STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-004

De stelling van Cauchy uit de functietheorie

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht".

Dr. T.A. Springer

MC

1956

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Dr T.A. Springer

28 februari 1956

De stelling van Cauchy uit de functietheorie.

In deze voordracht zullen enige opmerkingen worden gemaakt over de topologische begrippen en eigenschappen die een rol spelen bij de fundamentele stelling van Cauchy uit de functietheorie. We willen laten zien, hoe en waar de topologische kwesties te voorschijn komen, en hoe men ze kan aanpakken. We zullen meestal niet op bewijzen kunnen ingaan, daarvoor kan worden verwezen naar de volgende boeken:

Knopp, The theory of functions, I, New York, 1945;
Saks-Zygmund, Analytic functions, Warszawa-Wroclaw 1952;
Ahlfors, Complex analysis, New York, 1953;
Newman, Topology of plane sets of points, Cambridge, 1939.

Eerst een aantal begrippen die we nodig hebben.

Kromme k in verzameling G van het complexe vlak: continue functie $k(t)$, gedefinieerd op $0 \leq t \leq 1$, met complexe waarden $k(t) \in G$. $k(0)$ = beginpunt van k, $k(1)$= eindpunt van k. k heet gesloten als $k(0) = k(1)$.

Regelmatige kromme in G: k heeft een afgeleide, die continu is behalve in eindig veel punten, waar niettemin de afgeleide links- en rechtscontinu is. Voorbeeld: gebroken lijnsegment, d.i. kromme waarbij k bij gedeelten lineair is.

Gebied in het complexe vlak: open verzameling met de eigenschap, dat bij ieder paar $a,b \in G$ een gebroken lijnsegment te vinden is met beginpunt a en eindpunt b.

Holomorfe functie in een gebied G: functie met complexe waarden, gedefinieerd in G, die differentieerbaar is (als complexe functie) in ieder punt van G.

Wanneer G een gebied is en f een holomorfe functie in G, dan definieert men voor iedere regelmatige kromme k in G de integraal van f langs k door

$$\int_k f(z)\, dz = \int_0^1 f(k(t))\, k'(t)\, dt.$$

De stelling van Cauchy beweert nu dat voor zekere gesloten kromme k

$$(1) \qquad \int_k f(z)\, dz = 0.$$

De veronderstellingen die bij een algemene formulering over G en (of) k gemaakt moeten worden zijn van topologische aard.

Het bewijs van deze stelling valt meestal uiteen in een analytisch en een topologisch deel. Het analytische deel is het bewijs voor het geval dat k een driehoek is (d.w.z. een gesloten gebroken lijnsegment dat uit 3 stukken bestaat) en dat G deze driehoek en zijn inwendige bevat. Het standaardbewijs is van Goursat en berust op achtereenvolgende vierendeling van de driehoek (zie Knopp, p.49, voor een rechthoek in plaats van een driehoek zie Ahlfors, p.88). Hierover willen we het echter niet hebben.
We vermelden nog een toepassing van (1) voor het geval van een driehoek k. Stel dat G een gebied is en k een willekeurige kromme in G. Men kan dan voor iedere holomorfe f in G definiëren een integraal $\int f(z)dz$. Neem nl. een aantal getallen $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$. De t_i bepalen (n+1) punten $k(t_i)$ in G $(i=0,1,\ldots,n)$, en deze bepalen een veelhoek (gesloten gebroken lijnsegment) k'. k' is, onnauwkeurig gezegd, een ingeschreven veelhoek van k. Men kan dan bewijzen met (1) voor het geval in een driehoek k, dat als $|t_{i+1}-t_i|$ kleiner is dan een alleen van G en k afhankelijk getal, de integraal $\int_{k'} f(z)dz$ niet van k' afhangt maar alleen van k. Men definieert dan $\int_k f(z)dz = \int_{k'} f(z)\,dz$. (Newman, p.151).

Men moet nu uitgaande van de stelling van Cauchy voor het eenvoudige geval een bewijs geven voor algemenere situaties. Hierbij komen topologische kwesties te voorschijn. Allereerst bij de veronderstellingen die moeten worden gemaakt over G en k, opdat (1) geldt. We noemen er enkele:

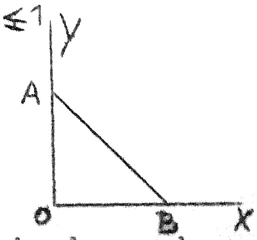
(I) G is willekeurig, k is samentrekbaar in G,

(II) G is enkelvoudig samenhangend, k willekeurig in G,

(III) k is een Jordankromme, G is een gebied dat k en het binnengebied van k bevat.

Definities van de gebruikte begrippen:

Samentrekbare kromme in een gebied G. Laat Δ de driehoek zijn in het x,y-vlak, gedefinieerd door $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$. Men kan dan de rand van Δ continue afbeelden op het lijnsegment $0\leq t\leq 1$ door OB, BA, AO lineair af te beelden op $0\leq t\leq\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}\leq t\leq\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\leq t\leq 1$ in de goede volgorde. Noem die afbeelding φ.



De gesloten kromme k in G heet samentrekbaar in G, als er een continue afbeelding F van Δ in G is zo dat voor punten x op de rand van Δ geldt $F(x) = f(\varphi(x))$. Onnauwkeurig uitgedrukt: k is de rand van een kromme driehoek in G. Door die driehoek te laten inkrimpen kan men die rand in G laten samentrekken op een punt.

<u>Enkelvoudig samenhangend gebied</u>. Men kan dit op verschillende manieren definieren.

(a) G heet enkelvoudig samenhangend, als iedere gesloten kromme in G samentrekbaar is,

(b) G heet enkelvoudig samenhangend, als het complement van G, d.i. de verzameling der punten van het complexe vlak die niet tot G behoren, samenhangend is.

Deze definities blijken equivalent te zijn. Een topologisch bewijs van die equivalentie staat in Newman, Ch.VI, het kan ook analytisch worden bewezen (Ahlfors, p.220). De bewijzen zijn overigens verre van triviaal.

<u>Jordankromme</u>. De kromme k in het complexe vlak heet een Jordankromme, als k een éénéénduidige functie is, d.w.z. dat $k(t) \neq k(u)$ voor $t \neq u$.

<u>De stelling van Jordan</u> zegt dan, dat het complement van k bestaat uit 2 gebieden. Een van de twee gebieden bevat de punten die ver weg liggen, in het complexe vlak, dat heet het <u>buitengebied</u> van k. Het andere heet het <u>binnengebied</u> van k. De bewijzen van de stelling van Jordan zijn geen van alle eenvoudig, er moet al dan niet expliciet van algebraïsche topologie gebruik worden gemaakt. Men kan een vrij eenvoudig bewijs vinden in Newman (p.104). Daarbij worden roosters in het complexe vlak gebruikt, verkregen door lijnen evenwijdig aan de assen te trekken, eigenschappen van k worden in verband gebracht met eigenschappen van gebroken lijnsegmenten, opgebouwd uit horizontale en verticale lijntjes van zo'n rooster.

Al naar gelang van de veronderstellingen die men maakt over G en k, zal in het bewijs van (1) meer of minder topologie moeten worden gebruikt. Wanneer men bv. veronderstelling (III) maakt, heeft men de stelling van Jordan nodig. Bovendien kan men nog in meerdere of mindere mate van functietheoretische eigenschappen gebruik maken.

We zullen nu enkele bewijzen van (1) zeer kort bespreken.

(a) Onder de veronderstelling (I) (G willekeurig, k samentrekbaar in G) kan men een eenvoudig bewijs geven op de volgende manier. k is de rand van een kromme driehoek. Voor die driehoek kan men het bewijs van Goursat voor het geval van een "rechte" driehoek imiteren, wat geen moeilijkheden oplevert. Men heeft dan meteen een bewijs van geval (II), tenminste met definitie (a) van enkelvoudige samenhang. Ook geval (III) kan dan worden bewezen, maar met zwaardere topologische hulpmiddelen. Men moet nl. gebruiken de equivalentie van de twee definities van enkelvoudige samenhang, en bovendien dat het binnengebied van k en k zelf bevat zijn in een enkelvoudig samenhangend deelgebied van G (Newman, p.154).

(b) Vaak wordt een bewijs van (II) gegeven op de volgende manier. Men gaat uit van (1) voor het geval van een rechte driehoek. Daarna bekijkt men een veelhoek k, en men laat zien, dat men de integraal $\int_k f(z)dz$ kan schrijven als de som van een eindig aantal integralen $\int_{k'} f(z)dz$, waarin k' een driehoek is, die met zijn inwendige in G ligt (zie b.v. Knopp, §13). Daaruit volgt dan gemakkelijk het algemene geval (II).
De mogelijkheid van de splitsing in driehoeken moet natuurlijk bewezen worden, en vergt nogal wat werk, hierbij speelt de enkelvoudige samenhang natuurlijk ook een rol.
(c) Een gemoderniseerde versie van dit bewijs wordt gegeven in Ahlfors (p.116). Daarbij wordt gebruik gemaakt van rechthoeken met zijden evenwijdig aan de assen in plaats van driehoeken. Essentiëel is hier verder het topologische begrip index i van een punt a t.o.v. een kromme k die niet door a gaat. Dit is een geheel getal dat analytisch wordt gedefinieerd, nl. door $i = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{dz}{z-a}$. Dat het een geheel getal is kan eenvoudig worden bewezen (Ahlfors, p.93), men kan het opvatten als het algebraïsche aantal malen dat k om a loopt.
Het gebruik van dit begrip maakt het mogelijk een vrij eenvoudig bewijs te geven van (II) (met definitie (b) van enkelvoudige samenhang).
(d) In geval (II) kan een nog meer analytisch bewijs worden gegeven (Saks-Zygmund, p.177), met definitie (b) van enkelvoudige samenhang. Eerst wordt een algemene functietheoretische stelling (van Runge) bewezen, waaruit volgt, dat men in een begrensd enkelvoudig samenhangend gebied G bij een holomorfe functie f een rij veeltermen f_n kan vinden die op iedere compacte deelverzameling van G gelijkmatig naar f convergeert. Daaruit volgt dat $\int_k f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_k f_n(z)dz$. Nu is voor veeltermen de stelling van Cauchy heel eenvoudig te bewijzen, daaruit volgt dan (1).

Nog enkele opmerkingen naar aanleiding van deze bewijsmethoden:

(1) Men ziet, dat men topologische moeilijkheden kan vermijden door meer analytische hulpmiddelen te gebruiken: bewijs (d), en ook (c). Dat dit mogelijk is, is niet verwonderlijk als men denkt aan de stellingen van de Rham uit de topologie.
(2) Een bewijs waarbij triangulatiekwesties nodig zijn, zoals (b) en in veel mindere mate (c), geeft nogal wat details, die waarbij geen triangulaties worden gebruikt, zijn soms eenvoudiger ((a)). Vergelijk dit met de tendens om in de theorie van de Riemann oppervlakken methoden te gebruiken, waarbij de triangulatie van het Riemann-oppervlak wordt vermeden (zie b.v. de inleiding van H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 3e druk, Stuttgart, 1955).