STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-005

Een meetkundige eigenschap van continue functies

"Actualiteiten"

Dr. van der Blij

1948

I. Een meetkundige eigenschap van continue functies.

(Voordracht: "Actualiteiten" op 28 Febr.1948).

dr F. van der Blij

We beginnen met een heel eenvoudige uitbreiding van de stelling van Rolle, te weten (P.Levy [2]):

1. Iedere kromme, gedefinieerd voor $0 \leq x \leq 1$ door een continue functie $y = f(x)$ met $f(0) = f(1)$, bezit voor ieder natuurlijk getal n een horizontale koorde ter lengte $1/n$.

Bewijs: We beschouwen de continue functie $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$.
Dan geldt $g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \ldots\ g\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$. Hieruit volgt dat òf

$g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ voor $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, maar dan zijn er zeker koorden met lengte

$\frac{1}{n}$ òf $g(x)$ zowel positieve als negatieve waarden aan kan nemen. Dan is er

echter een ξ zo, dat $g(\xi) = 0$, d.w.z. $f(\xi + \frac{1}{n}) = f(\xi)$.

Deze stelling is weinig belangwekkend, "het spreekt haast vanzelf". De volgende stelling (P.Levy [2]) wekt daarom misschien enige verwondering.

2. Als s een positief getal ≤ 1 is, dat niet als $\frac{1}{n}$ met een natuurlijk getal n geschreven kan worden, bestaat er steeds een continue functie $y = f(x)$, $f(0) = f(1)$, zodat de grafische voorstelling van deze functie geen enkele horizontale koorde ter lengte s bezit.

Bewijs: De functie $f(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{s} - x \sin^2 \frac{\pi}{s}$ voldoet. Immers $f(0) = f(1) = 0$.

Bovendien is $f(x + s) - f(x) = -s \sin^2 \frac{\pi}{s} \neq 0$, voor alle x.

Deze heel eenvoudige stellingen hebben de volgende achtergrond:

Beschouwen we een willekeurig vlak continuüm C, d.i. een begrensde, gesloten, samenhangende puntverzameling. In het vlak leggen we willekeurig een assenkruis $\uparrow y \rightarrow x$. Onder $S(C)$ verstaan we de verzameling van lengten van horizontale (d.w.z. // met de X-as) koorden van C. We spreken nog af, als M een verzameling niet negatieve getallen voorstelt, M^* de complementaire verzameling in het gebied van de niet negatieve getallen voorstelt. Een verzameling M heet additief als uit $a \in M$ en $b \in M$ volgt $a + b \in M$.

Nu gelden de volgende stellingen (H.Hopf [4]):

3. Voor ieder vlak continuüm C is de verzameling $S^*(C)$ additief.

4. Voor iedere open, niet lege, additieve verzameling M^* van positieve getallen bestaat een continuüm C met $S^*(C) = M^*$.

4a. We kunnen voor het continuüm C uit 4 zelfs een kromme kiezen gedefinieerd door $y = f(x)$, die op $0 \leq x \leq \infty$ eenduidig en continu is.

We bewijzen 3. Onder C_s verstaan we de puntverzameling, die ontstaat door C over een afstand s naar rechts te verschuiven. Als $s \in S(C)$ volgt $C.C_s \neq 0$; d.w.z. C en C_s hebben minstens één punt gemeen. Als $s \in S^*(C)$ volgt $C.C_s = 0$; d.w.z. C en C_s hebben geen punt gemeen.

Het is voldoende te bewijzen dat voor iedere $a > 0$ en $b > 0$ uit $C.C_a = C.C_b = 0$ volgt $C.C_{a+b} = 0$. Iets anders geformuleerd: uit $C.C_a = 0$ en $C_a.C_{a+b} = 0$ volgt $C.C_{a+b} = 0$.

We beschouwen de verzameling $C + C_a + C_{a+b}$. Een punt uit deze verzamel ling, waarvoor de x-coördinaat minimaal is behoort tot C, een met maximale x-coördinaat tot $C_{a+\varepsilon}$. Een van de punten met maximale y-coördinaat behoort tot C_a, zo ook één van de punten met de kleinste y-coördinaat. (zie figuur 1).

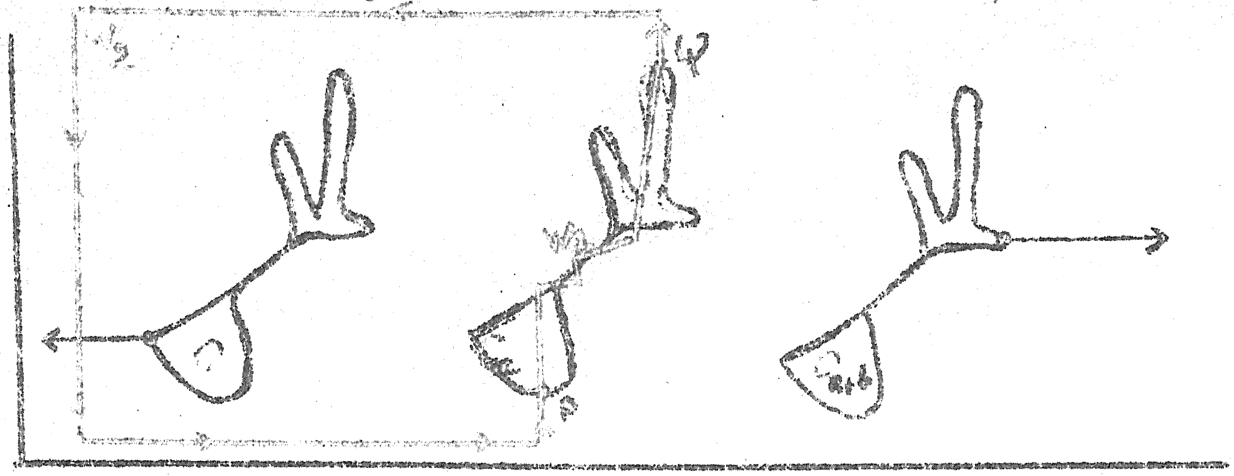


fig 1

Omdat $C.C_a = C_a.C_{a+\varepsilon} = 0$ bestaat er een positieve afstand r van C_a tot $C + C_{a+\varepsilon}$. We beschouwen nu de open verzameling $U(C_a, \delta)$ van alle punten die tot C een afstand $< \delta \leq r$ hebben. Laat P een punt zijn van C met zo klein mogelijke y-coördinaat, Q een punt van C met zo groot mogelijke y-coördinaat, dan kunnen P en Q door een gebroken lijn W_1 die geheel in $U(C_a, \delta)$ ligt, verbonden worden. Verder tekenen we nog de gebroken lijn W_2 door uit Q over een afstand 1 naar boven te gaan, dan naar links tot de x-coördinaat 1 kleiner is dan de kleinste x-coördinaat, daarna verticaal naar beneden tot de y-coördinaat 1 kleiner is dan de y-coördinaat van P, naar rechts tot verticaal onder P en tenslotte verticaal naar boven tot P.

Ieder punt van C heeft 1 als omloopsgetal voor $W_1 + W_2$; ieder punt van $C_{a+\varepsilon}$ heeft 0 als omloopsgetal voor $W_1 + W_2$. Dus liggen C en $C_{a+\varepsilon}$ in verschillende gebieden, waarin het vlak door $W_1 + W_2$ verdeeld wordt. Omdat C met $W_1 + W_2$ geen punt gemeen heeft, volgt $C.C_{a+\varepsilon} = 0$.

Bewijs van 4. Aan de verzameling $M = (M^*)^*$ voegen we het getal 0 toe. We mogen aannemen, dat M nog minstens één positief getal bevat, in het andere geval is de stelling triviaal. We bewijzen achtereenvolgens:

i M is begrensd. Als immers $(a, b) \subseteq M^*$, dan ook $(na, nb) \subseteq M$, zodra $n > \frac{a}{b-a}$ bevat M alle getallen $x > na$. Laat a het grootste getal uit M zijn.

ii De onderste grens u van M^* is positief. Laat $a > 0$ een getal uit M zijn, als alle $x \leq a$ tot M behoren geldt $u \geq a > 0$. We veronderstellen nu dat er een getal $\in M^*$ bestaat, dat kleiner dan a is. Omdat M^* open is bestaat er zelfs een interval $J \subseteq M^*$ links van a. Als x alle getallen $\in J$ doorloopt, dan doorloopt $x' = a - x$ alle getallen uit $J' \subseteq M$. Uit $x \in M^*$, $x' \in M^*$ volgt immers $x + x' = a \in M^*$. Stel nu $u = 0$, dan is er steeds een getal $b \in M^*$ en een natuurlijk getal n te vinden zodat $nb \in J'$, wat in strijd is met $J' \subseteq M$. Dus $u \neq 0$.

iii De lengte van ieder interval $\subseteq M$ is $\leq u$. Laat J een interval zijn met lengte $v > u$. Dan is er een $w \in M^*$ met $w < v$. Een van de getallen $n w$ ligt in J, maar ook in M^*. Dus kan J niet geheel tot M behoren.

iv Als $s \in M^*$ en t een verdichtingspunt van M^* is geldt $s + t \in M^*$

Omdat M^* open is behoort voor geschikt gekozen $\varepsilon > 0$ het interval $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ geheel tot M^*. Er is een δ met $0 < \delta < \varepsilon$ zodat tenminste één van de getallen $t \pm \delta \in M^*$. Omdat $s \mp \delta \in M^*$ volgt direct $s + t \in M^*$.

Na deze inleidende beschouwingen bepalen we de continue functie $f(x)$, die aan de voorwaarden van stelling 4 zal voldoen. De verzameling $\underline{M}$ bevat alle verdichtingspunten van M^* en 0. De afstand van een punt tot een verzameling geven we aan met ϱ. We definieren

$$f(x) = \rho(x, M^* + \mathring{\underline{M}}) - \rho(x, M).$$

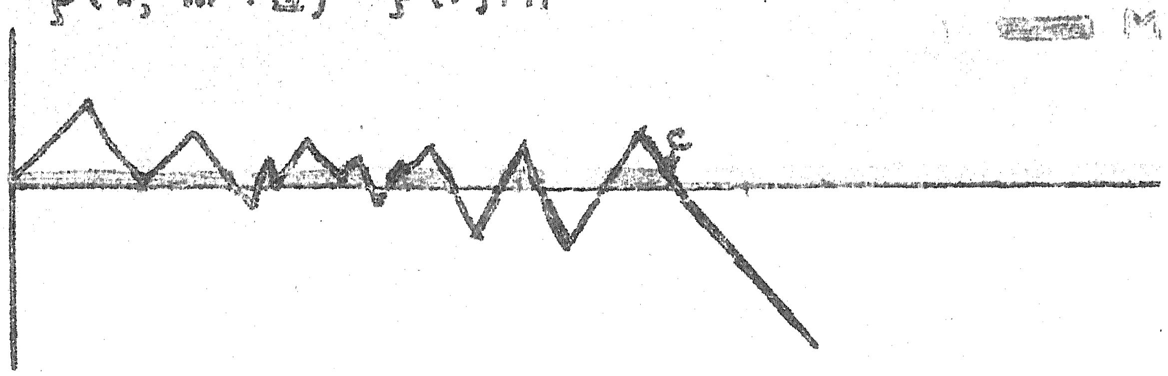


fig 2

We bewijzen nu nog dat $f(x)$ aan de voorwaarden voldoet:

i <u>Als $s \in M$ dan is er een x, $0 \leq x \leq x + s \leq c$ met $f(x + s) = f(x)$.</u>
Zij s_1 het kleinste getal uit $\underline{M}$ dat groter dan s is. Dan $[s, s_1] \in M$ dus $0 \leq s_1 - s \leq M$. Nu geldt $[0, M] \in M$ dus $(s_1 - s) \in M$ dus $f(s_1 - s) \geq 0$.
$f(s_1) = f(0) = 0$ en $f(s) \geq 0$.

$$\left.\begin{aligned} f(x+s) - f(x) &\leq 0 \text{ als } x = s_1 - s \\ &\geq 0 \text{ als } x = 0 \end{aligned}\right\}$$

er is dus een ξ met $f(\xi + s) = f(\xi)$. omdat $s_1 \in M$ is ook $s_1 \leq c$, $\xi + s \leq c$.

ii <u>Als $s \in M^*$ dan geldt voor alle $x > 0$ ook $f(x+s) < f(s)$</u>

① $x \in \mathring{\underline{M}} \longrightarrow x + s \in M^* \quad \therefore \quad f(x) = 0,\ f(x+s) < 0$

② $x \in M - \mathring{\underline{M}}$ en $x + s \in M^* + \mathring{\underline{M}} \longrightarrow f(x) > 0,\ f(x+s) \leq 0$

③ $x \in M - \mathring{\underline{M}}$ en $x + s \in M - \mathring{\underline{M}}$

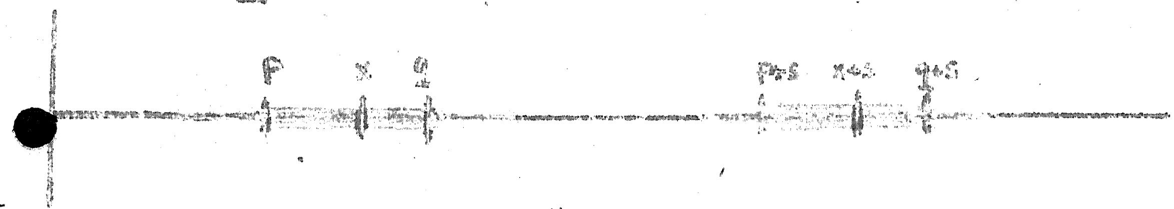


fig 3

Omdat $p \in \mathring{\underline{M}}$ en $s \in M^*$ ligt $p + s$ in M^* en behoort een interval om $p + s$ nog tot M^*. De afstand van x tot groene punten is groter dan de afstand van $x + s$ tot groene punten. $f(x+s) < f(x)$.

④ $x \in M^*$, $x + s \in M^*$

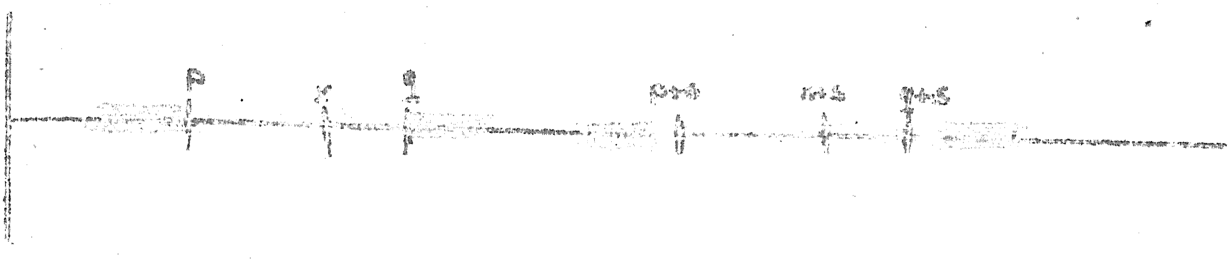


fig 4

Omdat $p \in \mathring{\underline{M}}$ en $s \in M^*$ volgt $p + s \in M^*$ De afstand van x tot rode punten is kleiner dan de afstand van $x + s$ tot rode punten. Dus $f(x+s) < f(x)$

<u>Opmerking.</u> Ook geldt nog de volgende stelling (Hopf [4]):

5 Laat C gedefinieerd worden door $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$; $0 \leq \tau \leq 1$ en

$x(1) = x(0) + c$; $y(1) = y(0)$. Laten a en b twee positieve getallen met $a + b = c$ zijn. Als er geen positieve koorde met lengte a bestaat, zijn er twee verschillende positieve koorden met lengte b.
(Een koorde heet positief als voor de eindpunten geldt $x(t_2) > x(t_1)$ voor $t_2 > t_1$)
Stelling 3 is gelijkwaardig met de volgende stelling.

6 Laat $f(t)$ een continue functie zijn, gedefinieerd voor ieder punt t op een cirkel omtrek met lengte 1. Voor ieder positief getal $a < 1$ bestaat er een boog (p,q) met lengte a, zodat $f(p) = f(q)$.

Het ligt voor de hand naar generalisaties van 6 te zoeken. We bespreken er enkele:

7 Als op een bol twee continue functies f_1 en f_2 gegeven zijn, dan kan men bij iedere a (kleiner dan de omtrek v.d. grote cirkel v.d. bol) twee punten p en q met sferische afstand a vinden zodat $f_1(p) = f_1(q)$; $f_2(p) = f_2(q)$.
(Hopf [6])

8 Laat twee punten p_1 en p_2 op een n-dim. bol S_n gegeven zijn. Laat de continue functie $f(p)$ de S_n afbeelden op een deelverzameling van een Euclidische n-dim. ruimte E_n. Dan bestaat er steeds een puntenpaar q_1 q_2, congruent met p_1 p_2, zodat de beeldpunten van $f(q_1)$ en $f(q_2)$ samenvallen.
(Hopf [6])

Een bijzonder geval van deze stelling vinden we bij Borsuk [1], zie ook Alexandroff-Hopf [3].

Een andere uitbreiding staat als probleem in het "Nouveau Livre Ecossais" Probl. 7 (29-XI-1946) opgegeven door B. Knaster [8]:

Laat op S_n een k-tal punten $p_1, p_2, \ldots p_k$ gegeven zijn. Laat $f(p)$ een continue functie zijn die S_n afbeeldt op een deel van een Euclidische E_{n-k+2}.
Bestaat er steeds een k-tal punten $q_1, q_2, \ldots q_k$ congruent (isometrisch) met $p_1, p_2, \ldots p_k$, die alle één en hetzelfde punt van E_{n-k+2} tot beeldpunt hebben? En zoja, hoeveel van zulke k-tallen bestaan er?
Enkele resultaten zijn bereikt:

9 Als op een bol een continue functie $f(p)$ gedefinieerd is, dan zijn er op bol drie punten p_1, p_2, p_3 met onderlinge afstanden $\frac{\pi}{2}$ te vinden, zodat $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3)$ (S. Kakutani [5]).

10 De stelling 9 is ook juist onder de voorwaarde dat de afstanden $p_1 p_2$, $p_1 p_3$ en $p_2 p_3$ gelijk zijn, maar niet noodzakelijk $\frac{\pi}{2}$
(de Mira Fernandes [7]).

We bewijzen stelling 9. Het middelpunt van de bol zij de oorsprong van een rechthoekig assenstelsel, de straal zij 1. $P_1 = (1,0,0)$; $P_2 = (0,1,0)$; $P_3 = (0,0,1)$. Laat G de groep zijn van alle rotaties om O. Aan iedere rotatie σ voegen we een punt $\varphi(\sigma)$ van E_3 toe en wel $x = f(\sigma^{-1}P_1)$ $y = f(\sigma^{-1}P_2)$, $z = f(\sigma^{-1}P_3)$. De transformatie $\sigma \rightarrow \varphi(\sigma)$ is een continue afbeelding van G in E_3.
We moeten bewijzen, dat er een σ bestaat zo dat $\varphi(\sigma)$ op de lijn l ($x = y = z$) ligt. Laat ψ de projectie van E_3 op het vlak π ($x + y + z = 0$) voorstellen. Dan is $\sigma \rightarrow \psi(\varphi(\sigma)) \equiv \Psi(\sigma)$ een continue afbeelding van G in π.
Laat H de ondergroep van G zijn, die bestaat uit alle rotaties om l. Deze groep is isomorf met de groep H^* van alle rotaties van π om O. De elementen van H geven we aan met σ_θ de elementen van H^* met τ_θ. De hoek θ wordt zo gemeten dat $\sigma(\frac{2}{3}\pi) P_1 = P_2$, $\sigma(\frac{2}{3}\pi) P_2 = P_3$, $\sigma(\frac{2}{3}\pi) P_3 = P_1$.
Het is eenvoudig te verifieren, dat

$$\psi(C_{\theta+\frac{2}{3}\pi}) = T_{\frac{2}{3}\pi}\,\psi(C_\theta) \quad \psi(C_{\theta+\frac{4}{3}\pi}) = T_{\frac{4}{3}\pi}\,\psi(C_\theta).$$

Laat nu C_{θ_1,θ_2} de verzameling zijn van de beeldpunten van C_θ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) in het vlak V_0. Dan ontstaan de krommen $C_{\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi}$ en $C_{\frac{4}{3}\pi,2\pi}$ uit $C_{0,\frac{2}{3}\pi}$ door deze over hoeken van $\frac{2}{3}\pi$ en $\frac{4}{3}\pi$ te draaien.

Stel α is de hoek die de voerstraal uit O doorloopt als de kromme $C_{0,\frac{2}{3}\pi}$ doorlopen wordt. Dan is α van de gedaante $\alpha = 2m\pi \pm \frac{2}{3}\pi$ ($m = 0, \pm 1, \ldots$)

De toename bij een volledige omloop is $3\alpha = (3m \pm 1)\pi \neq 0$.

Stel nu dat de stelling niet waar was. Dan zou dus geen enkel beeldpunt van G bij de afbeelding φ op l komen, dus geen enkel beeldpunt bij de afbeelding ψ in O. $\psi(G)$ zou dus het punt O niet bevatten.

Maar een bekende stelling leert, dat voor iedere gesloten kromme H op G geldt, dat 2H homoloog is met $\emptyset$. Dus is ook $2\,C_{0,2\pi}$ homoloog met $\emptyset$ in $\psi(G)$. Omdat het omloopsgetal van $C_{0,2\pi}$ om O van nul verschillend bleek te zijn, zijn we op een tegenspraak gestuit.

Een gevolg van deze stelling is (Kakatani [5]).

[11] <u>Om iedere begrensde gesloten convexe verzameling V in de ruimte kan een kubus beschreven worden, zo dat alle zijvlakken minstens één punt met V gemeen hebben.</u>

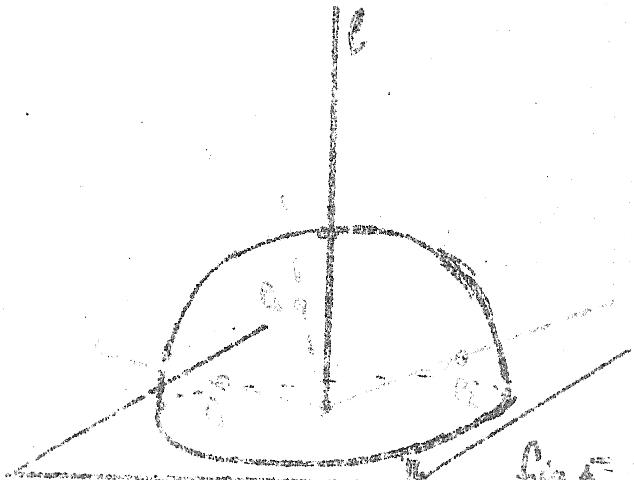


fig 5

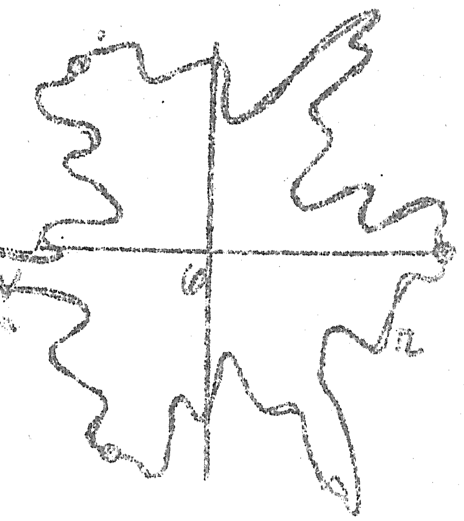


fig 6

Literatuur.

1. K.Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale euclidische Sphäre. Fund.Math. 20 (1933), p.178.

2. P.Levy: Sur une généralisation du théorème de Rolle. C.R.Acad.Sci.Paris 198 (1934),p 424/425.

3. P.Alexandroff,H.Hopf: Topologie I, p.486. Berlin 1936.

4. H.Hopf: Uber die Sehnem ebener Kontinuen und die Sehleifen geschlossener Wege. Comm. Math.Helv. 9 (1937),p 303 - 319.

5. S.Kakatani: A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in R_3. Ann. of Math.(2) 43 (1942), p. 739 - 741.

6. H.Hopf: Eine verallgemeinerung bekannter Abbildungs-und überdeckungssätze. Portugaliae Math. 4 (1944), p 129-139.

7. A.de Mira Fernandes: Fundioni continue sopra une superficie spherica. Portugaliae Math. 5 (1946),p 132-134.

8. B.Knaster: Nouveau Livre Ecossais 7 (29-XI-'46); Colloquim Math. 1 (1947) (Wrocław).

9. J.P.Lavanchy: Vortrag von H.Hopf: Einige geometrische Eigenschaften stetiger Funktionen. Elemente der Math. 2 (1947),p 119-120.

XI. Een woestijnreis per jeep.

We moeten door een woestijn een afstand x afleggen. Indien we de jeep volladen kunnen we een afstand 1 afleggen. Als $x \leqslant 1$ is er geen probleem. Als $x > 1$ moeten we eerst onderweg bunkerstations vormen. We stellen het probleem waar we deze bunkerstations moeten kiezen en hoe groot de voorraad aan ieder station moet zijn om de hele reis met zo min mogelijk benzine af te leggen. Eerst een eenvoudig voorbeeld, om een afstand $1\frac{1}{3}$ af te leggen kunnen we eerst op afstand $1/3$ een voorraad $1/3$ lading achter laten. De tweede keer nemen we deze $1/3$ mee en kunnen dan, we zijn immers volgeladen, de afstand 1 nog afleggen.

Het probleem in deze formulering is opgelost door N.J.Fine [1]. Het is evenwel prettiger te onderzoeken wat de grootste afstand is, die we met een gegeven hoeveelheid benzine af kunnen leggen. We beschouwen eerst een nog iets afwijkend probleem: We vertrekken met m volgeladen jeeps, één jeep moet het doel bereiken, de overige m - 1 mogen leeg achter gelaten worden. (C.G.Philips [2]). Als de karavaan een afstand $1/m$ heeft afgelegd is een lading verbruikt. Als we overladen kunnen we hier 1 jeep achterlaten en met m - 1 verder gaan. Het zou niet zuinig geweest zijn de jeep eerder achter te laten, want dan hadden we ook benzine achter moeten laten. Hadden we hem echter nog verder meegenomen, dan zou hij nutteloos benzine verbruikt hebben. De tweede jeep wordt natuurlijk na een afstand $1/(m-1)$ achtergelaten, enz. Totaal bereikt de laatste jeep een afstand $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/m$.

Als variatie hierop onderzoeken we hoe ver we kunnen komen als we de jeeps niet leeg achter mogen laten, maar alle op één na naar het uitgangspunt terug moeten sturen. Op de eerste etappe zijn er dan m uit-en m - 1 thuisreizen. Zodra een afstand $1/(2m-1)$ is afgelegd, eist het totale verkeer op deze etappe 1 lading. We kunnen weer beredeneren dat het tijd is om één jeep terug te sturen. Na een afstand $1/_{2m-3}$ wordt de tweede terug gestuurd etc.

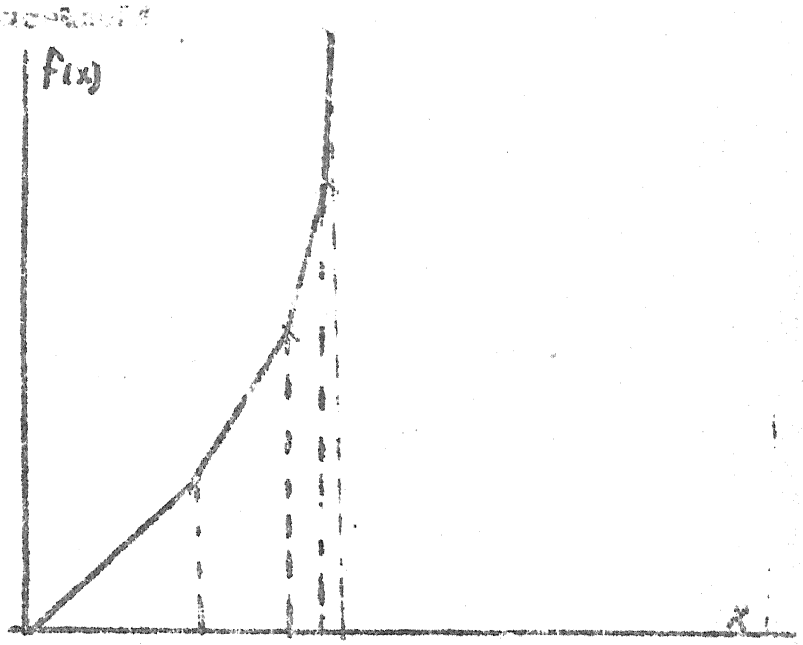
De laatste jeep bereikt een afstand $1+1/3+1/5+\dots+1/_{2m-1}$
Dit probleem is hetzelfde als het in het begin gestelde probleem voor één jeep. We kunnen immers eerst met de ene jeep m − 1 keer heen en weer rijden op de eerste etappe, dit heeft hetzelfde effect als het rijden van een karavaan van m − 1 jeeps.

Stel nu dat de gegeven hoeveelheid benzine $m+\alpha$ ladingen zijn, $0 < \alpha \leq 1$
Geformuleerd voor de karavaan zou er dus een extra jeep mee moeten die niet volgeladen was. Het is zaak deze zo snel mogelijk terug te sturen d.w.z. nadat de afstand $\alpha/_{2m+1}$ is afgelegd. Dan zijn er nog m ladingen over, waarmee we een af——stand $1+1/3+\dots+1/_{2m-1}$ kunnen afleggen. Totaal kunnen we dus met $m+\alpha$ ladingen een afstand $1+1/3+\dots+1/_{2m-1}+\alpha/_{2m+1}$ afleggen.

Het asymptotisch gedrag van de ~~hoeveelheid~~ hoeveelheid benzine nodig om een afstand x te overbruggen f(x) is

$$f(x) = \frac{1}{4}e^{2x-C} + O(e^{-2x})$$

waarin C de constante van Euler is.



1. N.J.Fine: The Jeep Problem. Amer.Math.Monthly 54 (1947);24-31.

2. C.G.Phipps: The Jeep Problem: A more general solution. Americ.Math.Montly 54 (1947);458-46 2.

III. Diversen. "Enkele constante getallen."

i   **H.Steinhaus** bewees dat voor het aantal roosterpunten w binnen een gesloten rectificeerbare Jordankromme J met lengte $L \geq 1$ geldt: $|a-w| < L$ hierbij is a het oppervlak van het binnengebied I van J. Hierna bewees **M.Warmus** dat voor $L \geq \pi$ geldt:

$$-cL^2+1 \leq a-w \leq cL^2-1 \quad \text{met} \quad c = \frac{1}{2\sin\gamma} \text{ en } \gamma - 2\sin^2\gamma + \sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

($c = 0{,}5828222\ldots$) en M.Nosarzewska dat voor convexe gebieden I geldt $-(\frac{1}{2}L+1) < a-w < \frac{1}{2}L$

Colloguim Mathematicum 1, 4 (1947), C.R.de la Soc.Pol.de Math.(sect. Wrocław), 18-4-'47.

ii   H.Hadwiger bewees dat als $a_n = O(\frac{1}{n})$ en p de bovenste grens van $n|a_n|$, $F(t) = \sum_1^\infty a_\nu t^\nu$ er voor iedere natuurlijke n een getal t_n tussen 0 en 1 te vinden is zodat $|F(t_n) - \sum_1^n a_\nu| < \tau p$

Hierbij is

$$\tau = C + \log\log 2 + 2\int_{\log 2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = 0{,}96804\ldots$$

Deze stelling is niet meer juist als we τ door een kleiner getal vervangen. Revista.Mat.Hisp.Amer. (4) 7 (1947), p.65-69.

iii   I. Niven bewees dat de aanname $\pi = 3{,}1415\ldots = \frac{a}{b}$ met natuurlijke getallen a en b tot een contradictie voert, door te onderzoeken

$$I = \int_0^{a/b} \frac{x^n}{n!}(a-bx)^n \sin x\,dx.$$

Alle afgeleiden van $P_n(x) = \frac{x^n}{n!}(a-bx)^n$ zijn in $x = 0$ geheel, partiële integratie leert dat ook I geheel is. Verder is $I > 0$, dus $I \geq 1$

Maar $P_n(x) \leq P_n\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n \to 0$ als $n \to \infty$