STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 007

Een transformatie van een dubbelintegraal

A.H.M. Levelt

1959

Archiefexemplaar.

Een transformatie van een dubbelintegraal

door

A.H.M. Levelt

Een onderzoek van B. van der Pol *) leidde tot de vraag functies $I_1^*(\rho_0,z_0;t)$ en $I_2^*(\rho_0,z_0;t)$ te bepalen met de eigenschap dat voor j=1,2 geldt

$$(1)\qquad -\frac{\partial}{\partial z_0}\int_0^\infty e^{-pt} I_j^*(\rho_0,z_0;t)\,dt = I_j(\rho_0,z_0;p) = \int_0^\infty \frac{e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}}{\sqrt{\lambda^2+p^2\nu^2}} J_0(\lambda\rho_0)\,\lambda\,d\lambda .$$

Hierin stellen p, ρ_0, z_0, n_1, n_2, ν positieve getallen voor en

$$(2)\qquad n_1 < \nu < n_2 .$$

Gebruikmakend van de formules

$$(3)\qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+p^2\nu^2}} = \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0(\lambda\rho)\,d\rho ,$$

$$(4)\qquad J_0(\lambda\rho)\,J_0(\lambda\rho_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_0\left(\lambda\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}\right)d\varphi ,$$

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}\, J_0\left(\lambda\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}\,\lambda\,d\lambda = \frac{e^{-pn_j\sqrt{z_0^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2}}}{\sqrt{z_0^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2}} .$$

(Zie Magnus & Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2.Auflage; resp. p.47, p.31 (3a) en p.179),
toonde B. van der Pol de volgende betrekking aan

$$(6)\qquad I_j(\rho_0,z_0;p) = \int_0^\infty e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}} \frac{J_0(\lambda\rho_0)\,\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+p^2\nu^2}} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0}\int_0^\infty \frac{e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}}{\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}} J_0(\lambda\rho_0)\,\lambda\,d\lambda \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0(\lambda\rho)\,d\rho =$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-z_0\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}}{\sqrt{\lambda^2+p^2n_j^2}}\,\lambda\,d\lambda \int_0^\infty e^{-p\rho\nu} J_0\left(\lambda\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho_0^2}\right)d\rho =$$

---

*) On discontinuous electromagnetic waves and the occurrence of a surface wave. Electromagnetic wave theory symposium.

$$-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-p\rho\nu}\, e^{-p n_j \sqrt{z_0^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2}}}{\sqrt{z_0^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2}}\, d\rho$$

Wij vervangen nu de integratievariabele ρ door t door middel van de volgende transformatie

(7) $\qquad t = \nu\rho + n_j\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+R_0^2} \qquad (R_0=\sqrt{\rho_0^2+z_0^2})$.

t en ρ voldoen dan aan de kwadratische betrekking

(8) $\qquad t^2 - 2\nu t\rho + (\nu^2-n_j^2)\rho^2 + 2\rho_0 n_j^2\cos\varphi\cdot\rho - n_j^2 R_0^2 = 0$

In het ρ,t-vlak stelt dit een hyperbool voor met asymptotische richtingen $\frac{t}{\rho} = \nu \pm n_j$ en middelpunt $(2\rho_0\cos\varphi, 2\nu\rho_0\cos\varphi)$. De t-as wordt gesneden in $\pm n_j R_0$. De transformatie (7) wordt gegeven door het deel van de hyperbooltak dat de positieve t-as snijdt (in $t=n_j R_0$)

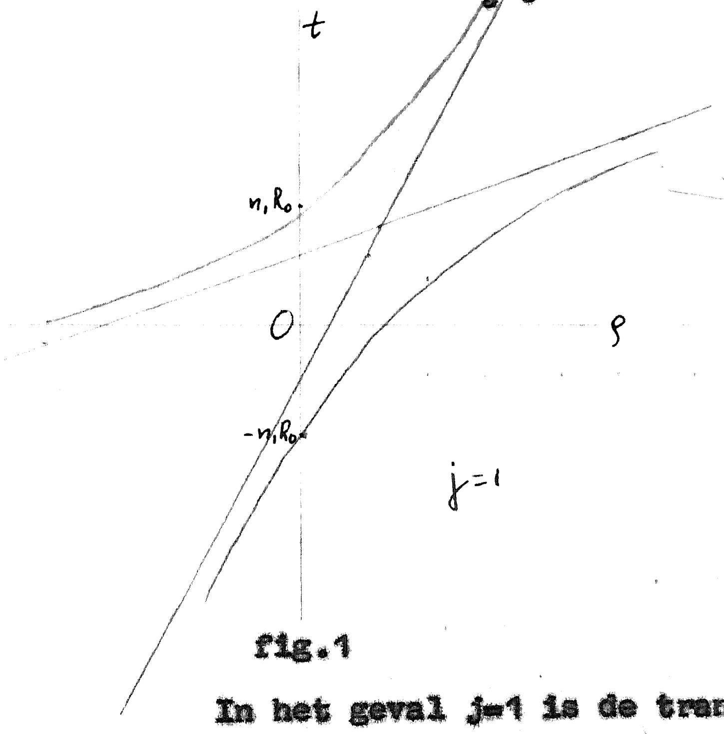

fig.1

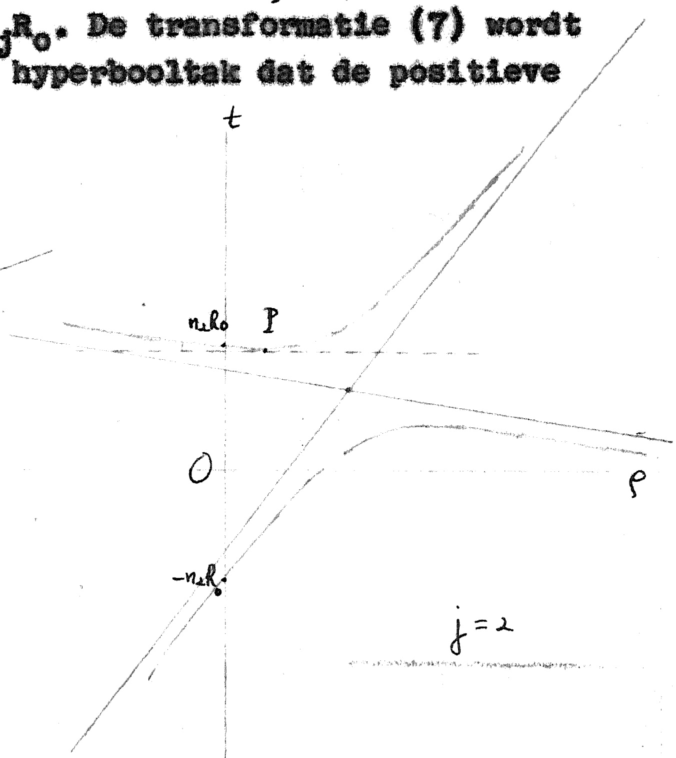

fig.2

In het geval j=1 is de transformatie (7) monotoon, terwijl in het geval j=2 (7) niet monotoon is, wanneer het punt P $\left(\rho_0\cos\varphi - \nu\frac{\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{n_2^2-\nu^2}},\ \nu\rho_0\cos\varphi + \sqrt{n_2^2-\nu^2}\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi}\right)$, waarin de raaklijn horizontaal is, rechts van de t-as ligt. Dit laatste treedt op wanneer $\cos\varphi > \frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}$. Gemakkelijk gaat men na, dat uit (7) en (8) volgt

$$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+R_0^2}} = \frac{n_j\,dt}{\sqrt{\nu t+(n_j^2-\nu^2)\rho-n_j^2\rho_0\cos\varphi}} .$$

Door (8) naar ρ op te lossen vindt men

$$(n_j^2-\nu^2)\rho+\nu t-\rho_0^2 n_j^2\cos^2\varphi = \pm n_j\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_j^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}$$

zodat geldt

(9) $$\frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+R_0^2}} = \pm\frac{dt}{\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_j^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}} .$$

(beide wortels stellen positieve getallen voor).
Het + teken geldt in het geval 1, en in het geval 2, wanneer $\cos\varphi<\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}$, bovendien moet het + teken genomen worden voor $j=2$ op het t-interval $(\nu\rho_0\cos\varphi+\sqrt{n_2^2-\nu^2}\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi},\ \infty)$ wanneer $\cos\varphi>\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}$, terwijl het - teken in dit laatste geval gekozen moet worden voor $\nu\rho_0\cos\varphi+\sqrt{n_2^2-\nu^2}\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi}<t<n_2R_0$
Hiermee is bewezen, dat

(10) $$I_j(\rho_0,z_0)=-\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{n_jR_0}^{\infty}e^{-pt}dt\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_j^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}}$$

voor $j=1$, en voor $j=2$, wanneer tenminste $\nu R_0>n_2\rho_0$ (dan is immers cos φ steeds $<\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}$).

Tenslotte behandelen we het geval $j=2$ en $\nu R_0<n_2\rho_0$.
Dan geldt

(11) $$I_2(\rho_0,z_0)=-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi>\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}}}^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}d\rho-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi<\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}}}^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}d\rho=$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi>\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}}}^{2\pi}d\varphi\int_{t_1}^{n_2R_0}dt-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi>\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}}}^{2\pi}d\varphi\int_{t_1}^{\infty}dt-\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi<\frac{\nu R_0}{n_2\rho_0}}}^{2\pi}d\varphi\int_{n_2R_0}^{\infty}dt,$$

waarin de integrand van het eerste tweetal dubbelintegralen

$$\frac{e^{-p(\rho\nu+n_2\sqrt{R_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2})}}{\sqrt{R_0^2-2\rho\rho_0\cos\varphi+\rho^2}}$$

is, en in het laatste drietal

$$\frac{e^{-pt}}{\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_2^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}} .$$

Verder is

$$t_1=\nu\rho_0\cos\varphi+\sqrt{n_2^2-\nu^2}\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi} .$$

AMSTERDAM

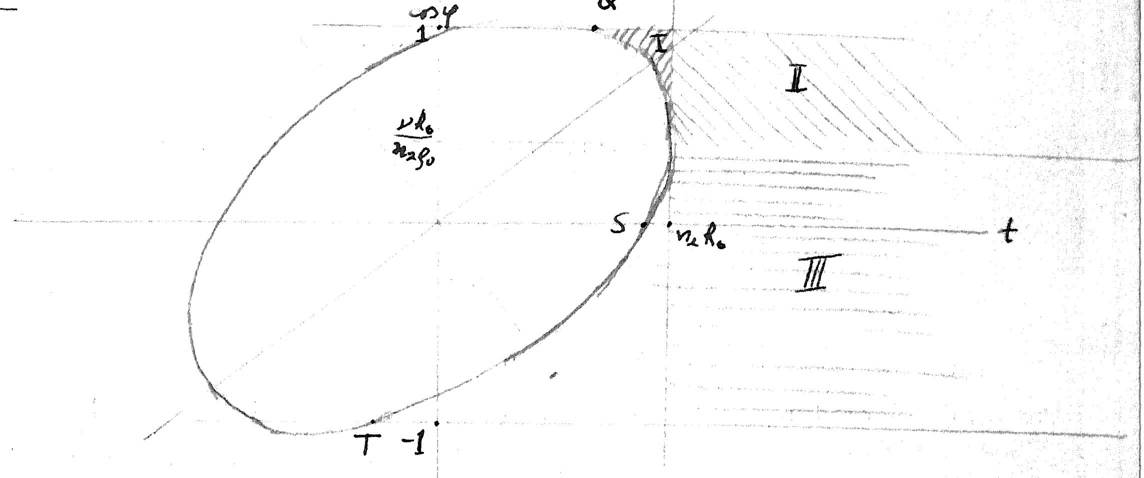

fig.3

In fig.3 is de "ellips"

(12) $$(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_2^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)=0$$

getekend in het t, cos φ -vlak.

(13) $$t=t_1=\nu\rho_0\cos\varphi+\sqrt{n_2^2-\nu^2}\,\sqrt{R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi}$$

is een parametervoorstelling van de boog QST van deze figuur. (Q heeft t-coordinaat $\nu\rho_0+\sqrt{(R_0^2-\rho_0^2)(n_2^2-\nu^2)}$. We zien nu gemakkelijk in, dat de eerste dubbelintegraal in (11) zich uitstrekt over gebied I, de tweede over I+II en de derde over III. We hebben dus twee maal de integraal over I en dan nog de integraal over II+III. Het gebied I kunnen we ook beschrijven door

(14) $$\nu\rho_0+z_0\sqrt{n_2^2-\nu^2}\le t\le n_2R_0\,,\qquad \frac{t\nu+\sqrt{(n_2^2-\nu^2)(n_2^2R_0^2-t^2)}}{n_2^2\rho_0}\le\cos\varphi\,,$$

(los hiertoe (12) naar t op) en het gebied II+III door

(15) $$n_2R_0\le t<\infty$$ (geen beperking voor cos φ).

Het resultaat voor $\nu R_0<n_2\rho_0$ is dus

(16) $$I_2(\rho_0,z_0)=-2\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{\nu\rho_0+z_0\sqrt{n_2^2-\nu^2}}^{n_2R_0}e^{-pt}dt\,\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{0\\ \cos\varphi\ge\frac{t\nu+\sqrt{(n_2^2-\nu^2)(n_2^2R_0^2-t^2)}}{n_2^2\rho_0}}}^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_2^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial z_0}\int_{n_2R_0}^{\infty}e^{-pt}dt\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(t-\nu\rho_0\cos\varphi)^2-(n_2^2-\nu^2)(R_0^2-\rho_0^2\cos^2\varphi)}}.$$

In alle gevallen zijn de φ -integralen volledige elliptische van de eerste soort.