Het Mathematisch Centrum
Afdeling Toegepaste Wiskunde.

R A P P O R T Nr. 1 .
Auteur: B.L. van der Waerden
Titel: Geleiding van geluidgolven door een buis
Datum: Januari 1949.

Probleem: Op de linker opening van een nauwe buis vallen vlakke geluidsgolven. In de buis ontstaan staande en lopende golven. Uit de rechter opening gaat een bolvormige golf de ruimte in. Hoe hangt de amplitude $M/_r$ van de uittredende golf af van de amplitude I van de invallende golf ?

Methode: Wat er aan het rechter uiteinde gebeurt, heeft Helmholtz, Wiss. Abh. p. 303-382, nauwkeurig onderzocht. Wat er aan het linker uiteinde gebeurt, heeft hij ook onderzocht, onderstellende dat het rechter uiteinde dicht is. Met dezelfde methode kan men echter ons geval behandelen. Men hoeft dan nog slechts de formules voor linker- en rechter uiteinde met elkaar te combineren, om de oplossing van het probleem te vinden.

Onderstellingen: De buis is een cylinder, de doorsnede is klein in vergelijking met de golflengte. Beide uiteinden hebben dezelfde vorm. Op het linker uiteinde zit een flens, die òf totaal absorbeert, òf totaal reflecteert. In het laatste geval moet men het eindresultaat met 2 vermenigvuldigen. De buis trilt niet mee. De amplituden zijn klein. De snelheden van de lucht zijn de afgeleiden van een snelheidspotentiaal Φ , dat aan de golfvergelijking

(1) $$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = a^2 \Delta \Phi$$

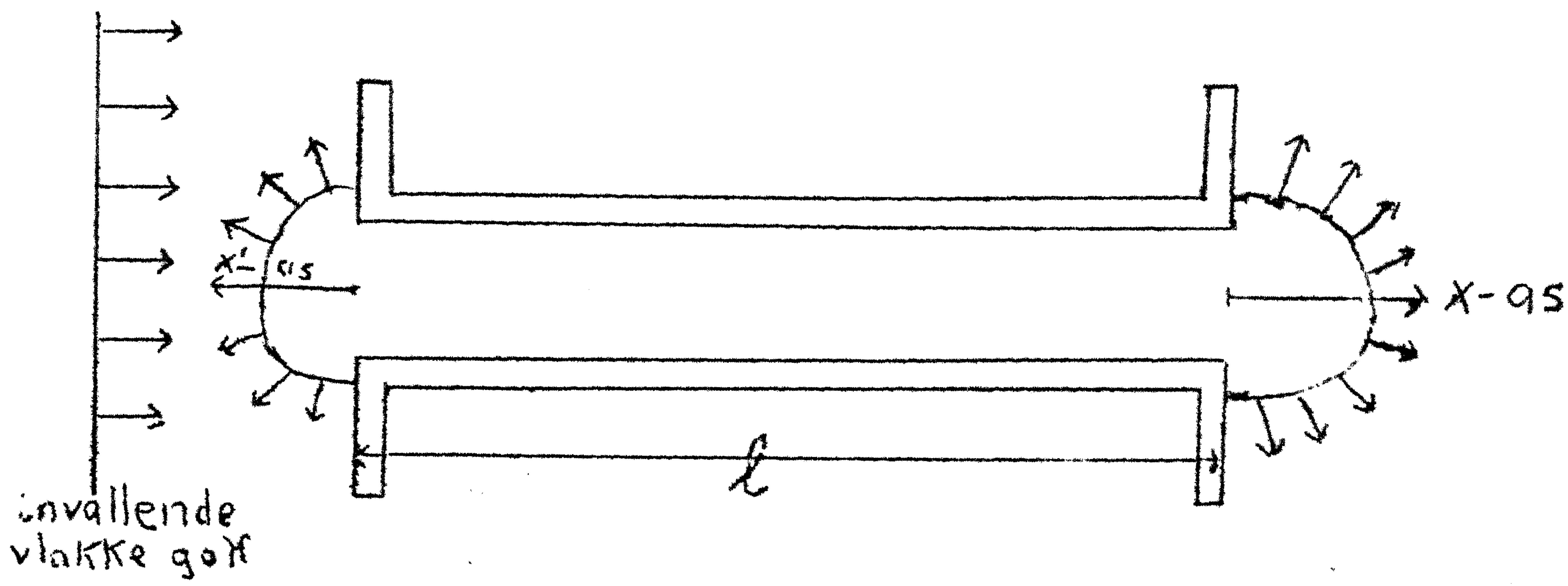
voldoet. Φ zij een zuiver periodieke functie van de tijd:

(2) $$\Phi = R\,(\Psi\, e^{int})$$

Notaties:

Φ	= snelheidspotentiaal ($v = \text{grad}\ \Phi$)
Ψ	= complexe golffunctie
a	= voortplantingssnelheid geluid
n	= aantal trillingen per 2π seconde
k	= aantal golven per 2π centimeter = n/a
l	= lengte buis
Q	= doorsnede buis
r	= voerstraal, van het rechter uiteinde gemeten
x	= coordinaat in lengterichting buis, van het rechter uiteinde naar rechts gemeten
x'	= dito van linker uiteinde naar links gemeten
I	= amplitude invallende golf
$M/_r$	= amplitude uittredende golf
A en B	: factoren van sin k x en cos k x in de golffunctie binnen de buis

$l + 2\alpha$ = gereduceerde lengte van de buis [1])



Om de formules van Helmholtz op beide uiteinden toe te kunnen passen, voeren we twee coordinaten x en x' in, van het rechter- en linkeruiteinde af gemeten, zodat

(3) $$x = - x' - l$$

De golffunctie binnen de buis kan zowel door x als door x' uitgedrukt worden:

(4) $$\psi = A \sin k x + B \cos k x$$
(5) $$= A' \sin k x' + B' \cos k x'$$

Om A' en B' in A en B uit te drukken, substitueren we (3) en (4):

$$\psi = -A(\sin k x' \cos k l + \cos k x' \sin k l) + B(\cos k x' \cos kl - \sin k x' \sin k l)$$
$$= (-A \cos k l - B \sin k l) \sin k x' + (-A \sin k l + B \cos kl) \cos k x'$$

en vinden
(6) $$\begin{cases} A' = - A \cos k l - B \sin k l \\ B' = - A \sin k l + B \cos k l \end{cases}$$

De links invallende vlakke golf zij

(7) $$\psi = I e^{ikx'}$$

De rechts uittredende bolvormige golf is volgens Helmholtz

(8) $$\psi = \frac{M}{r} e^{-ikr}$$

Door de aansluitngsvoorwaarden kunnen we, alweer volgens Helmholtz, M en B door A uitdrukken:

(9) $$M = - \frac{k}{2\pi} A Q$$

(10) $$B = \left(\frac{k^2 Q}{2\pi} i - \operatorname{tg} k\alpha\right) A$$

---

[1])De knopen van de staande golven in de buis liggen namelijk, zoals straks zal blijken, ~~op~~ even buiten de buis, op afstanden α van de uiteinden. Is R de straal van de opening, dan is $\alpha = 0{,}78$ R voor buizen met flens, en $\alpha = 0{,}58$ R voor buizen zonder flens (zie Handbuch der Physik VIII p. 2).

Substitueren we (10) in (4), vermenigvuldigen met e^{int} en nemen het reele deel, dan krijgen we, als A gemakshalve reele aangenomen wordt (wat we door verandering van het nulpunt van de tijd altijd kunnen bereiken), het snelheidspotentiaal binnen de buis:

$$(11)\quad \psi = \frac{A \sin k(x-\alpha)}{\cos k\alpha} \cos n\,t - \frac{A\,k^2\,Q}{2\pi} \cos k\,x \sin n\,t$$

De eerste term stelt een staande golf voor met een buik (snelheidsmaximum) bij $x = \alpha$. De tweede term is door de factor $k^2\,Q/2\pi$ zeer veel kleiner dan de eerste.

Links buiten de buis hebben we behalve de inkomende vlakke golf ook nog een uitgaande bolvormige golf:

$$(12)\qquad \psi = \frac{N}{r}\, e^{-ikr'}$$

De golven binnen de buis kunnen nu, alweer volgens Helmholtz gesplitst worden in 2 termen

$$(13)\qquad \psi = \psi' + \psi''$$

waarbij ψ' een door de buis naar rechts lopende vlakke golf is, die aan de inkomende vlakke golf (7) aansluit, terwijl ψ'' met de uitgaande bolvormige golf (12) op dezelfde wijze samenhangt als zojuist aan het rechtereinde. We hebben dus

$$(14)\qquad \begin{aligned} \psi' &= C\, e^{ikx'} \\ &= i\,C \sin k\,x' + C \cos k\,x' \\ \psi'' &= A'' \sin k\,x' + B'' \cos k\,x' \end{aligned}$$

Tellen we deze 2 golven op en vergelijken met (5), dan vinden we

$$(16)\qquad A' = i\,C + A''$$

$$(17)\qquad B' = C + B''$$

De aansluitingsvoorwaarden voor B'' en A'' luiden net als vroeger

$$(18)\qquad B'' = \left(\frac{k^2 Q}{2}\, i - \mathrm{tg}\, k\,x\right) A''$$

De aansluitngsvoorwaarden voor C luiden verschillend naarmate men de flens op de buis als absorberend of reflecterend aanneemt. In 't eerste geval is (7) precies dezelfde functie als (14), dus

$$(19)\qquad C = I$$

In 't tweede geval moet men bij (7) nog een gereflecteerde golf $I\,e^{-ikx'}$ optellen. De luchtdruk in de opening wordt dus juist dubbel zo groot, en de aansluitingsvoorwaarde luidt

$$(20)\qquad C = 2\,I$$

Laten we ons maar aan (19) houden : aan't eindresultaat kunnen we altijd nog een factor 2 toevoegen, als de omgeving van de opening de geluidgolven reflecteert.

Substitueren we (19) in (16) en (17) en lossen A'' en B'' op, dan krijgen we

$$A'' = A' - i\,I$$
$$B'' = B' - I$$

Dit in (18) gesubstitueerd geeft één betrekking tussen A' en B'. Stellen we ter afkorting

(21) $$\beta = \frac{k^2 Q}{2}\, i - \operatorname{tg} k\alpha$$

dan luidt deze betrekking

(22) $$B' - I = \beta(A' - i\,I)$$

Door hierin (6) te substitueren vinden we een betrekking tussen A en B:

(23) $$A \sin k\,l - B \cos k\,l + I = \beta\,(A \cos k\,l + B \sin k\,l + i\,I)$$

De tweede betrekking tussen A en B is (10):

(24) $$B = \beta\,A$$

Substitueren we ten slotte (24) in (23), dan vinden we één vergelijking voor A

$$A \sin k\,l - \quad A \cos k\,l + I = \beta\,(A \cos k\,l + \beta\,A \sin\ k\,l + i\,I)$$

waaruit we A op kunnen lossen:

(25) $$A = \frac{1 - \beta i}{\beta^2 \sin k\,l + 2\beta \cos k\,l - \sin k\,l}\; I$$

Hiermee is het probleem opgelost, want zodra we A hebben , kennen we ook M volgens (9):

(26) $$M = -\frac{k\,Q}{2\pi}\; A$$

De noemer van (25) kunnen we in twee factoren ontbinden:

(27) $$A = \frac{1 - \beta i}{2(\beta \cos \frac{1}{2} k\,l - \sin \frac{1}{2} k\,l)\,(\beta \sin \frac{1}{2} k\,l + \cos \frac{1}{2} k\,l)}\; I$$

Daar β niet reeel is, kan de noemer nooit nul worden, maar wel zeer klein, wanneer nl. het reele deel van β in de buurt van tg $\frac{1}{2}$ k l of cot $\frac{1}{2}$ k l komt. Het reele deel van β is volgens (21) - tg kα . De kritieke waarden, waarbij A zeer groot wordt, zijn dus

$$\tfrac{1}{2}\, k\,l = -\,k\alpha + \text{veelvoud van } \pi$$

en $$\tfrac{1}{2}\, k\,l = \frac{\pi}{2} - k\,\alpha + \text{veelvoud van } \pi$$

of, samengevat:

$$k\,(l + 2\alpha) = \text{veelvoud van } \pi$$

Resonantie treedt dus op, zoals te verwachten was, wanneer de gereduceerde lengte van de buis een veelvoud van de halve golflengte is.

Het komt natuurlijk vooral op de absolute waarde van A aan: de intensiteit is immers evenredig met $|M|^2$, dus met $|A|^2$. De teller van A kan best door 1 worden vervangen, want β is altijd klein t.o.v. 1. De definitie van β was immers (21):

(28) $$\beta = \frac{k^2 Q}{2\pi} i - \mathrm{tg}\, k\alpha ,$$