STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

TC 4.

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950

Handleiding bij de syllabus.

Corput J.G.van der,Veen S.C.van.

1947

Asymptotische Ontwikkelingen, Handleiding bij de syllabus

§ 1. Inhoud syllabus op 16 October 1947

pag. 1, 1a, 1b, 3, 3a, 4a, 5a, 6a, 6b, 6c, 6d, 7, 7a, 7b, 7c, 7d, 8, 8a, 8b, 8c, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

§ 2. Correcties en aanvullingen.

pag. 1 — § 1,2 vervalt, voor zover staande op pag. 1

pag. 1b — regel 7 v.b. " $a_k = \omega$ of $\frac{1}{k}$ " wordt " $a_k = \omega$ of 0 ".

pag. 3 — regel 15 v.o. : achter: "tot nul nadert" een noot, luidende "Een reeks kan gewoon convergent en tegelijk asymptotisch divergent zijn, kan gewoon divergent en tegelijk asymptotisch convergent zijn, kan zowel gewoon als asymptotisch divergeren en kan ook zowel gewoon als asymptotisch convergeren. In het laatste geval behoeft de gewone som niet asymptotisch gelijk te zijn aan de asymptotische som".

regel 10 v.o.: "waarbij de sommen" wordt: "waarbij de asymptotische sommen" enz.

regel 6 v.o. tot onderaan: wegschrappen.

pag. 4a — regel 1 v.b.: achter "rectificeerbare" behoort te staan [1])

formule I : " g(b)" wordt " g_m (b)", "g (a)" wordt " g_m(a)"

pag. 6a — regel 6 v.o.: " ≥ 0 " moet zijn " ≤ 0 "

regel 5 v.o.: "groter" moet zijn "kleiner"

pag. 6d — Het begin van de pag. luidt:
"Verder is

$$g(x) = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

als product van drie alternerende functies eveneens alternerend. Voor"

pag. 7 — De bovenkant wordt:

§ I 2,12 C X 47 I 2,12

Regel 1- 10 vervalt
Regel 12 moet luiden

$$e^{\frac{1}{2}\omega^2}\int_\omega^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \sim \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^3} + \frac{1.3}{\omega^5} - \frac{1.3.5}{\omega^7} + \dots$$

De pagina wordt doorgesneden boven § 2,2.
Bovenop het onderste stuk komt te staan:

pag. 7c — § 2,2 C X 47 I 2,21 A

Achter de formule komt een noot: [1]), luidende
Courant-Hilbert 1931', I p.454, form. 88.

pag. 8 — Rechts boven komt i.p.v. I 2,2,1 : I 2,21,C
Regel 1-10 vervalt. We beginnen met: "dus:....."

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN

I Elementaire beschouwingen.

§ 1 Grondbegrippen.

1,1 Het asymptotisch gelijkheidsbegrip.

Zij E een gegeven onbegrensde puntverzameling, gelegen in het complexe vlak en zij ω een willekeurig element van die verzameling. Alle in deze aantekeningen voorkomende getallen en functies mogen van ω afhangen, tenzij uitdrukkelijk het tegendeel vermeld wordt; "vast" betekent "onafhankelijk van ω".

Ik schrijf $a \ll b$, als twee vaste getallen c en C bestaan, zodanig, dat de ongelijkheid

$$|a| \leq c\,|b| \qquad \text{I}$$

geldt voor elk element ω van E, waarvoor $|\omega| > C$ is. Ik noem dan a hoogstens van dezelfde orde als b. Is het mogelijk een getal c te vinden, dat onafhankelijk van ω is en ook onafhankelijk van een andere parameter z, dan zeg ik, dat I uniform in z geldt.

Voorbeelden:

$1000 \ll \log \omega$; en verder $100 z \ll (1+|z|^2)\log \omega$ uniform in z.

Ik noem twee getallen a en b asymptotisch aan elkaar gelijk (in formule: $a \sim b$), als bij elk vast getal γ twee vaste getallen c en C bestaan, zodanig, dat de ongelijkheid

$$|a-b| \leq c\,|\omega|^{-\gamma}$$

geldt voor elk element ω van E, waarvoor $|\omega| > C$ is.

Dit begrip is reflexief, symmetrisch en transitief, d.w.z. elk getal is asymptotisch gelijk aan zich zelf; uit $a \sim b$ volgt $b \sim a$ en tenslotte: uit $a \sim b$ en $b \sim c$ volgt $a \sim c$.

Voorbeeld:

$$2 + e^{-\omega} \sim 2 \text{ en } \omega + \sin e^{-\sqrt{\omega}} \sim \omega \text{ voor } \omega > 0$$

Duidelijk is dan volgende stelling:

Is $a \sim b$ en $c \sim d$, dan is $a + c \sim b + d$ en $a - c \sim b - d$.

Het is niet waar, dat uit het gegeven volgt $ac \sim bd$, want men heeft $e^{\omega} \sim e^{\omega}$ en $2 + e^{-\omega} \sim 2$, maar $2e^{\omega}+1$ is niet asymptotisch gelijk aan $2e^{\omega}$. Dat komt, omdat we hier met een factor e^{ω} vermenigvuldigen, die bij aangroeiende ω al te snel aangroeit. In verband hiermede verdient het aanbeveling het begrip "asymptotisch eindig" in te voeren. Ik noem a asymptotisch eindig, als het mogelijk is een vast getal α te vinden met de eigenschap $a \ll |\omega|^{\alpha}$. Dus b.v. e^{ω} is niet asymptotisch eindig voor $\omega > 0$.

Bestaanbaar

§ 1,2 Asymptotische limieten.

Ik zeg, dat de getallen $a_1, a_2, \ldots$ tot een limiet l naderen, als met elk vast natuurlijk getal h twee vaste getallen γ_h en c_h corresponderen, zodanig, dat γ_h met h onbegrensd aangroeit en dat de ongelijkheid

$$|a_h - l| \leq c_h\,|\omega|^{-\gamma_h} \qquad \text{I}$$

geldt voor elk element ω van E, waarvan de modulus groter is dan een geschikt gekozen, van ω en h onafhankelijke grens.

Ik schrijf dan

$$\text{as lim } a_h = l$$

Door een asymptotisch convergente rij wordt de asymptotische limiet niet ondubbelzinnig vastgelegd. Integendeel, is l een asymptotische limiet van een rij, dan is l' van die rij een asymptotische limiet, dan en alleen dan, als l en l' asymptotisch gelijk zijn. Een asymptotisch convergente rij bepaalt dus niet een ondubbelzinnig vastgelegd getal, maar een klasse van onderling asymptotisch gelijke getallen.

Uit bovenstaande definitie volgt onmiddellijk: wordt in een asymptotisch convergente rij $a_1, a_2, \ldots$ elk element a_h door een asymptotisch gelijk getal a'_h vervangen, dan convergeert de rij $a'_1, a'_2, \ldots$ eveneens en wel met

§ I. 1.2 Asymptotische limieten.

Ik zeg, dat de getallen $a_0, a_1, \ldots$ asymptotisch tot een limiet l naderen als met elk vast natuurlijk getal h drie vaste getallen γ_h, c_h en C_h corresponderen, zodanig, dat γ_h met h onbegrensd aangroeit en de ongelijkheid

I $$|a_h - l| \leq c_h |\omega|^{-\gamma_h}$$

geldt voor elk element ω van E, waarvan de modulus $\geq C_h$ is. Ik schrijf dan

$$\operatorname{as\,lim}_{h \to \infty} a_h = l.$$

Door een asymptotisch convergente rij wordt de asymptotische limiet niet ondubbelzinnig vastgelegd. Integendeel, is l een asymptotische limiet van een rij, dan is l' een asymptotische limiet van die rij, dan en alleen dan, als l en l' asymptotisch aan elkaar gelijk zijn.
Een asymptotisch convergente rij bepaalt niet een ondubbelzinnig vastgelegd getal, maar een klasse van onderling asymptotisch gelijke getallen.

Uit bovenstaande definitie volgt onmiddellijk: wordt in een asymptotische rij $a_0, a_1, \ldots$ elk element a_h door een daaraan asymptotisch gelijk getal a'_h vervangen, dus convergeert de rij $a'_0, a'_1, \ldots$ eveneens asymptotisch en wel met dezelfde asymptotische limiet.

Verder: nadert a_h asymptotisch tot l en nadert b_h asymptotisch tot l', dan naderen $a_h + b_h$ en $a_h - b_h$ asymptotisch respectievelijk tot $l + l'$ en $l - l'$.

Convergeert een rij a_h $(h = 0, 1, \ldots)$ asymptotisch, dan nadert $a_{h+1} - a_h$ $(h = 0, 1, \ldots)$ asymptotisch tot nul. Maar ook het omgekeerde geldt: nadert $a_{h+1} - a_h$ $(h = 0, 1, \ldots)$ asymptotisch tot nul, dan convergeert de rij $a_0, a_1, \ldots$ asymptotisch. Immers met elk geheel getal $h \geq 0$ corresponderen dan drie vaste getallen B_h, b_h en D_h zodat B_h met h onbegrensd aangroeit en de ongelijkheid

II $$|a_{h+1} - a_h| \leq b_h |\omega|^{-B_h}$$

geldt voor elk element ω van E, waarvan de modulus $\geq D_h$ is. Zij nu H het grootste gehele getal ≥ 0 met de eigenschappen

III $$H + b_0 + \ldots + b_{H-1} \leq |\omega|$$

en

IV $$\max(D_0, \ldots, D_{H-1}) \leq |\omega|;$$

(deze ongelijkheden gelden voor $H = 0$, want dan stellen de linkerleden van III en IV het getal 0 voor).

Ik bewijs, dat a_H een asymptotische limiet van de rij $a_0, a_1, \ldots$ is. Immers zij h een willekeurig vast geheel getal. Omdat H blijkens de finitie met $|\omega|$ onbegrensd aangroeit, bestaat er een van h afhankelijk getal C_h zo, dat $H > h$ is voor elk element ω van E, waarvan de modulus $\geq C_h$ is.
Volgens IV is dan $|\omega| \geq D_k$ $(h \leq k < H)$, zodat II met k inplaats van h geldt. Indien $\gamma_h + 1$ het kleinste der getallen $B_h, B_{h+1}, \ldots$ voorstelt, dan is

$$|a_{k+1} - a_k| \leq b_k |\omega|^{-\gamma_h - 1},$$

dus

V. $$|a_H - a_h| \leq |\omega|^{-\gamma_h - 1} \sum_{k=h}^{H-1} b_k \leq |\omega|^{-\gamma_h},$$

geldig voor elk element ω van E, waarvan de modulus $\geq C_h$ is. Omdat γ_h met h onbegrensd aangroeit, nadert a_h asymptotisch tot a_H, waarmede het bewijs geleverd is.

Het is mogelijk, dat een rij gewoon convergeert en asymptotisch divergeert, bijv. $\omega^n : n!$.

dat een rij gewoon divergeert en asymptotisch convergeert, bijv. $n!\,\omega^{-1}$.

dat een rij gewoon divergeert en tegelijkertijd asymptotisch divergeert bijv. $n!\,\omega^n$

en tenslotte, dat een rij gewoon convergeert en tegelijkertijd asymptotisch convergeert bijv. $\omega^{-n} : n!$ of $\quad a_n = \omega$ of $\frac{1}{n}$

al naar gelang $n \leq$ of $> |\omega|$ is. In het laatste voorbeeld is de gewone limiet nul, terwijl de asymptotische limiet ω is. Bij een rij, die zowel gewoon als asymptotisch convergeert, behoeven dus de twee limieten niet asymptotisch aan elkaar gelijk te zijn.

De asymptotische limiet l van een asymptotische convergente rij $a_0, a_1, \ldots$ is dan en alleen dan asymptotisch eindig, als a_0 asymptotisch eindig is. Immers, I, toegepast met $n = 0$ levert

VI $$|a_0 - l| \leq c_0 |\omega|^{-b_0},$$

zodat beide getallen a_0 en l asymptotisch eindig zijn, zodra dit met een dezer getallen het geval is.

Wij kunnen nog iets meer in dat geval opmerken. Is l asymptotisch eindig, dan kunnen wij een getal $\alpha \geq -b_n$ ($n = 0, 1, \ldots$) vinden met $l \ll \omega^{\alpha}$. Uit I volgt dan voor iedere vaste gehele $n \geq 0$:

$$a_n \ll \omega^{\alpha}.$$

Hiermede is aangetoond: Is de asymptotische limiet van een asymptotisch convergente rij $a_0, a_1, \ldots$ asymptotisch eindig, dan bestaat er een vast getal α met de eigenschap $l \ll \omega^{\alpha}$ en $a_n \ll \omega^{\alpha}$ voor ieder vast geheel getal $n \geq 0$.

Bezitten de rijen $a_0, a_1, \dots$ en $b_0, b_1, \dots$ twee asymptotische limieten l en l', die beide asymptotisch eindig zijn, dan convergeert de rij $a_h b_h$ $(h=0,1,\dots)$ asymptotisch tot een limiet ll'. Immers
$$a_h b_h - ll' = a_h(b_h - l') + l'(a_h - l).$$
Hierin is $a_h \ll \omega^\alpha$ en $b_h \ll \omega^\beta$ bij geschikt gekozen vaste α en β, terwijl $b_h - l'$ en $a_h - l$ beide asymptotisch tot nul naderen, zodat ook $a_h b_h - ll'$ asymptotisch tot nul nadert.

§ 1,3 Asymptotische reeksen.

Een reeks $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ heet asymptotisch convergent, als de partieelsom $a_0 + \dots + a_h$ bij onbegrensd aangroeiende h asymptotisch convergeert; de limiet s van de deelsom heet de asymptotische som van de asymptotische reeks en ik schrijf $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \sim s$.

De asymptotische convergente reeks definieert niet een ondubbelzinnig bepaalde som, doch een klasse van onderling asymptotisch gelijke getallen.

De reeks $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h!}{\omega^{3h-1000}}$ convergeert asymptotisch. Eveneens $\sum_{h=0}^{\infty} h!\, \omega^{h^2} e^{-\omega} \sim 0$, voor $-\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, indien δ een vast positief getal $\leq \frac{\pi}{2}$ voorstelt. Daarentegen convergeren $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\omega^h}{h!}$ en $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!(\log \omega)^h}$ nergens asymptotisch.

Uit de overeenkomstige stellingen (§ 1,2) betreffende varianten volgt:

Een reeks $\sum_{h=0}^{\infty} a_h$ convergeert dan en slechts dan asymptotisch, als a_h voor $h \to \infty$ asymptotisch tot nul nadert.

Verder: uit

I $\quad \sum_{h=0}^{\infty} a_h \sim s$ en $\sum_{h=0}^{\infty} b_h \sim s'$

volgt $\sum_{h=0}^{\infty} (a_h + b_h) \sim s + s'$ en $\sum_{h=0}^{\infty} (a_h - b_h) \sim s - s'$.

Ik ga nu aantonen: gelden de betrekkingen I, waarbij de sommen s en s' asymptotisch eindig zijn, dan is $\sum_{h=0}^{\infty} d_h \sim ss'$, indien de reeks in het linkerlid iedere term $a_m b_n$ $(m \geq 0, n \geq 0)$ precies éénmaal, en geen enkele andere term bevat.
Immers, omdat $a_0 + \dots + a_h$ en $b_0 + \dots + b_h$ asymptotisch tot de asymptotisch eindige getallen s en s' naderen, nadert $(a_0 + \dots + a_h)(b_0 + \dots + b_h)$ asymptotisch tot ss', terwijl $(a_0 + \dots + a_h)(b_0 + \dots + b_h) - (d_0 + \dots + d_h)$ asymptotisch tot nul nadert, omdat deze uitdrukking te schrijven is als de som van een vast aantal termen $\pm a_m b_n$, die elk asymptotisch tot nul naderen.

- - -

Omdat de asymptotische sommen s en s' asymptotisch ~~begrensd~~ eindig zijn, bestaat er een van ω en h onafhankelijk getal α zodanig, dat voor elk vast geheel getal $h \geq 0$ de ongelijkheden

$$a_h \ll \omega^{\alpha} \quad \text{en} \quad b_h \ll \omega^{\alpha}$$

gelden. Zij q een willekeurig vast getal. Omdat a_h en b_h asymptotisch tot nul naderen, bestaat er een getal h_0, dat niet van ω, maar wel van q afhangt, zodanig dat

$$a_h \ll \omega^{-q-\alpha} \quad \text{en} \quad b_h \ll \omega^{-q-\alpha}$$

voor elk vast geheel getal $h \geq h_0$ is. Omdat de reeks $\sum_0^\infty d_h$ elke term $a_m b_n$ bevat, bestaat er een getal $h_1 \geq h_0$, dat niet van ω, maar wel van h_0 afhangt, zodanig dat de partieelsom $d_0 + \cdots + d_{h_1}$ elke term $a_m b_n$ met $m < h_0$ en $n < h_0$ bevat.
Beschouw het verschil $v_h = (a_0 + \cdots + a_h)(b_0 + \cdots + b_h) - (d_0 + \cdots + d_h)$, waarin h een vast getal $\geq h_1$ voorstelt. Dit verschil is te schrijven als een som van hoogstens $(h+1)^2$ termen, elk van de gedaante $\pm a_m b_n$.
Een term van de gedaante $a_m b_n$ komt niet in $d_0 + \cdots + d_h$ voor, dus ook niet in $d_0 + \cdots + d_{h_1}$ voor, zodat van de indices m en n er minstens één $\geq h_0$ is. Een term van de gedaante $-a_m b_n$ komt niet in het uitgewerkte product $(a_0 + \cdots + a_h)(b_0 + \cdots + b_h)$ voor, zodat van de indices m en n er minstens één $\geq h \geq h_1 \geq h_0$ is. Van de term $\pm a_m b_n$ is dus minstens één der factoren $\ll \omega^{-q-\alpha}$, terwijl de andere factor $\ll \omega^{\alpha}$ is, zodat deze term $\ll \omega^{-q}$ is. Het verschil v_h is dus te schrijven als een som van hoogstens $(h+1)^2$ termen, elk $\ll \omega^{-q}$, zodat ook $v_h \ll \omega^{-q}$ voor $h \geq h_1$ is. Omdat bij elke q een h_1 met deze eigenschap te vinden is, nadert dus v_h bij onbegrensd aangroeiende h asymptotisch tot nul. Omdat $a_0 + \cdots + a_h$ en $b_0 + \cdots + b_h$ asymptotisch tot de asymptotisch eindige limieten s en s' naderen, nadert het product $(a_0 + \cdots + a_h)(b_0 + \cdots + b_h)$, dus ook $d_0 + \cdots + d_h$ asymptotisch tot ss', waarmede het bewijs geleverd is.

I,2. Elementaire methoden.

§ I,201. De formule van Stirling.

Zoals b.v. gemakkelijk uit de door Gauss gegeven definitie [1]) van de Gammafunctie volgt, is deze functie $f(z)$ gedefinieerd voor iedere z met uitzondering van de getallen $0, -1, -2, \ldots$; voldoet ze aan de functionaalbetrekking

$$f(z+1)= zf(z)$$

en bezit ze de eigenschap, dat de verhouding $\dfrac{f(z+n)}{n^{z}f(n)}$ voor iedere vaste z tot 1 nadert, als het natuurlijke getal n onbegrensd aangroeit. Omgekeerd zien we gemakkelijk in, dat iedere functie met deze twee eigenschappen, op een constante na, gelijk is aan de Gammafunctie, $\Gamma(z)$, want uit de functionaalbetrekking volgt dan, dat $f(n)$ voor elk natuurlijk getal n de waarde $(n-1)!f(1)$ bezit en voor elke z (de punten $0, -1, -2, \ldots$) uitgezonderd) is

$$f(z) = \frac{f(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} = \frac{n^{z}f(n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \cdot \frac{f(n+z)}{n^{z}\,f(n)};$$

de laatste factor nadert, volgens veronderstelling tot 1, dus

I $$f(z)=f(1) \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z}(n-1)!}{z(z+1)\ldots(z+n-1)},$$

zodat de functie $f(z)$ op de constante factor na ondubbelzinnig bepaald is. Omdat de Gamma-functie de twee genoemde eigenschappen bezit, is dus iedere functie, die deze twee eigenschappen bezit, op een constante factor na gelijk aan de Gammafunctie. Indien dus

II $$\Gamma(z)= a\, z^{z-\frac{1}{2}}\, e^{-z+\mu(z)}$$

gesteld wordt, dan moeten we vooreerst $\mu(z)$ zo kiezen, dat $\Gamma(z)$ aan de functionaalbetrekking voldoet. Dat levert

$$(z+1)^{z+\frac{1}{2}}e^{-z-1+\mu(z+1)} = z^{z+\frac{1}{2}}\,e^{-z+\mu(z)},$$

dus

$$g(z)= \mu(z)-\mu(z+1) = (z+\tfrac{1}{2}) \log \frac{z+1}{z} - 1 =(z+\tfrac{1}{2})\log \frac{1+\frac{1}{2(z+\frac{1}{2})}}{1-\frac{1}{2(z+\frac{1}{2})}} -1$$

III $$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2z+1)^{2}} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2z+1)^{4}} + \ldots$$

Aan de functionaalbetrekking is dus voldaan als

IV $$\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(z+m)$$

gesteld wordt. Tevens is dan de tweede voorwaarde vervuld, als $f(z)$ het linkerlid van II voorstelt, want dan is

$$\frac{f(z+n)}{n^{z}f(n)} = (z+n)^{z+n-\frac{1}{2}}\, e^{-z-n+\mu(z+n)}\, n^{-z-n+\frac{1}{2}}\, e^{n-\mu(n)}$$
$$= \left(1+ \frac{z}{n}\right)^{z+n-\frac{1}{2}} e^{-z+\mu(z+n)-\mu(n)}$$

en dit nadert, als het natuurlijke getal n onbegrensd aangroeit, tot 1, omdat

---

[1]) De in I optredende limiet is juist, volgens de definitie van Gauss, gelijk aan $\Gamma(z)$.

3 C

$$\mu(n) = \sum_{m=n}^{\infty} g(m) \quad \text{en} \quad \mu(z+n) = \sum_{m=n}^{\infty} g(z+m)$$

dan tot (mué) naderen. Hiermede is II bewezen, als $\mu(z)$ door IV gedefinieerd wordt.[1])

Voor de berekening van a is het voldoende een niet-homogene relatie van de Gamma-functie te benutten [2]). Daarvoor kunnen we de verdubbelingsformule van de Gammafunctie gebruiken

$$\Gamma\left(\tfrac{z}{2}\right)\Gamma\left(\tfrac{z+1}{2}\right) = 2^{1-z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(z).$$

Voor positieve z is het rechterlid approximatief gelijk aan

$$2^{1-z}\sqrt{\pi}\,a\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z},$$

terwijl het linkerlid in eerste benadering gelijk is aan

$$a^2\left(\tfrac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}}\left(\tfrac{z+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}z}e^{-z-\frac{1}{2}} = a^2\, 2^{\frac{1}{2}-z}\, z^{z-\frac{1}{2}}\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}z}e^{-\frac{1}{2}-z},$$

dus bij benadering gelijk aan $a^2\,2^{\frac{1}{2}-z}\,z^{z-\frac{1}{2}}$, waaruit volgt $a = \sqrt{2\pi}$.
Dus

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}\,e^{-z+\mu(z)}.$$

Hieruit volgt de formule van Stirling, dat $\Gamma(z)$ bij grote benadering gelijk is aan $\sqrt{2\pi}\,z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}$; dit geldt vooreerst als $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ en $|z|$ groot is; verder geldt de formule van Stirling ook, als $\frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi$ is indien de modulus van het imaginaire deel van z groot is [3]). Immers voor $|2z+1| > 2$ volgt uit III

$$|g(z)| \leq \frac{4}{9\,|2z+1|^2}.$$

Indien $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ is en het bestaanbare deel x van $z = x+iy$ onbegrensd aangroeit, is

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\frac{1}{2}+n)^2} \leq \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right\} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{x} \to 0$$

en indien y onbegrensd aangroeit, is

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{y^2+(n+\frac{1}{2}+x)^2} \leq \frac{2}{9}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{y^2+h^2} \leq \frac{2}{9}\left\{\frac{1}{y^2} + \int_0^{\infty}\frac{du}{y^2+u^2}\right\} = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{\pi}{2y}\right)$$

---

[1]) Formule II wordt door Artin bewezen (Artin 1931[1], p.18-20) door op te merken, dat beide leden aan de functionaalbetrekking van de Γ-functie voldoen en logarithmisch convex zijn, door welke twee voorwaarden de leden op een constante factor na ondubbelzinnig bepaald zijn. Die constante factor wordt dan weer uit de verdubbelingsformule van de Γ-functie afgeleid.

[2]) In plaats van met de verdubbelingsformule kunnen we de constante factor a bv. ook bepalen door de functionaalbetrekking $\Gamma(z)\,.\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ toe te passen op punten die op de imaginaire as ver van de oorsprong verwijderd, gelegen zijn.

[3]). B. Levi (1943[1]) bewijst den formule van Stirling voor $\Gamma(n+1) = n!$ bij grote waarden van het natuurlijke getal n, door op te merken, dat $\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ toeneemt, maar dat $\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+1/12n}}{n!}$ afneemt.

3d

In elk van de twee genoemde gevallen kunnen wij nog meer vinden dan het simpele feit, dat $\Gamma(z)$ in eerste benadering gelijk is aan $\sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}$. We kunnen nl. op elementaire manier de in IV gedefinieerde functie $\mu(z)$ een zeer scherpe benadering vinden, waarbij we nog een bovengrens van de gemaakte fout afleiden. Omdat deze methode niet slechts op deze speciale functie, maar integendeel op nog tal van andere functies kan worden toegepast, beschouw ik in plaats van de in III gedefinieerde functie $3g(z)$ de algemene functie

$$\varphi_h(t,\alpha) = \frac{(h-1)!}{1!} t^{-h} + \frac{(h+1)!}{3!}\alpha_1 t^{-h-2} + \frac{(h+3)!}{5!}\alpha_2 t^{-h-4} + \ldots,$$

waarin h een natuurlijk getal aangeeft en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ getallen voorstellen, die niet van h en t afhangen en alle $\geqq 0$ en $\leqq 1$ zijn. Ik heb in het linkerlid de letter α opgenomen, om te doen uitkomen dat de functie niet uitsluitend van t en h, maar ook van de coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ afhangt. Ik noem α_1 de eerste coëfficient van φ_h. Ik veronderstel, dat deze eerste coëfficient $\leqq \frac{7}{10}$ is (waarom, zal zo dadelijk blijken).

Kiest men $t=2z+1$, $h=2$, $\alpha_k = \frac{3}{2k+3}$, dan gaat $\varphi_h(t,\alpha)$ over in de hierboven beschouwde functie $g(z)$. Ik stel

V $$\varphi_h(t,\alpha) = T_h - \frac{1-\alpha_1}{6}\varphi_{h+2}(t,\beta),$$

waarin
$$T_h = \frac{(h-2)!}{2}\left\{(t-1)^{1-h} - (t+1)^{1-h}\right\}.$$

Men vindt dan
$$\varphi_{h+2}(t,\beta) = \frac{(h+1)!}{1!} t^{-h-2} + \frac{(h+3)!}{3!}\beta_1 t^{-h-4} + \ldots,$$

waarin

VI $$\beta_1 = \frac{6}{4.5}\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{6}{6.7}\frac{1-\alpha_3}{1-\alpha_1}, \quad \beta_3 = \frac{6}{8.9}\frac{1-\alpha_4}{1-\alpha_1}, \ldots$$

Nu zien we waarom de eerste coëfficient van φ_h, nl. α_1, $\leqq \frac{7}{10}$ verondersteld is. Uit deze voorwaarde volgt nl. in verband met het feit, dat de coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ alle $\geqq 0$ en $\leqq 1$ zijn, dat zulks ook het geval is met $\beta_1, \beta_2, \ldots$ Blijkt nu de eerste coëfficient van $\varphi_{h+1}(t,\beta)$ namelijk β_1 eveneens $\leqq 7/10$ te zijn, dan kunnen we voortgaan met $\varphi_{h+1}(t,\beta)$, in plaats van $\varphi_h(t,\alpha)$. We vinden dan

$$\varphi_h(t,\alpha) = T_h - \frac{1-\alpha_1}{6}T_{h+2} + \frac{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)}{6^2}\varphi_{h+4}(t,\gamma).$$

Hierin worden de getallen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ gevonden door in V α door β en β door γ te vervangen. Is $\gamma_1 \leqq 7/10$, dan kunnen we doorgaan, enz. Voor $t > 1$ volgt uit V

$$0 \leqq \varphi_h(t,\alpha) \leqq T_h,$$

dus de som
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_h(2z+2n+1, \alpha),$$
waarin $z > 0$, is hoogstens
$$\frac{(h-2)!}{2^h}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(z+n)^{1-h} - (z+n+1)^{1-h}\right\} = \frac{(h-2)!}{2^h z^{h-1}}.$$

Indien we nu in het hierbovenbesproken procédé vinden, dat $\alpha_1, \ldots, \delta_1$ $\leqq 7/10$ zijn, dan krijgt men, dat S approximatief gelijk is aan

$$\text{VII}\quad \frac{(k-1)!}{2^{k}z^{k-1}} - \frac{k!}{2^{k+2}z^{k+1}}\,\frac{1-\alpha_1}{6} + \frac{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)}{6^2}\,\frac{(k+2)!}{2^{k+4}z^{k+3}} - \frac{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\gamma_1)}{6^3}\,\frac{(k+4)!}{2^{k+6}z^{k+5}}$$
$$+\frac{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\gamma_1)(1-\delta_1)}{6^4}\,\frac{(k+6)!}{2^{k+8}z^{k+7}}$$

en men krijgt alternerend een te groot of te klein antwoord.

Past men bovenstaande methode toe op de functie $g(z)=\frac{1}{2}\varphi(2z+1)$, dan krijgt men de volgende tabel

α_k	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	[illegible]	[illegible]
$1-\alpha_k$	$\frac{1}{4}$	[illegible]	[illegible]	$\frac{8}{11}$	[illegible]
$\frac{1-\alpha_k}{1-\alpha_1}$		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
β_k		$\boxed{[illegible]}$	[illegible]	$\frac{5}{13}$	$\frac{15}{143}$
$1-\beta_k$		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{1-\beta_k}{1-\beta_1}$			[illegible]	[illegible]	[illegible]
γ_k			$\boxed{[illegible]}$	[illegible]	[illegible]
$1-\gamma_k$			[illegible]	$\frac{26}{33}$	[illegible]
$\frac{1-\gamma_k}{1-\gamma_1}$				$\frac{128}{99}$	$\frac{173}{[illegible]}$
δ_k				$\boxed{[illegible]}$	$\frac{[illegible]}{187}$
$1-\delta_k$				[illegible]	[illegible]
$\frac{1-\delta_k}{1-\delta_1}$					[illegible]
ε_k					$\boxed{[illegible]}$
$1-\varepsilon_k$					[illegible]

Hieruit blijkt dat de rechthoekig geëncadreerde coëfficienten $\alpha_2, \ldots, \varepsilon_6$ alle $\leqq 7/10$ zijn. De omringde getallen geven de coëfficienten $1-\alpha_1$, $1-\beta_1$, ..., die in de eindformule optreden. Zo vinden we dat $\mu(z)$ voor positieve z approximatief gelijk is aan

$$\text{VIII}\quad \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \frac{1}{1183z^9} - \frac{691}{260360z^{11}} + \cdots$$

waarbij men afwisselend een te groot of een te klein antwoord vindt.

Trouwens deze benadering is ook voor niet positieve z zeer bruikbaar. Immers voor willekeurige z, de getallen 0, −1, −2, ... uitgezonderd, is S gelijk aan VII, verminderd met

$$\frac{1}{6^6}(1-\alpha_1)\cdots(1-\varepsilon_1)(1-\zeta_1)\sum_{n=0}^{5}\varphi_6(2z+2n+1, 8)$$

or $|t| \geqq 2$ is

$$|\varphi_4(t,\xi)| = \left| 13!\, t^{-10} + \frac{13!}{3!}\xi_1 t^{-12} + \cdots \right| \leqq 13!\, |t|^{-10}\left\{1 + \binom{14}{1}|t|^{-1} + \binom{15}{2}|t|^{-2} + \cdots\right\}$$

$$= 13!\, |t|^{-10}\left(1 - \frac{1}{|t|}\right)^{-14} \leqq 13!\, 2^{14} |t|^{-14}.$$

Is $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ en $z = x+iy$, dan is

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_4(2z+2n+1, \xi)\right| \leqq 13!\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\frac{1}{2}+n)^{14}} < 12!\, \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(x+n)^{13}} - \frac{1}{(x+n+1)^{13}}\right\}$$

$$= \frac{12!}{x^{13}},$$

dus $\mu(z)$ is gelijk aan (VIII) met een afwijking, die absoluut genomen kleiner is dan

$$\frac{12!}{6^6}(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\gamma_1)(1-\delta_1)(1-\varepsilon_1)(1-\zeta_1)\,x^{-13}$$

$$\frac{12!}{6^6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{33}\cdot\frac{1382}{2275}\,x^{-13} \leqq 312\, x^{-13}.$$

Is $|\arg z| < \pi$, dan is

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_4(2z+2n+1, \xi)\right| \leqq 9!\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left\{y^2 + (n+\frac{1}{2}+x)^2\right\}^5} \leqq 9!\, 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(y^2+k^2)^5}$$

$$\leqq 9!\, 2\left\{\frac{1}{y^{10}} + \int_0^{\infty}\frac{dv}{(y^2+v^2)^5}\right\} = 9!\, 2\left\{\frac{1}{y^{10}} + \frac{1}{y^9}\int_0^{\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^5}\right\}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^5} < \int_0^1 dv + \int_1^{\infty}\frac{dv}{v^{10}} = \frac{10}{9}.$$

Dus dan is $\mu(z)$ gelijk aan VIII met een afwijking, die, absoluut genomen, kleiner is dan

$$\frac{9!\,2}{6^5}(1-\alpha_1)(1-\beta_1)(1-\gamma_1)(1-\delta_1)(1-\varepsilon_1)\left(\frac{1}{y^{10}} + \frac{\frac{10}{9}}{y^9}\right) < 9{,}8\left(\frac{1}{y^{10}} + \frac{\frac{10}{9}}{y^9}\right).$$

Later komen we op al deze formules terug in onze toepassingen van de sommatieformule van Euler-Maclaurin.

3g

§ I,202. De constante van Euler.

De constante van Euler is gelijk aan

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\ldots+\frac{1}{n}-\log(n+\tfrac{1}{2})\right).$$

Stelt men $g(x) = \log(x+\frac{1}{2}) - \log(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{x}$,
dan vindt men

$$C = 1+\ldots+\frac{1}{m} - \log(m+\tfrac{1}{2}) - \sum_{m+1}^{\infty} g(x).$$

Voor $3g(x)$ vinden we

$$3g(x) = \frac{6}{3(2x)^3} + \frac{6}{5(2x)^5} + \ldots$$

Hierop is de ontwikkeling VII uit de vorige § toe te passen met

$$\alpha_1 = \frac{6}{4.5}\ ;\ \alpha_2 = \frac{6}{6.7}\ ;\ \alpha_3 = \frac{6}{8.9}\ ;\ \ldots$$

Uit onderstaande tabel bepale men eerst $\beta_1, \gamma_1, \ldots$

α	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{55}$
$1-\alpha$	$\frac{7}{10}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{52}{55}$
$\frac{1-\alpha}{1-\alpha_1}$		$\frac{60}{49}$	$\frac{55}{42}$	$\frac{104}{77}$
β		$\frac{18}{49}$	$\frac{55}{294}$	$\frac{26}{237}$
$1-\beta$		$\frac{31}{49}$	$\frac{239}{294}$	$\frac{205}{237}$
$\frac{1-\beta}{1-\beta_1}$			$\frac{239}{186}$	$\frac{1435}{1023}$
γ			$\frac{239}{620}$	$\frac{205}{1023}$
$1-\gamma$			$\frac{381}{620}$	$\frac{818}{1023}$
$\frac{1-\gamma}{1-\gamma_1}$				$\frac{8360}{12573}$
δ				$\frac{1636}{4191}$
$1-\delta$				$\frac{2555}{4191}$

Dus

$$\sum_{x=m+1}^{\infty} 3g(x) = \frac{1!}{2}\,\frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1-\alpha_1}{6}\,\frac{3!}{2}\,\frac{1}{(2m+1)^4} + \frac{(1-\alpha_1)(1-\beta_1)}{6^2}\,\frac{5!}{2}\,\frac{1}{(2m+1)^6} - \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{7}{20}\,\frac{1}{(2m+1)^4} + \frac{31}{42}\,\frac{1}{(2m+1)^6} - \frac{381}{120}\,\frac{1}{(2m+1)^8}$$

$$+ \frac{511}{22}\,\frac{1}{(2m+1)^{10}} - R(m),$$

waarin $0 < R(m) < \frac{2555}{6}\,\frac{1}{(2m+1)^{12}}$.

waarin $R_1(m) < \frac{2555}{18}(2m+1)^{-12}$.

Neemt men $m=12$, dan vindt men

$$C = 1+\dots+1/12 - \log 12\tfrac{1}{2} - \frac{1}{6\cdot 25^2} + \frac{7}{60\cdot 25^4} - \frac{31}{126\cdot 25^6} + \frac{127}{120}\frac{1}{25^8} - \frac{511}{66}\frac{1}{25^{10}} + R_1(12).$$

Dit geeft de volgende berekening

$\dots + 1/12 =$	3,103 210 678 210 678 21	
$\log 12\tfrac{1}{2} =$	2,525 728 644 308 255 44	−
	0,577 482 033 902 422 77	
$\dots 5^2 =$	0,000 266 666 666 666 66	−
	0,577 215 367 235 756 11	
$\dots 25^4 =$	8,000 000 298 566 666 66	+
	0,577 215 665 902 422 77	
$\dots 25^6 =$	0,000 000 001 007 746 03	−
	0,577 215 664 894 676 74	
[illegible] $=$	0,000 000 000 006 935 89	+
	0,577 215 664 901 612 63	
$\dots 25^{10} =$	0,000 000 000 000 081 21	−

Dus $C = 0,577\,215\,664\,901\,531\,42 - R(12)$, waarin
$R_1(12) < \frac{2555}{18}\cdot 25^{-12} < 0,25\cdot 10^{-14}$.

Dit stemt overeen met de waarde $C = 0,577\,215\,664\,901\,532\,8\dots$
...n de constante van Euler bekend is, kan men met formule (I) de parti...
...som $1+\dots+1/n$ van de harmonische reeks gemakkelijk scherp bepalen.

...ok op deze functies zullen we weer terugkomen na de behandeling van de ...matieformules van Euler-MacLaurin.

I 2 Elementaire methodes.

I 2,1 Partiële integratie.

Zij K een in het complexe z-vlak gelegen rectificeerbare kromme, waarvan het beginpunt a en het eindpunt b in het eindige liggen en tot de kromme behoren. 1)

Stel $f(z)$ en $g(z)$ zijn op K gegeven en langs die kromme oneindig dikwijls differentieerbaar 2) met $f'(z) \neq 0$. Dan kan de integraal

$$I = \int_K g(z)\, e^{f(z)}\, dz$$

met behulp van de methode van partiële integratie behandeld worden. Wordt

$$g_1(z) = \frac{g(z)}{f'(z)} \quad \text{en} \quad g_{h+1}(z) = \frac{g_h'(z)}{f'(z)} \quad (h \geq 0)$$

gesteld, dan krijgen we voor elk geheel getal

I [illegible]

De opgave is nu voorwaarden op te stellen, voldoende opdat de laatste term bij onbegrensd aangroeiende [illegible] asymptotisch tot nul nadert. Daartoe merk ik op, dat [illegible] geschreven kan worden als een som

II [illegible]

uitgestrekt over alle systemen [illegible] bestaande uit [illegible] gehele getallen [illegible] met

III [illegible]

Hierin stelt [illegible] kortheidshalve het product

IV [illegible]

voor, waarin [illegible]

Verder zullen we nog bewijzen, dat [illegible] een getal [illegible] voorstelt, dat door het systeem [illegible] ondubbelzinnig bepaald is.

Omdat deze beweringen voor [illegible] evident zijn, neem ik aan, dat ze voor een bepaalde [illegible] reeds bewezen zijn; in die veronderstelling zal ik ze dan met [illegible] in plaats van [illegible] bewijzen. Differentieert men beide leden van II naar [illegible] en deelt men het aldus verkregen resultaat door $f'(z)$, dan vindt men [illegible] geschreven als een som van een eindig aantal termen. Enkele van die termen krijgt men, door in IV [illegible] te vervangen door [illegible] zodat deze termen de gedaante

---

1) Een kromme heet rectificeerbaar, als elk op K gelegen puntenpaar de eigenschap heeft, dat de tussen die twee punten gelegen boog een eindige lengte bezit.

2) Dat [illegible] op K differentieerbaar is, betekent, dat [illegible] voor elk punt z op K tot een eindige limiet nadert, als het niet met z samenvallende punt [illegible] langs K tot z nadert.

en is het product [illegible] asymptotisch eindig, dan krijgen we hetzelfde resultaat. Hiermede is bewezen:

Zij K een in het complexe z-vlak gelegen rectificeerbare kromme, waarvan het beginpunt a en het eindpunt b in het eindige liggen en tot de kromme behoren. Stel [illegible] en [illegible] zijn op K gegeven en langs die kromme oneindig dikwijls differentieerbaar met [illegible] op zodanige wijze dat op K de betrekkingen (V) uniform in z gelden en dat minstens één der integralen [illegible] en [illegible] asymptotisch eindig is. Dan kan de integraal [illegible] geschreven worden in de gedaante

[illegible], waarin A en B de asymptotische sommen zijn van de reeksen

[illegible] en [illegible]

In het voorafgaande hebben we aangenomen, dat het eindpunt b van de kromme K in het eindige gelegen is. We kunnen echter het geval, dat het eindpunt b in het oneindige ligt, op analoge manier behandelen, indien bovendien gegeven is, dat de verhoudingen

[illegible] (h vast [illegible]) en [illegible] (h vast [illegible])

tot nul naderen, als z langs de kromme K naar het oneindige verhuist. Al[illegible] dus krijgen we de volgende stelling:

Zij K een in het complexe z-vlak gelegen rectificeerbare kromme, waarvan het beginpunt a in het eindige ligt en tot de kromme behoort en waarvan het eindpunt in het oneindige gelegen is. Stel [illegible] en [illegible] zijn op K gegeven en langs die kromme oneindig vaak differentieerbaar met [illegible] op zodanige wijze, dat op K de betrekkingen (V) uniform in z gelden en de integraal [illegible] asymptotisch eindig is.
Dan kan [illegible] asymptotisch ontwikkeld worden in de reeks

[illegible]

§ I, 2, 1 1 Numerieke bovengrens.

De asymptotische ontwikkelingen, die in de voorgaande paragraaf optreden, hebben het bezwaar, dat ze ons niet in staat stellen een numerieke bovengrens aan te geven voor de fout, die we maken als we de gevonden reeksen ergens afbreken. In het volgende geval zijn we wel in staat om een numerieke bovengrens voor de gemaakte fout aan te geven. Ik neem aan, dat de kromme K langs de reële as valt, dat de functies $f(x)$ en $g(x)$ bestaanbaar zijn en dat voor $a \le x \le b$ de ongelijkheden

(I) $\begin{cases} f'(x) \le 0, \; f''(x) \ge 0, \; f'''(x) \le 0, \; f^{IV}(x) \ge 0, \ldots \\ g(x) \ge 0, \; g'(x) \le 0, \; g''(x) \ge 0, \; g'''(x) \le 0, \ldots \end{cases}$

gelden. Men merke in deze ongelijkheden een onregelmatigheid op, veroorzaakt door het feit, dat [illegible] niet [illegible], maar integendeel [illegible] verondersteld wordt.

De in het voorgaande bewijs optredende functies [illegible] zijn dan alle ≥ 0, zodat elk der functies [illegible] groter dan of gelijk aan nul is. In formule (I) van de voorgaande paragraaf is dan de laatste term [illegible] of [illegible], al naar gelang h even of oneven is.

Hieruit volgt:
Zijn de functies $f(x)$ en $g(x)$ in het interval $a \le x \le b$ oneindig vaak differentieerbaar en gelden daarbij de ongelijkheden (I), dan is

bezitten, waarin

Andere termen van krijgt men, door in IV door te vervangen, zodat deze termen de gedaante

bezitten, waarin

Alle overige termen van krijgt men dan in IV waarin een der getallen 2, 3, ..., voorstelt, te vervangen door

zodat deze termen de gedaante

bezitten, waarin

is. Hiermede zijn bovenstaande beweringen bewezen.

Indien nu op K, uniform in z,

voor iedere vaste

V

voor iedere vaste

aangenomen wordt, dan is wegens III

zodat dus ook bij onbegrensd aangroeiende uniform in z, asymptotisch tot nul nadert.

Laat ik nu voorlopig aannemen, dat, absoluut genomen, kleiner dan of gelijk aan is en dat het product waarin asymptotisch eindig is. Dan nadert

bij onbegrensd aangroeiende asymptotisch tot nul. De reeks bezit een asymptotische som B. Het getal A, gedefinieerd door

VI

is dan de asymptotische som van de reeks

want wegens I en VI is

en in het rechterlid naderen de eerste en de laatste term asymptotisch tot nul.

Is, absoluut genomen, kleiner dan of gelijk aan $f(\delta)$

al naar gelang h even of oneven is.

Zijn de functies en voor oneindig dikwijls differentieerbaar, gelden daarbij de ongelijkheden I en naderen bovendien de verhoudingen

vast en vast

bij onbegrensd aangroeiende tot nul, dan is

al naar gelang even of oneven is.

In het laatste geval is de voorwaarde, dat

waarin

asymptotisch eindig is, zeker vervuld, omdat wegens de integraal gelijk is aan

We kunnen bovenstaande stelling nog anders formuleren. Ik noem een functie $\varphi(x)$ in een interval alternerend, als die functie op dat interval oneindig dikwijls differentieerbaar is en aan de ongelijkheden $\varphi(x) \geqq 0$, $\varphi'(x) \leqq 0$, $\varphi''(x) \geqq 0$, ---
voldoet.
Een voorbeeld van een alternerende functie is $b(x-c)^{\alpha}$ voor $x>c$, waarin $\alpha \leqq 0$ en $b \geqq 0$.
De som en ook het product van twee alternerende functies is weer alternerend.
Ligt de waarde van de alternerende functie $\varphi(x)$ voor iedere x van het interval j in een interval J en is de functie $\Phi(X)$ voor iedere X in J gedefinieerd, $\geqq 0$ en oneindig dikwijls differentieerbaar, zodanig dat alle afgeleiden in J ook $\leqq 0$ zijn, dan is $\Phi(\varphi(x))$ in j alternerend; immers deze functie heeft achtereenvolgens tot afgeleiden

$$\Phi'\varphi' \geqq 0;\quad \Phi''\varphi'^2 + \Phi\varphi'' \leqq 0;\quad \Phi'''\varphi'^3 + 3\Phi''\varphi\varphi'' + \Phi'\varphi''';$$

$$-----$$

Bevat het interval j zijn beide eindpunten a en b, zijn $-f''(x)$ en $g(x)$ op j alternerend en is $f'(x)$ op j negatief, dan levert de hierboven aangegeven methode van partiële integratie voor de integraal

$$\int g(x)\, e^{f(x)}\, dx$$

een te groot of een te klein antwoord, al naar gelang men een oneven of een even aantal termen neemt. Het kan zijn, dat men precies het juiste antwoord krijgt, maar dat treedt alleen op in het uitzonderingsgeval, dat in onze reeksontwikkeling alle termen, van een bepaald rangnummer af, nul worden, zoals b.v. bij de integraal

$$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(b)} - e^{f(a)}.$$

Zijn $-f''(x)$ en $g(x)$ voor $x \geqq a$ alternerend, is $f'(x)$ negatief voor $x \geqq a$ en naderen

$$\frac{f^{(k)}(x)}{\{f'(x)\}^k} \quad (k \text{ met} \geqq 2) \qquad \text{en} \qquad \frac{g^{k}(x)}{\{f'(x)\}^{k+1}} \quad (k \text{ met} \geqq 0)$$

bij onbegrensd aangroeiende x tot nul, dan levert de hierboven aangegeven methode der partiële integratie voor de integraal

$$\int_a^{\infty} g(x)\, e^{f(x)}\, dx,$$

aangenomen, dat deze bestaat, een te groot of een te klein antwoord, al naar gelang men een oneven of een even aantal termen neemt.
Beschouw bijv. de integraal

$$J = \sqrt{6}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega x\sqrt[3]{1+x}}}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}\, dx.$$

De functie

$$f(x) = -\omega x \sqrt[3]{1+x}$$

heeft de eigenschap dat voor $x \geqq 0$

$$f'(x) = -\omega\left(1+\tfrac{4}{3}x\right)(1+x)^{-\frac{2}{3}} < 0$$

en dat

$$-f''(x) = \tfrac{4}{9}\omega(1+x)^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{9}\omega(1+x)^{-\frac{5}{3}},$$

als som van twee alternerende functies alternerend is.

0'a

Verder is

$g(x) =$ [illegible]

als product van drie alternerende functies eveneens alternerend. Voor de berekening van de coëfficiënten in de gezochte asymptotische ontwikkeling krijgen we het volgende schema

	1	$-x$	x^2	$-x^3$
$-\frac{\omega}{f'(x)}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{80}{81}$
$g(x)$	1	$\frac{11}{12}$	$\frac{73}{96}$	$\frac{2191}{3456}$
$-\omega g_0(x) = g(x)\frac{\omega}{f'(x)}$	$\boxed{1}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{619}{288}$	$\frac{29461}{10368}$
$\omega g_0'(x)$	$\frac{19}{12}$	$\frac{619}{144}$	$\frac{29461}{3456}$	
$-\omega^2 g_1(x) = -\omega g_0'(x)\frac{\omega}{f'(x)}$	$\boxed{\frac{19}{12}}$	$\frac{771}{144}$	$\frac{43627}{3456}$	
$\omega^2 g_1'(x)$	$\frac{771}{144}$	$\frac{43627}{1728}$		
$-\omega^3 g_2(x) = -\omega^2 g_1'(x)\frac{\omega}{f'(x)}$	$\boxed{\frac{771}{144}}$	$\frac{49789}{1728}$		
$\omega^3 g_2'(x)$	$\frac{49789}{1728}$			
$-\omega^4 g_3(x) = -\omega^3 g_2'(x)\frac{\omega}{f'(x)}$	$\boxed{\frac{49789}{1728}}$			

In de eerste rij staan de coëfficiënten van 1, $-x$, x^2, $-x^3$, ... van de ontwikkeling van de naar opklimmende machten van x ontwikkelde functie $-\omega/f'(x)$, in de tweede rij die der functie $g(x)$, enz. Uit de geëncadreerde getallen leest men $\omega g_0(0)$, $-\omega^2 g_1(0)$, enz. af, zodat we krijgen

$$J \sim +\frac{1}{\omega} - \frac{\frac{19}{12}}{\omega^2} + \frac{\frac{771}{144}}{\omega^3} - \frac{\frac{49789}{1728}}{\omega^4} + \ldots$$

Men krijgt een te groot of een te klein antwoord al naar gelang men de reeks achter een oneven of even aantal termen afbreekt.

~~$f'(x)<0,\ f''(x)\leqq 0,\ f'''(x)\geqq 0,\ f^{IV}(x)\leqq 0, \dots$~~

Dat staat in verband met de irregulariteit, die in VIII (~~§ 2,1~~) bij de definitie van $[k_0, \dots, k_{h+1}]$ optreedt; de exponent, ~~die~~ in de formule optreedt, heeft n.l. de onregelmatige gedaante $k_0 + \cancel{k}_1 + \sum^{h+1}(n-1)k_n$

~~Gelden de betrekkingen I, dan is $[k_0, \dots, k_{h+1}] \geqq 0$ voor $x \geqq a$, dus ook $g_\lambda(x) \geqq 0$, waaruit blijkt, dat in XI de slotterm hetzelfde teken heeft als $(-1)^{h+1}$. Er is slechts één geval, waarin die slotterm de waarde nul bezit, n.l. als $g_h(x)$ identiek nul is en in dat geval zijn alle volgende functies $g_{h+1}(x), \dots$ ook identiek nul, waarmede alles bewezen is.~~

Voorbeeld. Voor $\omega>0$ is

$$e^{\frac{1}{2}\omega^2}\int_\omega^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \sim \frac{1!}{\omega} - \frac{2!}{\omega^2} + \frac{3!}{\omega^3} - \dots,$$

waarbij de partieelsommen alternerend een te groot, resp. te klein antwoord geven.

Gordon (41') heeft voor positieve ω bewezen

$$\frac{\omega}{\omega^2+1}e^{-\frac{1}{2}\omega^2} \leqq \int_\omega^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \leqq \frac{1}{\omega}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$$

welke ongelijkheid door Birnbaum (42') vervangen is door

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega^2+4}-\omega\right)e^{-\frac{1}{2}\omega^2} < \int_\omega^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

C § 2,2 Methode door ontwikkeling in machtreeksen.

2,2,1 Besselfuncties.

De Henkelfunctie $H_\lambda^1(z)$ van de eerste soort is voor $R\lambda > -\frac{1}{2}$ en en $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ gelijk aan

$$H_\lambda^1(\omega) = \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}e^{i(\omega-\frac{1}{2}\lambda\pi-\frac{\pi}{4})}\mathcal{J}_1,$$

waarin

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^\infty e^{-u}u^{\lambda-1}\left(1+\frac{ui}{2\omega}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}du.$$

Gevraagd wordt nu, bij vaste λ, voor grote $|\omega|$ een asymptotische formule van $\mathcal{J}$ af te leiden, in de veronderstelling $-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg\omega \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$, waarin δ een vast positief getal $\leqq \frac{\pi}{2}$ voorstelt.

Is $|1+w| \geqq a > 0$, dan is volgens het binomium van Newton van elk geheel getal $n \geqq 0$

$$(1+w)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \sum_{h=0}^{n-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h}w^h + \theta_1 b w^n,$$

7a.

§ I,2,13. Numerieke bovengrens bij oscillerende functies.

De beschouwingen van § 2,11 stellen ons in staat om met behulp van de methode van partiële integratie de integraal

$$\mathcal{J} = \int g(x)\, e^{i\, f(x)}\, dx$$

te benaderen, indien wederom de functies $g(x)$ en $-f''(x)$ alternerend zijn en $f'(x)$ negatief is, waarbij dan wederom een numerieke bovengrens gevonden wordt voor de fout, die men maakt, als men de ontwikkeling ergens afbreekt.

Liggen de eindpunten a en b van het integratie-interval beide in het eindige, dan krijgt men door middel van partiële integratie voor elk geheel getal $h \geqq 0$

$$\int_a^b g(x)\, e^{i\, f(x)} dx = -i \sum_{n=0}^{h-1} i^n \{g_n(b)\, e^{if(b)} - g_n(a)\, e^{if(a)}\} + R_h ,$$

waarin

$$R_h = i^h \int_a^b g_h(x)\, f'(x)\, e^{i\, f(x)} dx.$$

Hierin zijn de functies $g_h(x)$ wederom gedefinieerd door de teruglopende betrekkingen

$$g_0(x) = \frac{g(x)}{f'(x)}\ ; \qquad g_{h+1}(x) = \frac{g_h'(x)}{f'(x)} \qquad (h \geqq 0).$$

Zoals we in §2,11 opgemerkt hebben, volgt uit het feit, dat $g(x)$ en $-f''(x)$ alternerend zijn en bovendien $f'(x)$ negatief is, dat alle functies $g_h(x) \geqq 0$ zijn. Hieruit volgt

$$|R_h| \leqq 2 g_h(a),$$

immers we kunnen een reël getal γ vinden, zodanig dat $e^{i\gamma} R_h$ reëel is. Dan is

$$e^{i\gamma} R_h = \int_a^b g_h(x)\, f'(x) \cos\left(f(x) + \gamma + \frac{h\pi}{2}\right) dx .$$

Hierin is $g_h(x) \geqq 0$ en $g_h'(x) = g_{h+1}(x)\, f'(x) \leqq 0$, dus volgens de middelwaardestelling

$$e^{i\gamma} R_h = g_h(a) \int_a^{\xi} f'(x) \cos\left(f(x) + \gamma + \frac{h\pi}{2}\right) dx \leqq 2 g_h(a),$$

(R_h)

dus, absoluut genomen, $\leqq 2 g_h(a)$.

We kunnen bovendien nog opmerken, dat

$$\left| \arg R_h - f(a) - \tfrac{1}{2}(h+1)\pi \right| \leqq \frac{\pi}{2} ,$$

want $-R_h\, e^{-if(a)} = -i\, e^{-if(a)} \int_a^b g_h(x)\, f'(x)\, e^{if(x)} dx$

heeft een reëel stuk, dat gelijk is aan

$$\int^b g_h(x)\, f'(x) \sin\left(f(x) - f(a)\right) dx$$

en dit is weer volgens de middelwaardestelling gelijk aan

$$g_h(a) \int_a^{\eta} f'(x) \sin\left(f(x) - f(a) \right) dx = g_h(a) \left\{ 1 - \cos\left(f(\eta) - f(a) \right) \right\} \geqq 0.$$

Een analoge redenering kan worden toegepast, als het rechter eindpunt van het interval j in het oneindige ligt. We krijgen dan:

Zijn $-f''(x)$ en $g(x)$ voor $x \geqq a$ alternerend, is $f'(x)$ negatief voor $x \geqq a$ en naderen

$$\frac{f^{(h)}(x)}{\{f'(x)\}^{h}} \quad (h \text{ vast} \geqq 2) \text{ en } \frac{g^{(h)}(x)}{\{f'(x)\}^{h+1}} \quad (h \text{ vast} \geqq 0)$$

bij onbegrensd aangroeiende x tot nul, dan kan de hierboven aangegeven methode van partiële integratie op de integraal

$$\int_a^{\infty} g(x)\, e^{if(x)} dx,$$

zo deze bestaat, worden toegepast. Breekt men de aldus gevonden reeksontwikkeling ergens af, dan is de gemaakte fout, absoluut genomen, hoogstens 2x zo groot als de eerst verwaarloosde term. Het argument van die fout wijkt dan hoogstens $\frac{\pi}{2}$ af van het argument van de eerst verwaarloosde term.

De becijferingen, gegeven bij het voorbeeld in § I,2,11 leveren voor de integraal

$$\sqrt{6} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega x \sqrt[3]{1+x}}}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}\, dx$$

direct de asymptotische ontwikkeling

$$\frac{i}{\omega} - \frac{\frac{19}{18}}{\omega^2} - \frac{\frac{771}{144} i}{\omega^3} + \frac{\frac{49789}{1728}}{\omega^4} + \cdots$$

Breekt men ergens af, dan is de gemaakte fout, absoluut genomen, hoogstens het dubbele van de eerst verwaarloosde term (absoluut genomen) en het argument der gemaakte fout wijkt hoogstens $\frac{\pi}{2}$ af van dat van de eerst verwaarloosde term. Breekt men b.v. achter de term $-\frac{771}{144}\frac{i}{\omega^3}$ af, dan heeft de gemaakte fout een reëel deel, dat $\geqq 0$ is en een modulus, die kleiner is dan of gelijk aan $\frac{49789}{864\,\omega^4}$.

Volgens de formule van Taylor, met de restterm van Cauchy, is voor elk natuurlijk getal n

$$\left(1+\frac{ui}{2\omega}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \sum_{h=0}^{n-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h}\left(\frac{ui}{2\omega}\right)^{h}$$
$$+\, n\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{ui}{2\omega}\right)^{n}\int_{0}^{1}(1-t)^{n-1}\left(1+\frac{tui}{2\omega}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}-n}dt.$$

Ik kies het natuurlijke getal $n > R\lambda - \frac{1}{2}$. Wegens $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2}+\delta \leq \arg\omega \leq \frac{\pi}{2}-\delta$ heeft $v = \frac{tui}{2\omega}$ een argument $\geqslant \delta$ en $\leq \pi-\delta$ zodat $(1+v)^{\lambda-\frac{1}{2}-n}$ een continue functie van v is, die voor $|v| \to \infty$ tot nul nadert en dus een, alleen van $\lambda-n$ afhankelijke bovengrens c bezit. Deshalve

$$\left|\left(1+\frac{ui}{\lambda\omega}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} - \sum_{h=0}^{n-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h}\left(\frac{ui}{\lambda\omega}\right)^{h}\right| \leq c\left|\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^{n}\right|.$$

Vermenigvuldiging met $e^{-u}u^{\lambda-\frac{1}{2}}$ en integratie van o naar ∞ levert voor y de approximatieve waarde

$$\sum_{h=0}^{n-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h}\Gamma\left(\lambda+h+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i}{2\omega}\right)^{h}$$

met een afwijking, die hoogstens van dezelfde orde is als ω^{-n}, dus waar b een geschikt gekozen, alleen van n, λ en a afhankelijk getal voorstelt en Θ_1 een geschikt gekozen getal met modulus ≤ 1 aangeeft.

Voor positieve u is

$$\delta \leq \arg \frac{iu}{2\omega} = \frac{\pi}{2} - \arg \omega \leq \pi - \delta,$$

zodat de afstand tussen 1 en $\frac{iu}{2\omega}$ minstens $\sin\delta$ is. Dus

$$\left(1+\frac{iu}{2\omega}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h} \left(\frac{iu}{2\omega}\right)^h + \Theta_2 c u^n \omega^{-n};$$

c en c' stellen een geschikt gekozen, alleen van n, λ en δ afhank getallen voor; Θ_2 en Θ_3 geschikt gekozen getallen met modulus ≤ 1.

Vermenigvuldiging met $e^{-u} u^{\lambda-1}$ en integratie van 0 naar ∞ levert

$$J_1 = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h} \Gamma(\lambda+h+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{i}{2\omega}\right)^h + \Theta_3 c' \omega^{-n},$$

dus

$$J_1 \sim \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h} \Gamma(\lambda+h+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{i}{2\omega}\right)^h.$$

Op dezelfde manier vinden wij voor de Hankelfuncties van de 2e soort

$$H_\lambda^2(\omega) = \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} e^{-i(\omega-\frac{1}{2}\lambda\pi-\frac{\pi}{4})} J_2,$$

waarin

$$J_2 \sim \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h} \Gamma(\lambda+h+\tfrac{1}{2}) \left(\frac{-i}{2\omega}\right)^h$$

Voor de Besselfunctie $J_\lambda(\omega)$ geldt $J_\lambda(\omega) = \frac{1}{2}\left(H_\lambda^1(\omega) + H_\lambda^2(\omega)\right)$,

zodat we voor vaste $\lambda > -\frac{1}{2}$ en voor $-\frac{\pi}{2}+\delta \leq \arg\omega \leq \frac{\pi}{2}-\delta$ vinden

$$J_\lambda(\omega) \sim \frac{1}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{\pi\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{h} \frac{\Gamma(\lambda+h+\frac{1}{2})}{(2\omega)^h} \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}h} \cos\left(\omega-\frac{h\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ (-1)^{\frac{h+1}{2}} \sin\left(\omega-\frac{h\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Van de twee uitdrukkingen tussen accoladen heeft de bovenste betrekking op even, de andere op oneven h.

In het bijzonder vinden wij, dat $J_\lambda(\omega)$ bij benadering gelijk is aan

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\omega}} \cos\left(\omega - \frac{1}{2}\lambda\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

en dat de afwijking hoogstens van dezelfde orde is als $\omega^{-\frac{3}{2}}$.

§ I 2,22 Numerieke bovengrens bij bestaanbare λ.

Het is van groot belang een numerieke bovengrens aan te geven van de fouten, die men maakt, als men de gevonden reeksontwikkelingen ergens afbreekt. Ik zal dat in deze paragraaf voor de Henkelfuncties doen, in de veronderstelling, dat de parameter λ een bestaanbaar getal $> -\frac{1}{2}$ voorstelt. Zoals uit de voorgaande paragraaf blijkt, komt het er op aan de functie $(1-z)^{\rho}$ waar ρ een bestaanbaar getal > -1 voorstelt, te ontwikkelen naar opklimmende machten van z. Ik zonder het geval uit, dat z een bestaanbaar getal ≥ 1 voorstelt. Ik ga bewijzen, dat dan $(1-z)^{\rho}$ bij benadering gelijk is aan

$$\sum_{h=0}^{p-1} (-1)^h \binom{\rho}{h} z^h$$

en dat, indien $p > \rho$ is, de afwijking absoluut, hoogstens gelijk is aan de eerst verwaarloosde term, vermenigvuldigd met M ; hier is, als het argument α van z absoluut $\leqq \pi$ gekozen wordt,

$$M = |\sin\alpha|^{-1} \quad \text{voor} \quad |\alpha| \leqq \frac{\pi}{2} ;$$

$$= |1-z|^{-1} \quad \text{voor} \quad |\alpha| \leqq \frac{\pi}{2} ; |z| \leq |\cos\alpha|$$

$$= 1 \quad \text{voor} \quad \frac{\pi}{2} \leqq |\alpha| \leqq \pi .$$

Ik ontleen het bewijs aan Szegö 39', p.204, formule 8.5.6.
Is $p > -1$ en is p een geheel getal $> \rho$, dan is

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\varphi \, tg^{-1-2\rho}\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-2\rho-1}\varphi \cos^{1+2\rho}\varphi \, d\varphi = c(-)^p \binom{\rho}{p}$$

waarin c onafhankelijk van p is. Voor $|z| < 1$ is dus

$$z^p \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2p}\varphi \, tg^{-1-2\rho}\varphi}{1 - z\sin^2\varphi} d\varphi = \sum_{h=p}^{\infty} z^h \int_0^{\pi/2} \sin^{2h}\varphi \, tg^{-1-2\rho}\varphi \, d\varphi$$

$$= c \sum_{h=p}^{\infty} (-1)^h \binom{\rho}{h} z^h .$$

derhalve

$$(1) \quad z^p \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2p}\varphi \, tg^{-1-2\rho}\varphi}{1 - z^2 \sin^2\varphi} d\varphi = c\left\{(1-z)^{\rho} - \sum_{h=0}^{p-1} (-)^h \binom{\rho}{h} z^h\right\}.$$

Deze identiteit geldt in het gehele z-vlak, dat opengesneden is langs de bestaanbare as van 1 naar $+\infty$, omdat beide leden in het opengesneden vlak eenwaardige analytische functies van z zijn.

Omdat $z\sin^2\varphi$ het segment $(0, z)$ doorloopt, is de noemer absoluut minstens gelijk aan de afstand van het punt 1 tot dit s[egment]. Is $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$ dan is de afstand van 1 tot de rechte, die de pu[nten] 0 en z verbindt, gelijk aan $|\sin\alpha|$. Is $|\alpha| \leqq \frac{\pi}{2}$; $|z| \leq$ dan is de genoemde afstand de afstand van 1 tot z. Is tenslotte

$$\frac{\pi}{2} \leq |\alpha| \leq \pi$$

dan is de genoemde afstand ≥ 1. Dus

$$\frac{1}{|1 - t \sin^2 \varphi|} \leq M$$

waaruit blijkt, dat het linkerlid van (...) absoluut

$$\leq M\, |x|^{h} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\mu} \varphi \, \cos^{-1-2\rho} \varphi \, d\varphi = M\, |c|\, |(\ldots)\, x^{h}|$$

is. Hieruit volgt de bewering.

Dit kan onmiddellijk op de in de voorgaande paragraaf behandelde Besselfunctie $H_\lambda^{(1)}(w)$ toegepast worden, indien $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ is.

De integraal J_1, genoemd in de voorgaande paragraaf, is approximatief gelijk aan

$$\sum_{h=0}^{n-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{h} \Gamma\left(\lambda + h + \tfrac{1}{2}\right) \left(\frac{i}{2w}\right)^{h}$$

en de afwijking is absoluut hoogstens gelijk aan de eerst verwaarloosde term, vermenigvuldigd met M_1; hier is

$$M_1 = \frac{1}{|\cos \arg w|} \quad \text{als} \quad 0 \leq \arg w < \frac{\pi}{2}$$

$$= 1 \quad \text{als} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg w \leq 0.$$

De integraal J_2, genoemd in de voorgaande paragraaf, is approximatief gelijk aan

$$\sum_{h=0}^{n-1} \binom{\lambda - \frac{1}{2}}{h} \Gamma\left(\lambda + h + \tfrac{1}{2}\right) \left(\frac{-i}{2w}\right)^{h}$$

en de afwijking is absoluut hoogstens gelijk aan de eerst verwaarloosde term, vermenigvuldigd met M_2; hier is

$$M_2 = \frac{1}{|\cos \arg w|} \quad \text{als} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg w \leq 0$$

$$= 1 \quad \text{als} \quad 0 \leq \arg w < \frac{\pi}{2}$$

§ I 2,23 Ultrasferische veeltermen.

De ultrasferische veeltermen $P_n^{(\lambda)}(w)$ worden gedefinieerd door de voortbrengende functie

$$(1 - 2wt + t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(w)$$

(Szegö 39, p. 82, formule 4.7.2) Het speciale geval $\lambda = \frac{1}{2}$ levert de veeltermen $P_n(w)$ van Legendre, terwijl Stieltjes (1890, Hermite-Stieltjes 1905, vol. 2, p. 122, no. 284) bewezen heeft, dat $P_n^{(\lambda)}(\cos \theta)$ voor $0 < \theta < \pi$ en $0 < \lambda < 1$ gelijk is aan het imaginaire deel van $\frac{2}{\pi}(\sin \lambda\pi)\, e^{il} A$, waarin

$l = (n + 2\lambda)\theta + (\frac{1}{2} - \lambda)\pi$ en $A = \int_0^1 t^{n+2\lambda-1} (1-t)^{-\lambda} (1 - te^{2i\theta})^{-\lambda} dt$

De opgave is nu om $P_n^{(\lambda)}(\cos \theta)$ bij vaste λ $(0 < \lambda < 1)$ en vaste θ $(0 < \theta < \pi)$ voor grote n te approximeren. Deze opgave reduceert zich tot het zoeken van een benadering voor de integraal A.

Zo oppervlakkig beschouwd, lijkt het misschien aanbevelenswaardig de in de integrand van A voorkomende factor $(1 - te^{2i\theta})^{-\lambda}$ te ontwikkelen naar opklimmende machten van t. Dat betekent, dat men deze factor vervangt door de som van een veelterm en een restterm, welke in de buurt van de oorsprong een kleine modulus bezit. Toch is deze methode onhandig, omdat de integrand in de buurt van de oorsprong, wegens de factor $t^{n+2\lambda-1}$ buitengewoon klein is, zodat de omgeving van de oorsprong tot de integraal A een zeer kleine bijdrage oplevert, in tegenstelling tot het punt 1 welks omgeving juist een zeer behoorlijke contributie geeft. Wij moeten dan ook voor $(1-te^{2i\theta})^{-\lambda}$ een benadering zoeken, die niet in de buurt van de oorsprong, maar juist in de omgeving van 1 zeer scherp is, d.w.z. wij moeten niet naar t, maar naar $1-t$ ontwikkelen. Laten we daarom $1-t=u$ stellen. De integraal A gaat dan over in

$$A = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}{(2\sin\theta)^{\lambda}} \int_0^1 u^{-\lambda}(1-u)^{n+2\lambda-1}(1-z)^{-\lambda}\,du,$$

waarin

$$z = \frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}u}{2\sin\theta}$$

is. Dus $\arg z = \theta - \frac{\pi}{2}$ en $|z| \leq \frac{1}{2\sin\theta}$

Volgens de stelling van de voorgaande paragraaf is $(1-z)^{-\lambda}$ bij benadering gelijk aan

$$\sum_{h=0}^{p-1}\binom{h+\lambda-1}{h}z^h$$

en de afwijking is absoluut hoogstens gelijk aan de eerst verwaarloosde term, vermenigvuldigd met M, waarin M het kleinste der getallen $\frac{1}{|\cos\theta|}$ en $2\sin\theta$ voorstelt. Dus A is approximatief gelijk aan

$$\text{(1)}\quad \Gamma(n+2\lambda)\sum_{h=0}^{p-1}\binom{h+\lambda-1}{h}\frac{e^{i(h-\frac{1}{2})(\theta-\frac{\pi}{2})}}{(2\sin\theta)^{h+\lambda}}\frac{\Gamma(h-\lambda+1)}{\Gamma(h+n+\lambda+1)}$$

en de afwijking is, absoluut genomen, absoluut hoogstens gelijk aan de eerst verwaarloosde term, vermenigvuldigd met M (hierbij is $M \leqq 2\sin\theta$, dus zeker $\leqq 2$) Hiermede hebben we voor $0<\theta<\pi$ en $0<\lambda<1$ een asymptotische reeksontwikkeling voor de ultrasferische veelterm $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ gevonden, en wel een met numerieke bovengrens voor de gemaakte fout, als men ergens afbreekt. Die veelterm is namelijk bij benadering

$$\frac{2}{\pi}(\sin\pi\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)\sum_{h=0}^{p-1}\frac{\binom{h+\lambda-1}{h}}{(2\sin\theta)^{h+\lambda}}\frac{\Gamma(h+\lambda+1)}{\Gamma(h+n+\lambda+1)}\cos\left\{n\theta+(h+\lambda)\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

en de afwijking is absoluut

$$\leqq \frac{2}{\pi}(\sin\lambda\pi)\,\Gamma(n+2\lambda)\frac{\binom{p+\lambda-1}{p}}{(2\sin\theta)^{p+\lambda}}\frac{\Gamma(p-\lambda+1)}{\Gamma(p+n+\lambda+1)}M.$$

Het speciale geval $\lambda=\frac{1}{2}$ (waarbij de ultrasferische veelterm $P_n^{(\lambda)}(\cos\theta)$ overgaat in de veelterm $P_n(\cos\theta)$ van Legendre, is gevonden door Stieltjes (1890[1]; 1890[2]), het algemene geval door Szegö (1933, Asymptotische Entwicklung der Jacobischen Polynome) p.57-60).
Twee opeenvolgende termen in (1) hebben een verhouding, waarvan de modulus bij onbegrensd aangroeiende index h tot $\frac{1}{2\sin\theta}$ nadert. Is $\sin\theta<\frac{1}{2}$ dan is (1) het beginstuk van een convergente reeks, zodat $P_n^{(\lambda)}(w)$ dan de som van de convergente reeks

$$P_n^{(\lambda)}(w) = \frac{2}{\pi}(\sin\pi\lambda)\,\Gamma(n+2\lambda)\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\binom{h+\lambda-1}{h}}{(2\sin\theta)^{h+\lambda}}\frac{\Gamma(h+\lambda+1)}{\Gamma(h+n+\lambda+1)}$$

§ 3 Methode van Darboux.

Zij
$$f(z)=\sum_{\omega=0}^{\infty} a(\omega) z^{\omega}$$

een functie, die binnen de eenheidscirkel analytisch is en op de eenheidscirkel hoogstens een eindig aantal singuliere punten bezit. Om het asymptotisch karakter van de coëfficienten $a(\omega)$ vast te leggen, zoek ik bij elk op de eenheidscirkel gelegen singulier punt s en bij elk geheel getal $h \geq 0$ een (van ω onafhankelijke) functie $f_{hs}(z)$ van z, die overal op en binnen de eenheidscirkel, behalve in het punt s, eenwaardig en analytisch is, zodanig dat $f(z) - f_{hs}(z)$ voor alle punten $z = e^{i\varphi}$ op de eenheidscirkel in de omgeving van s een minstens h-maal continu differentieerbare functie van φ voorstelt.

Wordt dan $f_{hs}(z)$ naar opklimmende machten van z ontwikkeld,
$$f_{hs}(z) = \sum_{\omega=0}^{\infty} a_{hs}(\omega) z^{\omega},$$

dan is
$$a(\omega) \sim \sum_{s} \text{as}\lim_{h\to\infty} a_{hs}(\omega),$$

waarbij de som uitgestrekt wordt over de op de eenheidscirkel gelegen singuliere punten s van $f(z)$.

Het bewijs is eenvoudig. De functie

I
$$f(s) - \sum_{s} f_{hs}(z)$$
kan binnen de eenheidscirkel naar opklimmende macht van z ontwikkeld worden
$$\sum_{\omega=0}^{\infty} b_h(\omega) z^{\omega},$$

waarin
$$b_h(\omega) = a(\omega) - \sum_{s} a_{hs}(\omega).$$

In de op de eenheidscirkel gelegen punten $z = e^{i\varphi}$, die met geen enkel singulier punt s van $f(z)$ samenvallen, is I een analytische functie van z, dus een oneindig differentieerbare functie $g_h(\varphi)$ van φ.

1 vaak In een op de eenheidscirkel gelegen singulier s van $f(z)$ is $\sum_{s \neq s_0} f_{hs}(z)$ een oneindig dikwijls differentieerbare functie van φ, terwijl $f(z) - f_{h,s_0}(z)$ minstens h maal continu differentieerbaar is. Dus $g_h(\varphi)$ is minstens h maal continu differentieerbaar naar φ en

$$b_h(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_h(\varphi) e^{-i\omega\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(i\omega)^h}\int_0^{2\pi} g_h^{(h)}(\varphi) e^{-i\omega\varphi} d\varphi.$$

Omdat de van ω onafhankelijke functie $g_h^{(h)}(\varphi)$ begrensd is, is $b_h(\omega) << |\omega|^{-h}$, waarmede het bewijs geleverd is.

§ 3,1 Veeltermen van Legendre.

De veeltermen $P_\omega(w)$ $(\omega \geq 0)$ worden gegeven door de in de omgeving van de oorsprong geldige ontwikkeling

$$f(z) = (1-2wz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\omega=0}^{\infty} P_\omega(w) z^\omega ,$$

waarbij $f(0)=1$ verondersteld wordt, dus $P_0(w)=1$.

Gevraagd wordt voor grote ω en gegeven w een asymptotische ontwikkeling voor $P_\omega(w)$ af te leiden. Ik zal daarbij eerst het geval $-1+\delta \leq w \leq 1-\delta$ behandelen, waarin δ een vast positief getal voorstelt; daarbij mag w zelf wèl van ω afhangen. Stel $w = \cos\alpha$, waarin $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
De functie $f(z)$ is binnen de eenheidscirkel eenwaardig en analytisch en bezit op de eenheidscirkel twee singuliere punten $s = e^{i\alpha}$ en $\bar{s} = e^{-i\alpha}$. Spreekt men af $\sqrt{z-s} = i e^{\frac{1}{2}i\varphi}\sqrt{1-\bar{s}z}$ voor $z = e^{i\varphi}$, waarbij de wortelvorm voor $z=0$ de waarde 1 aanneemt, dan is

$$\sqrt{z-\bar{s}} = -i e^{-\frac{1}{2}i\varphi}\sqrt{1-\bar{s}z},$$

omdat het product $f(z)$ volgens afspraak voor $z=0$ de waarde 1 bezit.

In de omgeving van het punt s is $f(z)$ gelijk aan

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-s}}\left\{(z-s)+(s-\bar{s})\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{2\sin\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(z-s)^{n-\frac{1}{2}}}{(s-\bar{s})^n} .$$

De functie

$$f_{hs}(z) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{2\sin\alpha}} \sum_{n=0}^{h} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(z-s)^{n-\frac{1}{2}}}{(s-\bar{s})^n}$$

is op en binnen de eenheidscirkel, het punt s zelf uitgezonderd, eenwaardig en analytisch met de eigenschap dat $f(z) - f_{hs}(z)$ in op de eenheidscirkel in de omgeving van s gelegen punten een minstens k maal continu-differentieerbare functie van φ is.

Bij ontwikkeling naar opklimmende machten van z krijgt men

$$f_{hs}(z) = \sum_{\omega=0}^{\infty} a_{hs}(\omega) z^\omega ,$$

waarin

$$a_{hs}(\omega) = \sum_{n=0}^{h} \binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{n-\frac{1}{2}}{\omega}(2\sin\alpha)^{-\frac{1}{2}-n} e^{-\frac{5}{4}\pi i + (n-\omega-\frac{1}{2})\alpha i + \frac{1}{2}n\pi i - \omega\pi i}$$

Hierin mag men i door $-i$ vervangen; daarbij gaat dan s over in $\bar{s}$.

Het resultaat is dus: voor $-1+\delta \leq \cos\alpha \leq 1-\delta$, waarin δ vast ≤ 1 is, is

$$P_\omega(\cos\alpha) \sim (-1)^\omega \, 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{n-\frac{1}{2}}{\omega}(2\sin\alpha)^{-\frac{1}{2}-n} \cos\left\{\frac{\pi}{4}(5-2n) - \left(n-\omega-\frac{1}{2}\right)\omega\right\} .$$

//

omdat $\dfrac{1.3\ldots\ldots(2\omega-1)}{2.4\ldots(2\omega)} = \dfrac{(2\omega)!}{2^{2\omega}\,\omega!\,\omega!}$

voor grote ω bij benadering gelijk is aan $(\pi\omega)^{-\frac{1}{2}}$ met een afwijking, die hoogstens van de orde $\omega^{-3/2}$ is (Zie § 4,1), vinden we dat $P_\omega(\cos\alpha)$ bij benadering gelijk is aan $\sqrt{\dfrac{2}{\pi\omega\sin\alpha}}\cos\left\{\dfrac{5\pi}{4}+(\omega+\tfrac{1}{2})\alpha\right\}$ met een afwijking hoogstens van de orde $\dfrac{1}{\omega}$.

Hoofdstuk II. Integralen.

§II,1. De methode der zadelpunten.

§II,1,1. Integralen met bestaanbare integratieveriabele.

De in deze § ontwikkelde methode is een bijzonder geval van die der zadelpunten, welke wij aan onzen landgenoot P.Debye (1909[1]) danken. Bij de zadelpuntmethode (méthode des cols, method of deepest descent) wordt in de regel langs een in het complexe vlak gelegen kromme geïntegreerd, maar in deze § beperk ik mij tot het geval (i.h.b. door G.Faber (1922[1]) behandeld), dat geïntegreerd wordt over een op de bestaanbare as gelegen interval. De grondgedachte van de methode wordt duidelijk uitgesproken in een door H.A.Schwarz uitgewerkt fragment uit de nalatenschap van Riemann (Werke 1876, p.400). In zijn artikel (22[1], p.287) merkt Faber op, dat Riemann daarbij misschien beïnvloed is door analoge beschouwingen van Laplace.

In het speciale geval, dat niet alleen de integratieveriabele maar ook de integrand bestaanbaar is, wordt de in deze § behandelde methode dan ook vaak naar Laplace genoemd.

Zoals blijken zal, bezit de integraal

$$\int_a^b g(x)\, e^{f(x)}\, dx$$

onder zeer algemene voorwaarden een asymptotische waarde, die ondubbelzinnig bepaald wordt door de waarden, die de functies $f(x)$ en $g(x)$ met hun afgeleiden in een bepaald punt ξ aannemen. Dit punt heet dan een beslissend punt.

Laat ik eerst het geval behandelen, dat dat beslissende punt met het punt a samenvalt.

Stel $f(x)$ en $g(x)$ zijn in het interval $\xi \leq x \leq b$ oneindig dikwijls differentieerbaar waarbij $f''(\xi) = -p^2$ de eigenschap

$$\text{(I)} \qquad -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \arg p \leq \frac{\pi}{4} - \delta \qquad (\delta \text{ vast} > 0)$$

bezit. Ik neem aan, dat $(b-\xi)\,|p|\,(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}}$ met $|\omega|$ onbegrensd aangroeit, maar dat $(b-\xi)\,p\,\omega^{-1}$ een begrensde functie van ω is. Ten slotte veronderstel ik nog

$$\text{(II)} \qquad f'(\xi) \ll p\,\omega^{-1}$$

en bovendien, uniform in x $(\xi \leq x \leq b)$

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} f^{(h)}(x) &\ll p^h \omega^{-h} && \text{voor elke gehele vaste } h \geq 1 \\ g^{(h)}(x) &\ll p^h \omega^{-h} && \text{voor elke gehele vaste } h \geq 0. \end{aligned}$$

Onder die voorwaarden bezit

$$\text{(IV)} \qquad p\, e^{-f(\xi)} \int_\xi^b g(x)\, e^{f(x)}\, dx$$

een asymptotische waarde, die ondubbelzinnig bepaald is door de waarden welke de functies $f(x)$ en $g(x)$ met hun afgeleiden, in het punt ξ aannemen. Die asymptotische waarde is de asymptotische som van de reeks

$$\text{(V)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{2}(n-1)}\, \Gamma\!\left(\frac{n+1}{2}\right) p^{-n}\, c_n.$$

waarbij de coëfficiënten c_n bepaald worden door de voortbrengende functie

$$\text{(VI)}\quad g(\xi+u)\ \exp\left\{\sum_{\substack{k=1\\ h+2}}^{\infty}\frac{u^k}{k!}f^{(k)}(\xi)\right\}=q_0+q_1\mu+q_2u^2+\cdots$$

Dat de reeks V asymptotisch convergeert, blijkt uit de formule

(VII) $q_n \ll p^n\ \omega^{-n}$ voor elk vast geheel getal $n \gtrsim 0$,

die ik zo dadelijk ga bewijzen. Ik zal nog iets meer aantonen. Wordt nl.

$$F(x) = f(x)-f(\xi)-\tfrac{1}{2}(x-\xi)^2 f''(\xi)$$

gesteld, dan is

$$F(x) = (x-\xi)\ f'(\xi)+\tfrac{1}{2}\int_{\xi}^{x}(x-w)^2\ f'''(w)\ dw \ll (b-\xi)p\omega^{-1}+(b-\xi)^3p^3\omega^{-3} \ll 1$$

wegens II en III.

Verder is

$$F'(x) = \int_{\xi}^{x}(x-w)f'''(w)\,dw \ll (b-\xi)^2\ p^3\omega^{-3} \ll p\omega^{-1},$$

$$F''(x) = \int_{\xi}^{x} f'''(w)\,dw \ll (b-\xi)\ p^3\ \omega^{-3} \ll p^2\omega^{-2}$$

en voor elk geheel getal $h \geqq 3$

$$F^{(h)}(x) = f^{(h)}(x) \ll p^h\omega^{-h},$$

dus wegens III ook $\dfrac{d^h\ g(x)\ e^{F(x)}}{dx^h} \ll p^h\ \omega^{-h}$,

en wel uniform in x. Substitueert men $x=\xi$, dan krijgt men VII. Bovendien vindt men voor elk vast geheel getal $h \gtrsim 0$

$$g(x)\ e^{F(x)} - \sum_{n=0}^{h-1} q_n\ (x-\xi)^n \ll p^h\omega^{-h}(x-\xi)^h$$

uniform in x, dus

$$\text{(VIII)}\quad p\int_{\xi}^{b} g(x)\,e^{f(x)-f(\xi)}dx - p\sum_{n=0}^{h-1}q_n\int_{\xi}^{b}e^{-\frac{1}{2}p^2(x-\xi)^2}(x-\xi)^n dx$$
$$\ll p^{h+1}\ \omega^{-h}\int_{\xi}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}r(x-\xi)^2}(x-\xi)^n dx,$$

waarin r het reële deel van $p^2 = -f''(\xi)$ voorstelt. Uit I volgt

(IX) $\qquad r \geqq |p|^2 \sin 2\delta$,

dus het rechterlid van VIII is $\ll r^{\frac{1}{2}(h+1)}\omega^{-h}\ r^{-\frac{1}{2}(h+1)} = \omega^{-h}$.

Omdat $\dfrac{(b-\xi)^2\,|p|^2}{\log|\omega|}$, dus ook $\dfrac{(b-\xi)^2 r}{\log|\omega|}$ met $|\omega|$ onbegrensd aangroeit, is voor iedere vaste gehele $n \gtrsim 0$

$$e^{-\frac{1}{2}r(b-\xi)^2}\left\{(b-\xi)\sqrt{r}\right\}^n \ll e^{-\frac{1}{3}r(b-\xi)^2} \ll e^{-h\log|\omega|} = |\omega|^{-h}$$

indien maar $|\omega|$ groot genoeg gekozen wordt. Wegens VII en IX is $pq_n \ll r^{\frac{1}{2}(n+1)}$, dus

$$p q_n \int_b^\infty e^{-\frac12 p(x-\xi)^2}(x-\xi)^n dx \ll \tau^{\frac12(n+1)} \int_b^\infty e^{-\frac12\tau(x-\xi)^2}(x-\xi)^n dx$$
$$\ll e^{-\frac12\tau(b-\xi)^2}\left\{(b-\xi)\sqrt{\tau}\right\}^n \ll |\omega|^{-h},$$

sodat VIII overgaat in

$$p\int_\xi^b g(x)e^{f(x)}dx - p\sum_{n=0}^{h-1} q_n \int_\xi^\infty e^{-\frac12 p(x-\xi)^2}(x-\xi)^n dx \ll \omega^{-h}.$$

Hiermede is het bewijs geleverd, omdat de in de laatste formule optredende integraal de waarde $2^{\frac12(n-1)}\Gamma(\frac{n+1}{2})\, p^{-n-1}$ bezit.

Wij zullen nu ook het geval behandelen, dat het beslissende punt tussen a en b ligt en wel alsvolgt:

Stel $f(x)$ en $g(x)$ zijn in het interval $a \leq x \leq b$ oneindig dikwijls differentieerbaar; tussen a en b ligge een punt ξ, waarbij $f''(\xi) = -p^2$ de eigenschap I (δ vast > 0) bezit. Ik neem aan, dat

$$(b-\xi)|p|(\log|\omega|)^{-\frac12} \quad \text{en} \quad (\xi-a)|p|(\log|\omega|)^{-\frac12}$$

met $|\omega|$ onbegrensd aangroeien, maar dat $(b-\xi)p\omega^{-1}$ en $(\xi-a)p\omega^{-1}$ begrensde functies van ω zijn. Tenslotte neem ik II en bovendien III (uniform in x) aan. Onder die voorwaarden bezit

$$p\, e^{-f(\xi)} \int_a^b g(x)\, e^{f(x)}\, dx$$

een asymptotische waarde, die ondubbelzinnig bepaald is door de waarden welke de functies $f(x)$ en $g(x)$ met hun afgeleiden in het punt ξ aannemen. Die asymptotische waarde is de asymptotische som van de reeks

$$\sum_{m=0}^\infty 2^{m+\frac12}\Gamma(m+\tfrac12)\, p^{-2m} q_{2m}$$

waarbij de coëfficienten q_n door VI bepaald worden.

Voor het bewijs passe men de vorige stelling tweemaal toe, eerst op het interval (ξ, b), vervolgens op het interval (a, ξ) (waarbij $-x$ als nieuwe integratievariabele ingevoerd wordt). Men merke op, dat in het antwoord de coëfficienten q_n met oneven index n wegvallen. In de toepassingen van de laatste stelling behoeven die coëfficienten dus ook niet berekend te worden.

III REEKSEN.

§ III, 1 Elementaire methoden.

§ 1,1 Afleiding van een identiteit met binomiaal-coëfficienten

Voor de veelterm
$$A(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$$
geldt de identiteit
$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\binom{t+\rho}{m}}{\binom{t}{m}} z^m = \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{\rho+m-1}{m}}{\binom{t}{m}} \cdot \frac{A^{(m)}(z)}{m!},$$
waarin t en ρ willekeurig zijn, onder dien verstande, dat t niet met van de getallen 0,1,...,n-1 samenvalt.

Het bewijs loopt als volgt: De som
$$\sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{\binom{\rho+h-1}{h}}{\binom{t}{h}}$$
is voor $t = k-\rho \;(k=0,1,\ldots,m-1)$ gelijk aan
$$c\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{h} \varphi(h),$$
waarin $\varphi(h)$ een veelterm in h is van de graad k, dus van een graad $< m$. Deze som is dus nul. De beschouwde som, vermenigvuldigd met $\binom{t}{m}$ levert derhalve een veelterm in t van de m ^{e} graad met begincoëfficient $1:m!$ en met nulpunten $-\rho, 1-\rho, \ldots, m+1-\rho$. Deze veelterm is dus gelijk aan $\binom{t+\rho}{m}$, waaruit volgt
$$\frac{\binom{t+\rho}{m}}{\binom{t}{m}} = \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} \frac{\binom{\rho+h-1}{h}}{\binom{t}{h}}.$$
Het linker lid van de te bewijzen formule is dus
$$\sum_{h=0}^{n} \frac{\binom{\rho+h-1}{h}}{\binom{t}{h}} \sum_{m=h}^{n} a_m \binom{m}{h} z^m,$$
waaruit de bewering volgt.

§ 1,2 Ultra-sferische veeltermen.

De ultrasferische veeltermen $P_n^{(\lambda)}(w)$ worden gedefinieerd door de voortbrengende functie
$$(1-2wt+t^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(w). \quad \text{(Szegö 39', p.82; formule 4.7.23)}$$
Het speciale geval $\lambda = \frac{1}{2}$ levert de veeltermen $P_n(w)$ van Legendre.

Ik stel $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ en $\frac{1}{z} = w+\sqrt{w^2-1}$;

ik breng in het w-vlak een coupure aan langs het afgesloten segment (-1,1) en ik stel $\sqrt{w^2-1}$ positief voor $w > 1$. Uit $|z|=1$ zou vol $w+\sqrt{w^2-1} = e^{i\alpha}$ (bestaanbaar), dus
$$2w = \left(w+\sqrt{w^2-1}\right) + \left(w-\sqrt{w^2-1}\right) = e^{i\alpha}+e^{-i\alpha},$$
zodat $w = \cos\alpha$ op de coupure ligt.

In het opengesneden w-vlak is dus $|z| \neq 1$, zodat de ongelijkheid $|z|>1$ die voor $w > 1$ geldt, in het gehele opengesneden w-vlak geldig is.

We vinden nu voor $|t| < |z|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(w) = (1-tz)^{-\lambda}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-\lambda}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\lambda+m-1}{m} t^m z^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\lambda+k-1}{k} t^k z^{-k},$$

dus voor $n \geqq 0$

(I) $$P_n^{(\lambda)}(w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\lambda+m-1}{m}\binom{\lambda+n-m-1}{n-m} z^{2m-n}$$

Indien λ een geheel getal $\leqq 0$ is, is $P_n^{(\lambda)}(w)$ blijkens de definitie een veelterm in w hoogstens van de graad $-\lambda$, die voor $n > -2\lambda$ identiek nul is. Dit eenvoudige geval behoeft niet verder onderzocht te worden, zodat we in het vervolg het geval, dat λ een geheel getal $\leqq 0$ voorstelt, buiten sluiten. We krijgen dan

$$P_n^{(\lambda)}(w) = \binom{\lambda+n-1}{n} z^{-n} \sum_{m=0}^{n} \binom{\lambda+m-1}{m} \frac{\binom{n}{m}}{\binom{\lambda+n-1}{m}} z^{2m}.$$

Dus als

$$A(z) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\lambda+m-1}{m} z^m$$

gesteld worde , is volgens bovenstaande identiteit

(II) $$P_n^{(\lambda)}(w) = \binom{\lambda+n-1}{n} z^{-n} \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{m-\lambda}{m}}{\binom{\lambda+n-1}{m}} \frac{z^{2m}}{m!} A^{(m)}(z^2)$$

Ik vervang nu n door ω, zodat ω de rij der gehele getallen $\geqq 0$ doorloopt. Is $|z| \leqq k$, waarin k een vast getal voorstelt, dan geldt uniform in z,

$$A(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\lambda+m-1}{m} z^m = (1-z)^{-\lambda}$$

en

$$A^{(m)}(z) \sim \binom{\lambda+m-1}{m}(1-z)^{-\lambda-m}$$ bij vaste $m \geqq 0$

zodat dan de betrekking

(III) $$z^{\omega} P_{\omega}^{(\lambda)}(w) \sim \binom{\lambda+\omega-1}{\omega} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{m-\lambda}{m}\binom{\lambda+m-1}{m}}{\binom{\lambda+\omega-1}{m}} z^{2m}(1-z^2)^{-\lambda-m}$$

uniform in z geldt. (Szegö 39', p.190)

Men heeft

$$(1-z^2)^{-\lambda} = 2^{-\lambda}\sigma^{\lambda},$$ waarin $$\sigma = \frac{w+\sqrt{w^2-1}}{\sqrt{w^2-1}}$$

hierbij is σ^{λ} voor $w > 1$ positief. Door deze afspraak is σ^{λ} in het gehele opengesneden w-vlak ondubbelzinnig vastgelegd, want doorloopt w een gesloten lus om de coupure, dan is de totale toename van σ nul; immers doorloopt w een cirkelomtrek met middelpunt O en grote straal, dan doorloopt σ een klein lusje in de buurt van het punt ½.

Uit de formule van Stirling (II,1,1) volgt

$$\lim_{\omega \to \infty} (\pi\omega)^{1-\lambda} \binom{\lambda+\omega-1}{\omega} = 1,$$

zodat we in het byzonder vinden: bij benadering is

$$P_\omega^{(\lambda)}(w) \quad \text{gelijk} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)^{\lambda-1} \sigma^\lambda \left(w+\sqrt{w^2-1}\right)^\omega$$

en wel zó dat de verhouding onbegrensd aangroeiend ω tot 1 nadert. Dit geldt uniform in z op elke gesloten verzameling, die geen enkel punt van het afgesloten segment (-1,1) bevat.

§ II,1,11. Formules van Stirling.

Onder een formule van Stirling zal ik iedere formule verstaan, die ons in staat stelt $\Gamma(s+1)$ voor grote $|s|$ te berekenen.

Indien $-\frac{\pi}{2}+\delta \leq \arg s \leq \frac{\pi}{2}-\delta$ (δ vast >0) is, dan is

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty u^s e^{-u}\, du = s^{s+1} \int_0^\infty x^s e^{-sx}\, dx \qquad (u=sx)$$
$$= s^{s+1} e^{-s} \mathcal{J};$$

hierbij is

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty e^{f(x)} dx \quad \text{en} \quad f(x) = -s(x-1-\log x).$$

Voor $\xi=1$ is $f'(\xi) = 0$ en $f''(\xi) = -s = -p^2 = -\omega^2$;

als $p=\sqrt{s}$ en $\omega=\sqrt{s}$ gesteld wordt. Wordt $a = 1-2^{-2}|\omega|^{-2}$ en $b = 1+2^{-2}|\omega|^{-2}$ gesteld, dan is de bijdrage tot de integraal $\mathcal{J}$ van elk der intervallen $(0,a)$ en (b,∞) asymptotisch nul, want het bestaanbare deel van $f(x)$ op het eerste interval is $\leq -c|\omega|^2$, op het tweede interval $\leq -c|\omega|^2 x$, waarin c een vast positief geschikt gekozen getal is. Dus

$$\mathcal{J} \sim \int_a^b e^{f(x)} dx$$

Op deze laatste integraal kan de voorgaande stelling met $g(x) = 1$ worden toegepast. Immers in het beschouwde interval is

$$f^{(h)}(x) \ll s \ll p^h \omega^{-h} \quad \text{voor iedere vaste gehele} \quad h \geq 3$$
$$g^{(h)}(x) \ll 1 \ll p^h \omega^{-h} \quad \text{voor iedere vaste gehele} \quad h \geq 0.$$

Verder is $(b-1)|p||\omega|^{-1} = (1-a)|p||\omega|^{-1} \leq \frac{1}{4}$ dus begrensd, terwijl

$$(b-1)|p|(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}} = (1-a)|p|(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}}$$

met $|\omega|$ onbegrensd aangroeit. Hieruit blijkt, dat $\sqrt{s}\,\mathcal{J}$, dus ook $\mathcal{J}$ asymptotisch worden ontwikkeld.

Bij de berekening van de coëfficiënten, die in deze asymptotische ontwikkeling optreden, kunnen we zonder bezwaar $s>0$ veronderstellen. Indien $x = \frac{t}{\sqrt{s}}$ gesteld wordt en $s^{-\frac{1}{2}}$ door λ vervangen wordt, gaat $f(x)$ over in

$$-s\left\{\frac{t}{\sqrt{s}} - \log\left(1+\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right\} = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\lambda - \frac{1}{4}t^4\lambda^2 + \frac{1}{5}t^5\lambda^3 - \cdots$$

Wordt dus

$$e^{f(x)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}\left\{1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots\right\}$$

gesteld, dan is

$$e^{\frac{1}{3}t^3\lambda - \frac{1}{4}t^4\lambda^2 + \frac{1}{5}t^5\lambda^3 - \cdots} = 1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots$$

Differentiatie naar λ geeft

$$(1+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\cdots)\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{4}t^4\lambda + \frac{3}{5}t^5\lambda^2 - \cdots\right) = b_1 + 2b_2\lambda + \cdots$$

dus voor $n \geq 0$

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \frac{h+1}{h+3} t^{h+3} b_{n-h}.$$

Hieruit volgt achtereenvolgens

$b_0=1$; $b_1 = \frac{t^3}{3}$; $b_2 = \frac{t^6}{18} - \frac{t^4}{4}$; $b_3 = \frac{t^9}{162} - \frac{t^7}{12} + \frac{t^5}{5}$; $b_4 = \frac{t^{12}}{2^3 3^5} - \frac{t^{10}}{2^3 3^2} + \frac{47}{2^5 3.5}t^8 - \frac{1}{2.3}t^6$;

De veeltermen $b_n(t)$ zijn even of oneven alnaargelang n even of oneven is.

Volgens de bovenstaande theorie is dus

$$\int_0^\infty e^{-s(x-1-\log x)} dx \sim \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\left\{1 + \frac{b_2(t)}{s} + \frac{b_4(t)}{s^2} + \cdots\right\} dt$$

§ II,1,11. Formules van Stirling.

Onder een formule van Stirling zal ik iedere formule verstaan, die ons in staat stelt $\Gamma(s+1)$ voor grote $|s|$ te berekenen.

Indien $-\frac{\pi}{2}+\delta \leq \arg s \leq \frac{\pi}{2}-\delta$ (δ vast >0) is, dan is

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty u^s e^{-u}\,du = s^{s+1}\int_0^\infty x^s e^{-sx}\,dx \qquad (u=sx)$$
$$= s^{s+1} e^{-s}\,\mathcal{J};$$

hierbij is

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty e^{f(x)}dx \quad \text{en} \quad f(x) = -s(x-1-\log x).$$

Voor $\xi=1$ is $f'(\xi)=0$ en $f''(\xi) = -s = -p^2 = -\omega^6$, als $p=\sqrt{s}$ en $\omega=\sqrt[6]{s}$ gesteld wordt. Wordt $a = 1-2^{-2}|\omega|^{-2}$ en $b = 1+2^{-2}|\omega|^{-2}$ gesteld, dan is de bijdrage tot de integraal $\mathcal{J}$ van elk der intervallen $(0,a)$ en (b,∞) asymptotisch nul, want het bestaanbare deel van $f(x)$ op het eerste interval is $\leq -6|\omega|^2$, op het tweede interval $\leq -c|\omega|^2 x$, waarin c een vast positief geschikt gekozen getal is. Dus

$$\mathcal{J} \sim \int_a^b e^{f(x)}dx$$

Op deze laatste integraal kan de voorgaande stelling met $g(x)=1$ worden toegepast. Immers in het beschouwde interval is

$$f^{(h)}(x) \ll s \ll p^h\omega^{-h} \quad \text{voor iedere vaste gehele} \quad h \geq 3$$
$$g^{(h)}(x) \ll 1 \ll p^h\omega^{-h} \quad \text{voor iedere vaste gehele} \quad h \geq 0.$$

Verder is $(b-1)|p||\omega|^{-1} = (1-a)|p||\omega|^{-1} \leq \frac{1}{4}$ dus begrensd, terwijl
$(b-1)|p|(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}} = (1-a)|p|(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}}$
met $|\omega|$ onbegrensd aangroeit. Hieruit blijkt, dat $\sqrt{s}\,\mathcal{J}$, dus ook $\mathcal{J}$ asymptotisch worden ontwikkeld.

Bij de berekening van de coëfficienten, die in deze asymptotische ontwikkeling optreden, kunnen we zonder bezwaar $s>0$ veronderstellen. Indien $x = \frac{t}{\sqrt{s}}$ gesteld wordt en $s^{-\frac{1}{2}}$ door λ vervangen wordt, gaat $f(x)$ over in

$$-s\left\{\frac{t}{\sqrt{s}} - \log\left(1+\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right\} = -\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3\lambda - \tfrac{1}{4}t^4\lambda^2 + \tfrac{1}{5}t^5\lambda^3 - \dots$$

Wordt dus

$$e^{f(x)} = e^{-\frac{1}{2}t^2}\{1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots\}$$

gesteld, dan is

$$e^{\frac{1}{3}t^3\lambda - \frac{1}{4}t^4\lambda^2 + \frac{1}{5}t^5\lambda^3 - \dots} = 1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots$$

Differentiatie naar λ geeft

$$(1+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\dots)(\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^4\lambda + \tfrac{3}{5}t^5\lambda^2 - \dots) = b_1 + 2b_2\lambda + \dots$$

dus voor $n \geq 0$

$$(n+1)b_{n+1} = \sum_{h=0}^{n}(-1)^h\frac{h+1}{h+3}t^{h+3}b_{n-h}.$$

Hieruit volgt achtereenvolgens

$b_0=1$; $b_1 = \frac{t^3}{3}$; $b_2 = \frac{t^6}{18} - \frac{t^4}{4}$; $b_3 = \frac{t^9}{162} - \frac{t^7}{12} + \frac{t^5}{5}$; $b_4 = \frac{t^{12}}{2^3 3^5} - \frac{t^{10}}{2^3 3^2} + \frac{47}{2^5 3.5}t^8 - \dots$

De veeltermen $b_n(t)$ zijn even of oneven alnaargelang n even of

Volgens de bovenstaande theorie is dus

$$\int_0^\infty e^{-s(x-1-\log x)}dx \sim \frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\left\{1 + \frac{b_2(t)}{s} + \frac{b_4(t)}{s^2} + \dots\right.$$

§ II 2,1 Over hoofdwaarden van integralen.

In § II 1,1 hebben we de volgende veronderstellingen gemaakt: Stel in het interval $a \leq x \leq b$ zijn $f(x)$ en $g(x)$ oneindig dikwijls differentieerbaar. In het interval $a \leq x \leq b$ ligt een punt ξ met

(1) $$f''(\xi) = -p^2 \quad \text{waarin} \quad -\frac{\pi}{4}+\delta \leq \arg p \leq \frac{\pi}{4}-\delta \qquad (1)$$

(δ vast > 0) Ik neem aan

(2) $$f'(\xi) << p\omega^{-1}$$

en bovendien, uniform in x $(a \leq x \leq b)$

(3) $$f^{(h)}(x) << p^h\omega^{-h}$$ voor elke vaste gehele $h \geq 3$.

(4) $$g^{(h)}(x) << p^h\omega^{-h}$$ voor elke vaste gehele $h \geq 0$

Tenslotte veronderstellen we nog, dat $(b-a)p\omega^{-1}$ een begrensde functie van ω is. Onder die voorwaarden hebben we van elk geheel getal $h \geq 0$ bewezen

(5) $$g(x)\exp\left[f(x)-f(\xi)-\tfrac{1}{2}(x-\xi)^2 f''(\xi)\right]-\sum_{n=0}^{h-1} q_n(x-\xi)^n << p^h\omega^{-h}(x-\xi)^h,$$

waarin de coëfficienten q_n bepaald worden door het linkerlid van (5) formeel naar opklimmende machten van $x-\xi$ te ontwikkelen en de eigenschap $q_n << p^n\omega^{-n}$ bezitten.

Zoals we gezien hebben en trouwens onmiddellijk duidelijk is, levert formule (5) ons een asymptotische ontwikkeling van de integraal

(6) $$\int_a^b g(x)\, e^{f(x)}\, dx$$

in de volgende gevallen:

1) $\xi = a$ of b en $(b-a)\,|p|\,(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}}$
   groeit met $|\omega|$ onbegrensd aan.

2) $a < \xi < b$ en $(b-\xi)\,|p|\,(\log|\omega|)^{-\frac{1}{2}}$
   groeien beide met $|\omega|$ onbegrensd aan.

Ik zal nu het tweede geval nader beschouwen en daarbij niet de integraal (6), maar de integraal $y = \int_a^b \frac{g(x)}{x-\xi}\, e^{f(x)}\, dx$ beschouwen. Hier wordt de hoofdwaarde bedoeld, n.l.

$$y = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^b\right)$$

Uit (5) volgt, zoals we in § II,1,1 gezien hebben,

$$e^{-f(\xi)}y - \sum_{n=0}^{h-1} q_n \int_a^b (x-\xi)^{n-1} e^{-\frac{1}{2}(x-\xi)^2 f''(\xi)}\, dx <<$$

$$<< p^h\omega^{-h}\int_a^b |x-\xi|^{h-1}\left|e^{-\frac{1}{2}(x-\xi)^2 f''(\xi)}\right| dx$$

$$<< \omega^{-h}.$$

De methode van Laplace.

De methode van Laplace, die ons onder bepaalde voorwaarden in staat stelt een approximatieve waarde van de integraal

$$(1) \qquad J = \int_a^b g(x)\, e^{\varphi(x)}\, dx$$

te vinden, wordt in het algemeen als volt geformuleerd:

Kies in het interval $a \leq x \leq b$ een punt ξ. zodanig dat $\varphi'(\xi)$ dicht bij nul ligt en $\varphi''(\xi) = -2\lambda^2$ gesteld kan worden, waarin $-\frac{\pi}{4}+\delta \leqq \arg.\lambda \leqq \frac{\pi}{4}-\delta$ (δ positief vast).

Stel $\varphi(x) = f(x) - \lambda^2(x-\xi)^2$ en ontwikkel $g(x)\,e^{f(x)}$ formeel naar opklimmende machten van $x-\xi$ zodat we de formele reeks

$$(2) \qquad A_0 + A_1(x-\xi) + A_2(x-\xi)^2 + \ldots\ldots$$

krijgen. Onder bepaalde voorwaarden is de integraal J asymptotisch gelijk aan de som van de asymptotische reeks

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_{-\infty \text{ of } \xi}^{\infty \text{ of } \xi} (x-\xi)^n\, e^{-\lambda^2(x-\xi)^2}\, dx \; ;$$

de ondergrens is $-\infty$ of ξ, alnaargelang $\xi > a$ of $= a$ is
de bovengrens is ∞ of ξ, alnaargelang $\xi < b$ of $= b$ is.
De in (3) optredende integralen kunnen elementair berekend worden; immers voor even n is

$$2\int_{\xi}^{\infty} = 2\int_{-\infty}^{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} = \lambda^{-n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

en voor oneven n:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 0 \qquad 2\int_0^{\infty} = -2\int_{-\infty}^{0} = \lambda^{-n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

De methode, zoals hierboven geschetst, heeft twee ernstige bezwaren. Stel bijv. we willen op deze manier $\Gamma(s)$ voor grote $|s|$ berekenen, als $-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg. s \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$ (δ vast, positief) We kunnen schrijven

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^s e^{-u}\, du = s^{s+1}\int_0^{\infty} x^s e^{-sx}\, dx \qquad (u = sx)$$
$$= s^{s+1} e^{-s} J_1,$$

waarin $J_1 = \int_0^{\infty} e^{\varphi(x)}\, dx$ en $\varphi(x) = -s(x-1-\log x)$.

We kiezen $\xi = 1$ $\lambda = \sqrt{2s}$. $g(x) = 1$.

Bij berekening blijkt de in (2) optredende coefficient een veelterm in s van een graad $\leqq \frac{n}{3}$ te worden. De algemene term in de asymptotische ontwikkeling (3) is dus hoogstens van dezelfde orde als $|s|^{\frac{n}{3}-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} = |s|^{-\frac{n}{6}-\frac{1}{2}}$.
Bij nader onderzoek blijkt die term inderdaad van die orde van grootte te zijn, althans, indien n door 3 deelbaar is. Dus bijv. de term met $n = 15$ is van de orde van grootte van $|s|^{-3}$
Om dus op deze manier een approximatieve waarde van y_1 te vinden, met een afwijking die van lager orde van grootte is dan $|s|^{-3}$ mochten wij in de gevonden reeksontwikkeling minstens 16 termen gebruiken. Dat is onpraktisch.

Een tweede, nog veel ernstiger bezwaar is, dat de methode geen numerieke bovengrens geeft van de gemaakte fout, als we ergens afbreken.

Wij zullen de methode van Laplace op zodanige wijze ontwikkelen, dat de twee bovengenoemde bezwaren niet optreden.

Ter vereenvoudiging van de notatie zal ik $\xi = 0$ veronderstellen. Hiervoor kan ik zo nodig steeds zorgen door een verschuiving. Verder kan ik aannemen dat $\varphi''(0)$ niet van ω afhangt; hiervoor kan zo nodig, gezorgd worden door in plaats van de integratieveranderlijke x een nieuwe variabele ρx te kiezen, waar ρ een geschikt gekozen functie van ω voorstelt. Op die manier krijgen we $a \leqq 0 \leqq b$ en $\varphi(x) = f(x) + \lambda^2 x^2$, waarbij λ niet van ω afhangt.
We veronderstellen weer

$$-\frac{\pi}{4} + \delta \leqq \arg \lambda \leqq \frac{\pi}{4} - \delta \qquad (\delta \text{ vast positief})$$

en de te onderzoeken integraal gaat over in:

$$\int_a^b g(x)\, e^{f(x)-\lambda^2 x^2}\, dx$$

Ik ga $g(x)\, e^{f(x)}$ naar opklimmende machten van x ontwikkelen. We zullen een bovengrens nodig hebben van de fout, die we maken, als wij de aldus verkregen ontwikkeling ergens afbreken. Om die bovengrens te vinden, laat ik eerst een korte beschouwing voorafgaan.

Zij f een getal, dat behalve van ω nog van andere parameters (bijv. x) mag afhangen. Ik neem aan, dat f asymptotisch naar opklimmende machten van $\frac{1}{\omega}$ kan worden ontwikkeld,

$$f \sim \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, \omega^{-h}$$

Voor elk geheel getal $n \geqq 0$ stel ik

(4) $$\left| f - \sum_{h=0}^{n-1} a_h \omega^{-h} \right| = |\omega|^{-n} q_n f$$

De bedoeling is, dat q_n een operator is, die op f toegepast, het linkerli[d] van (4) oplevert, vermenigduldigd met $|\omega|^n$. Het getal $q_n f$ kan van ω a[f]hangen, maar uit de definitie blijkt, dat de modulus van $q_n f$ kleiner is [dan] een geschikt gekozen van ω onafhankelijk getal. In het bijzonder is $q_0 f =$ [...]
Uit de definitie volgt

$$q_n(f+g) \leqq q_n f + q_n g \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

als f en g beide asymptotisch naar opklimmende machten van $\frac{1}{\omega}$ kunnen worden ontwikkeld. Het eerste probleem, dat ik nu stel, is een bovengrens van $q_n(f$[...] te vinden.

Indien

$$g \sim \sum_{h=0}^{\infty} b_h \omega^{-h},$$

dan is

$$fg = \sum_{h=0}^{n-1} a_h \omega^{-h} g + \theta_0 |\omega|^{-n} q_n f \, |g|.$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} a_h \omega^{-h} \left\{ \sum_{k=0}^{n-h-1} b_k \omega^{-k} + \theta_{n-h} |\omega|^{-n+h} q_{n-h} g \right\} + \theta_0 |g| q_n f$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} c_m \omega^{-m} + |\omega|^{-n} \left\{ \sum_{h=0}^{n-1} a_h \theta_{n-h} q_{n-h} g \right\} + \theta_0 |g| q_n f$$

Hierin zijn $\theta_0, \ldots, \theta_n$ alle absoluut $\leqq 1$, dus

$$q_n fg \leqq |g| q_n f + \sum_{h=0}^{n-1} |a_h| \, q_{n-h} g.$$

Indien dus Pf en Qf de ~~asymptotische~~ formele reeksen

$$Pf = \sum_{h=0}^{\infty} u^{+h} |a_h| \qquad Qf = \sum_{h=1}^{\infty} u^{+h} q_h f.$$

niet van u afhangt — mogen van u afhangen

voorstellen, is

(5) $$Qfg \leqq |g| Qf + (Pf)\, Qg.$$

$|g|$ is een getal, geen functie van u. — dus (Pf) toegepast op Qg

Links en rechts staan asymptotische reeksen; de bedoeling is, dat, als beide leden volledig uitgeschreven worden, iedere term van het linkerlid hoogstens gelijk is aan de overeenkomstige term in het rechterlid.

Uit (5) volgt voor elk natuurlijk getal k

(6) $$Qf^k \leqq (Qf) \sum_{h=0}^{k-1} |f|^{k-1-h} (Pf)^h$$

want de formule is evident voor $k=1$; is $k>1$ en is

$$Qf^{k-1} \leqq (Qf) \sum_{h=0}^{k-2} |f|^{k-2-h} (Pf)^h$$

bewezen, dan volgt uit (5), toegepast met $g = f^{k-1}$

$$Qf^k \leqq |f|^{k-1} Qf + (Pf)(Qf) \sum_{h=0}^{k-2} |f|^{k-2-h} (Pf)^h$$

waaruit (6) volgt.

Nu ga ik een bovengrens voor $Q_n e^f$ afleiden in de veronderstelling dat f bestaanbaar is en dat f asymptotisch naar opklimmende machten van $1/\omega$ kan worden ontwikkeld, waarbij de eerste term (die zonder een factor $1/\omega$) wegvalt, dus

$$f \sim \sum_{h=1}^{\infty} a_h \omega^{-h}.$$

Men heeft

$$\left| e^f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k}{k!} \right| \leq e^\rho \frac{|f|^n}{n!} \quad ;$$

Hierin is $\rho = f$ of 0, al naar gelang $f \gtrless 0$ of < 0 is, dus

(7) $\quad q_n e^f \leq e^\rho \frac{|f|^n}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} q_n f^k,$
$\quad (|\omega|^n)$

waarin we met behulp van (6) een bovengrens van $q_n f^k$ afleiden.

Laten we als voorbeeld de Gammafunctie

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty u^s e^{-u}\, du$$

voor grote positieve s onderzoeken. Wordt $\omega = \sqrt{s}$ en $u = \omega^2(1+\frac{x}{\omega})$ gesteld, dan vinden we

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1/2} e^{-s} \tilde{J},$$

waarin
$$\tilde{J} = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-\omega x + \omega^2 \log(1+\frac{x}{\omega})}\, dx.$$

In de oorsprong is de exponent, met zijn 1e afgeleide gelijk aan nul, terwijl de tweede afgeleide gelijk is aan $-\frac{1}{2}$. We stellen dus

$$f = -\omega x + \omega^2 \log(1+\frac{x}{\omega}) + \frac{1}{2}x^2.$$

Ik zal hier alleen de integraal

$$J_+ = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2 + f}\, dx$$

behandelen; de bijdragen van de negatieve waarden van x kunnen op overeenkomstige manier behandeld worden. Dus in het vervolg stellen wij x voortdurend positief.

Men heeft

$$0 < f' = -\omega + \frac{\omega^2}{\omega+x} + x = \frac{x^2}{\omega+x} < \frac{x^2}{\omega},$$

dus

$$0 < f < \frac{x^3}{3\omega}.$$

Voor f geldt de asymptotische ontwikkeling

$$f \sim + \frac{x^3}{3\omega}u - \frac{x^4}{4\omega^2}u^2 + \frac{x^5}{5\omega^3}u^3 + \ldots$$

dus

$$Pf \leq \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{\omega}u + \frac{x^4}{\omega^2}u^2 + \ldots\right) = \frac{x^3 u}{3(\omega - xu)}$$

Zoals we weten, heeft log (1+t) voor elke positieve t de eigenschap, dat

$$\left| \log(1+t) - \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} - \ldots \pm \frac{t^{n-1}}{n-1} \right| \leq \frac{t^n}{n}$$

is (dit geldt voor $t \geq 1$ eveneens).

$$Pf = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{h+2}u^h}{h+2} \leq \frac{1}{3}\sum_{h=1}^{\infty} x^{h+2}u^h = \frac{1}{3}\frac{x^3 u}{1-xu}$$

Qf [illegible]

$$\omega^{-n} q_n f = \left| f - \left(\frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^4}{4\omega^2} \cdots \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega^{n+1}} \right) \right| = \left| \omega^2 \log(1+\frac{x}{\omega}) - (\omega x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3\omega} - \ldots \pm \frac{x^{n+1}}{(n+1)\omega^{n+1}} \right| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)\omega^n}$$

$q_n f \leq \frac{x^{n+2}}{n+2} \quad \rightarrow \quad Qf \leq \frac{1}{3}\frac{x^3 u}{1-xu} \qquad |f| < \frac{x^3}{3\omega}$

$$Qf^k \leq \sum_{h=0}^{k-1} \left(\frac{x^3}{3\omega}\right)^{k-1-h} \left(\frac{x^3 u}{3}\right)^{h+1} (1-xu)^{-h-1} = \left(\frac{x^3}{3\omega}\right)^k \sum_{h=0}^{k-1} \omega^{h+1} u^{h+1} \sum \left(1 + \binom{h+1}{1}xu + \binom{h+2}{2} \ldots\right)$$

202

[illegible]

$$q_n e^{f} = e^{\cancel{\frac{3}{\omega}x}}\left(\frac{x^3}{3\cancel{\omega}}\right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^3}{3\omega}\right)^k \sum_{h=0}^{k-1} \omega^{h+1}\binom{n-1}{h} x^{n-h-1} \ldots$$

$$n\int_0^\infty e^{f(x)-\frac{1}{2}\cancel{x^2}}\,dx \leq \frac{1}{3^n n!}\int_0^\infty e^{-\omega x+\omega^2\log\left(1+\frac{x}{\omega}\right)} x^{3n}\,dx + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\frac{1}{(3\omega)^k}\sum_{h=0}^{k-1}\omega^{h+1}\binom{n-1}{h}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{3k+n-h-1}\,dx.}_{\lambda_0+\frac{\lambda_1}{\omega}+\ldots\quad\frac{\lambda_{n-1}}{\omega^{n-1}}}$$

III Reeksen

§ III, 1 Elementaire methoden.

§ 1.1*

We gaan uit van een bekende veelterm $A(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$.

We onderzoeken het gedrag van

$$B(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(t) z^m$$

voor grote waarden van t. We beschouwen slechts die functies $\varphi_m(t)$ die ontwikkeld kunnen worden als

$$\varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} c_k(t).$$

Voor deze keuze van $\varphi_m(t)$ geldt:

$$(1)\quad B(z) = \sum_{m=0}^{n} c_m(t) \frac{z^m A^{(m)}(z)}{m!}$$

Bewijs:

$$B(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} c_k(t) z^m = \sum_{k=0}^{n} c_k(t) \sum_{m=k}^{n} a_m \binom{m}{k} z^m$$

waaruit hetgeen bewezen moest worden direct volgt.

Voor ons zal van speciaal belang zijn het geval waarin $c_k(t)$ de gedaante $\frac{c_k}{\chi_0 \chi_1 \cdots \chi_k}$ heeft en waarin c_k van t onafhankelijk is; terwijl χ_i voor $i = 0, 1, 2, \ldots$ veeltermen van t zijn.

Dan zal $\varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{c_k}{\chi_0 \chi_1 \cdots \chi_k}$ de gedaante hebben

$\frac{\alpha_m(t)}{\chi_0 \chi_1 \cdots \chi_m}$ waarin $\alpha_m(t)$ een polynoom in t is.

We beschouwen twee bizondere gevallen.

I) $\chi_0 = \chi_1 = \cdots = \chi_k = t$; $c_k = \rho^k$

Dan is

$$\varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \rho^k t^{-k} = (t+\rho)^m t^{-m}$$

De formule (1) wordt dus

$$\sum_{m=0}^{n} a_m (t+\rho)^m t^{-m} z^m = \sum_{m=0}^{n} (\rho z t^{-1})^m \frac{A^{(m)}(z)}{m!}$$

II) $\chi_0 = t$; $\chi_1 = t-1$; $\ldots$ $\chi_k = t-k$; $\ldots$ $c_k = \binom{\rho+k-1}{k} k!$

Dan is

$$\varphi_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{\rho+k-1}{k} \binom{t}{k}^{-1}$$

Nu is $\binom{m}{k}\binom{t}{k}^{-1} = \binom{t-k}{m-k}\binom{t}{m}^{-1}$ dus $\varphi_m(t) = \binom{t}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{\rho+k-1}{k} \binom{t-k}{m-k}$

Een bekende formule, af te leiden door de coëfficienten van z^m in de ontwikkeling van $(1-z)^{-a-1} \cdot (1-z)^{-b-1}$ en van $(1-z)^{-a-b-2}$ te vergelijken leert ons $\sum_{k=0}^{m} \binom{a+k}{k} \binom{b+m-k}{m-k} = \binom{a+b+m+1}{m}$.

Passen we deze formule toe met $a = \rho - 1$ en $b = t - m$, dan vinden we

$$\varphi_m(t) = \binom{t+\rho}{m} \binom{t}{m}^{-1}$$

Formule (1) wordt nu dus:

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{\binom{t+\rho}{m}}{\binom{t}{m}} z^m = \sum_{m=0}^{n} \binom{\rho+m-1}{m} \binom{t}{m}^{-1} \frac{z^m A^{(m)}(z)}{m!}$$

Deze formule geldt voor alle waarden van ρ en alle waarden van t die van 0, −1, −2, ..., −n verschillen.

<u>Stelling 3.</u> (Uitbreiding van stelling 1) Zij

$$\lim_{t \to \infty} e^{-s_0 t} t^{-\alpha} F(t) = A \qquad (R\alpha > -1),$$

dan convergeert de Laplace-getransformeerde f(s) voor $Rs > Rs_0$; nadert s met $|\arg (s - s_0)| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ tot s , dan nadert $(s - s_0)^{\alpha+1}$ f(s) tot $A\Gamma(\alpha+1)$

Immers, de Laplace-getransformeerde van $F_1(t) = e^{-s_0 t}F(t)$ is
$f_1(w) = \int_0^\infty e^{-wt} F_1(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(w+s_0)t} F(t)\,dt = f(w+s_0).$
Volgens stelling 1, toegepast met $F_1(t)$ in plaats van F(t), dus met $f_1(w)$ in plaats van f(s), nadert $w^{\alpha+1}$ $f_1(w) = w^{\alpha+1}$ $f(w + s_0)$ tot $A\Gamma(\alpha+1)$, als w met $|\arg w| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ tot nul nadert. De bewering volgt nu, als $s = w + s_0$ gesteld wordt.

<u>Hulpstelling</u> : In het halfvlak $R\,s > Rs_0$ stelt

$$\psi(s,\alpha) = \int_1^\infty e^{(s_0 - s)t}\, t^\alpha\, dt$$

een analytische functie van s voor. Deze functie kan analytisch worden voortgezet, zodanig dat

$$\psi(s,\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-s_0)^{\alpha+1}}$$ (indien $-\alpha$ geen natuurlijk getal is)

en

(1) $$\psi(s,\alpha) - \frac{(-1)^p (s-s_0)^{p-1}}{(p-1)!} \lg(s-s_0)$$ (indien $-\alpha$ een natuurlijk getal p is)

een gehele functie van s voorstelt.

Bij het bewijs mag ik $s_0 = 0$ stellen.
Is $R\alpha > -1$, dan is in het rechterhalfvlak

$$\psi(s,\alpha) = \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt - \int_0^1 e^{-st} t^\alpha dt$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} - \int_0^1 e^{-st} t^\alpha dt$$

waarbij de laatste term een gehele functie van s voorstelt.

Is $\alpha \neq -1$ en $Rs > 0$, dan vindt men in het rechterhalfvlak, met partiele integratie,

(2) $$\psi(s,\alpha) = -\frac{e^{-s}}{\alpha+1} + \frac{s}{\alpha+1}\psi(s,\alpha+1).$$

Is $-\alpha$ geen natuurlijk getal, dan is dus

$$\psi(s,\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} = -\frac{e^{-s}}{\alpha+1} + \frac{s}{\alpha+1}\left\{\psi(s,\alpha+1) - \frac{\Gamma(\alpha+2)}{s^{\alpha+2}}\right\}$$

Het rechterlid is een gehele functie van s voor $R\alpha > -2$, dus voor $R\alpha > -3$, voor $R\alpha > -4$, enz. dus voor iedere α, de waarde $-1, -2, \ldots$ uitgezonderd.

De functie
$$\psi(s,-1) = \int_1^\infty e^{-st}\, t^{-1}\, dt$$
heeft de afgeleide
$$-\int_1^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s}$$
dus
$$\psi(s,-1) = -\log s + \int_0^s \frac{1-e^{-u}}{u}\, du,$$
waarbij de laatste term een analytische functie van s voorstelt. Is van een bepaald natuurlijk getal p bewezen, dat (1) een gehele functie van s voorstelt, dan volgt uit (2), toegepast met $\alpha = -p-1$, dat
$$\psi(s,-p-1) - \left(\frac{s}{-p}\right)\frac{(-)^p s^{p-1}\log s}{(p-1)!} = \psi(s,-p-1) - \frac{(-)^{p+1} s^p}{p!}\log s$$
een gehele functie van s is, waarmede alles bewezen is.

<u>Hulpstelling:</u> In het halfvlak $Rs > Rs_0$ stelt
$$\chi(s,\alpha) = \int_1^\infty e^{(s_0-s)t}\, t^\alpha \log^h t\, dt \qquad (h \text{ geheel} \geqq 0)$$
een analytische functie van s voor. Deze functie kan, indien $-\alpha$ niet een natuurlijk getal is, analytisch worden voortgezet, sodanig dat
$$\chi(s,\alpha) - \frac{\partial^h}{\partial\alpha^h}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-s_0)^{\alpha+1}}$$
een gehele functie van s is.

Men differentiëre in het bewijs van de voorgaande hulpstelling iedere betrekking h maal partieel naar α.

<u>Stelling 4.</u> Zij voor $t \geqq 1$
$$F(t) = e^{s_0 t}\, t^\alpha \sum_h c_h \log^h t + F_1(t),$$
waarin α niet één der getallen $-1, -2, \ldots\ldots$ voorstelt.
De functie F (t) wordt voor $t > 0$ gedefinieerd verondersteld, tussen a en b (a en b willekeurig met $a<b$), in eigenlijke zin volgens Riemann integreerbaar en van 0 naar a (a willekeurig positief) in oneigenlijke zin absoluut integreerbaar. Indien dan de Laplace-getransformeerde $f_1(s)$ van $F_1(t)$[1] voor $Rs > \beta$ convergeert, waarin $\beta < Rs_0$, dan heeft de Laplacegetransformeerde f(s) van F (t) de eigenschap dat
$$f(s) - \sum_h \frac{\partial^h}{\partial\alpha^h}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-s_0)^{\alpha+1}}$$
in het halfvlak $Rs > \beta$ analytisch kan worden voortgezet. Immers

---

1) $F_1(t) = \cancel{0}\, F(t)$ voor $0 < t < 1$.

$$f(s)-f_1(s) = \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt - \int_0^T e^{-st}F_1(t)\,dt + \sum_h c_h \int_T^\infty e^{(s_1-s)t}\, t^\alpha \log^h t\, dt,$$

zodat de bewering uit de vorrgaande hulpstelling volgt.

In het bovenstaande hebben wij uit het asymptotisch karakter van $F(t)$ voor grote t het gedrag van de Laplace-getransformeerde $f(s)$ in de omgeving van een bepaald punt s bepaald. Er zijn ook stellingen, die uit het gedrag van $F(t)$ in de omgeving van het punt $t = 0$ het asymptotisch karakter van $f(s)$ in het rechterhalfvlak voor grote $|s|$ bepalen.

<u>Hulpstelling:</u> Is $s = s_0$ een convergentiepunt van de integraal

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

dan convergeert de integraal uniform in de hoek $|\arg(s - s_0)| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ d.w.z. dan is bij elke positieve ε een $T \geqq 0$ te vinden, zodanig dat voor $b > a \geqq T$ en voor iedere s in de beschouwde hoek

$$\left| \int_a^b e^{-st} F(t)\,dt \right| < \varepsilon \qquad \text{is.}$$

Immers bij geschikte T is de integraal

$$\psi(t) = \int_t^\infty e^{-s_0 t} F(t)\,dt \qquad \text{voor} \qquad t \geqq T$$

absoluut $< \frac{1}{3}\varepsilon \cos\vartheta$; met gegeneraliseerde partiële integratie vinden wij dan dat

$$\int_a^b e^{-st} F(t)\,dt = - e^{-(s-s_0)b}\psi(b) + e^{-(s-s_0)a}\psi(a)$$
$$-(s-s_0)\int_a^b e^{-(s-s_0)t}\psi(t)\,dt$$

voor $b > a \geqq T$ absoluut kleiner is dan

$$\frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon\,\frac{|s-s_0|\cos\vartheta}{R(s-s_0)} < \varepsilon$$

<u>Stelling 4.</u> Is s een convergentiepunt, dan nadert $f(s)$ in de hoek $|\arg(s - s_0)| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$ uniform tot nul, als s onbegrensd aangroeit, want $f(s) = \int_0^a + \int_a^b + \int_b^\infty$, waarbij a zo klein en (volgens de voorgaande hulpstelling) b zo groot gekozen kan worden, dat de eerste en de derde integraal elk absoluut $< \frac{\varepsilon}{3}$ zijn; voor voldoend grote $|s|$ is ook de tweede integraal absoluut $< \frac{\varepsilon}{3}$.

<u>Stelling 5.</u> Is $0 \leqq a < b$, dan nadert

$$J = \int_a^b e^{-(x+iy)t} F(t)\,dt$$

voor $|y| \to \infty$ tot nul en wel uniform in het halfvlak $x \geqq \sigma$, waarbij σ willekeurig is.

<u>Bewijs:</u> Stel eerst $a > 0$. Verdeel het interval (a,b) in een aantal deel-

intervallen $j_1, \ldots, j_n$, zodat $I = I_1 + \ldots + I_n$ is. Hier is I_ν de bijdrage van j_ν dus

$$I_\nu = m_\nu \int_{j_\nu} e^{-(x+iy)t}\, dt \,\Big|\, \leq (M_\nu - m_\nu)\,\lambda(j_\nu).$$

Hier is m_ν de ondergrens, M_ν de bovengrens van $F(t)$ op j_ν en $\lambda(j_\nu)$ stelt de lengte van j_ν voor. Omdat $F(t)$ voor $a \leq t \leq b$ integreerbaar is in eigenlijke zin, kunnen we bij elke positieve ε de verdeling van het interval (a,b) zo kiezen, dat

$$\sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)\,\lambda(j_\nu) < \frac{\varepsilon}{2}$$ is.

Is die verdeling (dus ook n) vastgelegd, dan kunnen wij Y zo kiezen, dat voor $|y| > Y$ en voor iedere $x \geq \sigma$

$$\Big| m_\nu \int_{j_\nu} e^{-(x+iy)t}\, dt \,\Big| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

is, zodat dan $|I| < \varepsilon$ is.

Is $a = 0$, dan kiezen we $c > 0$ zo dicht bij nul, dat

$$\Big| \int_0^c e^{-(x+iy)t} F(t)\, dt \,\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en volgens het bovenstaande is bij voldoend grote $|y|$

$$\Big| \int_c^b e^{-(x+iy)t} F(t)\, dt \,\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

zodat we ook in dat geval $|I| < \varepsilon$ terugvinden.

Uit deze stelling volgt:

<u>Stelling 6.</u> Is $f(s) = \mathfrak{L}(F(t))$ op de verticaal $\Re s = \sigma$ uniform convergent, dan nadert $f(s)$ in het halfvlak $\Re s \geq \sigma$ voor $|s| \to \infty$ uniform tot nul.

Deze stelling kunnen we combineren met de volgende hulpstelling:

<u>Hulpstelling 3.</u> Indien $F(t)$ voor $t > 0$ n maal differentieerbaar is en $F^{(\nu)}(t)$ $(\nu = 0, \ldots\ldots, n-1)$ voor $t \to 0$ tot een eindige limiet c_ν nadert, dan convergeert $\mathfrak{L}(F), \ldots \mathfrak{L}(F^{(n-1)})$ in elk punt s met $\Re s > 0$ waarin $\mathfrak{L}(F^{(n)})$ convergeert en heeft men

$$\mathfrak{L}(F) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s^2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{s^n} + \frac{1}{s^n}\,\mathfrak{L}(F^{(n)}).$$

De bewering is evident voor $n = 0$, zodat ik $n > 0$ mag aannemen, en veronderstellen mag, dat het bewijs met $n - 1$ in plaats van n reeds geleverd is, dus

$$\mathfrak{L}(F') = \frac{c_1}{s} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{s^{n-1}} + \frac{1}{s^{n-1}}\,\mathfrak{L}(F^{(n)}).$$

Het is dus nu voldoende te bewijzen dat $\mathfrak{L}(F)$ convergeert en gelijk is aan $\frac{c_0}{s} + \frac{1}{s}\mathfrak{L}(F')$.

Zonder bezwaar kan ik daarbij $c_0 = 0$ veronderstellen omdat ik anders slechts $F(t)$ door $F(t) - c_0$ behoef te vervangen. Bewezen moet nu worden

$$s \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-st} F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt$$

voor elk punt s met $Rs > 0$, waar~~van~~voor de laatstgenoemde integraal convergeert. Stel de in het linkerlid voorkomende dubbelintegraal voor door $e^{-sx}G(x)$, zodat bewezen moet worden

$$s \lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{e^{sx}} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt.$$

Dit geldt zeker, als

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G'(x)}{e^{sx}} = \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt,$$

want wegens $Rs > 0$ groeit de noemer met e^{sx} onbegrensd aan. Men heeft met behulp van gegeneraliseerde partiële integratie

$$\frac{G'(x)}{e^{sx}} = s\,G(x)\,e^{-sx} + e^{-sx} F(x) = \int_0^x e^{-st} F'(t)\,dt.$$

waarmede de hulpstelling bewezen is.