TW

stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE TN 60/71 JUNI

T. ZWAAGSTRA-EERBEEK

# DE STRALENREEKSMETHODE

TW

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

## §1. Doel van de stralenreeksmethode

De stralenreeksmethode is een methode om oplossingen te vinden van de golfvergelijking. We kunnen te maken hebben met de scalaire golfvergelijking:

$$(1.1) \qquad \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = - F(x,y,z,t).$$

Deze vergelijking beschrijft acoustische problemen en golfverschijnselen waarbij u bijvoorbeeld het drukverschil in een gas is of de uitwijking van een punt uit de evenwichtspositie. $F(x,y,z,t)$ is het totaal van uitwendige krachten, die op het systeem werken en c is de voortplantingssnelheid van de trilling. De vectoriële golfvergelijking, waarbij $u(x,y,z,t)$ en $F(x,y,z,t)$ in (1.1) door de vectoren $\vec{u}(x,y,z,t)$ en $\vec{F}(x,y,z,t)$ vervangen worden, beschrijft seismische problemen waar $\vec{u}$ de verplaatsingsvector voorstelt van een P-golf (primaire of dilatiegolf) of van een S-golf (secondaire of schuifgolf). De golfvergelijking voor de P-golven en S-golven wordt afgeleid uit de bewegingsvergelijking voor een homogeen elastisch medium:

$$(1.2) \qquad \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\ \nabla(\nabla.\vec{u}) = \rho\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - \rho\vec{F},$$

waarbij $\lambda$ en $\mu$ de zgn. constanten van Lamé zijn, $\rho$ de dichtheid van het medium en $\vec{u}$ de verplaatsingsvector. Door respectievelijk van vergelijking (1.2) de divergentie en de rotatie te nemen krijgen we de vergelijkingen:

$$(1.3) \qquad (\lambda+2\mu)\ \Delta\theta - \rho\ \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -\ \rho\ \nabla\cdot\vec{F}$$

$$(1.4) \qquad \mu\Delta(\nabla\times\vec{u}) - \rho\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\ (\nabla\times\vec{u}) = -\ \rho\ \nabla\times\vec{F},$$

d.w.z. de scalargrootheid $\theta = \nabla\cdot\vec{u}$ en de vector $\nabla\times\vec{u}$ voldoen resp. aan de scalaire en vectoriële golfvergelijking, met voortplantingssnelheden $c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ en $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . Elke vector $\vec{u}$ kan als volgt geschreven worden

$$(1.5) \qquad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \text{ waarbij geldt } \nabla\times\vec{u}_1 = \vec{0} \quad \text{en} \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0.$$

Substitutie van (1.5) in (1.2) geeft dan als resultaat, na weer de divergentie en rotatie van (1.2) genomen te hebben:

$$\begin{cases} \Delta\vec{u}_1 - \dfrac{1}{c_p^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{u}_1 = -\vec{F} & (1.6) \\[2ex] \Delta\vec{u}_2 - \dfrac{1}{c_s^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{u}_2 = -\vec{F}\,. & (1.7) \end{cases}$$

We kunnen nu twee soorten trillingen onderscheiden, de P-golven. Voor deze golven geldt $\nabla\times\vec{u} = 0$ en de voortplantingssnelheid is $c = c_p$. Verder hebben we de S-golven, voor deze golven geldt $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ en de voortplantingssnelheid is $c = 0_s$. Uit $\nabla\times\vec{u} = 0$ resp. $\nabla\cdot\vec{u} = 0$ volgt dat de P-golven trillingen zijn in de voortplantingsrichting van de golf en dat de S-golven trillingen zijn loodrecht op de voortplantingsrichting.

De vectoriële golfvergelijking treedt ook op bij electromagnetische problemen. Als uitgangspunt bij deze problemen nemen we de Maxwell vergelijkingen voor een niet geleidend isotroop medium:

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \nabla\times\vec{E} + \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \vec{0} \\[2ex] \nabla\times\vec{H} - \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{0} \\[2ex] \nabla\cdot\vec{H} = 0, \; \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho/\varepsilon. \end{cases}$$

$\vec{E}$ - electrische veldsterkte

$\vec{H}$ - magnetische veldsterkte

$\varepsilon$ - electrische constante

$\mu$ - magnetische permeabiliteit

$\rho$ - electrostatische dichtheid.

Uit $\nabla\cdot\vec{H} = 0$ volgt dat we $\vec{H}$ als volgt kunnen schrijven $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}$. Substitutie hiervan in de eerste vergelijking van (1.8) geeft

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = \vec{0}$$

m.a.w.

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

waarbij $\phi$ een scalar is.
Substitutie van deze gegeven in de eerste twee vergelijkingen van (1.8) en gebruik making van de laatste twee verg. van (1.8) leveren dan als resultaten de volgende golfvergelijkingen:

$$\begin{cases} \Delta\phi - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho/\varepsilon \\ \Delta\vec{H} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0 \\ \Delta\vec{A} - \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0. \end{cases}$$

Het doel van de stralenreeksmethode is om oplossingen van de golfvergelijking te beschouwen, die niet analytisch zijn langs bepaalde bewegende oppervlakken $t = \tau(x,y,z)$, de zogenaamde golffronten. We kunnen de oplossing $u(x,y,z,t)$ in de buurt van een golffront als volgt schrijven:

$$(1.9) \qquad u(x,y,z,t) = A(x,y,z,t)\, f(t-\tau(x,y,z)) + h(x,y,z,t)$$

waarbij $A(x,y,z,t)$ en $h(x,y,z,t)$ analytische functies zijn in de omgeving van het golffront. De funtie $f(s)$ is discontinu op $s = 0$ en beschrijft de soort discontinuïteit op het golffront. Stel bijvoorbeeld

$$(1.10) \qquad f(s) = \frac{H(s)}{\sqrt{\pi s}},$$

met

$$H(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$$

De physische betekenis van $f(s)$ is het volgende, voor $t < \tau$, d.w.z. voor het golffront is er geen verstoring en achter het golffront treedt er een uitwijking op. Omdat $A(x,y,z,t)$ een analytische functie is in de omgeving van het golffront, kan $A$ in een Taylorreeks ontwikkeld worden voor $t = \tau(x,y,z) + s$.

$$A(x,y,z,\tau+s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^k A}{\partial t^k}\right|_{t=\tau} \frac{s^k}{k!} \,.$$

Dus we kunnen $u(x,y,z,t)$ als volgt schrijven:

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,z)\, f_k(t-\tau(x,y,z)) \tag{1.11}$$

waarbij geldt:

$$u_k(x,y,z) = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left.\frac{\partial^k A}{\partial t^k}\right|_{t=\tau}$$

$$f_k(s) = \frac{2^{2k}\, k!}{\sqrt{\pi}(2k)!}\, s^{k-\frac{1}{2}}\, H(s) = \frac{2^{2k}\, k!}{\sqrt{\pi}(2k)!}\, s_+^{k-\frac{1}{2}} \,.$$

De funties $f_k(s)$ voldoen aan de volgende relatie:

$$f_k'(s) = f_{k-1}(s). \tag{1.12}$$

De oplossing $u$ in de vorm (1.11), waarbij $f_k(s)$ aan (1.12) voldoet, kan voor elke gegeneraliseerde functie $f(s)$ verkregen worden (zie bv. Courant & Hilbert - Methods of mathematical physics, vol. II, p. 618 e.v.). De reeks (1.11) heet een stralenreeks. De reeks (1.11) convergeert voor voldoende kleine waarden van $s$, d.w.z. in de naaste omgeving van het golffront en als de functie $\tau(x,y,z)$ analytisch is. (Zie voor het bewijs van de convergentie van de stralenreeks het boek Soundpulses van F.G. Friedlander, p. 63.)
De oplossing van de golfvergelijking in de vorm van een stralenreeks is ook mogelijk voor problemen met een harminische tijdsafhankelijkheid $e^{i\omega t}$, met hoge frequentie $\omega$. We beschouwen nu een oplossing in de vorm:

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z,\omega)\; e^{i\omega(t-\omega)} \qquad \text{voor grote } \omega.$$

Als v voor $\omega \to \infty$ naar negatieve machten van $\omega$ ontwikkeld kan worden, d.w.z.

$$v(x,y,z,\omega) \sim \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x,y,z)\; \omega^{-k},$$

dan kunnen we schrijven

$$u(x,y,z,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,z)\; f_k(t-\tau)$$

waarbij

$$u_k = i^k\, v_k, \quad f_k(t) = e^{i\omega t}\; (i\omega)^{-k}.$$

De oplossing $u(x,y,z,t)$ is hier nu in de vorm (1.11) en (1.12) geschreven. Substitutie van de stralenreeks

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,z)\; f_k(t-\tau(x,y,z)) \\ f_k'(s) = f_{k-1} \end{cases}$$

in de scalaire golfvergelijking $\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0$ geeft als resultaat

$$(1.13) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta u_k\, f_k - 2\, \nabla u_k.\nabla\tau\; f_{k-1} - u_k(\nabla\tau)^2\, f_{k-2} - u_k\, \Delta\tau\, f_{k-1} - \frac{1}{c^2}\, u_k\, f_{k-2}) = 0.$$

We stellen de coëfficiënten van $f_k(k=-2,-1,0,1,\ldots)$ gelijk aan nul. De coëfficiënt van $f_{-2}$ geeft

$$(1.14) \qquad (\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2}\;.$$

Deze vergelijking heet de eikonaalvergelijking. Uit deze vergelijking zijn de vergelijkingen van de golffronten $\tau(x,y,z)$ te bepalen.

Uit (1.13) volgt verder de recurrente betrekking

$$(1.15) \qquad 2\nabla u_{k+1}\cdot\nabla\tau + u_{k+1}\,\Delta\tau = \Delta u_k, \quad k = -1, 0, 1, \ldots, u_{-1} = 0.$$

Deze vergelijking is de zgn. transportvergelijking, hieruit zijn successievelijk de $u_k$-waarden te bepalen, als $\tau$ uit (1.14) berekend is. Het uitgangspunt bij de stralenreeksmethode is dus het oplossen van de eikonaalvergelijking en de transportvergelijking, i.p.v. de golfvergelijking. In 1953 heeft E.T. Kornhauser de stralentheorie toegepast op de bewegingsvergelijking voor een bewegende vloeistof, dit leidde tot de gegeneraliseerde eikonaalvergelijking, die gelijk is aan de gewone eikonaalvergelijking als de vloeistofsnelheid overal nul is. R. Schiller (1954) hield zich bezig met de stralentheorie voor de bewegingsvergelijking van electromagnetische golven. In 1958 publiceerden F.C. Karal en J.B. Keller een artikel over de oplossing van de bewegingsvergelijking voor een isotroop homogeen en inhomogeen elastisch medium. Zij beschouwden een tijdharmonische oplossing, die ontwikkeld werd naar negatieve machten van de frequentie. Dit leidde tot de eikonaalvergelijking van de geometrische optica. In 1962 heeft H.A. Lang de Karal-Keller theorie toegepast op een explosieve en een roterende bron in een bolvormige holte. In 1950 heeft C.L. Peheris het verband aangetoond tussen de stralentheorie en de normal mode theorie voor het geval dat het aantal stralen en normal modes groot is. Als voorbeeld beschouwde hij een puntbron in een uniform medium begrensd door twee totaal reflecterende oppervlakten. In dit geval zijn de beide representaties van de oplossing exact. Pekeris bewees dat de stralenoplossing de Poisson getransformeerde van de normal mode oplossing was. In 1967 schreef J. Broersma een artikel over asymptotische oplossingen van de homogene Klein-Gordonvergelijking: $c\, u_{xx} - u_{tt} - \lambda^2 b^2(x) u = 0$. Het doel van dit artikel was de juistheid te verifiëren van de uniforme asymptotische oplossing volgens de stralenreeksmethode.

In §2 wordt de stralenreeksmethode behandeld voor de scalaire golfvergelijking in het geval van vlakke golven, cylindergolven en bolgolven. Als voorbeeld wordt het veld van een lijnbron evenwijdig aan de z-as behandeld. In §3 en §4 wordt de stralenreeksmethode toegepast op de bewegingsvergelijking van resp, een homogeen en inhomogeen elastisch medium.

De geometrische optica geeft een nulde orde benadering van de oplossing van een trillingsprobleem. Met behulp van de stralenreeksmethode kunnen we hogere orde termen berekenen, zodat we een nauwkeuriger benadering krijgen. Problemen die met deze theorie behandeld kunnen worden zijn reflectie en breking van golven aan een oppervlak. Als we te maken hebben met diffractie van een golf aan een lichaam krijgen we de volgende verschijnselen.
De stralen van een golf worden gedefiniëerd als de orthogonale trajectoren van de golffronten $t = \tau(x,y,z)$, dit zijn de oppervlakken van gelijke fase. Als een invallende straal raakt aan het oppervlak, splitst de straal zich in het raakpunt in twee delen, één deel gaat verder langs de weg van de invallende straal. Het andere deel gaat langs het oppervlak van het lichaam als oppervlakte straal, deze straal gaat langs een zgn. geodesic of korste weg op het oppervlak. In elk punt van het oppervlak splitst de straal zich weer, één deel gaat langs het oppervlak verder en het andere deel verlaat het oppervlak langs de raaklijn aan de oppervlakte straal. Deze zgn. diffractiestralen dringen dus in het schaduwgebied door. Daar deze verschijnselen van nogal ingewikkelde aard zijn, heb ik de stralenreeksmethode op deze problemen niet toegepast.

## §2. Stralenreeksmethode voor de golfvergelijking

Substitutie van een oplossing u in de vorm van een stralenreeks

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u(x,y,z,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x,y,z)\ f_k(t-\tau(x,y,z)) \\ \\ f_k'(s) = f_{k-1}(s) \end{cases}$$

in de golfvergelijking

$$(2.2)\qquad \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

gaf als resultaat de eikonaalvergelijking en de transportvergelijking, zoals we in §1 gezien hebben:

$$(2.3)\qquad (\nabla\tau)^2 = \frac{1}{c^2}$$

$$(2.4)\qquad 2\nabla u_{k+1}\cdot\nabla\tau + u_{k+1}\,\Delta\tau = +\Delta u_k, \quad k = -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ u_{-1} = 0.$$

Uit deze vergelijkingen zijn de vergelijkingen van de golffronten te bepalen en de waarden $u_k$.
Als s de booglengte is en v een of andere parameter langs de straal, kunnen we m.b.v. de relaties

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial\tau}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial\tau}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial\tau}{\partial z}$$

(d.w.z. raaklijn a/d straal $\perp$ golffront)
en $\Delta s = c\Delta\tau$ de betrekking $\frac{dv}{ds} = c$ afleiden.
M.b.v. deze relaties krijgen we

$$(2.5)\qquad \nabla u_n\cdot\nabla\tau = \frac{1}{c}\frac{du_n}{ds}\ .$$

De transportvergelijking is nu als volgt te schrijven:

$$\frac{2}{c}\frac{du_{n+1}}{ds} + u_{n+1}\,\Delta\tau = +\Delta u_n, \qquad n = -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\quad u_{-1} = 0. \tag{2.6}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking langs een straal is:

$$u_n(s) = u_n(s_0)\ \exp\{-\frac{c}{2}\int_{s_0}^{s} \Delta\tau d\sigma\} + \frac{c}{2}\int_{s_0}^{s} \exp\{-\frac{c}{2}\int_{s'}^{s} \Delta\tau d\sigma'\}\Delta u_{n-1} ds'$$

of wel:

$$u_n(s) = u_n(s_0)\ \{\frac{G(s)}{G(s_0)}\}^{\frac{1}{2}} + \frac{c}{2}\ \{G(s)\}^{\frac{1}{2}}\int_{s_0}^{s} \{G(s')\}^{-\frac{1}{2}}\ \Delta u_{n-1}(s')ds' \tag{2.7}$$

waarin G(s) de Gaussische kromming is.

Als we ons beperken tot vlakke golven, d.w.z. golven waarvan de stralen evenwijdige rechten zijn, is $G(s) = 1$. Stel de stralen zijn evenwijdig aan de x-as, dus $\tau = \pm \frac{x}{c}$ + constante. Er geldt nu $\Delta\tau = 0$, dus (2.7) wordt:

$$u_n(x,y,z) = u_n(x_0,y,z) + \frac{c}{2}\int_{x_0}^{x} \Delta u_{n-1} dx, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ u_{-1} = 0. \tag{2.8}$$

Hieruit volgt dat $u_0(x,y,z)$ onafhankelijk van x is,

$$u_0(x,y,z) = u_0(x_0,y,z). \tag{2.9}$$

Met behulp van volledige inductie vinden we dat $u_n$ als volgt geschreven kan worden:

$$u_n(x,y,z) = \sum_{j=0}^{n} f_{jn}(y,z)x^j. \tag{2.10}$$

Substitutie van (2.10) in (2.7) geeft:

$$\sum_{j=0}^{n} f_{jn}(y,z)x^j = u_n(x_0,y,z) + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{n-2} (j+1)\ f_{j+1,n-1}(y,z)x^j$$
$$+ \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,x^j\ \Delta f_{j-1,n-1}(y,z) - \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{n-2} (j+1)\ f_{j+1,n-1}(y,z)x_0^j$$
$$- \quad \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,x_0^j\ \Delta f_{j-1,n-1}(y,z).$$

Door de coëfficiënten van gelijke machten van x in het linker lid gelijk te stellen aan die in het rechter lid krijgen we de volgende recursieformules:

$$(2.11)\quad \begin{cases} f_{jn} = +\frac{c}{2}\{j^{-1}\,\Delta f_{j-1,n-1} + (j+1)\,f_{j+1,n-1}], & 1 \le j \le n-2 \\ f_{jn} = +\frac{c}{2}\,j^{-1}\,\Delta f_{j-1,n-1} & j = n-1,\ n \\ f_{0n} = u_n(x_0,y,z) - \sum\limits_{j=1}^{n} f_{jn}(y,z)x_0^j & n \ge 1. \end{cases}$$

De asymptotische ontwikkeling van een vlakke golf luidt dus:

$$(2.12)\qquad u(x,y,z,t) = \exp\{i\omega(t-\tfrac{x}{c})\}\sum_{n=0}^{\infty}(i\omega)^{-n}\sum_{j=0}^{n} f_{jn}(y,z)x^j,$$

waarbij $f_{jn}$ aan (2.11) voldoet.

Voor cylindergolven in twee dimensies hebben we als golffronten de concentrische cirkels $\tau = \pm\frac{r}{c}$ + constante en als stralen de rechte lijnen $\theta$ = constant.

In dit geval geldt $G(r) = r^{-1}$. Voor n = 0 krijgen we uit (3.5)
$u_0(r,\theta) = r_0^{\frac{1}{2}}\,u_0(r_0(\theta),\theta)r^{-\frac{1}{2}}$.

Met behulp van volledige inductie vinden we voor $u_n$

$$(2.13)\qquad u_n(r,\theta) = \sum_{j=0}^{n} f_{jn}(\theta)r^{-\frac{1}{2}-j}.$$

Door (2.13) in (2.7) te substitueren en de coëfficiënten van overeenkomstige machten van r in beide leden van de vergelijking aan elkaar gelijk te stellen, krijgen we de volgende recursieformules:

$$(2.14)\quad \begin{cases} f_{jn}(\theta) = +\frac{c}{2j}\{(j-\tfrac{1}{2})^2\,f_{j-1,n-1} + f''_{j-1,n-1}\} & j \ne 0,\ n \ge 1, \\ f_{0n}(\theta) = r_0^{\frac{1}{2}}\,u_n(r_0(\theta),\theta) - \sum\limits_{j=1}^{n} r_0^{-j}\,f_{jn} & n \ge 1 \end{cases}$$

Voor een cylindergolf krijgen we dus als oplossing

$$(2.15) \qquad u(r,\theta,t) = r^{-\frac{1}{2}} \exp\{i\omega(t - \frac{r}{c})\} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} f_{jn}(\theta) r^{-j}$$

waarbij $f_{jn}$ aan (2.14) voldoet.
Tenslotte beschouwen we bolgolven. De golffronten van deze golven zijn concentrische bollen,de stralen zijn rechte lijnen, die afkomstig zijn uit een punt.
Er geldt $G(r) = r^{-2}$ en $\tau = \pm \frac{r}{c}$ + constante. Er volgt uit (2.7) voor $n = 0 \quad u_0(r,\theta,\phi) = r^{-1} r_0(\theta,\phi)\, u_0(r_0(\theta,\phi),\theta,\phi)$.
De Laplace operator wordt in bolcoördinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\}$$

waarbij

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$$

We kunnen $u_n(r,\theta,\phi)$ nu als volgt schrijven:

$$(2.16) \qquad u_n(r,\theta,\phi) = \sum_{j=0}^{n} f_{jn}(\theta,\phi)\, r^{-j-1}.$$

Door hetzelfde procédé toe te passen als bij cylindergolven krijgen we de recursieformules:

$$(2.17)\begin{cases} f_{jn} = \frac{c}{2j}\{j(j-1) f_{j-1,n-1} + \frac{1}{\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}) f_{j-1,n-1}\} \\ \hfill j \neq 0,\ n \geq 1 \\ f_{0n} = r_0(\theta,\phi)\, u_n(r_0(\theta,\phi),\theta,\phi) - \sum_{j=1}^{n} f_{jn}\, r_0^{-j} \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

De asymptotische ontwikkeling van een bolgolf wordt dus gegeven door:

$$(2.18) \qquad u(r,\theta,\phi,t) = r^{-1} \exp\{i\omega(\pm \frac{r}{c} + t)\} \sum_{n=0}^{\infty} (i\omega)^{-n} \sum_{j=0}^{n} f_{jn}(\theta,\phi) r^{-j},$$

waarbij $f_{jn}$ aan (2.17) voldoet.
De recursieformules (2.11),(2.14) en (2.17) worden respectievelijk verkregen door (2.9), (2.12) en (2.15) in (2.6) te substitueren. Met behulp van de vorige formules is het mogelijk de asymptotische ontwikkeling van de oplossing van een randwaarde probleem te vinden voor de golfvergelijking.
De eerste term in de ontwikkeling is de zgn. oplossing van de geometrische optica. In [ 6 ] wordt deze methode toegepast op de gereduceerde golfvergelijking om diffractieverschijnselen te bestuderen. Hierbij werd aangetoond dat voor sommige gevallen, waarin de exacte oplossing bekend was, de asymptotische ontwikkeling van deze bekende oplossing samen viel met de asymptotische ontwikkeling volgens de stralenreeksmethode.
Als voorbeeld beschouwen we het veld van een lijnbron:
Het veld van een lijnbron evenwijdig aan de z-as in een onbegrensd medium bestaat uit cylindergolven, die cirkelsymmetrie hebben. Cylindergolven worden exact beschreven door $H'_m(\frac{\omega r}{c})\cos m\theta e^{i\omega t}$ en $H^2_m(\frac{\omega r}{c})\cos m\theta e^{i\omega t}$.
Aangezien in de exacte oplossing $\omega$ en $r$ alleen in de combinatie $\omega r$ voorkomen, volgt uit (2.15) dat $f_{jn} = 0$ als $j \neq n$. Uit de cirkelsymmetrie volgt $m = 0$. Formule (2.15) wordt nu:

$$u(r,\theta,t) = A\,\frac{e^{-i\omega r/c+i\omega t}}{\sqrt{\omega r/c}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2i\omega r/c)^n n!}\prod_{j=1}^{n}(j-\tfrac{1}{2})^2\right) =$$

$$= A\,\frac{e^{-i\omega r/c+i\omega t}}{\sqrt{\omega r/c}}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(i\omega r/c)^n}\,\frac{((2n)!)^2}{2^{5n}(n!)^3}\right).$$

Deze ontwikkeling stemt overeen met de bekende ontwikkeling van de Hankelfunctie $H^2_0(\frac{\omega r}{c})$ als $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{1}{4}\pi i}$.
Door uit te gaan van een puntbron in een oneindig medium krijgen we op analoge wijze de asympt. ontwikkeling volgens de stralenreeksmethode van de sferische Besselfunctie. Deze ontwikkeling is exact hetzelfde als de bekende ontwikkeling van de sferische Besselfunctie.
In het geval dat we te maken hebben met willekeurige golven is het mogelijk over te gaan op de zogenaamde stralencoördinator $(\alpha_1,\alpha_2,\tau)$. Elke straal kan gekarakteriseerd worden door twee parameters $\alpha_1$ en $\alpha_2$ en een punt op de straal door $\tau$. Het is duidelijk dat $\alpha_1$ en $\alpha_2$ niet orthogonaal hoeven te zijn, $\tau$ staat wel loodrecht op $\alpha_1$ en $\alpha_2$.

## §3. Homogeen elastisch medium

Uit de elasticiteitstheorie is de wet van Hooke bekend

$$(3.1) \qquad p_{ij} = \lambda\delta_{ij}\, e_{kk} + 2\mu e_{ij} \; ,$$

waarbij $p_{ij}$ de componenten van de spanningstensor zijn en $e_{ij}$ de componenten van de deformatietensor, $\lambda$ en $\mu$ zijn de constanten van Lamé. De componenten $e_{ij}$ hangen als volgt samen met de componenten van de verplaatsingsvector $\vec{u}$:

$$(3.2) \qquad e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad e_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \nabla\cdot\vec{u}.$$

De bewegingsvergelijking van een elemtentair volume element in een oneindig elastisch medium met volumekracht $X$ luidt:

$$(3.3) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\, p_{ij} + \rho X_i = \rho\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \; ,$$

waarbij $\rho$ de dichtheid van het medium is.
Substitutie van (3.1) en (3.2) in (3.3) geeft als resultaat:

$$(3.4) \qquad \rho\, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \rho X = (\lambda+\mu)\; \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\; \nabla\cdot\nabla\vec{u} + \nabla\lambda(\nabla\cdot\vec{u})$$
$$+ \nabla\mu \times (\nabla\times\vec{u}) + 2(\nabla\mu\cdot\nabla)\vec{u}.$$

Voor een homogeen elastisch medium zonder volumekracht wordt vergelijking (3.4)

$$(3.5) \qquad \rho\, \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\; \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\; \nabla\cdot\nabla\vec{u}.$$

We zoeken nu een oplossing $\vec{u}$ in de vorm van een stralenreeks:

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \vec{u}(x,y,z,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k(x,y,z)\; f_k(t-\tau) \\[2ex] f'_k(t) = f_{k-1}(t). \end{cases}$$

Substitutie van (3.6) in (3.5) geeft:

$$(3.7) \qquad \rho\vec{u}_k = (\lambda+\mu)\,(\vec{u}_k\cdot\nabla\tau)\nabla\tau + \mu\,\vec{u}_k(\nabla\tau\cdot\nabla\tau)$$
$$- (\lambda+\mu)\,\nabla(\vec{u}_{k-1}\cdot\nabla\tau) - (\lambda+\mu)\,(\nabla\cdot\vec{u}_{k-1})\,\nabla\tau$$
$$- 2\mu(\nabla\tau\cdot\nabla u_{k-1}) - \mu\,\vec{u}_{k-1}\,\nabla\cdot\nabla\tau$$
$$+ (\lambda+\mu)\,\nabla(\nabla\cdot\vec{u}_{k-2}) + \mu\,\nabla\cdot\nabla\vec{u}_{k-2}.$$

Voor $k = 0, 1, 2, \ldots,\ \vec{u}_{-1} = \vec{u}_{-2} = 0.$

Voor $k = 0$ geeft dit:

$$(3.8) \qquad \rho\vec{u}_0 = (\lambda+\mu)\,(\vec{u}_0\cdot\nabla\tau)\nabla\tau + \mu(\nabla\tau\cdot\nabla\tau)\vec{u}_0.$$

Stel $\vec{u}_0 = \vec{u}_{0\tau} + \vec{u}_{0l}$ met de voorwaarden

$$(3.9) \qquad \nabla\tau \times \vec{u}_{0\tau} = \vec{0}, \quad \nabla\tau\cdot\vec{u}_{0l} = 0,$$

m.a.w. $\vec{u}_{0\tau}$ is een vecor loodrecht op het golffront en $\vec{u}_{0l}$ is een vector evenwijdig aan het golffront. We veronderstellen $\vec{u}_0 \neq \vec{0}$. Door het inproduct van (3.8) met $\nabla\tau$ te nemen en gebruik te maken van (3.9) krijgen we:

$$(3.10) \qquad \{(\lambda+2\mu)\,\nabla\tau\cdot\nabla\tau-\rho\}\,\vec{u}_{0\tau}\cdot\nabla\tau = 0.$$

Door het uitproduct van (3.8) met $\nabla\tau$ te nemen en gebruik te maken van (3.9) krijgen we:

$$(3.11) \qquad \{\mu(\nabla\tau\cdot\nabla\tau) - \rho\}\,\vec{u}_{0l} \times \nabla\tau = 0.$$

De vergelijkingen (3.10) en (3.11) hebben twee soorten oplossingen

$$(3.12)\text{a)} \quad \nabla\tau\cdot\nabla\tau = \frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{c_p^2} \quad \text{en} \quad \text{b)} \quad \vec{u}_{0l} = 0 \qquad \text{I}$$

$$(3.13)\text{a)} \quad \nabla\tau\cdot\nabla\tau = \frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{c_s^2} \quad \text{en} \quad \text{b)} \quad \vec{u}_{0\tau} = 0 \qquad \text{II}$$

De vergelijkingen (3.12a) en (3.13a) zijn van de vorm van de eikonaal-vergelijking, waarbij $c_p$ en $c_s$ respectievelijk de snelheden zijn van een compressiegolf en een schuifgolf. Daar de vergelijkingen (3.12) en (3.13) niet van elkaar afhangen is het mogelijk de $\vec{u}_k$ waarden voor beide gevallen afzonderlijk te berekenen.
Als we geval II beschouwen en in (3.7) k = 1 substitueren, dan krijgen we:

$$\rho\vec{u}_1 = -(\lambda+\mu)\ (\nabla\cdot\vec{u}_0)\nabla\tau + (\lambda+\mu)\ (\vec{u}_1\cdot\nabla\tau)\nabla\tau + \mu\ \vec{u}_1(\nabla\tau\cdot\nabla\tau) - \mu\ \vec{u}_0(\nabla\cdot\nabla\tau) - 2\mu(\nabla\tau\cdot\nabla u_0). \tag{3.14}$$

Door het inproduct van (3.14) met $\nabla\tau$ te nemen en gebruik te maken van (3.13a) krijgen we:

$$\vec{u}_1\cdot\nabla\tau = +\nabla\cdot\vec{u}_0. \tag{3.15}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de relatie

$$\nabla\tau\cdot(\nabla\tau\cdot\nabla\vec{u}_0) = \nabla(\vec{u}_0\cdot\nabla\tau)\nabla\tau = 0 \text{ wegens (3.9)}. \tag{3.16}$$

Substitutie van (3.15) in (3.14) geeft:

$$2(\nabla\tau\cdot\nabla\vec{u}_0) + (\nabla\cdot\nabla\tau)\vec{u}_0 = 0. \tag{3.17}$$

Vergelijking (3.17) is een eerste orde lineaire partiële differentiaal-vergelijking voor $\vec{u}_0$. Op gelijke wijze verkrijgen we een vergelijking voor $\vec{u}_1$ door in (3.7) k = 2 te substitueren:

$$(\lambda+\mu)\ (\vec{u}_2\cdot\nabla\tau)\nabla\tau - (\lambda+\mu)\ (\nabla\cdot\vec{u}_1)\nabla\tau + \mu\ \nabla\cdot\nabla\vec{u}_0 - \mu\ \vec{u}_1(\nabla\cdot\nabla\tau) - 2\mu(\nabla\tau\cdot\nabla\vec{u}_1) = 0. \tag{3.18}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relaties (3.9), (3.13) en (3.15).
Door het inproduct van (3.18) met $\nabla\tau$ te nemen en gebruik te maken van de relatie:

$$\text{(3.19)} \qquad \nabla\tau\cdot\{(\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_1\} = (\nabla\tau\cdot\nabla)\ (\nabla\tau\cdot\vec{u}_1)$$

krijgen we

$$\text{(3.20)} \qquad (\lambda+\mu)\rho\mu^{-1}(\vec{u}_2\cdot\nabla\tau) - (\lambda+\mu)\rho\mu^{-1}\ \nabla\cdot\vec{u}_1 - 2\mu(\nabla\tau\cdot\nabla)\ (\nabla\cdot\vec{u}_0)$$
$$- \mu(\nabla\cdot\vec{u}_0)\ (\nabla\cdot\nabla\tau) + \mu\ \nabla\tau\cdot(\nabla\cdot\nabla)\vec{u}_0 = 0.$$

Substitutie van (3.20) in (3.18) geeft:

$$\text{(3.21)} \qquad 2(\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_1 + (\nabla\cdot\nabla\tau)\vec{u}_1 = + (\nabla\cdot\nabla\vec{u}_0) - \mu\rho^{-1}\ \nabla\tau\{\nabla\tau\cdot(\nabla\cdot\nabla\vec{u}_0)\}$$
$$+ \mu\rho^{-1}\ \nabla\tau\{2(\nabla\tau\cdot\nabla)\nabla\cdot\vec{u}_0 + (\nabla\cdot\nabla\tau)\nabla\cdot\vec{u}_0\}.$$

Vergelijking (3.21) is een inhomogene vergelijking voor $\vec{u}_1$, waarbij de inhomogene term $\vec{u}_0$ bevat. We hadden, daar $\vec{u}_{0\tau} = 0$, $\nabla\tau\cdot\vec{u}_0 = 0$, m.a.w. $\vec{u}_0$ staat loodrecht op de straalrichting, dus $\vec{u}_0$ staat loodrecht op de voortbewegingsrichting. Uit (3.21) volgt dat $\vec{u}_1$ in het algemeen niet loodrecht op de voortbewegingsrichting staat. Als we hetzelfde procedé voor verg. (3.7) toepassen voor $k > 2$ krijgen we een inhomogene vergelijking voor $\vec{u}_k$, waarbij de inhomegene term alleen afhangt van $\vec{u}_{k-1}$ en $\vec{u}_{k-2}$:

$$\text{(3.22)} \qquad 2(\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_k + (\nabla\cdot\nabla\tau)\vec{u}_k = \vec{F}_{k-1}.$$

Het oplossen van de vergelijking (3.22) gaat als volgt.
Volgens (3.4) kunnen we voor $\nabla\tau\cdot\nabla\vec{u}_k$ het volgende schrijven, als $s$ de booglengte langs een straal aangeeft:

$$\text{(3.23)} \qquad \nabla\tau\cdot\nabla\vec{u}_k = \frac{1}{c_s}\ \frac{d}{ds}\ \vec{u}_k.$$

Substitutie van (3.23) in (3.22) geeft een gewone differentiaalvergelijking langs een straal voor $\vec{u}_k$. De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking vinden we op dezelfde wijze als in (2.6) en (2.7) en is:

(3.24) $$\vec{u}_k(s) = \vec{u}_k(s_0)\left\{\frac{G(s)}{G(s_0)}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{c_s}{2}\{G(s)\}^{\frac{1}{2}}\int_{s_0}^{s}\{G(s')\}^{-\frac{1}{2}}\vec{F}_{k-1}(s')ds'.$$

Nu beschouwen we geval I. We hebben dus $\nabla\tau\cdot\nabla\tau = \frac{\rho}{\lambda+2\mu} = \frac{1}{c_p^2}$ en $\nabla\tau\times\vec{u}_0 = 0$. Uit deze laatste vergelijking volgt dat $\nabla\tau$ en $\vec{u}_0$ evenwijdig zijn, m.a.w.

(3.25) $$\vec{u}_0 = \alpha_0\,\nabla\tau.$$

Substitutie van k = 1 in (3.7) gaf verg. (3.14). Door het inproduct te nemen van deze vergl. met $\nabla\tau$ en door gebruik te maken van relatie (3.25) krijgen we:

(3.26) $$2\nabla\tau\cdot\nabla\alpha_0 + \alpha_0\nabla\cdot\nabla\tau = 0.$$

Dit is een vergelijking voor $\alpha_0$, door $\alpha_0$ hieruit op te lossen en in (3.25) te substitueren is $\vec{u}_0$ bekend. Door het uitproduct van vergl. (3.14) met $\nabla\tau$ te nemen en gebruik te maken van (3.12), (3.25) en de relatie

(3.27) $$\nabla\tau\times\{(\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_0\} = 0$$

krijgen we

(3.28) $$\nabla\tau\times\vec{u}_1 = \nabla\tau\times\nabla\alpha_0.$$

Relatie (3.27) volgt uit (3.25). Uit (3.28) volgt dat $\vec{u}_1$ als volgt te schrijven is:

(3.29) $$\vec{u}_1 = \nabla\alpha_0 + \alpha_1\nabla\tau.$$

Door in vergl. (3.7) k = 2 te substitueren en van de verkregen vergelijking het inproduct met $\nabla\tau$ te nemen krijgen we een vergelijking waar $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_0$ in voorkomen. Substitutie van (3.25) en (3.29) geeft dan een relatie voor $\alpha_1$, zodat nu $\vec{u}_1$ bekend is. In het algemeen zal $\vec{u}_1$ niet evenwijdig zijn aan $\nabla\tau$. Algemeen vinden we voor $\vec{u}_k$ een vergelijking van de volgende vorm:

$$(3.30) \qquad \vec{u}_k = \vec{B}_{k-1} + \alpha_k \nabla\tau,$$

waarbij $\alpha_k$ aan de volgende vergelijking voldoet:

$$(3.31) \qquad 2\nabla\tau\cdot\nabla\alpha_k + \alpha_k(\nabla\cdot\nabla\tau) = b_{k-1}.$$

Deze vergelijking heeft dezelfde som als vergl. (3.22), in dit geval hangen $\vec{B}_{k-1}$ en $b_{k-1}$ af van $\alpha_{k-1}$ en $\alpha_{k-2}$. De oplossing van (3.31) wordt door (3.24) gegeven waarbij $c_s$ door $c_p$ en $F_{k-1}$ door $b_{b-1}$ vervangen moeten worden, dus:

$$(3.32) \qquad \alpha_k(s) = \alpha_k(s_0)\left\{\frac{G(s)}{G(s0)}\right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{c_p}{2}\{G(s)\}^{\frac{1}{2}}\int_{s_0}^{s}\{G(s')\}^{-\frac{1}{2}}\, b_{k-1}(s')ds'.$$

De $\vec{u}_k$ is dus nu uit formule (3.30) bekend. We hebben dus nu twee soorten oplossingen van verg. (3.5), die aan de vergelijkingen (3.6) voldoen. Voor de eerste soort opl. hebben we de formules $\nabla\tau\cdot\nabla\tau = \frac{1}{c_s^2}$ en $\vec{u}_{0\tau} = 0$, waarbij de $\vec{u}_k$ waardendoor (3.24) gegeven worden. Voor de tweede soort opl. hebben we $\nabla\tau\cdot\nabla\tau = \frac{1}{c_p^2}$ en $\vec{u}_{0l} = \vec{0}$, waarbij $\vec{u}_k$ gegeven wordt door (3.30). In het algemeen is de oplossing $\vec{u}$ van (3.5) een som van beide soort oplossingen. In deze asymptotische ontwikkeling moeten de beginwaarden $\alpha_n(s_0)$ en $u_n(s_0)$ en $\tau(s_0)$ gegeven zijn. Deze beginwaarden worden in het algemeen bepaald door de randvoorwaarden van het gestelde probleem:

## §4. Inhomogeen elastisch medium

Zoals we in §3 gezien hebben luidt de bewegingsvergelijking voor een inhomogeen elastisch medium:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\ \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\ \nabla\cdot\nabla\vec{u} + \nabla\lambda(\nabla\cdot\vec{u}) + \nabla\mu \times (\nabla\times\vec{u}) + 2(\nabla\mu\cdot\nabla)\vec{u}. \tag{4.1}$$

De oplossingsmethode van (4.1) volgens de stralenreeksmethode gaat analoog aan het oplossen van de bewegingsvergelijking voor een homogeen elastisch medium (3.5). Aangezien in het inhomogene elastische medium de formules aanzienlijk ingewikkelder worden dan in §3, zullen we hier slechts kort weergeven wat de resultaten zijn. We zoeken dus een oplossing van vergelijking (4.1) in de vorm van een stralenreeks (3.6). Substitutie van (3.6) en (4.1) geeft als resultaat:

$$\begin{aligned} &- \rho\vec{u}_k + (\lambda+\mu)\ \nabla\tau(\vec{u}_k\cdot\nabla\tau) + \mu(\nabla\tau)^2\ \vec{u}_k \\ &- (\lambda+\mu)\ (\nabla\vec{u}_{k-1}\cdot\nabla\tau) - \mu\ \vec{u}_{k-1}\nabla\cdot\nabla\tau - \nabla\lambda(\vec{u}_{k-1}\cdot\nabla\tau) \\ &- \nabla\mu \times (\nabla\tau\times\vec{u}_{k-1}) - 2(\nabla\mu\cdot\nabla\tau)\vec{u}_{k-1} + (\lambda+\mu)\ \nabla(\nabla\cdot\vec{u}_{k-2}) \\ &+ \mu\nabla\cdot\nabla\ \vec{u}_{k-2} + \nabla\lambda(\nabla\cdot\vec{u}_{k-2}) + \nabla\mu \times (\nabla\times\vec{u}_{k-2}) \\ &+ 2(\nabla\mu\cdot\nabla)\vec{u}_{k-2} = 0 \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \vec{u}_{-1} = \vec{u}_{-2} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Door in bovenstaande vergelijking $k = 0$ te substitueren krijgen we hetzelfde resultaat als in §3, nl. vergelijking (3.8). Stellen we $\vec{u}_0 = \vec{u}_{0\tau}+\vec{u}_{0l}$ met de voorwaarden (3.9), dan krijgen we in dit geval ook twee soorten oplossingen, nl. (3.12) en (3.13). Daar de $c_p$ en $c_s$ nu geen constanten zijn, zijn de stralen geen rechte lijnen. In het geval dat we te maken hebben met een schuifgolf, dus $\nabla\tau\cdot\nabla\tau = \rho\mu^{-1} = 1/c_s 2$ en $\vec{u}_{0\tau} = \vec{0}$, nemen we het scalaire product van (4.2) met $\nabla\tau$. Voor $k = n+1$ krijgen we dan een uitdrukking voor $\vec{u}_{n+1}\cdot\nabla\tau - \nabla\cdot\vec{u}_n$, door deze uitdrukking weer in (4.2) te substitueren wordt het resultaat een vergelijking van de volgende vorm:

$$(4.3) \qquad 2(\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_n + \frac{1}{\mu}\,[\{\nabla(\rho\mu^{-1})\}\,\circ\,\vec{u}_n] = \vec{G}_{n-1},$$

waarbij $\vec{G}_{n-1}$ alleen afhangt van $\vec{u}_{n-1}$ en $\vec{u}_{n-2}$.
Voor $n=0$, geldt $\vec{G}_{-1} = \vec{0}$, voor $n = 1$ is $\vec{G}_0$ reeds zo ingewikkeld, dat we dit hier niet uit zullen schrijven. Daar $\nabla\tau\cdot\nabla$ de richtingsafgeleide langs een straal is, kunnen we schrijven

$$(4.4) \qquad (\nabla\tau\cdot\nabla)\vec{u}_n = (\rho\mu^{-1})^{\frac{1}{2}}\,\frac{d}{ds}\,\vec{u}_n.$$

Als $\vec{x}(s)$ de straal bepaalt, dan kunnen we de éénheidsraaklijn $\vec{t}$ en de eenheidsnormaal $\vec{n}$ aan de straal als volgt schrijven:

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \vec{t} = \dfrac{d}{ds}\,\vec{x}(s) \\[2ex] \vec{n} = \kappa\,\dfrac{d^2}{ds^2}\,\vec{x}(s) \end{cases}$$

waarbij $\kappa$ de kromte straal is. Met behulp van de relatie $\nabla\tau = \frac{1}{c_s}\frac{d}{ds}\vec{x}(s)$ en (4.5) kunnen we nu de volgende formule afleiden:

$$(4.6) \qquad \nabla(\rho\mu^{-1}) = \nabla(\nabla\tau\cdot\nabla\tau) = 2\,\nabla\tau\cdot\nabla(\nabla\tau) =$$

$$= \frac{2}{c_2}\,\frac{d}{ds}\,\vec{x}(s)\cdot\nabla\Big(\frac{1}{c_s}\,\frac{d}{ds}\,\vec{x}(s)\Big) =$$

$$= \frac{2}{c_s{}^2}\,\frac{d^2}{ds^2}\,\vec{x}(s) + \frac{2}{c_s}\,\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{c_s}\Big)\,\frac{d}{ds}\,\vec{x}(s) =$$

$$= 2\rho\mu^{-1}\,\Big\{\frac{(\sqrt{\rho\mu^{-1}})'}{\sqrt{\rho\mu^{-1}}}\,\vec{t} + \frac{1}{\kappa}\,\vec{n}\Big\}$$

Vergelijking (4.3) kan nu als volgt geschreven worden:

$$(4.7) \qquad \frac{d}{ds}\,\vec{u}_n + \frac{\nabla\cdot(\mu\nabla\tau)}{2\sqrt{\rho\mu}}\,\vec{u}_n + \vec{t}\,\Big[\frac{1}{\sqrt{\rho\mu^{-1}}}\,\frac{d}{ds}\,(\sqrt{\rho\mu^{-1}})\,\vec{t}\cdot\vec{u}_n$$

$$+ \frac{1}{\kappa}\,\vec{n}\cdot\vec{u}_n\Big] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,\vec{G}_{n-1}.$$

Vergelijking (4.7) is een gewone differentiaalvergelijking voor $\vec{u}_n$ langs een straal. Deze vergelijking kan opgelost worden door $\vec{u}_n$ en

$\vec{G}_{n-1}$ uit te drukken in de drie onderling loodrechte eenheidsvectoren $\vec{t}$, $\vec{n}$ en $\vec{b}$, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$ is de binormaal aan de straal $\vec{x}(s)$.

In het geval van een compressiegolf hebben we $\nabla\tau\cdot\nabla\tau = \rho(\lambda+2\mu)^{-1} = 1/c_p^2$ en $\vec{u}_{01} = 0$. Uit (3.9) volgt nu dat $\vec{u}_0$ evenwijdig is aan $\nabla\tau$, dus $\vec{u}_0 = \alpha_0\nabla\tau$. Volgen we hetzelfde procédé als in §3 voor geval I, dan krijgen we voor het inhomogene medium als resultaat:

$$\vec{u}_n = \vec{c}_{n-1} + \alpha_n\nabla\tau, \tag{4.8}$$

waarbij $\alpha_n$ voldoet aan

$$2(\nabla\tau\cdot\nabla)\alpha_n + \frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot(\rho\nabla\tau)\alpha_n = c_{n-1}. \tag{4.9}$$

De $\vec{c}_{n-1}$ en $c_{n-1}$ zijn hier functies van $\alpha_{n-1}$ en $\alpha_{n-2}$.

Daar $\nabla\tau\cdot\nabla$ de richtingsafgeleide langs een straal is kan vergl. (4.9) als volgt geschreven worden:

$$2\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)^{-1}}\,\frac{d}{ds}\,\alpha_n + [\nabla\cdot\nabla\tau + \frac{1}{\rho}\,\sqrt{\rho(\lambda+2\mu)^{-1}}\,\frac{d}{ds}\,\rho]\,\alpha_n = c_{n-1}\,, \tag{4.10}$$

dit is weer een gewone differentiaalvergelijking voor $\alpha_n$ langs een straal. Door $\alpha_n$ uit (4.10) op te lossen en in (4.8) te substitueren, krijgen we de $\vec{u}_n$.

## §5. Toepassingen

De bewegingsvergelijking voor deeltje in een homogeen elastisch medium zonder volumekrachten was:

$$(5.1) \qquad (\lambda+\mu)\ \nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu(\nabla\cdot\nabla)\vec{u} - \rho\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = 0.$$

Als we te maken hebben met een elastische verplaatsing $\vec{u}$, dan kan $\vec{u}$ als volgt geschreven worden:

$$(5.2) \qquad \vec{u} = \nabla\phi + \nabla\times\vec{\psi},$$

waarbij $\phi$ een scalarpotentiaal en $\vec{\psi}$ een vectorpotentiaal is.
Substitutie van (5.2) in (5.1) geeft als resultaat:

$$(5.3) \qquad \nabla(\rho\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}) + \nabla\times(\rho\ \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}) = \nabla((\lambda+2\mu)\nabla\cdot\nabla\phi) + \nabla\times(\mu\nabla\cdot\nabla\vec{\psi}).$$

Door van (5.3) de divergentie en de rotatie te nemen krijgen we respectievelijk de volgende vergelijkingen:

$$(5.4) \qquad \begin{cases} \rho(\lambda+2\mu)^{-1}\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla\cdot\nabla\phi = 0 \\[2ex] \rho\mu^{-1}\ \dfrac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} - \nabla\cdot\nabla\vec{\psi} = 0. \end{cases}$$

Het oplossen van (5.4) gaat analoog aan het oplossen van (3.1), waarbij in dit geval c respectievelijk $\{\rho^{-1}(\lambda+2\mu)\}^{\frac{1}{2}}$ en $\{\rho^{-1}\mu\}^{\frac{1}{2}}$ is.
Een ander veelvoorkomend geval is dat, waar in de verplaatsingsvector $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\lambda$ en $\mu$ niet van y afhangen. Dit is het geval als er een lijnbron evenwijdig aan de y-as is. Zowel voor het homogene als het inhomogene elastische medium heeft dit tot gevolg dat $u_2$ niet afhankelijk is van $u_1$ en $u_3$. De vergelijking (3.5) en (4.1) voor het inhomogene elastische medium geven voor $u_2$ in dit geval als resultaat de volgende vergelijkingen

$$(5.5)\qquad \nabla\cdot\nabla u_2 - \rho\mu^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2 = 0$$

$$(5.6)\qquad \nabla\cdot\nabla u_2 + \frac{1}{\mu}(\nabla\mu\cdot\nabla u_2) - \rho\mu^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2 = 0.$$

$(0,u_2,0)$ is in beide gevallen een schuifgolf met voortplantingssnelheid $c_s = \sqrt{\mu\rho^{-1}}$.

Het oplossen van (5.5) met behulp van de stralenreeksmethode gaat weer analoog aan het oplossen van vergelijking (3.1) volgens deze methode. Substitutie van de stralenreeks

$$\vec{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_k(x,z)\, f_k(t-\tau(x,z)), \quad f_k'(t) = f_{k-1}$$

in de vergelijking

$$(5.7)\qquad \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\mu\nabla\vec{u}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = 0$$

geeft als resultaat

$$\begin{aligned}(5.8)\qquad & -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{c^2}\vec{u}_k f_k + \sum_{k=0}^{\infty}\nabla\tau\cdot\nabla\tau\,\vec{u}_k f_k \\ & -\sum_{k=0}^{\infty}\vec{u}_{k-1}\nabla\cdot\nabla\tau\, f_k + \sum_{k=0}^{\infty}\nabla\cdot\nabla\,\vec{u}_{k-2} f_k \\ & -2\sum_{k=0}^{\infty}\nabla\vec{u}_{k-1}\cdot\nabla\tau\, f_k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\mu}(\nabla\mu\cdot\nabla)\vec{u}_{k-2} f_k = 0,\end{aligned}$$

waarbij $\vec{u}_{-1} = \vec{u}_{-2} = 0$.

Vergelijking (5.7) stelt een schuifgolf voor in een inhomogeen elastisch medium, waarbij $\vec{u}$ niet van y afhangt, dit blijkt direct uit vergl. (5.6). Door de coëfficiënten van $f_k$ in (5.8) nul te stellen krijgen we de resultaten:

$$(5.9)\qquad \begin{cases} \nabla\tau\cdot\nabla\tau = \dfrac{1}{c^2} \\ 2\nabla\vec{u}_0\cdot\nabla\tau + \vec{u}_0\ \nabla\cdot\nabla\tau = 0 \\ 2\nabla\vec{u}_k\cdot\nabla\tau + \vec{u}_k\ \nabla\cdot\nabla\tau = \nabla\cdot\nabla\vec{u}_{k-1} + \dfrac{2}{\mu}\ (\nabla\mu\cdot\nabla)\vec{u}_{k-1} \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \end{cases}$$

De laatste vergelijking van (5.9) stemt inderdaad overeen met het in §4 verkregen resultaat (4.3). Door de opgelegde bepalingen aan dit probleem zijn de verkregen resultaten echter aanzienlijk eenvoudiger dan voor het algemene probleem zoals dat in §4 gesteld is.

Literatuur

1. J. Broersma
Uniform asymptotic solutions of discontinuous initial value problems for dispersive hyperbolic equations.
Quarterly of Applied Mathematics XXV, no. 1, 1967, p. 31-44.

2. R. Courant en D. Hilbert
Methods of mathematical physics, vol. II.

3. F.G. Friedlander
Sound Pulses.

4. F.G. Friedlander en J.B. Keller
Asymptotic expansions of solutions of $(\nabla^2+k^2)\ u = 0$.
Comm. pure appl. math. VIII (1955), p. 387-394.

5. F.C. Karal, en J.B. Keller
Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media.
J. Acoust. Soc. Amer. 31 (1958), p. 694-705.

6. J.B. Keller, R.M. Lewis en B.D. Seckler
Asymptotic solutions of some diffraction problems.
Comm. pure appl. math. IX (1956), p. 207-265.

7. J.B. Keller en B.D. Seckler
Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media.
J. Acoust. Soc. Amer. 31 (1959), p. 206-216.

8. E.T. Kornhauser
Ray theory for moving fluids.
J. Acoust. Soc. Amer. 25 (1953), p. 945-949.

9. H.A. Lang
Two verifications of the Karal-Keller theory of wave propagation.
J. Acoust. Soc. Amer. 34 (1962), p. 785-788.

10. M.P. van Ouwerkerk-Dijkers

SH-waves in a half-space with linearly increasing propagation velocity.
TW 118.

11. C.L. Pekeris

Ray theory vs. normal mode theory in wave propagation problems.

12. C.L. Pekeris en J.M. Longman

Ray theory solutions of the problem of propagation of explosive sound in a layered liquid.
J. Acoust. Soc. Amer. 30 (1958), p. 323-328.

13. R. Schiller

New transition to ray optics.
Phys. review, 97 (1955), p. 1421-1428.

14. T.B. Yanovskaya

Approximate methods in elastic wave theory.