STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-004

De nulpunten van de afgeleiden van een functie en zijn analytisch karakter

"Actualiteiten"

J. Korevaar

1948

MATHEMATISCH CENTRUM. Z.W. 1948. 004.
29 Januari.

Betreft: Onderwerp Titel.

De nulpunten van de afgeleiden van een functie en zijn analytisch karakter.

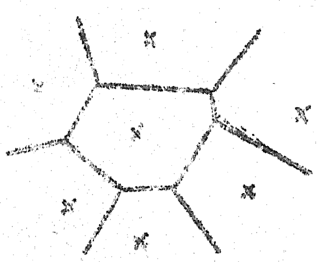
(Voordracht van J.Korevaar in de serie Actualiteiten, 31 Januari 1948).

§1. Inleiding.

Er is verband tussen het (analytisch) karakter van een functie f en de verdeling van de nulpunten van zijn afgeleiden f', f'', ..., $f^{(n)}$, ... We kunnen de stellingen, die dit verband belichten, in twee groepen verdelen.
A. Stellingen, die verband leggen tussen het analytisch karakter van de functie en de nulpuntenverdeling der afgeleiden in het gehele complexe vlak.
B. Stellingen, die verband leggen tussen het analytisch karakter van de functie en de nulpunten van de afgeleiden op één rechte, één bepaald interval.
Van stellingen van het type A zal ik enkele voorbeelden geven. Voor een vrij volledig overzicht zie men G.Pólya 1942. Wat daarna op het gebied A is gedaan, staat voornamelijk in voorbeeld A2.
Het onderwerp B wil ik iets meer systematisch behandelen. De probleemstelling is daarbij meestal als volgt: Gegeven: iets over de nulpunten op (a,b) van (alle) afgeleiden van een oneindig vaak differentieerbare functie f(x). Gevraagd: in welk gebied is f(x) analytisch. Preciezer: in welk gebied bestaat er een analytische functie F(z), die op (a,b) met f(x) overeenstemt.
Ook op gebied B liggen nog vele problemen. Voor een deel zijn die problemen terug te voeren tot problemen over de grootte van de afgeleiden van een functie f(x) op (a,b), wanneer we iets over de nulpunten of de grootte van andere afgeleiden weten.
Een uitgebreide literatuurlijst besluit dit overzicht.

§2. Het gebied A.

Voorbeeld A1. f (z) zij meromorph. D zij de verzameling van de punten, die nulpunt zijn van tenminste één der afgeleiden $f'(z)$, $f''(z)$, ... D' zij de verzameling der verdichtingspunten van D. D' is identiek met de verzameling der punten, die even ver verwijderd zijn van de beide er het dichtst bij liggende polen van f(x) (Pólya 1922)



"De polen van f(z) stoten de nulpunten van de n-de afgeleide weg, als $n \to \infty$".

Schets van een mogelijk bewijs. Neem bv.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1/2}{(z-1)^2} - \frac{1/4}{z-1} + \frac{1/4}{z+1}$$

De nulpunten van de n-de afgeleide volgen uit de vergelijking

$$\left\{\frac{2(n+1)}{z-1} - 1\right\} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{(z+1)^{n+1}} = 0,$$

$$z-1 = (z+1)\sqrt[n+1]{\left|\frac{2(n+1)}{z-1} - 1\right|}\ \sqrt[n+1]{-1}$$

Hieruit volgt allereerst $|z-1| > 1$. Dan is dus $\sqrt[n+1]{\left|\frac{2(n+1)}{z-1} - 1\right|} < \sqrt[n+1]{2n+3}$, hetgeen voor grote n nagenoeg 1 is. We beschouwen eerst de vergelijking

$$z_0 - 1 = (z_0+1)\sqrt[n+1]{-1}.$$

Deze geeft

$$z_0 = i \operatorname{cotg} \left(k+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1} \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

De nulpunten z liggen in de buurt van deze punten. Elk punt van de imaginaire as is verdichtingspunt van nulpunten van de afgeleiden; geen ander punt is zo'n verdichtingspunt.

Voorbeeld A2. Een gehele functie van het exponentiële type α is een functie waarvoor

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} = \alpha .$$

(Vb. sin αz).
Takenaka (1932 b) bewees de volgende stelling: als elke afgeleide van de gehele functie f (z) een nulpunt heeft in (of op) de eenheidscirkel, terwijl f(z) is van het het exponentiële type α, $\alpha < \log 2$, dan is f(z) een constante.
Het is bekend, dat de grens log 2 niet "zo goed mogelijk" is. Men noemt de "scherpe" grens voor α gewoonlijk W (naar J.M.Whittaker, 1935, p.45). Uit het voorbeeld $\sin\frac{\pi}{4}z - \cos\frac{\pi}{4}z$ volgt onmiddellijk dat $W \leq \frac{\pi}{4}$.
Bekend is thans:

$$0{,}7199 < W < 0{,}7399 .$$

Literatuur: Boas 1940, Levinson 1941, Boas 1944 a, Levinson 1944, Boas 1944 b, Levinson 1945. Om het probleem tot oplossing te brengen, lijkt de introductie van andere methoden gewenst.

Schets van een bewijs van de stelling van Takenaka: Deze stelling volgt uit de volgende stelling van Boas (1940): als f(z) van het exponentiële type α is, $\alpha < \log 2$, dan zijn oneindig veel afgeleiden van f(z) "schlicht" in de eenheidscirkel. Oneindig veel afgeleiden hebben dus geen enkel nulpunt in de eenheidscirkel.

Uit

$$|f(z)| < e^{\{(1-\varepsilon)\log 2\}|z|} \qquad (|z| > A)$$

volgt voor de coëfficienten a_n van de ontwikkeling van f (z) om z = 0:

$$|a_n| < \frac{e^{\{(1-\varepsilon)\log 2\}|z|}}{|z|^n} \qquad (|z| > A).$$

Substitueer $|z| = \frac{n}{\log 2}$. Voor voldoende grote n zal

$$|a_n| < \left(\frac{e}{n}\right)^n e^{-\varepsilon n} (\log 2)^n ,$$

dus

$$b_n = n!\,(\log 2)^{-n} a_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Voor oneindig veel waarden n_k van n zal $|b_n|$ alle volgende b_ν overtreffen:

$$n_k!\,(\log 2)^{-n_k}|a_{n_k}| > (n_k+\lambda)!\,(\log 2)^{-n_k-\lambda}|a_{n_k+\lambda}| \qquad (\lambda > 0)$$

Hieruit volgt, dat voor $|z| \leq 1$

$$|f^{(n_k)}(z)| \geq n_k!\,|a_{n_k}| - \sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{n_k+\lambda}| \frac{(n_k+\lambda)!}{\lambda!} > n_k!\,|a_{n_k}| \left\{1 - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda!}(\log 2)^{\lambda}\right\} = 0.$$

Het gebied B.
§3. Analytisch karakter → nulpunten afgeleiden.

De functie f(x) heet analytisch op het interval I, als hij om elk punt van I in een machtreeks met positieve convergentiestraal kan worden ontwikkeld. Als f(x) analytisch is op een gesloten interval I, dan is het aantal nulpunten N_n van de n-de afgeleide $f^{(n)}(x)$ op I eindig ($f(x) \not\equiv 0$). Pólya (1942) noemt zonder bewijs de volgende schattingen voor N_n:
a) f(x) analytisch op gesloten I: $\liminf \frac{N_n}{n} < \infty .$
b) f(x) geheel : $\liminf \frac{N_n}{n} = 0 .$
c) f(x) geheel, van de orde λ : [illegible]

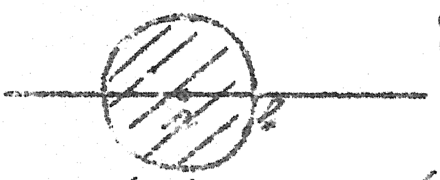
d) $f(x)$ geheel, van het exp. type α : $\liminf N_n \leq \alpha$.

Opm. 4) Het is duidelijk, dat $\liminf N_n = 0$ als het type α van onze functie kleiner is dan $\frac{2\log 2}{l}$ waarbij l de lengte is van I. Immers, uit de stelling van Boas (Voorbeeld A2) volgt, dat in het geval $\alpha < \log 2$ bij elke cirkel met straal 1 oneindig veel afgeleiden van $f(z)$ bestaan, die niet nul worden op die cirkel. A fortiori bestaan dus bij elk interval ter lengte 2 oneindig veel afgeleiden met $N_n = 0$. Voor een interval ter lengte l volgt de uitkomst door een eenvoudige transformatie.

__Nulpunten afgeleiden → analytisch karakter.__
We beschouwen een __open__ interval (a,b). $f(x)$ zij reëel en oneindig vaak differentieerbaar op (a,b). We noemen het aantal tekenveranderingen van $f^{(n)}(x)$ op (a,b) N_n.

§4. __$N_n = 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. Dan is $f(x)$ analytisch in (a,b). (S. Bernstein 1914)__

a) __$f^{(n)}(x) \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ op (a,b). $f(x)$ is analytisch in $|x-a| < b-a$.__



In $x = a$ heeft $f(x)$ rechter-afgeleiden $f^{(n)}(a)$ van elke orde n. De formule van Taylor geeft nu voor x op (a,b):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}\{a+(x-a)t\}\,dt$$

Daar $f^{(n+2)}(x) \geq 0$ is $f^{(n+1)}\{a+(x-a)t\}$ bij vaste t een toenemende functie van x. Als dus $a \leq x \leq c < b$ dan is

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}\{a+(c-a)t\}\,dt$$

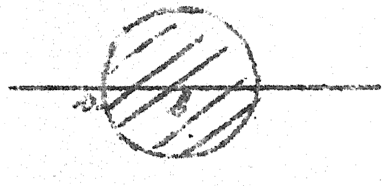
$$= \left(\frac{x-a}{c-a}\right)^{n+1} R_n(c)$$

$$\leq \left(\frac{x-a}{c-a}\right)^{n+1} f(c).$$

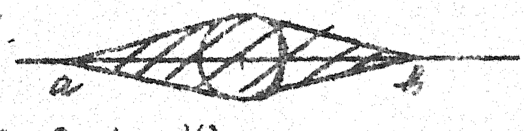
Hieruit volgt, dat $R_n(x) \to 0$ als $n \to \infty$ $(a \leq x < c < b)$.

b) __$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ op (a,b). $f(x)$ is analytisch in $|x-b| < b-a$.__

Immers, voor $\varphi(x) = f(-x)$ geldt op (-b,-a): $\varphi^{(n)}(x) \geq 0$



c) __Het algemene geval.__ De convergentiestraal van de machtreeks voor $f(x)$ in het punt c van (a,b) is minstens $1/e$ van de afstand van c tot het naaste eindpunt van (a,b). $f(x)$ is dus zeker analytisch binnen het in de figuur aangegeven gebied.



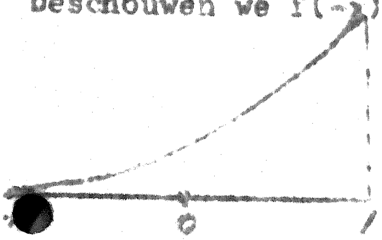
De factor $1/e$ is waarschijnlijk niet "zo goed mogelijk". (Beste factor uit de literatuur: $1/2e$ Boas 1941a; uit Boas en Pólya 1942, Lemma 5, volgt de factor ¼).

__Schets van het bewijs van c).__
__Lemma:__ Als op (-1,1) $N_0 = N_1 = N_2 = 0$, $|f(x)| \leq M$, dan is

dan is

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{1-|x|}$$

<u>Bewijs.</u> We mogen zonder beperking aannemen, dat $0 \leq f(x) \leq M, f'(x) \geq 0$, $f''(x) \geq 0$. Immers, als $f'(x) \leq 0, f''(x) \leq 0$, dan beschouwen we $M-f(x)$; als $f'(x) \geq 0, f''(x) \leq 0$, dan beschouwen we $M-f(-x)$ en als $f'(x) \leq 0, f''(x) \geq 0$ dan beschouwen we $f(-x)$.



Neem $-1 < x < a < 1$. Dan is

$$f(a) - f(x) = (a-x) f'(x) + \frac{(a-x)^2}{2} f''(\xi), \quad x < \xi < a.$$

$$f'(x) \leq \frac{f(a)}{a-x}.$$

Voor $a \to 1$ volgt hieruit $f'(x) \leq \frac{M}{1-x}$

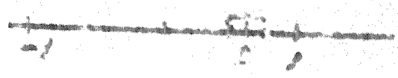
Uit het bovenstaande lemma volgt, dat $|f'(x)| \leq \frac{M}{\varepsilon}$ op $(\alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon)$, als op (α, β) geldt $N_0 = N_1 = N_2 = 0$; $|f(x)| \leq M$.

Stel nu, dat in ons geval c) reeds bekend is, dat in een gesloten deelinterval van (a,b) dat we in $[-1,1]$ getransformeerd denken,

(1)
$$|f^{(n)}(x)| \leq n^n (1-|x|)^{-n} M. \qquad -1<x<1$$

($M = \max |f(x)|$ op $[-1,1]$).

Neem $0 \leq c < 1$. Dan is op $\left[c - \frac{1-c}{n+1}, c + \frac{1-c}{n+1}\right]$



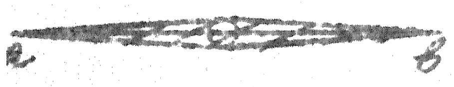
$$|f^{(n)}(x)| \leq n^n (1-c)^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n M.$$

Ons lemma geeft, hierop toegepast,

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq n^n (1-c)^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n M \cdot \frac{n+1}{1-c} = (n+1)^{n+1} (1-c)^{-n-1} M;$$

dat is (1) voor n+1 inplaats van n. (1) geldt dus algemeen; de ontwikkeling om het punt x convergeert dus minstens in een cirkel met straal $\frac{1}{e}(1-|x|)$.

§5. $N_n \leq p$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dan is f(x) analytisch in (a,b) (Schaeffer 1942, 1943)



Schaeffer bewees, dat de ontwikkeling om een punt x van (a,b) minstens convergeert in een cirkel met straal gelijk

$$\frac{1}{3\left[10(p+2)\right]^{2(p+2)}}$$

maal de afstand van x tot het naaste eindpunt van (a,b). Deze factor kan zeer verbeterd worden; het "zo goed mogelijke" resultaat is mij weer onbekend. Schaeffer bewees ook nog interessante stellingen van <u>dit</u> type: als f(x) oneindig vaak differentieerbaar is op $(-\infty, \infty)$, en als het aantal tekenveranderingen van $f^{(k)}(x)$ in een willekeurig interval ter lengte α steeds $\leq \beta$ is (α en β onafhankelijk van k), en als tenslotte

$$\log |f(x)| = O(|x|) \qquad (x \to \pm\infty)$$

dan is f(x) een gehele functie van het exponentiële type. De schatting van Schaeffer voor het type van f(x) is weer verre van "zo goed mogelijk".

<u>Schets van een bewijs.</u> Het bewijs berust op het volgende lang niet "scherpe" <u>Lemma.</u> Als f(x) (p + 2)maal continu differentieerbaar is op $(a-1, a+1)$, terwijl $|f(x)| \leq M$, dan is, als de (p+2)-de afgeleide van f(x) ten hoogste p tekenveranderingen heeft op $(a-1, a+1)$,

$$|f'(a)| < [10(p+2)]^{2(p+2)} M$$

Het bewijs verloopt verder als in § 4,c).

§6. $N_{n_k} = 0, k=1,2,\dots$ Als $1 < \frac{n_{k+1}}{n_k} < A$, dan is f(x) analytisch in (a,b).

(Bernstein 1926, Boas 1941 a).
Men kan een bewijs afleiden uit de volgende lemma's:
Lemma: (Landau 1929, Boas en Pólya 1942). Als f(x) in [a,b] een monotone n-de afgeleide $f^{(n)}(x)$ heeft, als $|f(x)| \leq M$ in [a,b] en als $0 < \ell < \frac{1}{2}(b-a)$, dan geldt op $[a+\ell, b-\ell]$

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{2}\left(\frac{4}{\ell}\right)^n M$$

Lemma. (Ore 1938, Gorny 1939, H.Cartan en Mandelbrojt 1940, H.Cartan 1940, Boas en Pólya 1942). Als f(x) een n-de afgeleide heeft op $[-\ell,\ell]$ en als daar

$$|f(x)| \leq M_0, \quad |f^{(n)}(x)| \leq M_n,$$

dan is

$$|f^{(k)}(0)| \leq 6k^{\frac{1}{2}} e^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{*\frac{k}{n}},$$

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{18^k}{k!} e^k n^k M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{**\frac{k}{n}}.$$

$(k = 1,2,\dots n;\ -\ell \leq x \leq \ell)$. Hierin is

$$M_n^{*} = \max(M_n, n!\, M_0\, \ell^{-n})$$

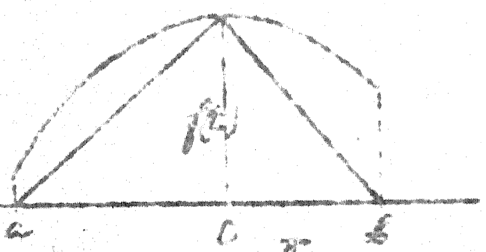
$$M_n^{**} = \max(M_n, n!\, M_0 (2\ell)^{-n})$$

De convergentiestralen, die men dan bij elk punt van (a,b) vindt op de bekende manier, zijn voor verbetering vatbaar. Bovenstaande lemma's waarschijnlijk ook.

§7. $(-1)^k f^{(2k)}(x) \geq 0$ $(k=0,1,2,\dots)$ op [a,b]. Dan is f(x) geheel (Widder 1940). !!!
Dit was een zeer verrassend resultaat. Het volgende eenvoudige bewijs is van Boas (Zie Widder 1941, p.177).

Lemma. Als f(x) tweemaal continu diff. is op [a,b] en als $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$ op [a,b], dan is

$$f(x) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt, \qquad (a \leq x \leq b).$$



Bewijs. Als $\max f(x) = f(c)$, dan is toch nog

$\frac{1}{2}(b-a) \cdot f(c) \leq \int_a^b f(t)\,dt.$

Bewijs van de stelling. Beschouw het interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Partiële integratie geeft:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f''(t)\cos t\,dt.$$

Hieruit volgt

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f''(t)\cos t\,dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt.$$

Voor $-f''(x)$ geldt ook $(-1)^k \frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(-f''(x)) \geq 0$. Dus algemeen geldt

$$0 \leq (-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^{(2k)}(t)\cos t\,dt \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = F.$$

A fortiori zal

$$(-1)^k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^{(2k)}(t)\cos t\,dt \leq F.$$

Daaruit volgt, dat

$$(-1)^k \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f^{(2k)}(t)\,dt \le 2F,$$

dus in verband met het lemma,

(1)
$$(-1)^k f^{(2k)}(x) \le \frac{6F}{\pi} \qquad \left(-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}\right).$$

Een lemma zoals het eerste van §6 levert voor de monotone ($2k+1$)-ste afgeleide van f(x) in verband met deze schatting

(2)
$$\left| f^{(2k+1)}(0) \right| \le \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{6F}{\pi} = \frac{36}{\pi^2} F.$$

Uit (1) en (2) volgt, dat f(x) een gehele functie is van het exponentiële type. Het type is ten hoogste 1.

Het resultaat van Widder is door Boas en Pólya (1942) nog wat uitgebreid. Als f(x) een rij afgeleiden heeft van niet te snel toenemende orde, die geen tekenveranderingen hebben, en als bij elk zo'n n_k - de afgeleide een $(n_k + 2q_k)$ - de afgeleide behoort, q_k niet te groot, die ook geen tekenveranderingen heeft, terwijl

$$f^{(n_k)}(x)\, f^{(n_k+2q_k)}(x) \le 0, \qquad (a \le x \le b)$$

dan is f(x) geheel.
De "groei" van die gehele functie f(x) wordt beperkt door de "groei" van de n_k's en de q_k's. De resultaten van Boas en Pólya zijn nog bijna nergens "zo goed mogelijk".

Literatuurlijst.

Voor de betekenis van de letters (A) en (B) achter een titel zie men §1. De letter (C) betekent: "heeft betrekking op ongelijkheden tussen de afgeleiden van een reële functie".

Ålander,M.

1914. Sur le deplacement des zeros des fonctions entieres par leur dérivation. Dissertation, Upsal. (A).

1916. Sur les zéros extraordinaires des dérivées des fonctions entieres réelles, Arkiv för Matematik,Astronomi och Fysik, 11 no.15.(A)

1920. Sur les zéros des dérivées des fonctions rationelles et d'autres fonctions méromorphes, Arkiv för Matematik,Astronomi och Fysik,14,no.23 (A)

1930. Sur les dérivées successives des fonctions régulières. Opuscula Mathematica A.Wiman Dedicata, Lund 79-98 (A).

Bernstein,S.

1914. Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable reelle, Math.Annalen 75 449-468 (B).

1926. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.(B).

1928.a. On certain properties of regularly monotonic functions (in Russian). Communications de la Société Math. de Kharkow.(4) 2 1-11. (B).

1928.b. Sur les fonctions régulièrement monotones.C.R.Acad.Sci.Paris,186 1266-1269. (B).

1928.c. Sur les fonctions régulièrement monotones Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna,1928,VI, 267-275 (B).

Boas,R.P.

1940. Univalent derivatives of entire functions. Duke Math.J.6 719-721.(A)

1941.a. Functions with positive derivatives. Duke Math.J.8 163-172. (B)

1941.b. A note on functions of exponential type. Bulletin Am.Math.Soc.47 750-754 (A).

1944.a. Functions of exponential type II. Duke Math.J.11 17 - 22.(A)

1944.b. Functions of exponential type IV. Duke Math.J.11 799 (A).

Boas,R.P en Pólya,G.

1941. Generalizations of completely convex functions. Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 27 323 - 325 (B).

1942. Influence of the signs of the derivatives of a function on its analytic character. Duke Math.J.9 406 - 424. (B).

Boas,R.P. en Widder,D.V.

1940. Functions with positive differences. Duke Math.J.7 496 - 503 (B).

Bödewadt,U.T.

1944. Zur Iteration reeller Funktionen. Math.Zeit.49 497-516. (C).

Cartan,H.

1940. Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives. Actual.Sci.Ind.No.867. Hermann et Cie (Paris) (C)

Cartan,H en Mandelbrojt,S.

1940. Solution du problème d'équivalence des classes de fonctions indéfiniment dérivables. Acta Mathematica 72 31-49 (C).

Chlodovsky,I.

1945. The differential properties of functions with one non-negative finite difference of order n. C.R.(Doklady) Acad.Sci: U.R.S.S. (N.S.) 47 620 - 622 (C).

Dieudonné,J.

1944. Dérivées et différences des fonctions de variables réelles. Ann.Sci. Ecole Norm.Sup.(3) 61 231 - 248 (C).

Ganapathy Iyer,V.

1944. On singular functions. J.Indian Math.Soc(N.S) 8 94 - 108 (B).

Gontcharoff,W.

1930. Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Ann.Ecole Norm. 47 1 - 78. (A).

Gorny,A.
1939. Contribution a l'étude des fonctions dérivables d'une variable réelle. Acta Math. 71 317 - 358. (C).

Hille,E.
1942. On the oscillation of differential transforms. II. Characteristic series of boundary value problems. Trans.Am. Math.Soc. 52 463 - 497 (B).
1944. On the oscillation of differential transforms and the characteristic series of boundary-value problems. Univ.California Publ.Math.(N.S.) 2, 161 - 168. (B).

Kakeya,S.
1932. An extension of power series. Proc.of the Physico-Math.Soc.of Japan. 14 125-138.(A).

Kloosterman,H.D.
1940 On the convergence of series summable (C.r) and on the magnitude of the derivatives of a function of a real variable. Journal London Math.Soc. 15 91 - 96 (C).

Landau,E.
1929. Über einen Satz von Herrn Esclangon. Math.Annalen 102 177-188 (C).

Levinson,N.
1941. A theorem of Boas. Duke Math.J. 8 181 - 182. (A).
1944. The Gontcharoff polynomials.Duke math.J. 11 729-733. (A).
1945. Corrections to "The Gontcharoff polynomials". Duke Math.J. 12 335. (A).

Mandelbroit,S.
1942. Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions Rice Inst.Pamphlet 29 no.1. (B).
1944.a. Quasi-analyticity and analytic continuation- a general principle. Trans.Am.Math.Soc.55 96 - 131. (B).
1944.b. Some theorems connected with the theory of infinitely differentiabl functions. Duke Math. J. 11 341-349. (B).

Mandelbroit,S en Ulrich,F.E.
1942. On a generalization of the problem of quasianalyticity. Trans.Am Math.Soc. 52 265 - 282 (B).

S[illegible].O.
1938. On functions with bounded derivatives. Transactions Am.Math.Soc. 43 321 - 326. (C).

Pollard,H.
1944.a. The Bernstein-Widder theorem on completely monotonic functions. Duke Math.J. 11 427 - 430 (B).
1944.b. A new criterion for completely monotonic functions. Trans.Am.Math. Soc. 55 457 - 464 (B).

Pólya,G.
1914. Sur une question concernant les fonctions entières. C.R.Acad.Sci. Paris. 158 330-333. (A).
1915. Bemerkung zur Theorie der ganzen Funktionen. J.ber.Deutschen Math. Verein 24 392-400 (A).
1922. Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten. Math.Zeit. 12 36 - 60 (A)
1927. Über die algebraisch-funktionentheoretischen Untersuchungen von J.L.W.V.Jensen. Kgl.Danske Videnskabernes Selskab.Math.fysiske Meddelelser, 7 no.17. (A).
1930. Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations. Quart.J.Math.Oxford Ser. 1 21-34 (A).
1937. Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzer Funktionen. Math.Annalen 114 622-634. (A).
1941. On functions whose derivatives do not vanish in a given interval. Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 27 216-217. (B).
1942. On the zeros of the derivatives of a function and its analytic character. Bull.Am.Math.Soc. 49 178-189 A, B.

Pólya,G en Wiener,N.
1942. On the oscillation of the derivatives of a periodic function. Trans.Am. Math.Soc. 52 249-256 (B).

Schaeffer, A.C.
1941. Inequalities of A. Markoff and S. Bernstein. for polynomials and related functions. Bull. Am. Math. Soc. 47 565-579. (C).
1942. Oscillations of the derivatives of a function. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 28 62-64. (B).
1943. On the oscillation of differential transforms. III Oscillations of the derivative of a function. Trans. Am. Math. Soc. 54 278-285 (B)

Schoenberg, I.J.
1936. On the zeros of successive derivatives of integral functions. Trans. Am. Math. Soc. 40 12-23. (A).

Szegö, G.
1941. Power series with multiply monotonic sequences of coefficients. Duke Math. J. 8 559-564. (B).
1942. On the oscillation of differential transforms I. Trans. Am. Math. Soc. 52 450-462. (B).

Takenaka, S.
1931.a. On the distribution of zero points of the derivatives of an integral transcendental function of order $\rho \leq 1$. Proc. Imp. Acad. Tokyo 7 133-136 (A).
1931.b. On the expansion of analytic functions in series of analytic functions and its application to the study of the distribution of the zero points of the derivatives of analytic functions. Proc. Physico-Math. Soc. of Japan 13 111-132. (A).
1932.a. On the expansion of analytic functions in generalized Taylor's series. Proc. Physico-Math. Soc. of Japan 14 179-196. (A).
1932.b. On the expansion of integral transcendental functions in generalized Taylor's series. Proc. Physico-Math. Soc. of Japan 14 529-542. (A).
1932.c. On the expansion of an integral transcendental function of the first order in generalized Taylor's series. Proc. Imp. Acad. Tokyo 8 59-62. (A).

Wall, H.S.
1944. Continued fractions and bounded analytic functions. Bull. Am. Math. Soc. 50 110-119. (A).

Whittaker, J.M.
1933. On Lidstone's series and two-point expansions of analytic functions. Proc. L.M.S. (2) 36 451-469 (A).
1935. Interpolatory function theory. Cambridge. (A)

Widder, D.V.
1940. Functions whose even derivatives have a prescribed sign. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 26 657-659 (B).
1941. The Laplace Transform. Princeton (B).
1942. Completely convex functions and Lidstone series. Trans. Am. Math. Soc. 51 387-398. (B).

Wiman, A.
1930. Über eine asymptotische Eigenschaft der Ableitungen der ganzen Funktionen von den Geschlechtern 1 und 2 mit einer endlichen Anzahl von Nullstellen. Math. Annalen 104 169-181. (A).
1937. Über die Realität der Nullstellen fast aller Ableitungen gewisser ganzen Funktionen. Math. Annalen 114 617-621 (A).