig veel geisoleerde polen links van de imaginaire as hebben, waarvan de reele delen tot $-\infty$ naderen. Dan is volgens de omkeerformule

(3) $$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} f(p)\, e^{pt}\, dt$$

F(t) een som van residuen van een aantal polen plus een integraal over een lijn links van deze polen. Dikwijls wordt deze integraal zeer klein zodat men praktisch aan een beperkt aantal polen voldoende heeft, althans voor niet te kleine waarden van t.

Om ook voor kleine t een ontwikkeling te vinden, ontwikkelt men f(p) voor grote p in een machtreeks naar p^{-1}

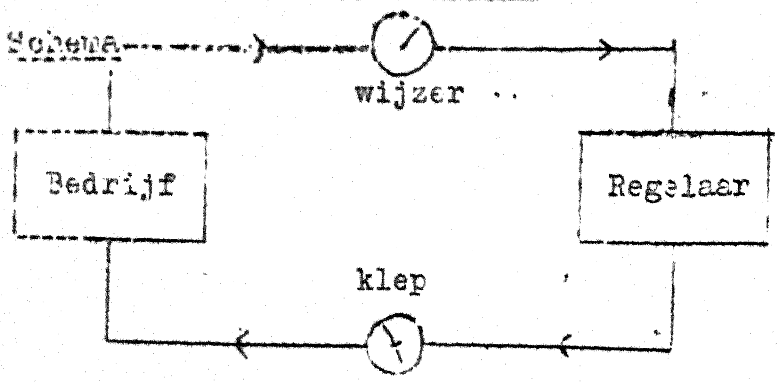
$$f(p) = c_1 p^{-1} + c_2 p^{-2} + \ldots$$

De bijbehorende machtreeks voor $F(t)$ luidt

$$F(t) = c_1 + \frac{c_2}{1!}\,t + \frac{c_3}{2!}\,t^2 + \ldots.$$

Onthoud: Het gedrag van $F(t)$ voor kleine t wordt bepaald door dat van $f(p)$ voor grote p. Aan de andere kant wordt het gedrag van $F(t)$ voor grote t grotendeels bepaald door dat van $f(p)$ voor $p \longrightarrow 0$ (en door de ligging van de polen t.o.v. de imaginaire as).

Theorie automatische regeling

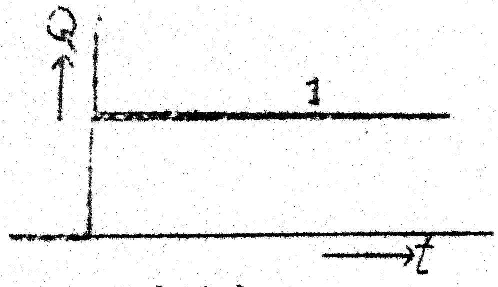


Gegeven een bedrijf, waaraan een wijzer verbonden is die een grootheid X meet, die zo goed mogelijk constant gehouden moet worden. Hiertoe dient een regelaar, die een klep bedient, waarop het bedrijf weer reageert. Laat X(t) de uitwijking van de wijzer, Q(t) de uitwijking van de klep betekenen, beide als functie van de tijd, in willekeurige eenheden gemeten.

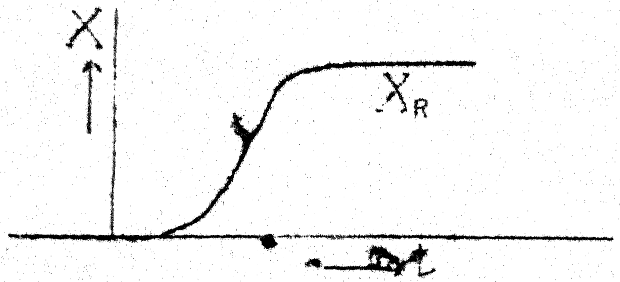
Responsie van het bedrijf. Maak de klep van de regelaar los en geef hem een uitwijking.

1. Het bedrijf reageert hierop volgens een responsiefunctie X_R (t).

Eenheidsstoring



Responsie bedrijf



Bij een uitgestelde eenheidsuitwijking behoort natuurlijk ook een uitgestelde responsie. Neem nu aan dat de responsie lineair is, d.w.z. dat bij een veelvoud van de uitwijking ook een veelvoud van de responsie behoort, en bij de som van twee of meer al of niet uitgestelde uitwijkingen (trapjesfunctie) ook de som van de bijbehorende responsiefuncties. Gaat men dan door limietovergang van een trapjesfunctie naar een willekeurige storing Q(t) over, dan wordt de responsie gegeven door

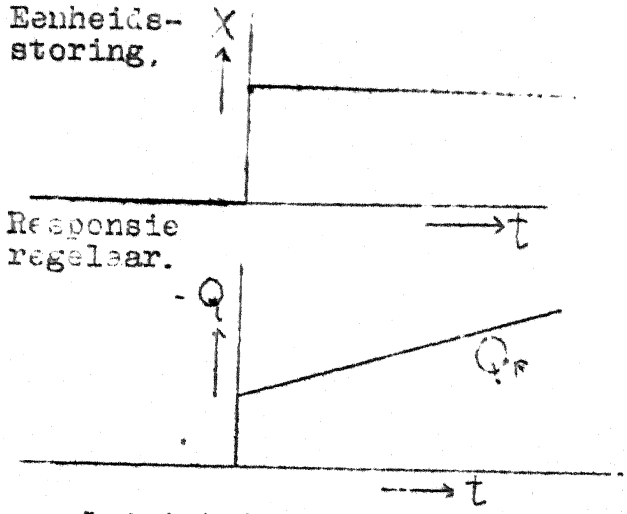
$$X(t) = X_R(t) \circ Q(t) = \int_0^t X_R(t-s)\, dQ(s)$$

In afwijking van een vroeger gemaakte afspraak noemen we deze integraal de convolutie van de functies X_R (t) en Q(t). Verder definiëren we, eveneens afwijkend, de Laplacetransformatie door

$$f(p) = p\int_0^\infty F(t)\, e^{-pt}\, dt$$

De Laplacegetransformeerde van een eenheidsstoring is dan 1, en de Laplacegetransformeerde van een convolutie $F \circ G$ (in de nieuwe zin) is het product f(p)g(p).

Responsie van de regelaar. Maak de wijzer van het bedrijf los, en geef hem een uitwijking 1. De regelaar reageert hierop volgens een



responsiefunctie $-Q_R$. De meest gebruikelijke typen responsiefunctie zijn

$$Q_R(t) = a + bt$$

(evenredige responsie plus integraalactie). Soms telt men hierbij nog een z.g. differentiaalactie van de vorm $h\,\delta(t)$ op, waarbij $\delta(t)$ een functie is, die plotseling tot een zeer hoge waarde opklimt en dan zeer snel weer tot nul nadert, maar zo dat de integraal juist 1 wordt.

Neem weer aan dat de responsie van de regelaar eveneens lineair is. Dan zal aan een willekeurige storing $X(t)$ de reactie van de regelaar

$$Q(t) = -Q_R(t) \circ X(t)$$

beantwoorden.

De convolutie heeft de eigenschappen

$$F \circ G = G \circ F$$
$$F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$$

Probleem: Gegeven de responsiefunctie van het bedrijf $X_R(t)$. Hoe moeten de constanten (a, b en eventueel h) van de responsiekromme van de regelaar gekozen worden, opdat elke storing in de kortst mogelijk tijd tot nul gereduceerd wordt?

We beperken ons tot bedrijven met zelfregeling, waarbij X_R tot een eindige limiet nadert, en we nemen verder aan, dat de oorspronkelijke storing $X_o(t)$ een eenheidsstoring is: $X_o(t) = 1$ voor $t > 0$.

Het mathematisch probleem, dat we eerst op moeten lossen, luidt: Hoe zal bij gegeven responsiefuncties X_R en Q_R, de gesloten cyclus Bedrijf + Regelaar reageren op een eenheidsstoring in X?

De eenheidsstoring $X_o(t)$ op zichzelf geeft aanleiding tot een uitwijking $-Q_R(t)$ van de regelklep. Deze leidt tot een reactie van het bedrijf

$$-Q_R(t) \circ X_R(t)$$

die bij de oorspronkelijke eenheidsstoring opgeteld moet worden:

$$1 - Q_R \circ X_R$$

De tweede term geeft nu weer aanleiding tot een reactie van de regelaar

$$+\ Q_R \circ X_R \circ Q_R$$

en deze weer tot een reactie van het bedrijf

$$+\ Q_R \circ X_R \circ Q_R \circ X_R$$

enzovoort, zodat we in totaal krijgen

$$(0)\quad X(t) = 1 - (Q_R \circ X_R) + (Q_R \circ X_R) \circ (Q_R \circ X_R) - (\quad) \circ (\quad) \circ (\quad) + \cdots$$

In eenvoudige gevallen, zoals wanneer X_R een uitgestelde eenheidsfunctie is, kan deze reeks term voor term door directe integratie uitgerekend worden. In minder eenvoudige gevallen neemt men de Laplacetransformatie te hulp. De Laplacegetransformeerde van de reeks X(t) is

$$x(p) = 1 - q_R x_R + (q_R x_R)^2 - (q_R x_R)^3 + \cdots$$

of

(1) $$x(p) = \frac{1}{1 + q_R(p)\, x_R(p)}$$

Hierin is

(2) $$q_R(p) = a + \frac{b}{p}$$

$x_R(p)$ hangt van de responsiefunctie $X_R(t)$ van het bedrijf af. Neemt men b.v. een responsie met wachttijd D:

(3) $$X_R(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq D) \\ 1 - e^{-\frac{t-D}{c}} & (t > D) \end{cases}$$

dan wordt

(4) $$x_R(t) = \frac{e^{-pD}}{1 + cp}$$

Wil men voor $x_R(p)$ een rationale functie hebben, dan kan men voor $X_R(t)$ een functie van de volgende vorm aannemen:

(5) $$X_R(t) = 1 - e^{-t}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

(6) $$x_R(p) = \frac{1}{(p+1)^n}$$

Met functies van het type (3) of (5) kan men de in de practijk voorkomende responsiekrommen heel goed benaderen. In het geval (3) vindt men volgens (1) als c = 1 wordt aangenomen

(7) $$x(p) = \frac{1}{1 + \left(a + \frac{b}{p}\right)\frac{e^{-pD}}{1+p}} = \frac{p(1+p)}{p(1+p) + (ap+b)\,e^{-pD}}$$

In geval (5) vindt men op dezelfde wijze

(8) $$x(p) = \frac{p(p+1)^n}{p(p+1)^n + ap + b}$$

In dit laatste geval is X(t) makkelijk te vinden. Men stelt

$$\frac{X(p)}{p} = \frac{(p+1)^n}{p(p+1)^n + ap + b} = \frac{f(p)}{g(p)} = \sum \frac{f(a_k)}{g'(a_k)} \cdot \frac{1}{p - a_k}$$

en vindt

$$X(t) = \sum \frac{f(a_k)}{g'(a_k)} e^{a_k t} \tag{9}$$

In geval (7) is x(p) geen rationale functie en de noemer heeft oneindig veel wortels. Toch blijkt (9) voor voldoend grote t een goede benadering. De drie wortels die het dichtst bij de imaginaire as liggen geven aanleiding tot de belangrijkste termen van de reeks; de andere termen naderen zo snel tot nul, dat ze al heel geuw verwaarloosd kunnen worden. Voor zeer kleine t kan men de exakte formule (0) gebruiken. Voor $t < 2D$ zijn alle termen behalve de eerste twee nul. Het blijkt dat de asymptotische ontwikkeling (9) reeds voor t = 2D een uitstekende benadering geeft.

Met behulp van deze ontwikkeling kunnen 2 vragen opgelost worden:

1. <u>Stabiliteitprobleem</u>: Hoe moeten a en b gekozen worden, opdat X(t) voor grote t tot nul nadert?

De voorwaarde hiervoor is: Alle wortels van de noemer g(p) moeten links van de imaginaire as liggen.

2. <u>Probleem van de beste regeling</u>: Hoe moeten a en b gekozen worden, opdat de integraal

$$\int_0^\infty X(t)^2 \, dt$$

zo klein mogelijk wordt?

Beide problemen kunnen door middel van (9) opgelost worden.

LAPLACETRANSFORMATIE

Syllabus 4de voordracht, 13 November 1948.

Probleem: Warmtegeleiding in een vlakke plaat

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\begin{array}{llll} Y = 0 & \text{voor} & x = 0 \\ Y = 1 & \text{"} & x = l \\ Y = 0 & \text{"} & t = 0 \end{array}$$

Kies eenheden zodat $l = 1$ en $a = 1$.

Getransformeerd probleem:

$$p\, y = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\begin{array}{llll} y = 0 & \text{voor} & x = 0 \\ y = \frac{1}{p} & \text{"} & x = 1 \end{array}$$

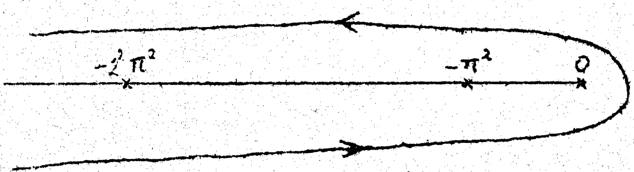
Oplossing

$$y(p) = \frac{1}{p} \; \frac{e^{x\sqrt{p}} - e^{-x\sqrt{p}}}{e^{\sqrt{p}} - e^{-\sqrt{p}}}$$

Teruggetransformeerd

$$Y = \frac{1}{2\pi i} \int_L y(p)\, .\, {}^{pt}\, dt$$

De integratieweg is een lijn L evenwijdig aan de imaginaire as, maar kan verlegd worden naar de negatieve reele as:



p-vlak

De functie $y(p)$ is meromorf en heeft polen bij $p = 0$ en $-k^2\pi^2$. De integraal is een som van residuen van de polen:

$$Y(t) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\,\pi} \sin k\pi x \,.\, e^{-k^2\pi^2 t}$$

Om tot de oorspronkelijke eenheden terug te keren moet men x vervangen door $\frac{x}{l}$ en t door a t.

Wil men een andere randfunctie:

$$Y = F(t) \text{ voor } x = 1$$

dan moet men de zojuist gevonden oplossing Y(t) met F(t) vouwen:

$$Y(t) \circ F(t) = \int_0^t Y(t-s)\, dF(s)$$

Voor andere randvoorwaarden, bijv. $\frac{\partial Y}{\partial x} = c\, Y$ voor x = 0 gaat men analoog te werk; in plaats van de sinus komt er dan een lineaire combinatie van cos en sin.

Voor een holle cylinder, die van binnen wordt verwarmd, gaat de berekening net eender, alleen komen er Besselse functies in plaats van cos en sin.

LAPLACETRANSFORMATIE.

Syllabus 5de voordracht 4 Dec. 1948.

Probleem: Warmtegeleiding in een holle cylinder

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial r} = \frac{\partial Y}{\partial t}$$

$$Y = 0 \text{ voor } t = 0$$
$$Y = 1 \text{ voor } r = r_o$$
$$Y = 0 \text{ voor } r = R.$$

Getransformeerd probleem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r} - p\,y = 0$$

$$y = \frac{1}{p} \text{ voor } r = r_o$$
$$y = 0 \text{ voor } r = R.$$

Oplossing met Besselse functies:

$$y = c_1 J_o(ir\sqrt{p}) + c_2 Y_o(ir\sqrt{p}).$$

Bepaal c_1 en c_2 uit de randvoorwaarden

$$y = \frac{1}{p}\,\frac{J_o(ir\sqrt{p})\,Y_o(iR\sqrt{p}) - Y_o(ir\sqrt{p})\,J_o(iR\sqrt{p})}{J_o(ir_o\sqrt{p})\,Y_o(iR\sqrt{p}) - Y_o(ir_o\sqrt{p})\,J_o(iR\sqrt{p})}.$$

Teruggetransformeerd als in vorige syllabus

$$Y = \frac{1}{2\pi i}\int_L y(p)\,e^{pt}\,dt$$

$$= \text{som van residuen van polen}$$

$$= \frac{\ln R - \ln r}{\ln R - \ln r_o} + \sum c_k\,e^{-p_k t}.$$

Probleem: Warmtegeleiding in een oneindig lange staaf:

$$(1) \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

$$Y = Y_o(x) \text{ voor } t = 0$$
$$Y \to 0 \text{ voor } x \to \infty \quad \text{of } x \to -\infty.$$

Getransformeerd probleem:

$$(2) \qquad p\,y - Y_o = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y \to 0 \text{ voor } x \to \infty \text{ of } x \to -\infty.$$

Stel bv. $Y_0 = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & \text{voor } -\delta < x < \delta \\ 0 & \text{voor alle andere } x \end{cases}$

Dan luidt de oplossing van (2)

$$y = \frac{1}{4\delta p}\left(e^{\delta\sqrt{p}} - e^{-\delta\sqrt{p}}\right) e^{x\sqrt{p}} \qquad (x < -\delta)$$

$$y = \frac{1}{2\delta p} - \frac{1}{4\delta p} e^{(x-\delta)\sqrt{p}} - \frac{1}{4\delta p} e^{-(x+\delta)\sqrt{p}} \quad (-\delta < x < \delta)$$

$$y = \frac{1}{4\delta p}\left(e^{\delta\sqrt{p}} - e^{-\delta\sqrt{p}}\right) e^{-x\sqrt{p}} \qquad (x > \delta)$$

Laat nu δ tot nul naderen, dan wordt Y_0 een deltafunctie, en we krijgen in de limiet

(3) $$y = \frac{1}{2\sqrt{p}} e^{-|x|\sqrt{p}}$$

Nu teruggetransformeerd volgens een tabel:

(4) $$Y = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Dit resultaat kan ook door complexe integratie uit de omkeerformule verkregen worden.

Voor willekeurige beginfunctie $Y_0(x)$ luidt de oplossing

(5) $$Y = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} Y_0(s)\, ds .$$

LAPLACETRANSFORMATIE.

Syllabus laatste voordracht 11 Dec. 1948.

Warmtegeleiding in half-oneindige staaf.

(1) $$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial Y}{\partial t} \qquad (x > 0\ ).$$

Eerste probleem:

$Y = 0$ voor $t = 0$

$Y = 1$ voor $x = 0$

$Y \to 0$ voor $x \to \infty$.

Getransformeerd probleem:

(2) $$\frac{d^2 y}{d x^2} = p\, y$$

$y = \frac{1}{p}$ voor $x = 0$

$y \to 0$ voor $x \to \infty$.

Oplossing:

$$y = \frac{1}{p}\, e^{-x\sqrt{p}}$$

$$Y = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{4t}}\, d\,u = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) .$$

"Errorfunction":

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2}\, dv .$$

Tweede probleem:

$Y = 0$ voor $t = 0$

$Y = F(t)$ voor $x = 0$.

Oplossing door vouwen:

$$Y = \int_0^t F(t-s)\; d\left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{s}}\right)$$

$$= \int_0^t F(t-s)\, \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\, s^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{4s}}\; d\,s .$$

Derde probleem:

$Y = 0$ voor $t = 0$

$\frac{\partial Y}{\partial x} = -G(t)$ voor $x = 0$.

Getransformeerd:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p\, y$$

$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,g(p)$ voor $x = 0$.

Oplossing voor $G(t)$ = deltafunctie, $g(p) = 1$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{p}}\ e^{-x\sqrt{p}}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\ e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Voor willekeurige $G(t)$ wordt de oplossing door vouwen gevonden:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{\pi s}}\ e^{-\frac{x^2}{4s}}\ G(s)\ ds$$

Vierde probleem: $Y = Y_o(x)$ voor $t = 0$
$Y = 0$ voor $x = 0$

Getransformeerd:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\ y - Y_o$$

$y = 0$ voor $x = 0$.

Oplossing voor Y_o = deltafunctie $\delta(x-u)$:

$$y = a(e^{x\sqrt{p}} - e^{-x\sqrt{p}}) \qquad (x < u)$$

$$y = b\ e^{-x\sqrt{p}} \qquad (x > u)$$

waarin a en b zo bepaald worden, dat y continu is voor $x = u$ en dat y' een sprong -1 vertoont. Resultaat:

$$y = \frac{1}{2\sqrt{p}}(e^{-|x-u|\sqrt{p}} - e^{-|x+u|\sqrt{p}})$$

$$Y = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+u)^2}{4t}})$$

Wordt het linkereinde van de staaf geisoleerd ($\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ voor $x = 0$), dan luidt de oplossing net zo met + in plaats van −.

Tabel van Laplacegetransformeerden.

$$f(p) = \int_0^{\infty} F(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad F(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p)\, e^{pt}\, dp$$

$f(p)$	$F(t)$
p^{-1}	1
$(p-a)^{-1}$	e^{at}
$(p-a)^{-n}$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{at}$
$p^{-\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$p^{-\frac{3}{2}}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
$p^{-\nu}$	$\dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$
$\ln \dfrac{p-a}{p-b}$	$\dfrac{1}{t}\,(e^{bt} - e^{at})$
$(p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$	$J_0\,(at)$
$(p^2 + 2\,ap + b)^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-at}\, J_0(\,t\sqrt{b - a^2})$
$(p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\,(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^{\nu}$	$a^{\nu}\, J_{\nu}\,(at)$
$p^{-1}\, e^{-ap}$	$\begin{cases} 0 \text{ voor } t < a \\ 1 \text{ voor } t > a \end{cases}$
$p^{-(\nu+1)}\, e^{-\frac{a}{p}}$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{\nu/2} J_{\nu}\,(2\sqrt{at})$
$e^{-a\sqrt{p}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi}}\, t^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$p^{-\frac{1}{2}}\, e^{-a\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}$
$p^{-1}\, e^{-a\sqrt{p}}$	$1 - \operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4t}}\, du$
$p^{-\frac{3}{2}}\, e^{-a\sqrt{p}}$	$\dfrac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}} - a\left(1 - \operatorname{erf}\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
$\dfrac{1}{p}\, \dfrac{e^{x\sqrt{p}} - e^{-x\sqrt{p}}}{e^{\sqrt{p}} - e^{-\sqrt{p}}}$	$x + 2 \displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^k\, \dfrac{\sin k\pi x}{k\pi}\, e^{-k^2\pi^2}$