stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZW 005 MAART

ALBERT VERBEEK KROONENBERG
EEN OPMERKING OVER DOORSNEDEN

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

INHOUD

§0. Overzicht, definities en notatie

Notatie.

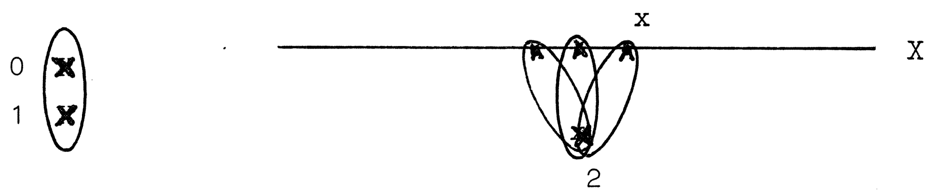
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}^*, \ldots$	zijn families verzamelingen
$A, B, Z, A', \ldots$	zijn verzamelingen
$\lvert A\rvert, \lvert\mathfrak{A}\rvert, \ldots$	is het kardinaalgetal van A, resp. $\mathfrak{A}$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$	zijn willekeurige kardinaalgetallen = initiaal ordinaalgetallen
α^+	is het kleinste kardinaalgetal dat groter is dan α
$\zeta, \eta, \vartheta, \ldots$	zijn ordinaalgetallen ($\zeta = \{ \eta \mid \eta < \zeta \}$, etc.)
$\mathrm{cf}\alpha$	$= \min \{ \beta \mid \exists f: \beta \to \alpha \ \forall \zeta \in \alpha \ \exists \eta \in \beta \ f(\eta) > \zeta \}$
$\sqrt[\beta]{\alpha}$	$= \min \{ \gamma \mid \gamma^\beta \geq \alpha \}$

$\mathfrak{B}$ heet <u>quasidisjunct</u> als $\exists Z \ \forall B, B' \in \mathfrak{B} \ B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = Z$

$\mathfrak{B}$ heet een <u>triviale quasidisjuncte</u> familie als $\lvert\mathfrak{B}\rvert \leq 2$

Laat nu $\mathfrak{A}$ een "grote" familie "kleine" verzamelingen zijn, ($\lvert\mathfrak{A}\rvert = \alpha$ en $\forall A \in \mathfrak{A} \ \lvert A\rvert < \beta$ en $2^\beta < \alpha$), dan hoeft $\mathfrak{A}$ nog niet noodzakelijk grote disjuncte deelfamilies te bevatten, zelfs niet als $\cap \mathfrak{A} = \emptyset$.

Voorbeeld: Zij X een willekeurige (grote) verzameling en
$\mathfrak{A}=\{\{0,1\}\}\cup\{\{2,x\}\mid x\in X\setminus\{0,1,2\}\}$



Wel bevat $\mathfrak{A}$ altijd grote quasidisjuncte deelfamilies:

Stelling 1. ŠANIN [4]
Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ regulier en overaftelbaar is, en $\mathfrak{A}$ bestaat uit eindige verzamelingen, dan is er een quasidisjuncte deelfamilie $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ met $|\mathfrak{B}|=|\mathfrak{A}|=\alpha$.

Stelling 2. ERDÖS, RADO [1], MICHAEL [3]
Als $|\mathfrak{A}|>\gamma^{\beta}$ oneindig is en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|\leq\beta$, dan is er een quasidisjuncte deelfamilie $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ zó dat $|\mathfrak{B}|=\gamma$.

Het is eenvoudig in te zien dat stelling 1 niet uit stelling 2 volgt, zelfs niet in het geval $\mathfrak{A}$ een collectie n-element verzamelingen is met vaste, eindige n. Om beter te zien waar de moeilijkheid ligt schrijven we stelling 2 in de volgende equivalente vorm:

Stelling 2'
Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$, α oneindig, en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|\leq\beta$, dan is
$\sup\{\ |\mathfrak{B}|\ \mid \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct $\}\geq\ {}^{\beta}\!\sqrt{\alpha}\,' =_{def}\min\{\gamma\mid\gamma^{\beta}\geq\alpha\}$.

Als nu α regulier is, en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|<\aleph_0$, dan is er een $n\in\aleph_0$ zó dat $\mathfrak{A}_n =_{def} \{\ A\in\mathfrak{A}\ \mid\ |A|=n\ \}$ gelijkmachtig is met $\mathfrak{A}$. Als we stelling 2' op deze $\mathfrak{A}_n$ en $\beta=n$ toepassen krijgen we:

$$\sup\{\ |\mathfrak{B}|\ \mid \mathfrak{B}\in\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A} \text{ en } \mathfrak{B} \text{ is quasidisjunct }\} = \alpha$$

Als we echter stelling 1 op $\mathfrak{A}_n$ (of $\mathfrak{A}$) toepassen krijgen we:

$$\max\{\ |\mathfrak{B}|\ \mid\ \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A} \text{ en } \mathfrak{B} \text{ is quasidisjunct}\ \} = \alpha$$

In dit rapport zal nu bewezen worden:

Stelling 3

Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ oneindig is en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|\leq\beta$, dan is
$\sup\{\ |\mathfrak{B}|\ \mid\ \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct $\} \geq \sqrt[\beta]{\alpha}$
Bovendien wordt dit supremum altijd aangenomen (d.w.z. "sup=max")
als $\sqrt[\beta]{\alpha}$ regulier is.
Voor elke α en β waarvoor $\sqrt[\beta]{\alpha}$ singulier is, is er een familie $\mathfrak{A}$ met
$|\mathfrak{A}|=\alpha$ en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|=\beta$, terwijl

$$\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A} \text{ en } \mathfrak{B} \text{ is quasidisjunct} \Rightarrow |\mathfrak{B}|<\sqrt[\beta]{\alpha}$$

Het is eenvoudig in te zien dat uit stelling (3) zowel stelling 1 als 2 volgt. Bovendien zullen we aantonen dat voor elke α en β (α oneindig) er een familie $\mathfrak{A}$ bestaat met $|\mathfrak{A}|=\alpha$, $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|=\beta$ en $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct $\Rightarrow \mathfrak{B}\leq\sqrt[\beta]{\alpha}$. (voorbeeld 3, pag. 12, overgenomen uit [1]).
Tenslotte zal aangetoond worden dat ook in het geval van een familie $\mathfrak{A}$ met $|\mathfrak{A}|=\alpha$, $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|<\beta$ (vergelijk stelling 1, $\beta=\aleph_0$) toepassing van stelling 3 de scherpst mogelijk resultaten levert. (vb. 6, pag. 15-18)

In §1 geven we enkele eenvoudige lemma's over quasidisjuncte families en over eigenschappen van $\sqrt[\beta]{\alpha}$, en de beloofde voorbeelden.
In §2 wordt stelling 1 bewezen. Daar stelling 1 uit stelling 3 volgt en stelling 3 onafhankelijk van stelling 1 bewezen wordt, is dit bewijs strict gezien overbodig. Omdat dit bewijs zoveel eenvoudiger is, en stelling 1 toepassingen heeft, bijvoorbeeld in de theorie van topologische producten, is het toch opgenomen.
In §3 wordt stelling 3 bewezen. Het bewijs bestaat uit een eenvoudige generalisatie van het door E. Michael in [3] gegeven bewijs van stelling 2.

Toepassingen

We vermelden enige toepassingen.
Een topologische ruimte heeft de Suslin-eigenschap, S, als elke familie disjuncte open verzamelingen aftelbaar is.

Een topologische ruimte heeft de Šanin-eigenschap, Š, als elke overaftelbare familie open verzamelingen een overaftelbare deelfamilie heeft met een niet lege doorsnede.
Ga na dat: separabel $\Rightarrow$ Š $\Rightarrow$ S.
Nu volgt uit stelling 1 op eenvoudige wijze:

4. Een topologisch product van ruimten met de Šanin-eigenschap heeft de Šanineigenschap.

5. Een topologisch product van ruimten heeft de Suslin-eigenschap mits alle eindige deelproducten de Suslin-eigenschap hebben.

6. Een topologisch product van separabele ruimten heeft de Šanin-eigenschap en dus ook de Suslin-eigenschap.

In [1] bereiken Erdös en Rado ook resultaten voor eindige α en β, en vermelden dat hun onderzoekingen in feite voortkomen uit problemen in de getaltheorie.
Voor de bewijzen van 4, 5 en 6 en nog enkele toepassingen zie [2] en ook [3] en [4].

§1. Quasidisjuncte families. Voorbeelden. Rekenen met $\sqrt[\beta]{\alpha}$

We geven een aantal eenvoudige lemma's, ten dele zonder bewijs.

Lemma 1

Voor een familie verzamelingen $\mathfrak{B}$ is equivalent:

(a) $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct

(b) $\forall B,B' \in \mathfrak{B}\ \ B \neq B' \Rightarrow B \cap B' = \cap\mathfrak{B}$

(c) $\{ B \setminus \cap\mathfrak{B} \mid B \in \mathfrak{B} \}$ is een disjuncte familie

(d) $\forall A,B,C \in \mathfrak{B}\ \{A,B,C\}$ is quasidisjunct

Lemma 2

Elke familie verzamelingen bevat maximale disjuncte deelfamilies en maximale quasidisjuncte deelfamilies.

Bewijs. Pas 1(d) en het Teichmüller-Tuckey lemma (of bijvoorbeeld het Zorn-lemma) toe.

Lemma 3

Als $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct, dan is:

$$|\mathfrak{B}| \leq |\cup\mathfrak{A}|$$

Bewijs. Als $\mathcal{C}$ een partitie van een verzameling C is, dan is $|\mathcal{C}| \leq |C|$. Nu is $\{\{\cap\mathfrak{B}\}, B\setminus\cap\mathfrak{B} \mid B \in \mathfrak{B}\}$ een partitie van een deelverzameling, nl. $\cup\mathfrak{B}$, van $\cup\mathfrak{A}$.

Lemma 4 (zie figuur 1)

Voor alle α, β, γ (α oneindig) geldt:

(a) Als $\gamma < \sqrt[\beta]{\alpha}$ dan is $\gamma^\beta < \sqrt[\beta]{\alpha}$

(b) $\beta < \sqrt[\beta]{\alpha} \Leftrightarrow 2^\beta < \sqrt[\beta]{\alpha} \Leftrightarrow 2^\beta < \alpha$

(c) $2^\beta \geq \alpha \Leftrightarrow \sqrt[\beta]{\alpha} = 2$

(d) Als $\gamma \leq \alpha^\beta$ dan is $\sqrt[\beta]{\gamma} \leq \sqrt[\beta]{\alpha}$

Bewijs. Voor eindige β is $\sqrt[\beta]{\alpha} = \alpha$, en zijn alle uitspraken triviaal. Veronderstel nu β oneindig.

(a) Als $\gamma^\beta \geq \sqrt[\beta]{\alpha}$, dan is per definitie van $\sqrt[\beta]{\alpha}$: $\gamma^\beta = (\gamma^\beta)^\beta \geq (\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta \geq \alpha$. Dus $\gamma \geq \sqrt[\beta]{\alpha}$.

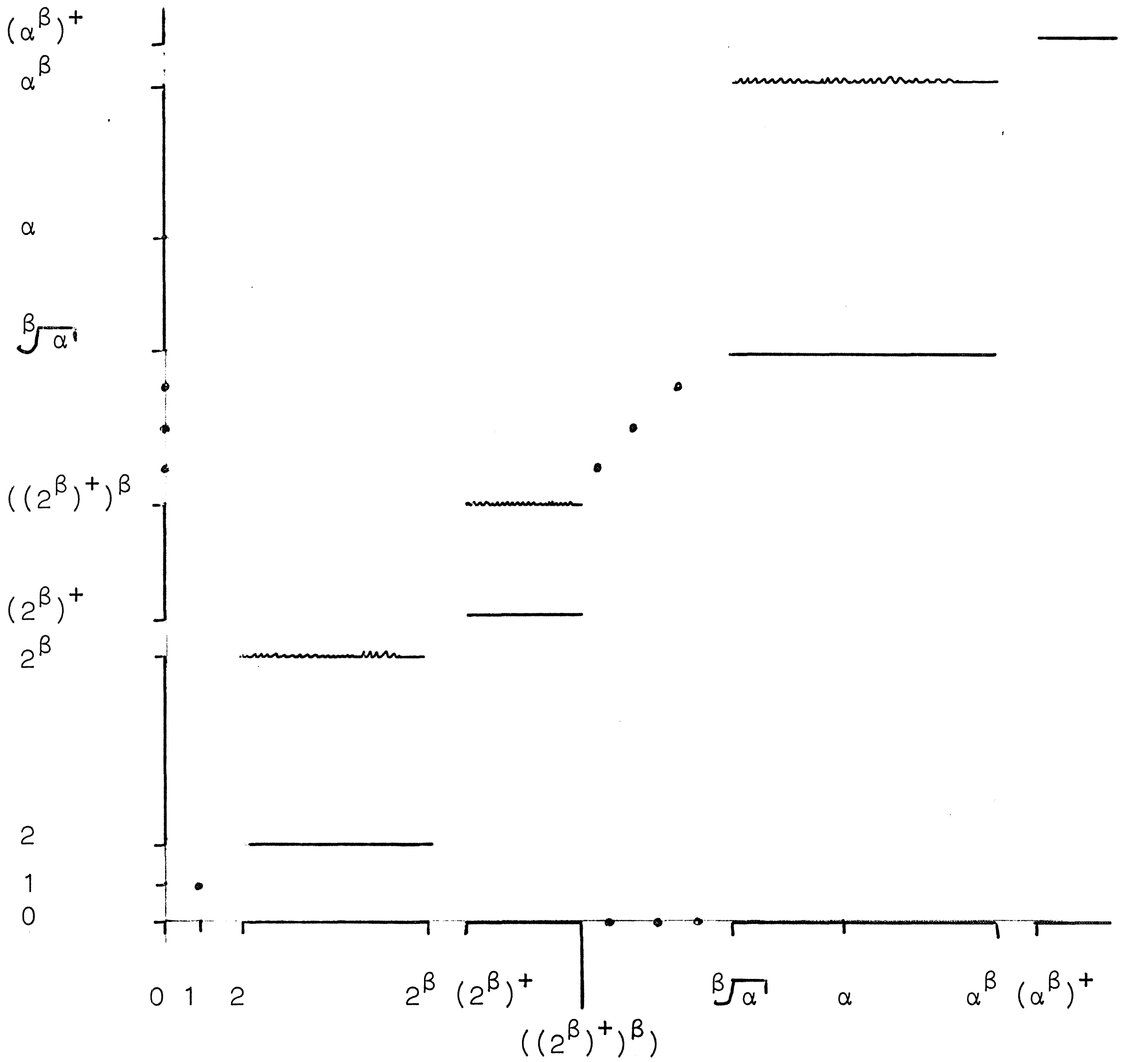
(b) $\beta < \sqrt[\beta]{\alpha} \Rightarrow 2^\beta \leq \beta^\beta < \sqrt[\beta]{\alpha} \leq \alpha$ volgens (a). (Natuurlijk is $\beta^\beta \leq (2^\beta)^\beta = 2^\beta$ dus $2^\beta = \beta^\beta$, voor oneindige β).

(c) Dit is een herformulering van (b).

(d) $(\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta = (\sqrt[\beta]{\alpha})^{\beta\cdot\beta} = (\sqrt[\beta]{\alpha^\beta})^\beta \geq \alpha^\beta \geq \gamma$, dus $\sqrt[\beta]{\alpha} \geq \sqrt[\beta]{\gamma}$.

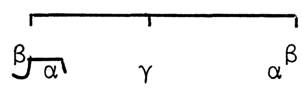
Figuur 1 (pag. 7) en figuur 2 (pag. 9) tonen "de grafieken" van de functies $\alpha \mapsto \sqrt[\beta]{\alpha}$ en, ter vergelijking, $\alpha \mapsto \alpha^\beta$. In figuur 2 is de algemene continuumhypothese ($\forall\alpha\ \alpha^+ = 2^\alpha$) aangenomen. Deze grafieken worden beshcreven in de lemma's 4, 5 en 6.

<u>figuur 1</u>



= de grafiek van $(.)^\beta$

= de grafiek van $\sqrt[\beta]{.}$



Als $\sqrt[\beta]{\alpha} \leq \gamma \leq \alpha^\beta$ dan is $\sqrt[\beta]{\gamma} = \sqrt[\beta]{\alpha}$ en $\gamma^\beta = \alpha^\beta$.

Lemma 5

Voor elke β is $\sqrt[\beta]{\ \ }$ een continue functie. D.w.z. als $(\alpha_\zeta)_{\zeta<\gamma}$ een strict monotoon stijgende "rij" is, met limiet (= sup) α, dan geldt

$$\lim_{\zeta<\gamma} \sqrt[\beta]{\alpha_\zeta} = \sqrt[\beta]{\alpha}$$

Bewijs. Het is duidelijk dat $\sqrt[\beta]{\ \ }$ een zwak monotone functie is, dus $\forall_{\zeta<\gamma} \ \sqrt[\beta]{\alpha_\zeta} \leq \sqrt[\beta]{\alpha}$. Laat nu:

$$\alpha' =_{def} \lim_{\zeta<\gamma} \sqrt[\beta]{\alpha_\zeta} .$$

Dan geldt:

$$(\alpha')^\beta \geq \alpha_\zeta \qquad \text{voor elke } \zeta<\gamma\text{, dus}$$

$$(\alpha')^\beta \geq \alpha = \sup\{\alpha_\zeta \mid \zeta<\gamma\}$$

Hieruit volgt:

$$\alpha' \geq \sqrt[\beta]{\alpha}$$

Het volgende lemma diene alleen ter illustratie. Het bewijs is in elk leerboek over kardinaalgetallen te vinden. (Bijv. Klaua - Algemeine Mengenlehre II §45 p. 329-330).

Lemma 6 (zie figuur 2)

(a) Voor alle oneindige α $\qquad \alpha^{cf\alpha} > \alpha$

(b) Onder aanname van de algemene continuum hypothese geldt

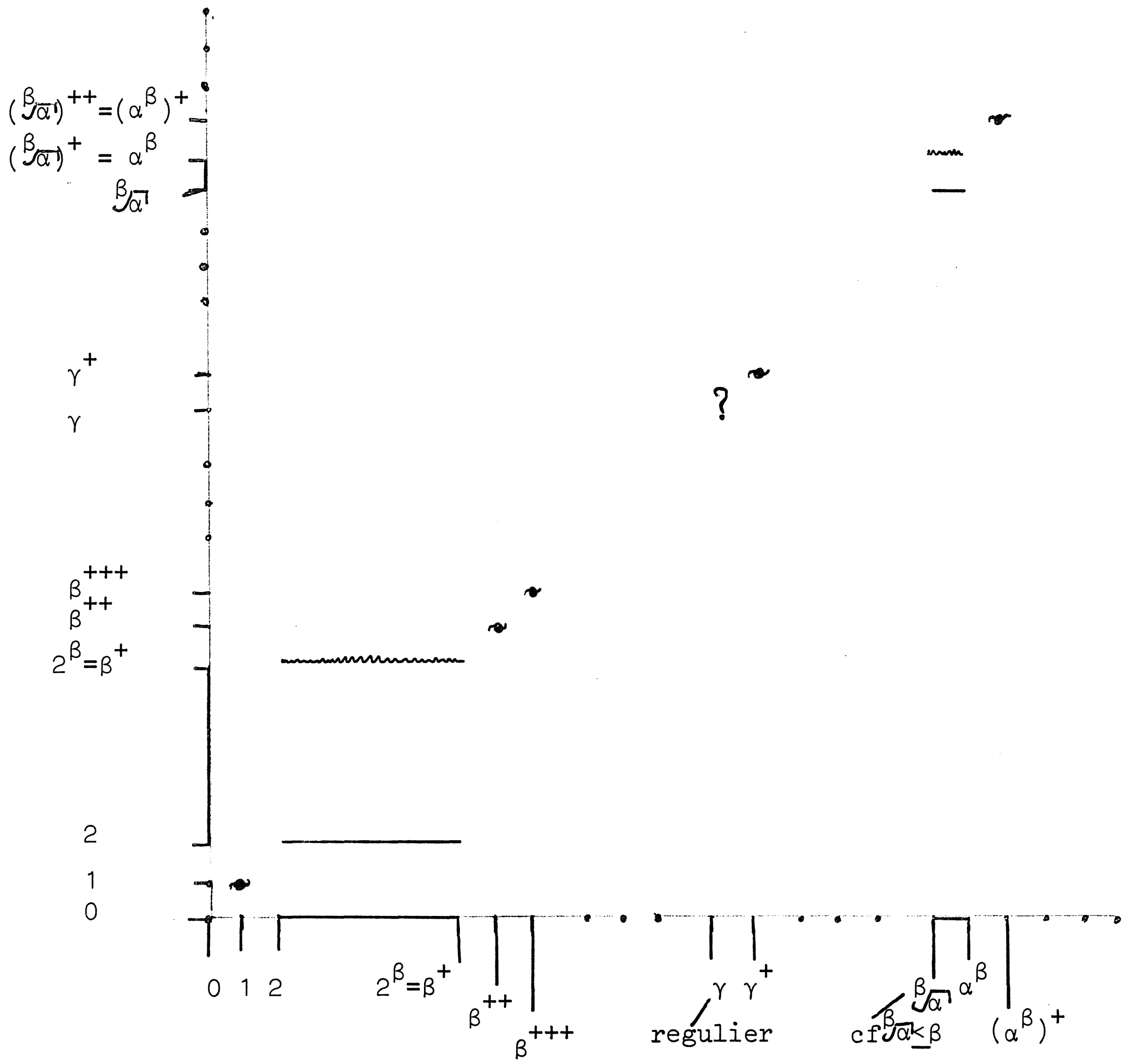
$$\alpha^{cf\alpha} = \alpha^+ = 2^\alpha ,$$

dus

$$\alpha^\beta = \begin{cases} \alpha & \text{als } \beta < cf\alpha \\ 2^\alpha & \text{als } cf\alpha \leq \beta \leq \alpha \\ 2^\beta & \text{als } 2 \leq \alpha < \beta \end{cases}$$

$$\sqrt[\beta]{\alpha} = \begin{cases} 2 & \text{als } \beta^+ \geq \alpha \\ \gamma & \text{als } \gamma^+ = \alpha \text{ en } cf\gamma \leq \beta < \gamma \\ \alpha & \text{in de overige gevallen.} \end{cases}$$

<u>figuur 2</u>



= de grafiek van $(.)^{\beta}$

= de grafiek van ${}^{\beta}\sqrt{\ }$

We nemen aan dat de <u>algemene continuum hypothese</u> geldt.

$\alpha^{\beta} = {}^{\beta}\sqrt{\alpha}$ of $\alpha^{\beta} = ({}^{\beta}\sqrt{\alpha})^{+}$.

Voor één voorbeeld,(4), hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma 7

Als $\sqrt[\beta]{\alpha}$ een limietkardinaalgetal is, $\gamma=\mathrm{cf}\sqrt[\beta]{\alpha}$, en $(\alpha_\zeta)_{\zeta<\gamma}$ is een strict stijgende rij die naar $\sqrt[\beta]{\alpha}$ convergeert, dan is

$$\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_\zeta=(\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta=\alpha^\beta=\alpha^\gamma$$

Als $\beta<\mathrm{cf}\sqrt[\beta]{\alpha}$, dan geldt bovendien

$$(\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta=\sqrt[\beta]{\alpha}=\alpha$$

Bewijs. Merk op dat ($\sqrt[\beta]{\alpha}$ is een limiet) $\Rightarrow \sqrt[\beta]{\alpha}>2 \Rightarrow 2^\beta<\alpha \Rightarrow 2^\beta<\sqrt[\beta]{\alpha}$ (lemma 4).

Laat $\{A_\zeta|\zeta<\gamma\}$ een collectie disjuncte verzamelingen zijn met $|A_\zeta|=\alpha_\zeta$, $\zeta<\gamma$. De $\le\beta$-element deelverzamelingen van $A:=\cup\{A_\zeta|\zeta<\gamma\}$ vormen een familie $\mathfrak{A}$ met machtigheid $|A|^\beta=(\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta=\alpha^\beta$ (vergelijk lemma 4).

Het geval $\beta<\mathrm{cf}\sqrt[\beta]{\alpha}$.

In dit geval is er voor elke β-element deelverzameling B van A een $\zeta<\gamma$ zó dat $B\subset\cup\{A_\eta|\eta<\zeta\}$. Dus geldt:

$$\alpha^\beta=|\mathfrak{A}|\le\sum_{\zeta<\gamma}|\cup\{A_\eta|\eta<\zeta\}|^\beta$$

$$\le\sum_{\zeta<\gamma}(|\zeta|.|A_\zeta|)^\beta\le\gamma.\sqrt[\beta]{\alpha}=\sqrt[\beta]{\alpha}$$

omdat $|\zeta|.|A_\zeta|<\sqrt[\beta]{\alpha}$ en dus $(|\zeta|.|A_\zeta|)^\beta<\sqrt[\beta]{\alpha}$ (lemma 4a).

Het is duidelijk dat ook voor alle $\eta<\gamma$

$$\alpha_\eta\le\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_\zeta$$

en dus

$$\sqrt[\beta]{\alpha}\le\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_\zeta.$$

In dit geval is dus $\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_\zeta=\sqrt[\beta]{\alpha}=\alpha=\alpha^\beta$.

Het geval $\gamma=\mathrm{cf}\sqrt[\beta]{\alpha}\le\beta$.

Elke $\le\beta$-element deelverzameling B van A heeft een canonieke partitie $(B\cap A_\zeta)_{\zeta<\gamma}$ in $\le\beta$-element deelverzamelingen van A_ζ. Daar $\gamma\le\beta$, correspondeert ook elke rij $(B_\zeta)_{\zeta<\gamma}$ met $|B_\zeta|\le\beta$ en $B_\zeta\subset A_\zeta$, $\zeta\in\gamma$, met een $\le\beta$-

element deelverzameling, nl. $\cup\{B_\zeta | \zeta<\gamma\}$ van A.
Dus

$$|\mathfrak{A}| = \prod_{\zeta<\gamma} \alpha_\zeta^\beta.$$

Nu definiëren we $f:\gamma\to\gamma$ met transfinite inductie als volgt:
als voor $\zeta<\gamma$ en alle $\eta<\zeta$ $f(\eta)$ gedefinieerd is, laat dan

$$f(\zeta)=\min\{\zeta' | \forall\eta<\zeta \ \zeta'>f(\eta) \text{ en } \alpha_{\zeta'}>(\alpha_\zeta)^\beta\}$$

Dit kan daar $\alpha_\zeta<{}^\beta\!\sqrt{\alpha} \Rightarrow (\alpha_\zeta)^\beta<{}^\beta\!\sqrt{\alpha}$ (lemma 4a). Nu is f 1-1.
Derhalve is

$$({}^\beta\!\sqrt{\alpha})^\beta=|\mathfrak{A}|=\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_\zeta^\beta\leq\prod_{\zeta<\gamma}\alpha_{f(\zeta)}\leq\prod_{\eta<\gamma}\alpha_\eta\leq\prod_{\eta<\gamma}\alpha_\eta^\beta.$$

Voorbeeld 1

We geven eerst een triviaal voorbeeld van een familie $\mathfrak{A}$ van "grote" verzamelingen ($\exists A\in\mathfrak{A}\ 2^{|A|}\geq|\mathfrak{A}|$) zonder (niet triviale) quasidisjuncte deelfamilies

Zij α willekeurig. Laat

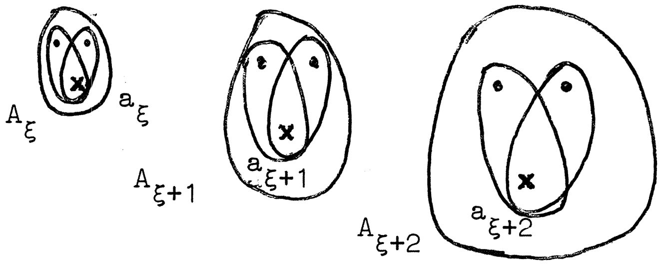
$$\mathfrak{A}=\alpha=\{\{\eta|\eta<\zeta\}|\zeta<\alpha\}.$$

Zoals elke door inclusie lineair geordende familie bezit $\mathfrak{A}$ slechts triviale quasidisjuncte deelfamilies.
$|\mathfrak{A}|=\alpha$
$\forall A\in\mathfrak{A}\quad |A|<\alpha$.
Merk op dat ${}^\alpha\!\sqrt{\alpha}=2$. (vergelijk stelling 3)

Voorbeeld 2 (Illustratie van stelling 1, $|\mathfrak{A}|=\alpha$ singulier)

In dit voorbeeld is $\mathfrak{A}$ een familie 2-elements verzamelingen zó dat $|\mathfrak{A}|=\alpha$ is singulier
en $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct $\Rightarrow|\mathfrak{B}|<\alpha$.

In overeenstemming met stelling 3 is wel $\sup\{|\mathfrak{B}|\,|\ldots\}=\alpha$.
Laat $\{A_\xi\ |\xi<\mathrm{cf}\alpha\}$ een familie disjuncte verzamelingen zijn met $|A_\xi|=\alpha_\xi<\alpha$ en $\sum\alpha_\xi=\alpha$. Kies uit elke A_ξ een vast punt a_ξ, $\xi<\mathrm{cf}\alpha$.



Laat
$\mathfrak{A}_\xi=\{\{a_\xi,x\}\mid x\in A_\xi\setminus\{a_\xi\}\}$
en
$\mathfrak{A}=\cup\{\mathfrak{A}_\xi\mid \xi<\mathrm{cf}\,\alpha\}$

Het is eenvoudig in te zien dat de $\mathfrak{A}_\xi$ de maximale quasidisjuncte-maar-niet-disjuncte deelfamilies van $\mathfrak{A}$ zijn. Deze hebben machtigheid $|\mathfrak{A}_\xi|=|A_\xi|=\alpha_\xi<\alpha$. Als $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ een disjuncte familie is, dan is $|\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_\xi|\leq 1$ voor elke $\xi<\mathrm{cf}\,\alpha$ dus $|\mathfrak{B}|\leq\mathrm{cf}\,\alpha$.

Voorbeeld 3 ERDÖS-RADO [1]
We laten zien dat stelling (2) een zo scherp mogelijke schatting geeft voor $\sup\{|\mathfrak{B}|\ \ |\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct$\}$.
Hier is:

$$|\mathfrak{A}|=\alpha$$
$$\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|=\beta$$
$$\max\{|\mathfrak{B}|\ \ |\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}\text{ en }\mathfrak{B}\text{ quasidisjunct}\}=\sqrt[\beta]{\alpha}$$

Hieruit blijkt ook dat het geval $2^\beta\geq\alpha$ niet interessant is. Dan is immers $\sqrt[\beta]{\alpha}=2$, en bevat $\mathfrak{A}$ geen niet-triviale quasidisjuncte deelverzamelingen. Zie ook voorbeeld 5.
Laat $\mathfrak{F}$ een deelfamilie van de familie van alle afbeeldingen $\beta\to\sqrt[\beta]{\alpha}$ zijn, zó dat

(i) $|\mathfrak{F}|=\alpha$
(ii) $\mathfrak{F}$ bevat alle constante afbeeldingen.

Definieer voor elke $f:\beta\to\sqrt[\beta]{\alpha}$

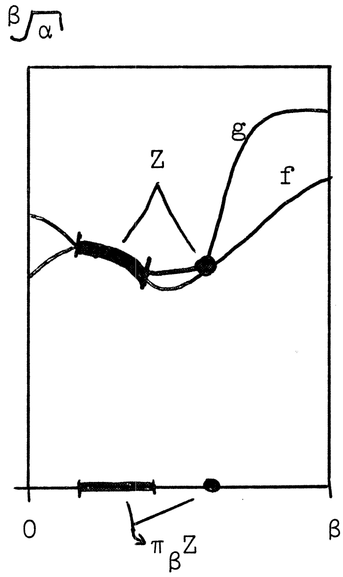
$$A_f=\{(\eta,f(\eta))\mid\eta\in\beta\}$$

en

$$\mathfrak{A}=\{A_f\mid f\in\mathfrak{F}\}.$$

(In de verzamelingsleer wordt vaak een functie zo gedefinieerd dat $f=A_f$.) Laat nu $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ een quasidisjuncte familie zijn, en $Z=\cap\mathfrak{B}$.
Definieer

$$\pi_\beta Z=\{\zeta\in\beta\,|\,\exists\eta\in\sqrt[\beta]{\alpha}\ (\zeta,\eta)\in Z\}.$$



Kennelijk is $\forall f,g\in\mathfrak{B}\ \forall\zeta\in\pi_\beta Z$

$$(\zeta,f\zeta)=(\zeta,g\zeta)\in\cap\mathfrak{B},$$

dus $f\restriction(\pi_\beta Z)=g\restriction(\pi_\beta Z)$.
Als $\pi_\beta Z=\beta$, dan is dus $|\mathfrak{B}|=1$. Als $\exists\eta\in\beta\setminus\pi_\beta Z$, dan is $\forall f,g\in\mathfrak{B}$

$$f(\eta)\neq g(\eta),$$

daar anders $(\eta,f(\eta))\in A_f\cap A_g$ maar $\notin\cap\mathfrak{B}$.
Hieruit volgt dat $|\mathfrak{B}|\leq|\{f(\eta)\,|\,f\in\mathfrak{B}\}|\leq\sqrt[\beta]{\alpha}!$

<u>Voorbeeld 4</u>
<u>In stelling 3 kan de voorwaarde in '($\sqrt[\beta]{\alpha}$ is regulier) $\Rightarrow$ "sup=max"' niet verzwakt worden.</u>
<u>Zij $\sqrt[\beta]{\alpha}$ singulier. We geven een voorbeeld van een familie $\mathfrak{A}$ zó dat</u>

$$|\mathfrak{A}|=\alpha$$
$$\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|=\beta$$
$$\forall\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\text{ is quasidisjunct}\Rightarrow|\mathfrak{B}|<\sqrt[\beta]{\alpha}!$$

Merk op dat $\sqrt[\beta]{\alpha}$ is singulier $\Rightarrow\sqrt[\beta]{\alpha}>2\Rightarrow\beta<2^\beta<\alpha$, en α is oneindig.
Laat

$$\gamma=\mathrm{cf}\sqrt[\beta]{\alpha}$$

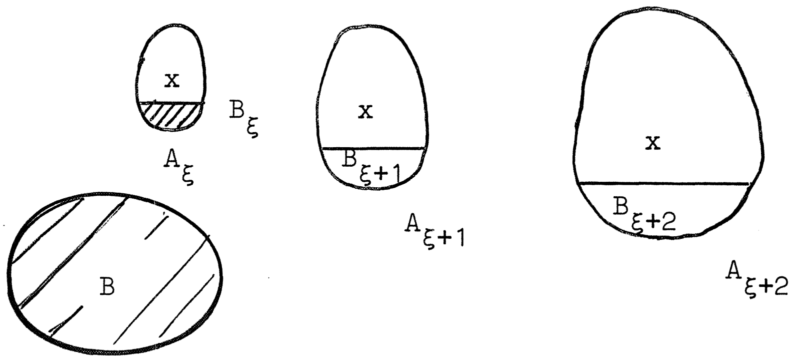
en laat $\{A_\xi\,|\,\xi<\gamma\}$ een rij disjuncte verzamelingen zijn, met strict stijgende machtigheid, $>\beta$, terwijl

$$A=\cup\{A_\xi\,|\,\xi<\gamma\}$$

machtigheid $\sqrt[\beta]{\alpha}$ heeft. Zij B met $|B|=\beta$ disjunct van alle A_ξ.
We onderscheiden nu twee gevallen

(a) $\beta<\gamma$.
Nu is volgens lemma 7 $\sqrt[\beta]{\alpha}=\alpha$. Kies voor elke $\xi<\gamma$ een $B_\xi<A_\xi$ met $|B_\xi|=\beta$.
Laat

$$\mathfrak{A}_\xi = \{ B_\xi \cup \{x\} \mid x \in A_\xi \setminus B_\xi \}$$
$$\mathfrak{A} = \cup \{ \mathfrak{A}_\xi \mid \xi<\gamma \}$$



Precies als in voorbeeld 2 vormen de $\mathfrak{A}_\xi$ de maximale quasidisjuncte-maar-niet-disjuncte deelfamilies van $\mathfrak{A}$, terwijl als $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ disjunct is, terwijl als $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ disjunct is, weer $|\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_\xi|\leq 1$ voor $\xi<\mathrm{cf}\alpha$ dus $|\mathfrak{B}|\leq \mathrm{cf}\alpha<\alpha=\sqrt[\beta]{\alpha}$!

(b) $\gamma\leq\beta$.
Laat $\qquad \mathfrak{A}^* = \{ B\cup\{\alpha_\xi \mid \xi<\gamma\} \mid \forall\xi<\gamma \;\; \alpha_\xi \in A_\xi \}$,
d.w.z. de verzamelingen uit $\mathfrak{A}^*$ bestaan uit B en verder bevatten ze uit elke $A_\xi, \xi<\gamma$ precies één punt. Merk op dat

$$|\mathfrak{A}^*| = \prod_{\xi<\gamma} |A_\xi| = (\sqrt[\beta]{\alpha})^\beta \qquad \text{(lemma 7)}$$

en

$$\forall A \in \mathfrak{A}^* \; |A| = \beta+\gamma=\beta.$$

Kies nu een willekeurige familie $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}^*$ met $|\mathfrak{A}|=\alpha$. Zij $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}^*$ een quasi-disjuncte deelfamilie, en

$$Z=\cap\mathfrak{B}.$$

Als $Z\cap A_\xi \neq \emptyset$ voor alle $\xi<\gamma$, dan is $\mathfrak{B}=\{Z\}$.
Anders kiezen we ξ (eventueel minimaal) zó dat $Z\cap A_\xi=\emptyset$. Dan geldt $\forall B,B'\in\mathfrak{B}$

$$B\cap A_\xi \neq B'\cap A_\xi$$

en beide verzamelingen zijn singletons. Dus is

$$|\mathfrak{B}|\leq|A_\xi|<\sqrt[\beta]{\alpha}.$$

Voorbeeld 5 (J. v.d. Slot)
We geven nog een voorbeeld van een familie $\mathfrak{A}$ zo dat

$$\underline{\underline{\begin{array}{c}|\mathfrak{A}|=\alpha \\ \forall A\in\mathfrak{A}\,|A|\leq\beta \\ 2^\beta\geq\alpha \\ \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A} \text{ en } \mathfrak{B} \text{ is quasidisjunct } \Rightarrow |\mathfrak{B}|\leq 2.\end{array}}}$$

Laat $\{0,1\}$ de discrete topologische ruimte met 2 punten zijn, en $X=\{0,1\}^{2^\beta}$ het topologische product. De ruimte X heeft een dichte deelruimte D met β punten (zie evt. [2], of E.S. Pondiczery-Duke Math. Journ. 11(1944) 835-837). Als voor $\eta\in 2^\beta$ $\pi_\eta:X\to\{0,1\}$ de projectie op de η-de coördinaat aangeeft, dan is gemakkelijk na te gaan dat

$$\{\ \pi_\eta^{-1}\{0\}\cap D\ |\eta\in 2^\beta\}$$

een stelsel verzamelingen is, waarvan alle eindige doorsneden twee aan twee verschillend zijn. Derhalve bevat dit stelsel geen niet-triviale quasidisjuncte deelfamilies. Laat nu $A\subset 2^\beta$ en $|A|=\alpha$, en

$$\mathfrak{A} = \{\ \pi_\eta^{-1}\{0\}\cap D\ |\eta\in A\}.$$

Voorbeeld 6
Het geval $|\mathfrak{A}|=\alpha$ en $\forall A\in\mathfrak{A}\,|A|<\beta$ lijkt op het eerste gezicht mogelijk scherper behandeld te kunnen worden dan met behulp van (3). Het geval $\alpha\leq\beta$ is natuurlijk niet interessant (zie voorbeeld 1). Als $\beta<\alpha$ dan is het bovenstaande geval eenvoudig tot (3) te herleiden, zij het dat de formulering onoverzichtelijker wordt:

Stelling 4

Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|<\beta$ voor een vaste $\beta<\alpha$ dan is

(i) $\sup\{\ |\mathfrak{B}|\ |\ \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct $\}\geq$

$$\geq \sqrt[\beta]{\alpha}_w =_{def} \min\{\ \gamma\ |\sup\{\gamma^{\beta'}\,|\,\beta'<\beta\}\geq\alpha\}$$

(ii) Voor elke α en β bestaat een familie $\mathfrak{A}$ met $|\mathfrak{A}|=\alpha$, $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|<\beta$ en $\forall\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct $\Rightarrow |\mathfrak{B}|\leq\sqrt[\beta]{\alpha}_w$.

(iii) Als $\sqrt[\beta]{\alpha}_w$ regulier is, geldt "sup=max".

(iv) Voor elke α en β waarvoor $\sqrt[\beta]{\alpha}_w$ singulier is bestaat een familie $\mathfrak{A}$ met $|\mathfrak{A}|=\alpha$, $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|<\beta$ en $\forall\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct $\Rightarrow$ $|\mathfrak{B}|<\sqrt[\beta]{\alpha}_w$.

Opmerking 1

De voorwaarde $\beta<\alpha$ is nodig. Als $\beta\geq\alpha$ dan hoeft $\mathfrak{A}$ geen niet-triviale quasidisjuncte verzamelingen te bevatten (zie voorbeelden 1, 3 en 5), dus soms is $\sup\{|\mathfrak{B}|\ |\ldots\}=2$. Als $\beta=\alpha$ een sterk limietkardinaalgetal is, (d.w.z. $\gamma<\alpha\Rightarrow 2^{\gamma}<\alpha$) dan is echter $\alpha=\sqrt[\beta]{\alpha}_w$.

Opmerking 2

$\sup\{\gamma^{\beta'}\,|\,\beta'<\beta\}$ wordt wel "γ tot de zwakke macht (weak power) β" genoemd, notatie:

$$\gamma^{\underset{w}{\beta}} = \sup\{\gamma^{\beta'}\,|\,\beta'<\beta\}.$$

Het ligt dus voor de hand

$$\sqrt[\beta]{\alpha}_w = \min\{\ \gamma\ |\gamma^{\underset{w}{\beta}}\geq\alpha\}$$

de zwakke β-de machtswortel uit α te noemen. Allereerst een voorbeeld van zwakke wortels en machten, onder aanname van de algemene continuum-hypothese:

(v) $2^{\underset{w}{\aleph_\omega}}=2^{\aleph_0}+2^{\aleph_1}+\ldots=\aleph_1+\aleph_2+\ldots=\aleph_\omega$.

(vi) $\aleph_{\omega+1}\geq\aleph_\omega^{\underset{w}{\aleph_\omega}}\geq\aleph_\omega^{\aleph_0}=\aleph_{\omega+1}$.

(vii) $\sqrt[\aleph_\omega]{\aleph_{\omega+1}}_w=\aleph_\omega$.

(viii) $\mathrm{w}\!\sqrt[\aleph_\omega]{\aleph_\omega}=2$.

De volgende rekenregels zijn eenvoudig na te gaan

(ix) $\delta<\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha} \Rightarrow \delta^{\beta}\leq\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$

(Merk op dat in het rechterlid = kan gelden: $\alpha=\aleph_{\omega+1}, \beta=\aleph_\omega, \delta=2$)

(x) $\forall\beta'<\beta \;\; \delta<\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha} \Rightarrow \delta^{\beta'}<\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$.

(xi) $\sqrt[\beta]{\alpha} \leq \mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha} \leq \min\{\mathrm{w}\!\sqrt[\beta']{\alpha} \mid \beta'<\beta\}$.

(xii) $\beta<\mathrm{cf}\alpha \Rightarrow \mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}=\min\{\sqrt[\beta']{\alpha} \mid \beta'<\beta\}$.

<u>Bewijs van stelling 4</u> (m.b.v. stelling 3)

Voor elke $\beta'<\beta$ definiëren we

$$\mathfrak{A}(\beta') = \{ A\in\mathfrak{A} \mid |A|=\beta' \}.$$

Daar $\beta<\alpha$ geldt

$$\sup\{ |\mathfrak{A}(\beta')| \mid \beta'<\beta\} = \alpha.$$

We onderscheiden twee gevallen.

Ten eerste

(xiii) $\exists\beta'<\beta \;\; |\mathfrak{A}(\beta')|=\alpha$.

Dit is bijvoorbeeld steeds zo, als $\beta<\mathrm{cf}\alpha$, dus o.a. als $\mathfrak{A}$ een familie eindige verzamelingen is en $|\mathfrak{A}|$ is regulier en overaftelbaar (vgl. stelling 3 $\Rightarrow$ stelling 1).

Volgens stelling 3 geldt nu

$\sup\{ |\mathfrak{B}| \mid \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}(\beta')\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct$\} \geq \sqrt[\beta']{|\mathfrak{A}(\beta')|} = \sqrt[\beta']{\alpha} \geq \mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$.

Als nu $\sqrt[\beta']{\alpha}>\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$, dan is er dus een quasidisjuncte $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}(\beta')$ met $|\mathfrak{B}|=\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$. Uit stelling 3 volgt dat zo'n $\mathfrak{B}$ ook bestaat als $\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}=\sqrt[\beta']{\alpha}$ en $\mathrm{w}\!\sqrt[\beta]{\alpha}$ is regulier. Hiermee is in geval (xiii) stelling 4 (i) en (ii) bewezen.

Ten tweede

(xiv) $\forall\beta'<\beta \;\; |\mathfrak{A}(\beta')|<\alpha$.

Volgens stelling 3 is voor elke $\beta'<\beta$

$\sup\{\,|\mathfrak{B}|\mid \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}(\beta')$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct$\}\geq {}^{\beta'}\!\sqrt{|\mathfrak{A}(\beta')|}$

Stel dat voor zekere α^{*} en alle $\beta'<\beta$

(xv) $\quad {}^{\beta'}\!\sqrt{|\mathfrak{A}(\beta')|}\leq \alpha^{*} < {}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}$

dan is

$$|\mathfrak{A}(\beta')|\leq(\alpha^{*})^{\beta'}$$

dus

$$\alpha = |\mathfrak{A}| = \textstyle\sum\{\,|\mathfrak{A}(\beta')|\mid \beta'<\beta\} \leq \sum\{(\alpha^{*})^{\beta'}\mid\beta'<\beta\} = (\alpha^{*})^{\beta} < \alpha$$

wegens (xv).

Uit deze tegenspraak volgt dat (xv) niet waar is, waarmee stelling 4 (i) bewezen is.

Als ${}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}$ regulier is en groter dan 2, zullen we aantonen dat

(xvi) $\quad \beta<{}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}$.

Omdat

$$\sup\{\,{}^{\beta'}\!\sqrt{|\mathfrak{A}(\beta')|}\mid\beta'<\beta\}\geq{}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}$$

volgt uit (xvi) dat $\exists\beta^{*}<\beta$

$$ {}^{\beta^{*}}\!\sqrt{|\mathfrak{A}(\beta^{*})|}\geq{}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}.$$

Eventueel nog m.b.v. stelling 3 volgt dan dat er een quasidisjuncte $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}(\beta^{*})$ is met $|\mathfrak{B}|={}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}$. Hiermee is ook stelling 4 (iii) aangetoond, zodra (xvi) bewezen is.

Bewijs van (xvi)

Veronderstel $\gamma={}^{\beta}_{w}\!\sqrt{\alpha}\leq\beta$ en γ is regulier, en groter dan 2. Voor alle $\beta'<\beta$ geldt nu

$$(2^{\beta'})^{\beta}=2^{\beta}<\alpha$$

dus

(xvii) $\quad (2^{\beta'})<\gamma$.

Daar $\beta<\alpha$ (gegeven) en dus $\gamma<\alpha$, is er een $\beta'<\beta$ zó dat

$$(2^{\beta'})<\gamma<\gamma^{\beta'}.$$

Hieruit volgt

(xviii) $\beta'<\gamma$

en daar γ regulier is, en $\gamma^{\beta'}$ gelijkmachtig met de β'-element deelverzamelingen van γ:

$$\gamma<\gamma^{\beta'}\leq\sum_{\gamma'<\gamma}(\gamma')^{\beta'}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{xviii}}}{\leq}\sum_{\gamma'<\gamma}(\gamma')^{\gamma'}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{xvii}}}{\leq}\gamma.\gamma.$$

Tegenspraak.

We maken tenslotte nog (ii) en (iv) van stelling 4 aannemelijk.

Laat $\gamma={}^{\beta}_{w}\!\!\sqrt{\alpha}$.

(ii) Vervang in voorbeeld 3 (pag. 12) $\sqrt[\beta]{\alpha}$ door $\gamma={}^{\beta}_{w}\!\!\sqrt{\alpha}$. Merk op dat $\gamma^{\beta}\geq\gamma^{\underline{\beta}}\geq\alpha$. Vervang verder elke A_f door de volgende verzamelingen

$$A_f\cap(\beta'\times\gamma) \qquad\qquad \beta'<\beta.$$

(iv) Dit gaat geheel analoog aan voorbeeld 4 (pag. 13), alleen is de gevalonderscheiding iets anders. Het eerste voorbeeld geldt nu voor $\beta\leq\gamma$ i.p.v. voor $\beta<\gamma$. Het tweede voorbeeld geldt nu voor $\gamma<\beta$ i.p.v. $\gamma\leq\beta$. Verder moet elke β-element deelverzmaeling $C\in\mathfrak{A}$ vervangen worden door een antal geschikt gekozen verzamelingen met $<\beta$ elementen, die door inclusie lineair geordend zijn, en vereniging C hebben.

§2. Families van eindige verzamelingen

Stelling 1

(a) Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ regulier is en overaftelbaar, en $\mathfrak{A}$ bestaat uit eindige verzamelingen, dan is er quasidisjuncte $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ zó dat $|\mathfrak{B}|=|\mathfrak{A}|$.

(b) Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ singulier is en overaftelbaar is, en $\mathfrak{A}$ bestaat uit eindige verzamelingen dan is $\sup\{|\mathfrak{B}| \ |\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ quasidisjunct$\}=\alpha$.

Opmerking

Voorbeeld 1 laat zien dat in (b) het supremum niet hoeft te worden aangenomen. De eis "$|\mathfrak{A}|$ overaftelbaar" is essentieel: beschouw $\mathfrak{A}=\{\{1,2,3,\ldots,n\}|n\in\aleph_0\}$.

Bewijs

(b) volgt direct uit (a), daar elk singulier (dus limiet) kardinaalgetal de limiet is van reguliere kardinaalgetallen (opvolgers bijvoorbeeld).

(a) Als $|\mathfrak{A}|$ regulier is, is er een natuurlijk getal n zó dat $|\{A\in\mathfrak{A} \ |A|=n\}|=\alpha$. De stelling volgt nu direct uit het volgende lemma:

Lemma

Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ regulier is, en n is een natuurlijk getal terwijl $\forall A \quad |A|=n$, dan is er een $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ zó dat $|\mathfrak{B}|=|\mathfrak{A}|$.

Bewijs van het lemma

Het bewijs gaat met inductie naar n. Als n=1 is $\mathfrak{A}$ disjunct, en kunnen we $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$ nemen.

Laat het lemma bewezen zijn voor families met (n-1)-element verzamelingen. Laat $\mathfrak{A}^*\subset\mathfrak{A}$ een maximale disjuncte deelverzameling van $\mathfrak{A}$ zijn. Als $|\mathfrak{A}^*|=\alpha$ kunnen we $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^*$ nemen. Zij $\mathfrak{A}^*<\alpha$. Voor elke $A\in\mathfrak{A}$ is er een $A^*\in\mathfrak{A}^*$ met $A^*\cap A\neq\emptyset$, vanwege de maximaliteit van $\mathfrak{A}^*$. Daar α regulier is, is er een $A^*\in\mathfrak{A}^*$ zo dat

$$|\{A\in\mathfrak{A}\,|\,A\cap A^*\neq\emptyset\}|=\alpha.$$

Daar A^* eindig is, is er een $x\in A^*$ zo dat

$$|\{A\in\mathfrak{A}\,|\,x\in A\}|=\alpha.$$

Beschouw nu $\{A\setminus\{x\}\,|\,A\in\mathfrak{A}$ en $x\in A\}$. Volgens de inductie hypothese bevat deze familie een quasidisjuncte deelfamilie $\mathfrak{B}^*$ van machtigheid α. Definieer

$$\mathfrak{B}=\{B\cup\{x\}\,|\,B\in\mathfrak{B}^*\}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat $\mathfrak{B}$ quasidisjunct is, $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $|\mathfrak{B}|=\alpha$.

§3. Het algemene geval

Stelling 3

Als $|\mathfrak{A}|=\alpha$ en $\forall A\in\mathfrak{A}\ |A|\leq\beta$ dan is

(i) $\sup\{|\mathfrak{B}|\ \ |\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct$\}\geq\sqrt[\beta]{\alpha}$.

(ii) Bovendien wordt dit supremum altijd aangenomen als $\sqrt[\beta]{\alpha}$ regulier is.

Bewijs

Als $2^{\beta}\geq\alpha$, dan is $\sqrt[\beta]{\alpha}=2$. Vergelijk de voorbeelden 3 en 5 en lemma 4. We mogen dus aannemen dat $2^{\beta}<\alpha$, d.w.z. (lemma 4):

$$\beta^{+}\leq 2^{\beta}<\sqrt[\beta]{\alpha}.$$

We behandelen nu eerst het geval dat $\sqrt[\beta]{\alpha}$ regulier is, en tonen dan (i) en (ii) aan, (A). vervolgens leiden we hier op eenvoudige wijze (i) uit af voor het geval $\sqrt[\beta]{\alpha}$ singulier is, (B)

A. $\sqrt[\beta]{\alpha}$ is regulier.

(Dit gedeelte is een verscherping van het bewijs in [3].)

Neem aan dat

(a) $\forall \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ is quasidisjunct $\Rightarrow |\mathfrak{B}|<\sqrt[\beta]{\alpha}$.

We definiëren deelfamilies $\mathfrak{A}_\zeta$ van $\mathfrak{A}$ voor elke $\zeta<\beta^+$ zó dat

(b) $\mathfrak{A}=\cup\{\mathfrak{A}_\zeta\,|\,\zeta<\beta^+\}$.

(c) $\forall\zeta<\beta^+$ $|\mathfrak{A}_\zeta|<\sqrt[\beta]{\alpha}$.

Wegens de regulariteit van $\sqrt[\beta]{\alpha}$ en $\beta^+\leq 2^\beta<\sqrt[\beta]{\alpha}$ volgt uit (b) en (c) onmiddelijk dat $|\mathfrak{A}|=\alpha<\sqrt[\beta]{\alpha}$. Tegenspraak, dus (a) is niet waar, waarmede (i) en (ii) zijn aangetoond.

De definitie van de $\mathfrak{A}_\zeta$ gaat met transfinite inductie:

Laat $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$ een maximale disjuncte deelfamilie zijn.

Als voor een $\zeta<\beta^+$ en voor alle $\eta<\zeta$ $\mathfrak{A}_\eta$ gedefinieerd is, definieer dan:

$$A_\zeta=\cup\{\cup\mathfrak{A}_\eta\,|\,\eta<\zeta\}.$$

Voor elke deelverzameling K van A met $|K|\leq\beta$, definiëren we $\mathfrak{A}_{\zeta,K}$ als volgt

$$\mathfrak{A}_{\zeta,K}=\{A\in\mathfrak{A}\setminus\bigcup_{\eta<\zeta}\mathfrak{A}_\eta\,|\,A\cap A_\zeta=K\}.$$

Als er $A,A'\in\mathfrak{A}_{\zeta,K}$ bestaan met $A\cap A'=K$, laat dan $\mathfrak{A}^*_{\zeta,K}$ een maximale quasidisjuncte deelfamilie van $\mathfrak{A}_{\zeta,K}$ zijn zó dat

(d) $\cap\mathfrak{A}^*_{\zeta,K}=K$.

Als zulke $A,A'\in\mathfrak{A}_{\zeta,K}$ niet bestaan, laat dan $\mathfrak{A}^*_{\zeta,K}$ een willekeurige maximale quasidisjuncte deelfamilie van $\mathfrak{A}_{\zeta,K}$ zijn. Nu is

(e) $\mathfrak{A}^*_{\zeta,K}=\emptyset\Leftrightarrow\mathfrak{A}_{\zeta,K}=\emptyset$.

Definieer tenslotte

$$\mathfrak{A}_\zeta=\cup\{\mathfrak{A}^*_{\zeta,K}\,|\,K\subset A_\zeta \text{ en } |K|\leq\beta\}.$$

We verifiëren nu (b) en (c).

Veronderstel dat $A\in\mathfrak{A}$ en $A\notin\mathfrak{A}_\zeta$ voor alle $\zeta<\beta^+$.

We zullen aantonen dat A elke $A_{\zeta+1}\setminus A_\zeta$ snijdt, $\zeta<\beta^+$, waaruit volgt dat

$|A| \geq \beta^{+}$. Tegenspraak.

Laat $K = A \cap A_{\zeta}$. We onderscheiden twee gevallen: (f) en (g)

(f) Veronderstel dat er een $A' \in \mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}$ is zó dat $A \cap A' \setminus K \neq \emptyset$.
Dan is $A \cap (A_{\zeta+1} \setminus A_{\zeta}) \neq \emptyset$.

(g) Veronderstel dat er geen $A' \in \mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}$ is zó dat $A \cap A' \setminus K \neq \emptyset$.
Daar $A \in \mathfrak{A}_{\zeta,K}$ is, volgens (e), $\mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K} \neq \emptyset$. Dus geldt voor alle $A' \in \mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}$ dat $A \cap A' \subset K$. Hieruit volgt dat (d) geldt. Maar dan is $\mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K} \cup \{A\}$ quasidisjunct, in tegenspraak met de maximaliteit van $\mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}$.

Hiermee is (b) aangetoond.

Om (c) te bewijzen, merken we eerst op dat $|\mathfrak{A}_0| < \sqrt[\beta]{\alpha}$, (a), en we herinneren er aan dat $\beta^{+} \leq 2^{\beta} < \sqrt[\beta]{\alpha}$. Laat nu voor $\zeta < \beta^{+}$ en voor alle $\eta < \zeta$

$$|\mathfrak{A}_{\eta}| < \sqrt[\beta]{\alpha}.$$

Dan is ook
$$|\cup \mathfrak{A}_{\eta}| < \sqrt[\beta]{\alpha}.$$

Nu geldt
$$|A_{\zeta}| \leq \sum_{\eta < \zeta} |\cup \mathfrak{A}_{\mu}| < \sqrt[\beta]{\alpha}$$

vanwege $|\zeta| \leq \beta < \mathrm{cf} \sqrt[\beta]{\alpha} = \sqrt[\beta]{\alpha}$.

De verzameling A_{ζ} heeft hoogstens $|A_{\zeta}|^{\beta}$ deelverzamelingen K met $|K| \leq \beta$. Daar $|A_{\zeta}| < \sqrt[\beta]{\alpha}$ geldt ook $|A_{\zeta}|^{\beta} < \sqrt[\beta]{\alpha}$ (lemma 4(a)).
Voor elke $K \subset A_{\zeta}$ met $|K| \leq \beta$ geldt $|\mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}| < \sqrt[\beta]{\alpha}$ (zie (a)), en wederom wegens de regulariteit van $\sqrt[\beta]{\alpha}$ geldt:

$$|\mathfrak{A}_{\zeta}| \leq \sum_{K} |\mathfrak{A}^{*}_{\zeta,K}| < \sqrt[\beta]{\alpha}.$$

Hiermee is (c) aangetoond en het bewijs van A voltooid.

B. We tonen nu aan dat (i) altijd geldt, dus ook als $\sqrt[\beta]{\alpha}$ singulier is.
Laat $\gamma < \sqrt[\beta]{\alpha}$ willekeurig. Dan geldt $(\gamma^{\beta}) < \sqrt[\beta]{\alpha}$, dus $(\gamma^{\beta})^{+} \leq \sqrt[\beta]{\alpha} \leq \alpha$. (In feite $(\gamma^{\beta})^{+} < \sqrt[\beta]{\alpha}$, daar $(\gamma^{\beta})^{+}$ regulier is.)
Het is eenvoudig in te zien dat

$$\sqrt[\beta]{(\gamma^{\beta})^{+}} = (\gamma^{\beta})^{+}$$

(immers, als $\delta<(\gamma^{\beta})^{+}$, dus $\delta\leq\gamma^{\beta}$ dan is $\delta^{\beta}\leq\gamma^{\beta\beta}=\gamma^{\beta}$). Pas nu A toe op een deelfamilie $\mathfrak{A}^{*}$ van $\mathfrak{A}$ met $|\mathfrak{A}^{*}|=(\gamma^{\beta})^{+}$. Er blijkt een quasidisjuncte $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}^{*}\subset\mathfrak{A}$ te bestaan met

$$|\mathfrak{B}|\geq\sqrt[\beta]{(\gamma^{\beta})^{+}}=(\gamma^{\beta})^{+}\geq\gamma.$$

Als α,β de eigenschap hebben dat $\sqrt[\beta]{\alpha}$ singulier is, dan laat voorbeeld 4 zien dat er een familie $\mathfrak{A}$ is die voldoet aan

$$|\mathfrak{A}|=\alpha$$
$$\forall A\in\mathfrak{A}\quad |A|=\beta$$
$$\forall\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}\quad \mathfrak{B}\text{ is quasidisjunct}\Rightarrow|\mathfrak{B}|<\sqrt[\beta]{\alpha}.$$

REFERENCES

[1] P. ERDÖS, R. RADO — Intersection theorems for systems of sets. J. London Math. Soc. 35 (1960) 85-90.

[2] I. JUHÁSZ — Cardinal functions. M.C. tract (in voorbereiding). Math. Centrum, Amsterdam.

[3] E. MICHAEL — A note on intersections. Proc. Am. Math. Soc. 13 (1962) 281-283.

[4] N.A. ŠANIN — A theorem from the general theory of sets. C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 53 (1946) 399-400