STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 016

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Mr. J. van IJzeren

25 november 1959

Definitie van log z en e^z door middel van rijen

1959

ZW 1959-016

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Mr J. van IJzeren

25 november 1959

Definitie van log z en e^z door middel van rijen

1. Inleiding.

In de elementaire analyse definieert men log x en e^x gewoonlijk bij de differentiatieregels nadat tevoren $\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$ is behandeld. Of men kiest de fundamentele weg met $\int_1^a x^{-1}dx$ als definitie van log a.

We vergelijken niet, beide methoden zijn voortreffelijk, en toch is er kritiek. Zo maakt Sawyer in Mathematician's Delight de opmerking dat de gebruikelijke "explanations of e are excellent and logical, but leave the reader with the feeling that everything has come from the blue".

Genoemde methoden sluiten in ieder geval niet direct aan bij de schoolalgebra. Deze schenkt veel aandacht aan de functie a^x, waarbij onmeetbare x geen wezenlijk bezwaar opleveren (a^x is continu voor meetbare x en, per definitie, voor onmeetbare x). Door bij deze kennis aan te knopen (2) kunnen we "the blue" wellicht elimineren; we proberen aanschouwelijk en tevens streng te zijn. Vervolgens (3 t/m 7) laten we zien dat de gekozen gedachtegang tot in het complexe gebied reikt.

2. De grafiek van $y=a^x$ i.v.m. de rijen $n(\sqrt[n]{a}-1)$ en $n(1-1/\sqrt[n]{a})$.

Laat a een vast positief getal zijn, dan geldt:

De helling van $y=a^x$ in (0,1) is gelijk aan log a met grondtal $e \approx 2,7$.

"Aanschouwelijk bewijs". $y=x+1$ snijdt $y=2^x$ in (1,2) en $y=4^x$ in $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$; dus vinden we in (0,1) een helling <1 bij $y=2^x$ en >1 bij $y=4^x$. Blijkbaar heeft $y=e^x$ met zekere e tussen 2 en 4 in (0,1)

de helling 1 (definitie van e); $y=e^{x \log a} = a^x$ loopt log a maal zo steil. q.e.d. Rest e wat nauwkeuriger te bepalen.
Bij elke $a \neq 1$ is de grafiek van $y=a^x$ hol naar boven [1]; dus is $(a^x-1)/x$ een stijgende functie van x, die bij x=0 de waarde log a passeert. Nemen we a=e en x=1/n dan volgt dus: $1<n(e^{1/n}-1)$ zodat $(1+1/n)^n < e$; en met $x=-1/(n+1)$ vinden we $e < (1+1/n)^{n+1}$; n=1024 geeft $2{,}717 < e < 2{,}720$.
Algemeen vinden we (voor $a \neq 1$)

$$n(a^{1/n}-1) > \log a > n(1-a^{-1/n}) \qquad a \neq 1 .$$

a=10 en n=1024 geven $2{,}305 > \log 10 > 2{,}300$.

Het voorgaande is zonder veel omhaal streng te maken.

(2.1) $$n(a^{1/n}-1) \geqslant (n+1)(a^{1/(n+1)}-1) \qquad a > 0.$$

Bewijs. In $c=a^{1/n(n+1)}$ luidt dit $n(c^{n+1}-1) \geqslant (n+1)(c^n-1)$ of $(c-1)(nc^n-c^{n-1}-\ldots-1) \geqslant 0$, wat kennelijk juist is, voor $c > 1, =1, <1$.[2]

Blijkbaar is $l_n=n(\sqrt[n]{a}-1)$ een dalende rij, $n(\sqrt[n]{1/a}-1)$ ook, dus $l'_n = n(1-1/\sqrt[n]{a})$ een stijgende.

(2.2) $n(\sqrt[n]{a}-1)$ en $n(1-1/\sqrt[n]{a})$ naderen dalend resp. stijgend tot **één limiet** $l(a)$.

Bewijs. Volgens $l_n-l'_n = \sqrt[n]{a}\, l'_n-l'_n = n^{-1} l_n l'_n$ blijft $l_n \geqslant l'_n$, zodat beide begrensd zijn en $n^{-1} l_n l'_n \downarrow 0$; er is dus één limiet $l(a)$.

We zien dat $l(1/a) = -l(a)$, en dat voor $a > 1$ $l(a) > 1-1/a > 0$.

(2.3) Er is een grondtal e zó dat $l(x)={}^{e}\log x$.

Bewijs. Bij meetbare p/q is $l(a^{p/q})=\lim_{n\to\infty} np(a^{1/nq}-1)=p/q.\ l(a)$.
Is $a \neq 1$ en $e=a^{1/l(a)}$, dan volgt $l(e)=1$, en algemeen $l(x)=y$ bij $x=e^y$.
Blijkbaar is $e > 1$, en onafhankelijk van a.

De aanschouwelijke behandeling brengt e en log x in het bereik van de schoolalgebra. Wie méér wil vindt in l_n en l'_n instructieve hulpmiddelen. Deze rijen hangen direct samen met $\sqrt[n]{a} \to 1$. Zij zijn de grondslag van Briggs' berekening van logarithmen. Voorts "verklaart" l_n het langzaam stijgen van log x: als $x \to \infty$ dan blijft

---

1) Dit volgt uit $a^{x+h}+a^{x-h} > 2a^x$
2) (2.1) is equivalent met de ongelijkheid van Bernoulli ($a=(1+h)^{-n(n+1)}$ geeft $(1+h)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)h$).

$$n(x^{1/n}-1) > \log x \qquad\qquad (n \text{ vast})$$

dus $\log x/x^{2/n} \to 0$, hoe klein $2/n$ ook zij.
Tenslotte: l_n en l'_n staan in nauwe relatie met da^x/dx en $\int_1^a x^{-1}dx$: l_n en l'_n zijn speciale gevallen van het differentiequotiënt $(a^h-1)/h$; voor $h \to 0$ nadert dit tot de met l_n en l'_n gedefinieerde log a want

$$a^h-1 \geq \log(a^h) = h \log a \text{ en } a^h-1 \leq a^h \cdot h \log a.$$

l_n en l'_n zijn boven- en benedensom bij $\int_1^a x^{-1}dx$:

$$n(a^{1/n}-1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{i/n}-a^{(i-1)/n}}{a^{(i-1)/n}} > \int_1^a \frac{dx}{x} > \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{i/n}-a^{(i-1)/n}}{a^{i/n}} = n(1-a^{-1/n}).$$

Aldus is verband gelegd met beide in de aanhef vermelde definities.

Een rechtstreekse behandeling van $\lim_{h \to 0} (a^h-1)/h$, zonder tussenstap over $h=\pm 1/n$, is te vinden in N.G. de Bruyn, Beknopt leerboek der differentiaal- en integraalrekening. Daar worden de waarden van h geheel vrijgelaten, wat evenwel uitgebreider hulpmiddelen (differentiaalrekening) nodig maakt.

Een ander uiterste vindt men in E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Hierin wordt h tot de waarden 2^{-k} beperkt, d.w.z. Landau gebruikt voor het definieren van log a alleen $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[8]{a}$, enz.

$$\lim_{k \to \infty} 2^k(\sqrt[2^k]{a}-1) = \log a.$$

Door Landau's voorschrift enigszins te wijzigen kunnen we er log z en e^z met complexe z ook mee definieren, en de goniometrische en cyclometrische functies onafhankelijk van de meetkunde funderen. Zonder aan didactische mogelijkheden te denken vinden we een verband met de schoolmeetkunde in de zg. verdubbelingsformule.

3. Symmetrische varianten van Landau's $2^k(\sqrt[2^k]{x}-1)$.

We maken ons geheel los van het voorgaande en beschouwen

$$s_n(x) = \tfrac{n}{2}(\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}) \text{ en } t_n(x) = n\,\frac{\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}+1/\sqrt[n]{x}} \qquad n = 2^k$$

Stilzwijgend beperken we ons steeds tot $n = 2^k$.

Evenals log x veranderen de s_n en t_n van teken als x door $1/x$ wordt vervangen. Zij naderen tot één limiet, en wel van weerszijden. Dit blijkt uit de betrekkingen met

$$(3.1) \qquad c_n(x) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[n]{x} + 1/\sqrt[n]{x}\right) > 1$$

$$s_n/s_{2n} = c_{2n} > 1, \quad t_n/t_{2n} = \tfrac{1}{2}(1+c_n^{-1}) < 1, \quad s_n/t_n = c_n > 1.$$

In woorden: s_n neemt af, t_n neemt toe [1], zij naderen tot elkaar, convergeren dus en $c_n \to 1$.

We definieren nu

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} t_n(x) \overset{\text{def}}{=} \log x.$$

Uit de identiteit

$$s_n(x_1)c_n(x_2) + c_n(x_1)s_n(x_2) = s_n(x_1x_2)$$

volgt als $n \to \infty$

$$\log x_1 + \log x_2 = \log(x_1x_2).$$

Hieruit is op de bekende manier $\log(x^y) = y \log x$ af te leiden. Blijkbaar geldt

$$(3.2) \qquad s_n(x) > \log x > t_n(x) \qquad x > 1.$$

Substitutie van $x=10$ geeft bij $n=1024$

$$2{,}302587 > \log 10 > 2{,}302581,$$

een veel betere (kwadratische) benadering, dan de in 2 gevondene.

Substitutie van $x=x_2/x_1 > 1$ en $n=2$ in (3.2) geeft

$$(3.3) \qquad \frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}} > \log(x_2/x_1) > \frac{x_2-x_1}{\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)} \qquad x_2 > x_1$$

Uit deze reeds door Napier gehanteerde betrekking [2] volgt de monotonie, continuiteit en differentieerbaarheid van log x (afgeleide in x_1: $\lim_{x_2\to x_1} (\log x_2 - \log x_1)/(x_2-x_1) = 1/x_1$).

De inverse functie is e^x, met nader te bepalen e.

---

1) D.w.z. $|s_n|$ daalt, $|t_n|$ stijgt.

2) Zie T.J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, Appendix II.

Een andere voorstelling vinden we door proberenderwijs

$t_n(y) = n(\sqrt[n]{y}-1/\sqrt[n]{y})/(\sqrt[n]{y}+1/\sqrt[n]{y}) = x$ naar y op te lossen.

Dit geeft $y=e_n(x)$ waarin

(3.4) $$e_n(x) = \left(\frac{1+x/n}{1-x/n}\right)^{n/2} \quad {}^{1)} \qquad x < n = 2^k .$$

Met Napier's ongelijkheid (3.3) vinden we

(3.5) $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2/n^2}} > \log e_n(x) > x \qquad x > 0.$$

Blijkbaar geldt voor elke x $\lim\limits_{n\to\infty} \log e_n(x) = x = \log e^x$ dus

(3.6) $$\lim_{n\to\infty} e_n(x) = e^x .$$

Met x=1 en n=1024 wordt het linkerlid van (3.5) 1,0000005; de corresponderende benadering van e nl. 2,718282 wordt gevonden door 1025/1023 = 1,001955034 negenvoudig te kwadrateren.

4. Unitaire getallen en hun vierkantswortels.

Landau's beperking tot $n=2^k$ wordt belangrijk bij complexe getallen. Daar is nl., zoals aanstonds blijkt, kwadraatworteltrekken zeer wel uitvoerbaar, terwijl n-de worteltrekking met $\sqrt[n]{r}(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})$ vooralsnog onmogelijk is. We moeten immers cos en sin nog definieren (na e^{iy}). Elk steunen op de meetkunde willen we vermijden.

Gemakkelijk zijn complexe getallen aan te wijzen waarbij een imaginaire logarithme is te verwachten. Immers $\log u = iy$ impliceert allicht $\log u^{-1} = -iy = \overline{iy} = \log \overline{u}$. Het gaat dus om getallen u die voldoen aan

$$1/u = \overline{u}.$$

Zulke u noemen we unitair; elk getal x+iy met $x^2+y^2=1$ is unitair, want $1/(x+iy)=(x-iy)/(x^2+y^2)=x-iy$. Bijv. $1; -1; i; -i; \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i \; (=\sqrt{i})$; elk quotient $(a+ib)/(a-ib)$.

Het product van twee u's is eveneens unitair:

$$1/(u_1u_2)=1/u_1\cdot 1/u_2=\overline{u}_1\cdot\overline{u}_2=\overline{u_1u_2}.$$

Elk complex getal x+iy kan worden ontbonden in een positieve

---

1) De symmetrische rij $(\sqrt{1+x^2/n^2}+x/n)^n$ (omkering van s_n) blijft buiten beschouwing.

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ en een unitaire $u=(x+iy)/\sqrt{x^2+y^2}$. Bij vermenigvuldiging van complexe getallen vormen deze factoren afzonderlijke producten:

$$(r_1u_1)(r_2u_2) = (r_1r_2)(u_1u_2) = ru.$$

Hierbij past kennelijk, dat log r reëel en log u imaginair is. Het laatste zullen we nu waar maken met dezelfde hulpmiddelen als in het reële geval nl. met kwadraatwortels.

We bepalen $\sqrt{u}$ op een symmetrische manier tezamen met $1/\sqrt{u}$.

(4.1) $$\sqrt{u} + 1/\sqrt{u} = \sqrt{2+u+1/u}$$

(4.2) $$\sqrt{u} - 1/\sqrt{u} = (u-1/u)/(\sqrt{u}+1/\sqrt{u}) \qquad u\neq-1.$$

In (4.1) is $2+u+1/u=(u+1)(\bar{u}+1) \geqslant 0$ met minimum 0 als $u=-1$; $\sqrt{u}-1/\sqrt{u}$ is evenals $u-1/u=u-\bar{u}$ imaginair, en van hetzelfde teken. Blijkbaar zijn $\sqrt{u}$ en $1/\sqrt{u}$ toegevoegd complex, dus (definitie) unitair; hun reëel deel is positief (in tegenstelling met $-\sqrt{u}$ en $-1/\sqrt{u}$ die eveneens wortels zijn van u resp. $1/u$).

Er is één uitzondering, $u=-1$, waarbij het reële deel der wortels 0 is. We kiezen $\sqrt{-1}=i$ [1], dus $1/\sqrt{-1}=1/i=-i$; maar de algemene regel $1/\sqrt{u}=\sqrt{1/u}$ is hier niet te redden.

Het symmetrische worteltrekken kan ook op positieve x worden toegepast; het levert dan - geïtereerd - juist de vormen $\sqrt[n]{x}+1/\sqrt[n]{x}$ en $\sqrt[n]{x}-1/\sqrt[n]{x}$ die in $s_n(x)$ en $t_n(x)$ optreden.

5. log u en de zg. verdubbelingsformule.

De definitie van log u loopt geheel parallel met die van log x. We moeten alleen ongelijktekens omkeren in verband met de volgende tegenstelling tussen positieve x en unitaire u:

$\frac{1}{2}(x+1/x) > 1$ want $(\sqrt{x}-1/\sqrt{x})^2 > 0$, tenzij $x=1$

$\frac{1}{2}(u+1/u) < 1$ " $(\sqrt{u}-1/\sqrt{u})^2 < 0$, " $u=1$.

Analoog met (3.1) hebben we

(5.1) $$c_n(u) = \tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{u} + 1/\sqrt[n]{u}) < 1.$$

Ook nu vinden we tot elkaar naderende $s_n(u)$ (toenemend) en $t_n(u)$ (afnemend), die van weerszijden naar één limiet gaan. We definieren daarmee log u:

----

1) Conventie; tegen $\sqrt{-1}=-i$ is geen wezenlijk bezwaar.

(5.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{z}\,(\sqrt[n]{u}-1/\sqrt[n]{u}) = \lim\limits_{n\to\infty} n\,\dfrac{\sqrt[n]{u}-1/\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{u}+1/\sqrt[n]{u}} = \log u.$

Evenals de termen van deze rijen $s_n(u)$ en $t_n(u)$ is log u imaginair met het teken van u-1/u; als dit positief is vinden we

(5.3) $s_2(u) = \sqrt{u}-1/\sqrt{u} < \log u < z\,\dfrac{\sqrt{u}-1/\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1/\sqrt{u}} = t_2(u).$ 1)

Bijv. log i ligt tussen $(i-1)/\sqrt{i} = \sqrt{2}(i-1)/(1+i) = \sqrt{2}i$ en $2(i-1)/(1+i)=2i$. Als we u variëren dan blijkt uit (4.1) dat $\sqrt{u}+1/\sqrt{u}$, $\sqrt[4]{u}+1/\sqrt[4]{u}$, enz. toe-en afnemen met u+1/u , terwijl de imaginaire $\sqrt{u}-1/\sqrt{u}$ enz. tegengesteld varieren:

$$\{(\sqrt{u}-1/\sqrt{u})/i\}^2 = 2-u-1/u\ .$$

Een toename van $\sqrt{u}-1/\sqrt{u} = s_2(u)$ impliceert (omdat $\frac{1}{2}(\sqrt[4]{u}+1/\sqrt[4]{u})$ afneemt) een grotere toename van $2(\sqrt[4]{u}-1/\sqrt[4]{u}) = s_4(u)$, enz. dus uiteindelijk een grotere toename van log u. Conclusie:

(5.4) Als log u tot een limiet nadert, dan ook $\sqrt{u}-1/\sqrt{u}$, dus u. Blijkbaar zijn $\sqrt{u}-1/\sqrt{u}$ enz. en log u maximaal als u+1/u minimaal is d.w.z. als u=-1. De bijbehorende $s_2(-1)$ t/m $s_{16}(-1)$ zijn:

$$2i\ ;\quad 2\sqrt{2}i = 2{,}8i\ ;\quad 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = 3{,}06i\ ;\quad 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}i = 3{,}12i.$$

De limiet, log(-1), noemen we πi

$$\log(-1) = \pi i.$$

Deze uitkomst vraagt om meetkundige toelichting. We gaan daartoe terug naar de bepaling van $\sqrt{u}$ en duiden de unitaire getallen 1,-1, u,1/u, $\sqrt{u}$ en $1/\sqrt{u}$ aan door op $x^2+y^2=1$ gelegen punten: E(1,0), E'(-1,0), u (boven EE'), $\bar{u}$,v en $\bar{v}$. Als M en N de middens van $u\bar{u}$ resp. $v\bar{v}$ zijn, dan geldt i.v.m. (4.1) en (4.2):

$$UM/VN = (u-1/u)/(\ u-1/\ u) = \sqrt{2+u+1/u} = \sqrt{E'M.E'E} = E'U = E'U/OV.$$

Dus is OV//E'U d.w.z. OV is bissectrix van $\angle$ EOU. Dit betekent dat koorde $EU=V\bar{V}=(\sqrt{u}-1/\sqrt{u})/i = s_2(u)/i$; koorden $EV+VU=2EV=s_4(u)/i$. We kunnen zo doorgaan. De berekening der koorden stemt geheel overeen met de zg. verdubbelingsformule voor de koorde k_2 van de halve door k onderspannen boog

$$k_2{}^2 = 2-\sqrt{4-k^2}.$$

---

1) We gebruiken hier op vanzelfsprekende wijze ongelijktekens bij imaginaire getallen.

In de limiet vinden we: boog EU=(log u)/i; in het bijzonder boog EE'=(log(-1))/i= π.

6. $e^{iy} = \lim\limits_{\substack{n=2^k\\ \to\infty}} \left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n}\right)^{n/2}$ en Log u = log u + 2kπi.

Intussen klopt log(-1) + log(-1) = 2πi niet met log$\{(-1)(-1)\}$=0. Toch is de aanduiding log u wel gerechtvaardigd want uit (5.2) volgt

(6.1) $$\log(1/u) = -\log u \qquad u \neq -1.$$

(6.2) $\log\sqrt{u} = \frac{1}{2}\log u$ en dus ook $\log \sqrt[m]{u} = 1/m.\log u$ met $m=2^k$.
Speciaal: $\log i = \log\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi i$ en $\log(-i) = \log(1/i) = -\frac{1}{2}\pi i$.
Tegenover πi, het maximum van log u, staat $-\pi i$ als benedengrens

$$-\pi i < \log u \leq \pi i.$$

Als u de waarde -1 passeert, dan heeft log u een sprong van 2πi.
Vervangen we $\sqrt[m]{u}$ in (6.2) door u dan volgt (voor $m=2^k$)

(6.3) $$m \log u = \log(u^m) \text{ mits } -\pi i < m \log u \leq \pi i.$$

Er is dus duidelijke analogie met de reële log x, behalve t.a.v. de begrensdheid. De inverse functie evenwel voert hierboven uit.

Om een getal met iy als logarithme te vinden gaan we (zie het reële geval (3.4)) u=(1+iy/n)/(1-iy/n) substitueren in (5.3). Dit geeft, als y > 0 [1] (voor y < 0 analoog)

(6.4) $$\frac{iy}{\sqrt{1+y^2/n^2}} < \frac{n}{2}\log\frac{1+iy/n}{1-iy/n} < iy \qquad y > 0 .$$

Is $y \leq \pi$ dan mogen we volgens (6.3) n/2 als exponent schrijven. We vinden dus

(6.5) $$\log\left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n}\right)^{n/2} \to iy \qquad \text{als } n=2^k \to \infty .$$

Dit impliceert (zie conclusie (5.4)) dat

(6.6) $$\left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n}\right)^{n/2} \to e^{iy},$$

waarin e^{iy} aanduidt: het unitaire getal met logarithme iy.
Deze notatie past bij $e^{\log u} = u$, en geeft in het bijzonder $e^{\pi i}=-1$.
Laat nu $y>\pi$, maar $y^*=y/2^k \leq \pi$. Dan heeft het linkerlid van (6.6) met y^* i.p.v. y een limiet. Door deze y^*-rij k-voudig te kwadra-

---

1) D.w.z. u-1/u > 0, vereist voor (5.3).

teren krijgen we de y-rij ((6.6) met $n.2^k$ i.p.v.n). De laatste moet dus ook een limiet hebben.
Dus bestaat de limiet (6.6) voor elke y. De notatie e^{iy} past bij e^x (zie (3.6)) en bij het additietheorema

$$(6.7)\qquad e^{iy_1}.\,e^{iy_2} = e^{i(y_1+y_2)}.$$

Om dit te bewijzen vormen we het product van de rijen voor e^{iy_1}, e^{iy_2} en $e^{-i(y_1+y_2)}$; de algemene term blijkt te zijn het unitaire getal

$$u_n = \left(\frac{1+iy/n}{1-iy/n}\right)^{n/2} \quad \text{met } y = \frac{y_1y_2(y_1+y_2)}{n^2+y_1^2+y_1y_2+y_2^2}.$$

Als $n\to\infty$ dan $y\to 0$ en volgens (6.4) ook $\log u_n\to 0$; dus $u_n\to 1$ d.w.z. $e^{iy_1}.e^{iy_2}.e^{-i(y_1+y_2)} = 1$, wat hetzelfde is als (6.7).

Een bijzondere consequentie van (6.7) is dat voor elke gehele k

$$e^{2k\pi i} = \left(e^{\pi i}\right)^{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

Dus zijn er vele imaginaire e-machten die hetzelfde unitaire getal u opleveren:

$$e^{\log u + 2k\pi i} = u.$$

Verder volgt uit

$$e^{\log(u_1u_2)} = u_1u_2 = e^{\log u_1}.e^{\log u_2} = e^{\log u_1+\log u_2}$$

dat $\log(u_1u_2)$ en $\log u_1+\log u_2$ gelijk zijn op een veelvoud van $2\pi i$ na.
Blijkbaar behoort bij u een verzameling logarithmen Log u, die alle $2k\pi i$ van de hoofdwaarde log u verschillen.

7. Verdere uitwerking en samenvatting.

cos y en sin y kunnen we nu definieren met

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Gemakkelijk zijn hun eigenschappen uit die van e^{iy} af te leiden.
We vermelden alleen dat de ongelijkheid

$$\sin y < y < \tan y \qquad\qquad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

dezelfde is als (5.3) (neem $u=e^{2iy}$) en dat $\lim\limits_{y\to 0} \sin y/y=1$ overeenkomt met

$$\lim_{y \to 0} (e^{iy}-1)/iy = 1.$$

Voor arctan $y = \varphi\ (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ vinden we de betrekking
$\log \frac{1+iy}{1-iy} = \log \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \log e^{2i\varphi} = 2i\varphi = 2i \arctan y$ zodat
(6.5) neerkomt op

$$ni \arctan (y/n) \to iy.$$

Evenzo zijn de limieten voor log u en ook de symmetrische worteltrekking te vertalen in sin, cos en tan.

We definieren bij $z=x+iy=re^{i\varphi}\ (-\pi < \varphi \leqslant \pi)$

$$e^z = e^x.e^{iy} \text{ en } \log z = \log r + i\varphi .$$

Dan geldt $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}$, $e^{\log z} = z$

en mod. $2k\pi i$ $\log(z_1 z_2) \equiv \log z_1 + \log z_2$, $\log e^z \equiv z$.

Als h reëel is dan geldt voor elke z

$$\lim_{h \to 0} (z^h-1)/h = \log z \text{ en } \lim_{h \to 0} (1+hz)^{1/h} = e^z. \quad ^{1)}$$

In deze limieten liggen alle voorgaande besloten. Beide zijn af te leiden (door h log z resp. log(1+hz) = x+iy te stellen) uit

$$\lim_{x+iy \to 0} \frac{e^{x+iy}-1}{x+iy} = 1 .$$

Deze limiet volgt uit de identieke betrekking

$$\frac{e^{x+iy}-1}{x+iy} - 1 = \frac{x}{x+iy}\left(\frac{e^x-1}{x} .e^{iy}-1\right) + \frac{iy}{x+iy}\left(\frac{e^{iy}-1}{iy} - 1\right),$$

waarin beide haken naar 0 gaan met x en y.

Met deze complexe limiet zijn we teruggekeerd "boven" ons uitgangspunt $\lim_{x \to 0} (e^x-1)/x=1$, en terechtgekomen bij de complexe afgeleide van e^z.

----

1) $z^h \overset{\text{def}}{=} e^{h \log z}$