

Colloquium Mathematische Problemen uit de praktijk.²

1951/52

Timman R	Mathematische theorie van laminaire grenslaagstroming.	p 1 - 12
Bouwkamp C J	Stralingstheorie, 1 - 5.	p 13 - 44
Lauwerier H A	Cybernetica, 1 - 3.	p 45 - 64
Muller W H	De theorie van de spelen en het economisch gedrag.	p 65 - 89

o.l.v. Timman en van Veen S.C

1951/52

Inhoudsopgave

Colloquy
Mathematische problemen uit de praktijk

Dr. R. Timman	Mathematische theorie van laminaire grenslaagstroming	12 pag
Dr. C.J. Bouwkamp	Stralingstheorie	31 "
Dr. H.A. Lauwerier	Cybernetica	20 "
W.H. Muller	De theorie van de spelen en het economisch gedrag	25 "

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

1^e Voordracht op 4 October 1951

te A M S T E R D A M

DOOR DR. K. THIJMANN.

Mathematische theorie van laminaire grenslaagstroming.

1. Inleiding; de grensvergelijkingen.

De stroming van een visceuze, onsamendrukbare vloeistof wordt beschreven door de bekende vergelijkingen van Navier-Stokes, die ontstaan door voor een volumeelementje de voorwaarden op te stellen, dat de massa-krachten evenwicht maken met de druk- en viscositeitskrachten.

Voor een stationnaire beweging in twee dimensies zijn zij in recht-hoekige coördinaten

$$\zeta(uu_x + vv_y) = -p_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}) \quad (1)$$

$$\zeta(uv_x + vv_y) = -p_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}) \quad (2)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking

$$u_x + v_y = 0 \quad (3)$$

bepalen zij de stroming van het medium.

In hun algemene vorm zijn de vergelijkingen echter zeer moeilijk te behandelen. De weinige exacte oplossingen, die bekend zijn, kunnen weliswaar van mathematisch standpunt interessante resultaten leveren, zij hebben echter vrijwel steeds betrekking op gevallen, die in de praktijk niet voorkomen. Het is dus van het grootste belang oplossingsmethoden te zoeken, voor de gevallen die wel interessant zijn. Indien wij ons beperken tot vloeistoffen met zeer kleine inwendige wrijving, zoals water en lucht, dan is door Prandtl in 1904 een vereenvoudigd stel vergelijkingen aangegeven, die veel beter voor berekening toegankelijk zijn.

Prandtl merkt op, dat indien μ zeer klein is, de invloed van de viscositeitstermen in de vergelijkingen zeer klein zal zijn, zolang de gradient van de snelheid (of liever de tweede orde differentiaalquotienten) klein blijft. Dit is echter zeker niet het geval in de directe nabijheid van een wand, waar een vloeistof met grote snelheid langs struimert aan de wand is de snelheid nul. De viscositeitseffecten blijven beperkt tot een dunne laag, waar de snelheid snel aangroeit.

Teneinde de verschijnselen in deze dunne laag (grenslaag) duidelijk zichtbaar te maken, voert hij nieuwe coördinaten in die het x, y -vlak affien transformeren.

$$\eta = y/\delta, \quad \xi = x/l$$

waar δ een kleine lengte-grootheid is en l een zekere standaardlengte (b.v. de lengte van de plaat).

De vergelijkingen worden nu

$$\frac{1}{l} u u_{\xi} + \frac{\sigma}{\delta} u_{\eta} = -\frac{1}{\rho l} \rho \xi + \nu \left(\frac{u}{l^2} \xi \xi + \frac{1}{\delta^2} u_{\eta \eta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{1}{l} u v_{\xi} + \frac{\sigma}{\delta} v_{\eta} = -\frac{1}{\rho l} \rho \eta + \nu \left(\frac{1}{l^2} v_{\xi \xi} + \frac{1}{\delta^2} v_{\eta \eta} \right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{l} u_{\xi} + \frac{1}{\delta} v_{\eta} = 0. \quad (6)$$

waarbij $\nu = \mu/\rho$ de kinematische viscositeit is.

Voor deze vergelijking zoeken wij een asymptotische oplossing door te stellen

$$u = \bar{u} \left\{ u_0(\xi, \eta) + \delta u_1(\xi, \eta) + \delta^2 u_2(\xi, \eta) + \dots \right\} \quad (7)$$

$$v = \bar{u} \left\{ v_0(\xi, \eta) + \delta v_1(\xi, \eta) + \delta^2 v_2(\xi, \eta) + \dots \right\} \quad (8)$$

De snelheidsgrootheden $u_0, u_1, \dots, v_0, v_1, \dots$ zijn hier dimensieloos gemaakt met een zekere standaardlengte \bar{u} (bijv. de aankomende snelheid).

Om toch reeds voor u_0 en v_0 de invloed van de visceuze termen te behouden, kiezen wij nu δ zo, dat $\frac{\nu \bar{u}}{\mu \delta^2} = 1$ is.

Dan worden de stelsels vergelijkingen voor u_0, v_0, \dots gevonden door na substitutie in (4)...(6) overeenkomstige machten van δ gelijk te stellen.

De termen van de nulde graad leveren

$$u_0 u_{0\xi} + v_0 u_{0\eta} = -\frac{\rho \xi}{\rho \bar{u} l} + u_0 \eta \eta \quad (9)$$

$$0 = -\rho \eta \quad (10)$$

$$u_0 \xi + v_0 \eta = 0 \quad (11)$$

Vrijwel steeds beperkt men zich tot deze eerste benadering. Om een idee te geven van de orde van grootte van de verwaarlozing, merken wij op, dat

$$\frac{\delta}{l} = \sqrt{\frac{\nu}{\bar{u} l}}$$

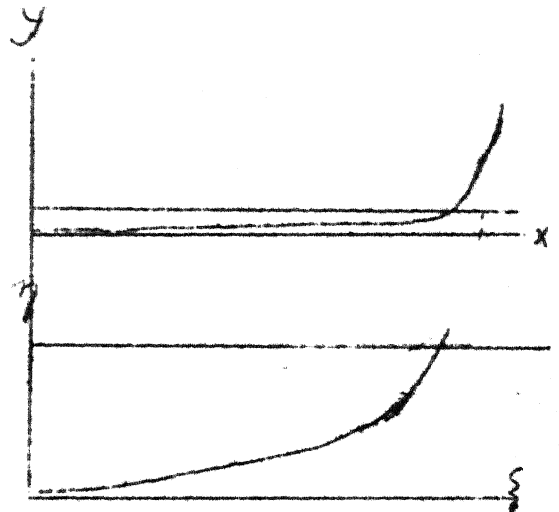
en dat $\frac{\bar{u} l}{\nu}$ het bekende getal van Reynolds is.

Voor lucht is $\nu = 0,15 \text{ cm}^2/\text{sec.}$, zodat voor een plaat van 40 cm. lengte en een windsnelheid van 80 m/sec.

$$Re = \frac{\bar{u} l}{\nu} = \frac{80 \cdot 0,40}{0,15} \approx 2 \cdot 10^6.$$

en $\frac{\delta}{l} \sim 0,001$.

De verwaarlozing is dus in dit geval in de praktijk toelaatbaar.



Uit (10) volgt het belangrijke feit, dat de druk in de grenslaag onafhankelijk is van de hoogte, zodat wij in (9) het partiële differentiaalquotient naar ξ door een gewoon differentiaalquotient mogen vervangen.

Verder geldt voor de vrije stroming, waar de viscositeit te verwaarlozen is de wet van Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho U^2 + p = \text{const} \quad (12)$$

ofwel

$$\rho U U' + p' = 0. \quad (13)$$

Indien wij nu weer teruggaan naar de werkelijke snelheden krijgen wij dus de vergelijkingen

$$u u_x + v u_y = U U' + \frac{u}{y} \quad (14)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad (15)$$

waarbij de "dakjes" boven de snelheden aanduiden dat hier de benadering bedoeld wordt.

De randvoorwaarden die hierbij gesteld worden, zijn, dat voor $y=0$ $u=0$, $v=0$ is, terwijl bij steeds aangroeiende y de snelheid u tot de snelheid in de vrije stroming moet aangroeien.

2. De stroming langs een vlakke plaat.

De verkregen vergelijkingen zijn echter nog geenszins eenvoudig. Men moet in werkelijk voorkomende gevallen zijn toevlucht nemen tot numerieke methoden, hetgeen echter nog steeds met vrij grote moeilijkheden gepaard gaat.

In het eenvoudige geval, dat in de vrije stroming geen drukgradient heerst, dus voor de stroming langs een vlakke plaat, heeft Blasius een exacte oplossing gegeven.

In dat geval zijn de vergelijkingen

$$u u_x + v u_y = \nu u_{yy} \quad (1)$$

$$u_x + v_y = 0. \quad (2)$$

met de randvoorwaarden

$$y=0 \quad u=v=0 \quad (3)$$

$$y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow U = \text{const.} \quad (4)$$

Allereerst merken wij op, dat door het ontbreken van een snelheidsgradient in de vrije stroming alle doorsneden in zekere zin equivalent zijn, d.w.z. er moet een zekere gelijkvormigheid tussen de snelheidsprofielen bestaan.

Om deze te vinden, voeren wij eerst een stroomfunctie ψ in door op grond van (2) te stellen

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x. \quad (5)$$

Dan moet ψ voldoen aan

$$\psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \nu \psi_{yyy} \quad (6)$$

Vanaf het begin van de plaat zal de grenslaag steeds dikker worden. Men zal dus verwachten, dat het profiel voorgesteld moet kunnen worden door

$$u = U \cdot f(y/\delta) = U \cdot f(\eta),$$

waarbij δ een functie van x is, die met x aangroeit ("grenslaagdikte") en $y = y/\delta$.

Dan is

$$\psi = \int_0^y u \cdot dy = \delta U \int_0^\eta u(\eta) d\eta = \delta U g(\eta).$$

en verder wordt

$$\psi_x = U (\delta' g - \delta \delta' g' / \delta) = (\delta' g - \delta' \eta g') U.$$

$$\psi_y = U g' / \delta$$

$$\psi_{xx} = U (\delta'' g - \frac{\delta'^2}{\delta} g' \eta - \delta'' \eta g' + \frac{\delta'^2}{\delta} \eta g' + \frac{\delta' \eta^2 g''}{\delta}).$$

$$\psi_{yy} = \frac{1}{\delta} g'' U$$

$$\psi_{xy} = -\eta g'' \frac{\delta'}{\delta} U.$$

$$\psi_{yyy} = \frac{U}{\delta^2} g'''$$

zodat de vergelijking wordt

$$U \left\{ g' \eta g'' \frac{\delta'}{\delta} - \delta' (g - \eta g') \cdot \frac{g''}{\delta} \right\} = \nu \frac{g'''}{\delta^2}$$

Indien wij dus δ zo als functie van x kunnen bepalen, dat

$$U \frac{\delta'}{\delta^2} = \frac{\nu}{\delta^2}$$

op een constante factor na, verkrijgen wij een vergelijking van g als functie van y alleen.

Hieraan voldoet

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

en de vergelijking van g wordt tenslotte

$$g g'' + g''' = 0$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{array}{lll} \eta = 0 & g = 0 & g' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & & g' \rightarrow 2. \end{array}$$

Blasius heeft nu bovenstaande niet lineaire vergelijking door een machtreeks opgelost. Door daarin een constante vrij te laten en aan te passen aan een asymptotische ontwikkeling, die bij de randvoorwaarde in het oneindige behoorde, verkreeg hij een zeer nauwkeurige oplossing.

Veel later is door Hermann Weyl aangetoond, dat de door Blasius gebruikte machtreeks slechts een beperkt convergentiegebied heeft. Dit verandert echter niet de numerieke nauwkeurigheid van de gevonden waarden.

De asymptotische ontwikkeling kan verkregen worden door te stellen

$$g=2x-h$$

en op te merken, dat h klein moet zijn.

Dan wordt de vergelijking van h

$$(2x-h)h''+h''' = 0$$

of,

$$\frac{h'''}{h''} = -2x+h.$$

Indien h klein is, kan dit benaderd worden door

$$\frac{h'''}{h''} = -2x$$

of

$$h'' = Ce^{-x^2}$$

$$h(x) = C \int_{\gamma}^{\infty} dz \int_{\gamma}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

waarmede een goede asymptotische benadering is verkregen. Hierbij blijkt de fonteinintegraal een rol te spreken. Dit is een meer algemene eigenschap van de grenslaagvergelijkingen, zoals in het volgende besproken zal worden.

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr R. Timman.

Mathematische theorie van laminaire grenslaagstroming.

3. Het asymptotisch gedrag van de snelheids profielen.

Om het asymptotisch gedrag van de snelheidsprofielen te onderzoeken aan de buitenkant, dus voor grote waarden van y , voeren wij eerst een stroomfunctie ψ in door

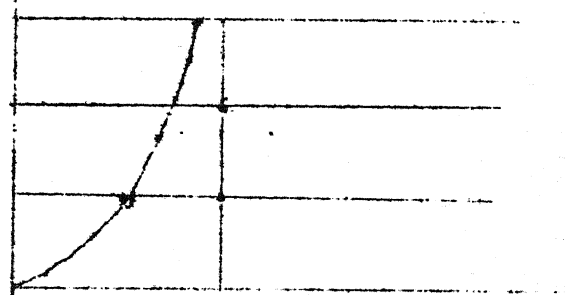
$$u = -\psi_y$$

$$v = +\psi_x$$

en merken op, dat ψ een soort maat is voor de afstand tot de wand.

Immers:

$$\psi = \int_0^y u \, dy + f(x)$$



dus voor vaste x is ψ de hoeveelheid vloeistof, die door een doorsnede, loodrecht op de wand met hoogte y stroomt.

Deze hoeveelheid neemt monotoon toe met y en bovendien is voor grote y $u \rightarrow U$, zodat daar ψ evenredig met y aangroeit. Ook de afstand langs de wand kan in een dergelijke coördinaat worden uitgedrukt, n.l. de "snelheids potentiaal" voor de vrije stroming, die hier alleen de component U heeft.

$$\psi = \int_0^x U(s) \, ds.$$

Transformatie van de eerste grenslaag vergelijking levert dan, daar

$$\frac{\partial}{\partial x} = U \frac{\partial}{\partial \psi} + v \frac{\partial}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -u \frac{\partial}{\partial \psi}$$

tot resultaat

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right) = \sqrt{\frac{u}{U}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \left(\frac{U^2 - u^2}{2} \right).$$

Stel het "energie defect"

$$\frac{U^2 - u^2}{2} = z,$$

dan voldoet z aan de niet lineaire vergelijking

$$-\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{u}{U}} - \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$$

Aan de buitenkant van de grenslaag, waar $u \rightarrow U$ kunnen wij deze vergelijking b. naderen door

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}}$$

d.w.z. door de warmtegeleidingsvergelijking. De randvoorwaarden zijn

$$z = 0 \quad \text{voor} \quad \varphi \rightarrow \infty$$

$$z = z_0 = \frac{U^2(\varphi)}{2} \quad \text{voor} \quad \varphi \rightarrow 0.$$

De oplossing van dit randwaardenprobleem is bekend:

$$z = \frac{U^2 - u^2}{2} = \frac{\varphi}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi \frac{e^{-\frac{\varphi^2}{\xi^2}}}{(\varphi - \xi)^{3/2}} U^2\left(\frac{\xi}{\varphi}\right) d\xi.$$

Om hieruit een asymptotische formule af te leiden, schrijven wij

$$\beta^2 = \frac{\varphi^2}{\varphi \cdot \xi} \rightarrow \infty$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi e^{-\beta^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\xi}\right)} U^2\left(\varphi - \frac{\varphi^2}{\xi}\right) d\xi.$$

Daar voor grote waarden van y $u \rightarrow U$, zal

$$\frac{\varphi}{y\sqrt{\varphi}} = \frac{\int_0^y u dy}{y\sqrt{\varphi}}$$

naderen tot de waarde $\frac{U}{\sqrt{\varphi}}$, die alleen een functie is van x .

Verder zal

$$z = \frac{U + u}{2} (U - u) \rightarrow U(U - u),$$

zodat de asymptotische uitdrukking van u wordt van de vorm:

$$\frac{u}{U} \sim 1 - \frac{z}{U^2} = 1 - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{U^2}{\varphi} y^2} \frac{U^2 \left(\varphi - \frac{U^2}{\varphi} y\right)}{U(\varphi)} dy$$

4. De impulsvergelijking van Von Karman,

Uit het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen

$$uu_x + vu_y = UU' + \sqrt{\nu} u_{yy}, \quad (1)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (2)$$

kunnen wij een integraalvergelijking afleiden, die eveneens het verloop van de grenslaagstroming weergeeft, door integratie naar y

$$\int_0^{\infty} (UU' - uu_x) dy - \int_0^{\infty} vu_y dy + v \left[u_y \right]_0 - \left[u_y \right]_0 = 0, \quad (3)$$

waarbij:

$$v = - \int_0^y u_x dy' = - \frac{d}{dx} \int_0^y u dy', \quad (4)$$

daar aan de wand $v=0$ moet zijn.

Substitutie van (4) levert:

$$\int_0^{\infty} (UU' - uu_x) dy + \int_0^{\infty} du \int_0^y u_x dy' = v \left[u_y \right]_0 \quad (5)$$

hetgeen door partiële integratie overgaat in:

$$\int_0^{\infty} (UU' - uu_x) dy + \int_0^{\infty} (U - u)u_x dy = v \left[u_y \right]_0 \quad (6)$$

of wel:

$$U' \int_0^{\infty} (U - u) dy + \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(U - u) dy = v \left[u_y \right]_0 \quad (7)$$

Von Karmanvoert nu in twee grootheden, die de dimensie van een lengte hebben, de verplaatsingsdikte

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (8)$$

en de impulsverliesdikte

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9)$$

zodat hij de impulsvergelijking tenslotte schrijft als

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{U'}{U} (\delta_1 + 2\delta_2) + \frac{d\delta_2}{dx} \quad (10)$$

Daar het snelheidsprofiel nog onbekend is, kan deze vergelijking ons nog niet veel leveren.

Samen met de randvoorwaarden, die uit de grenslaagvergelijkingen volgen door een willekeurig aantal malen naar y te differentiëren en $y = 0$ te stellen, bepaalt zij echter het verloop van u .

De eerste drie randvoorwaarden zijn:

$$UU' = - v \left[u_{yy} \right]_0 \quad (11)$$

$$uu_{xy} + vu_{yy} + u_y u_x + v_y u_y = \nu' u_{yyy} \quad (11)$$

of wel: $uu_{xy} + vu_{yy} = \nu' u_{yyy}$,

hetgeen voor $u = v = 0$ overgaat in:

$$U_{yyy} = 0 \quad (12)$$

Nogmaals differentiëren levert

$$u_y u_{xy} + v_y u_{yy} + uu_{xyy} + vu_{yyy} = \nu' u_{yyyy}$$

die overgaat in

$$u_y u_{xy} + v_y u_{yy} = \nu' u_{yyyy}$$

Daar echter aan de wand steeds $u = 0$ is, is $u_x = -v_y = 0$ en dus wordt deze voorwaarde

$$u_y u_{xy} = \nu' u_{yyyy} \quad (13)$$

Het idee van Von Karman is nu om hier snelheidsprofielen te substitueren, die een bekende vorm hebben en van een aantal parameters afhangen, die functies van x zijn. Immers, de gedaante van de snelheidsprofielen ligt wel ongeveer vast, het lijkt toereikend om de variaties, die optreden, te vangen door de parameters te variëren. Een leerling van Von Karman, Pohlhausen, heeft dit nader uitgewerkt en als benadering gekozen een derde graads kromme, die op een geschikt punt met aansluitende eerste en tweede afgeleide overging in een rechte lijn.

Op grond van het vroeger vastgestelde asymptotische gedrag van de oplossingen lijkt het echter beter om krommen te kiezen, die dit asymptotische gedrag vertonen en de parameters te kiezen uit de voorwaarden aan de wand.

Daartoe voeren wij eerst een nieuwe variabele in y richting in door

$$y = \alpha y \quad (14)$$

waarbij α een functie is van x ($1/\alpha$ is een maat voor de "grenslaag dikte"),

Wij substituëren nu:

$$\frac{u}{U} = f(y) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} (a + c\eta^2 + \dots) d\eta - e^{-\eta^2} (b + d\eta^2 + \dots) \quad (15)$$

en ontwikkelen, om gemakkelijk aan de randvoorwaarden te kunnen voldoen,

$$f'(y) = e^{-y^2} (a + cy + \dots) - e^{-y^2} (2dy + \dots) + 2ye^{-y^2} (b + dy^2 + \dots) = \quad (16)$$

$$= a + 2(b - d)y + (c - a)y^2 + 2(2d - b)y^3 + \dots$$

De randvoorwaarden dan:

$$u = U f(0) = 1 - \int_0^{\infty} e^{-y^2} (a + cy^2) dy - b = 0$$

$$\frac{\tau_0}{\nu} = U \alpha f'(0) = a U \alpha$$

$$- \frac{U U'}{\nu} = U \alpha^2 f''(0) = U \alpha^2 \cdot 2(b - d) \quad (17)$$

$$0 = U \alpha^3 f'''(0) = 2(c - a)$$

$$u_y u_{xy} = a U \alpha \cdot \left\{ a U \alpha + a U' \alpha + a U \alpha_x \right\} = \nu U \alpha^4 f'''(0) = \nu U \alpha^4 \cdot 12(2d - b)$$

Hieruit volgt direct $a = c = \frac{1 - b}{\frac{3}{2} \sqrt{\pi}}$

zodat de uitdrukking voor het snelheidsprofiel wordt.

Verder wordt de parameter $-f''(0)$ meestal door λ , de Pohlhauser parameter aangeduid, zodat

$$\lambda = -2(b - d) = -f''(0) = -\frac{U'}{\nu \alpha^2}$$

Het snelheidsprofiel wordt nu:

$$f(\eta) = (1 - b) \frac{\int_0^{\eta} e^{-y^2} (1 + y^2) dy}{\frac{3}{2} \sqrt{\pi}} + b(1 - e^{-\eta^2}) - \eta^2 e^{-\eta^2} \cdot d.$$

Nu kunnen van dit profiel de verplaatsingsdikte en de impulsdikte berekend worden.

$$\alpha \delta_1 = A_1 = \int_0^{\infty} (1 - f) dy = 0,752 + 0,134b + 0,443d.$$

$$\alpha \delta_2 = A_2 = \int_0^{\infty} (1 - f) dy = 0,289 - 0,015b - 0,015b^2 + d(0,188 - 0,058b) - 0,117 d^2.$$

Indien wij slechts de eerste vier randvoorwaarden meenemen, blijven, behalve α nog twee parameters b en d over. Wij kiezen $d = 0$ en hou zo een vergelijking over in b en α , waarbij echter

$$\lambda = 2b = -\frac{U'}{\nu \alpha^2}$$

Door een kleine reductie kan de impulsvergelijking in iets eenvoudiger vorm worden gebracht.

Stel n.l.

$$\lambda_2 = \frac{U' \delta_2^2}{\gamma} = + \lambda \alpha^2 \delta_2^2 = \lambda \Delta_2^2 = 2b \delta_2^2$$

$$T_2 = \frac{\tau_0}{\rho u^2} \cdot \frac{U \delta_2}{\gamma} = \frac{\alpha f'(0) \delta_1}{\Delta_2} \cdot \frac{1-b}{\frac{3}{2} \sqrt{\pi}}$$

dan wordt de impulsvergelijking na vermenigvuldigen met $\frac{U \delta_2}{\gamma}$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{U' \delta_2}{\gamma} (\delta_1 + 2\delta_2) + \frac{U \delta_2}{\gamma} \cdot \frac{d \delta_2}{dx} = \\ &= \frac{U' \delta_2^2}{\gamma} (2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}) + \frac{1}{2} U \cdot \frac{d}{dx} \frac{\delta_2^2}{\gamma} \end{aligned}$$

hetgeen overgaat in

$$U \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda_2}{U'} \right) = 2 \left[T_2 - \frac{\lambda_2}{2} (2 + \Delta_{12}) \right]$$

of wel:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{U \lambda_2}{U'} \right) = \lambda_2 + H(\lambda_2)$$

waarbij:

$$H(\lambda_2) = 2 \left[T_2 - \lambda_2 (2 + \Delta_{12}) \right]$$

Het is nu mogelijk om H als functie van λ_2 te bepalen, bijv. in tabelvorm, zodat dan de vergelijking van λ_2 door numerieke integratie opgelost kan worden.

Hierbij moeten nog enige opmerkingen gemaakt worden. In het stuwpunt is $U = 0$ en hier is het begin van de grenslaag.

Dit punt is een singulier punt voor de differentiaalvergelijking.

De beginwaarde van λ_2 wordt nu gevonden uit de eis, dat

$$\frac{d\lambda_2}{dx} \text{ eindig blijft.}$$

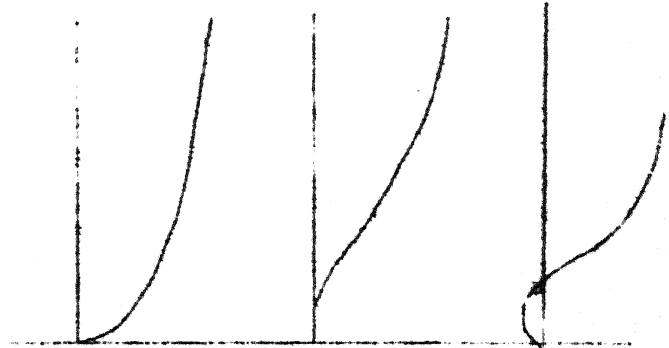
Dan moet in het stuwpunt $H(\lambda_2) = 0$, zijn. Hieruit volgt dus ook $H(\lambda)$.

Substitutie levert de derdegraadsvergelijking

$$-0.067 \lambda^3 + 0.209 \lambda^2 + 1,910 \lambda + 0,752 = 0, \text{ met een wortel}$$

$$\lambda = -0.930.$$

De twee andere wortels zijn fysisch van geen betekenis. Verder verdient het punt, waar $T_2 = 0$ is, speciale aandacht. In dit punt, is n.l. de afgeleide van de snelheid nul en nog iets verder zou terugstroming optreden, hetgeen aanleiding tot een geheel ander stromingsbeeld geeft. (z.g. loslaten van de stroming).



Hier blijven de grenslaagvergelijkingen niet meer geldig, zodat het geen zin heeft de berekening verder te vervolgen.

Indien de waarden van λ_2 in het gehele gebied bekend zijn, kunnen de overige parameters en ook de snelheidsprofielen bepaald worden.

Het is duidelijk, dat $\lambda_2 = 0$ is, in het punt, waar $U' = 0$ is. In het gebied van vertraagde stroming, $U' < 0$ levert de hier gebruikte methode geen goede resultaten. Dit wordt duidelijk door in de omgeving van het loslaatpunt naar de vijfde randvoorwaarde te kijken.

Deze eist n.l.

$$\sqrt{\alpha} \sqrt{12(2d - b)} = 0$$

maar, daar wij $d = 0$ gezet hebben en nu $T = 0$ $b = 1$ is, is hier volstrekt niet aan voldaan.

Wij kiezen nu in $U' < 0$ $d = \frac{1}{2}b$ en berekenen de overeenkomstige grootheden. Deze resultaten blijken uitstekend met exacte berekeningen overeen te komen. De geringe discontinuïteit in de parameters om $\lambda = 0$ is van geen betekenis.

Op deze wijze kan men bijwillekeurig gegeven verloop van $U(x)$ op zeer eenvoudige wijze een redelijk nauwkeurig verloop (fout $< 1\%$) van de grenslaaggrootheden door een eenvoudige numerieke integratie verkrijgen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr C.J. Bouwkamp.

Stralingstheorie

§ 1. Inleiding.

Ik heb me door de leider van dit colloquium laten overhalen, een reeks voordrachten te houden over "Mathematische problemen uit de praktijk". Als ik de organisatoren van het colloquium goed heb begrepen, moet de toevoeging "uit de praktijk" met een korreltje zout worden genomen. Althans, ik doe alsof dat het geval is. De gecompliceerdheid van vele praktische problemen noodzaakt mij namelijk, hier slechts iets te vertellen over die problemen, welke als fundamenteel moeten worden beschouwd voor de echte, meer ingewikkelde problemen uit de praktijk van een industrie-laboratorium.

Ik stel me voor, U in deze voordrachten iets te vertellen uit de klassieke stralingstheorie. Het geheel van mijn verhaal wordt overkoepeld door de golfvergelijking. Behandeld zullen worden: scalaire problemen uit de acoustiek, vectoriële problemen uit de leer van het electromagnetisme, met inbegrip van buigingsproblemen.

Voor de praktijk zijn deze onderwerpen van belang. Men denke b.v. aan luidsprekers, antennes, radiogolfvoortplanting, en verdere zaken uit de kortegolf-techniek. Uit de aard der zaak, zal ik van U mogen eisen, dat U vertrouwd bent met grote hoofdstukken uit de wiskunde, speciaal de analyse. Misschien veronderstel ik nu en dan wel eens, dat U met sommige delen der "toegepaste" of "toepasbare" (sic !) wiskunde bekend bent. Aan de andere kant hoop ik het U niet al te lastig te maken, en zeker niet in het begin. Interrupties en andere opmerkingen zijn welkom !

§ 2. Voortplanting van geluid in lucht.

De voortplanting van geluid in lucht geschiedt door longitudinale golven. Onderstelt men, dat de uitwijkingen en snelheden der luchtdeeltjes uit de evenwichtpositie "klein" zijn, dan kan deze geluidsvoortplanting worden beschreven met behulp van een snelheidspotentiaal. Deze functie van plaats en tijd voldoet aan de golfvergelijking,

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0,$$

overal dààr waar geen "bronnen" aanwezig zijn. De constante c is de pha-

sesnelheid van het geluid in de vrije ruimte. De geluidsdruk P en de snelheid \vec{U} van de luchtdeeltjes vindt men uit

$$P = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \vec{U} = - \text{grad } \phi,$$

waarin ρ_0 de dichtheid der lucht in evenwicht is. Op de physica van het probleem kan ik natuurlijk hier niet ingaan. Ik volsta met de opmerking, dat wij het probleem gelinealiseerd hebben. In alles wat volgt, beperken wij ons tot de "lineaire wereld". Voor de fysische fundering van het gegeven mathematisch formalisme raadplege men b.v.:

Lord Rayleigh, Theory of Sound, vol II (1896);

Backhaus, Schwingungen räumlich ausgedehnter Kontinua, Handbuch der Physik VIII (1927), Akustik, Kap. 4;

Morse, Vibration and Sound (1936 - 1950);

Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen (1939).

§ 3. Harmonische tijdfactor.

Wij beperken ons in het vervolg tot zuiver-harmonisch verschijnselen van frequentie $\nu = \omega / 2\pi$. Omdat het probleem lineair is, kunnen we op de bekende manier met een complexe tijdfunctie rekenen. We kiezen daarvoor $\exp(-i\omega t)$; dus

$$\phi = \varphi e^{-i\omega t}, \quad P = p e^{-i\omega t}, \quad \vec{U} = \vec{u} e^{-i\omega t}.$$

We houden steeds de tijdfactor $\exp(-i\omega t)$ in gedachten, en rekenen alleen expliciet met de plaats-functies φ , p , \vec{u} . Aan het eind nemen we, b.v. de reële delen van deze grootheden na toevoeging van de factor $\exp(-i\omega t)$.

De golfvergelijking wordt dan

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0, \tag{1}$$

terwijl druk en snelheid bepaald worden uit

$$p = -c \rho_0 i k \varphi, \quad \vec{u} = - \text{grad } \varphi. \tag{2}$$

De constante k is het golfgetal. De samenhang met de golflengte is als volgt:

$$k = \omega/c = 2\pi/\lambda_0.$$

Aldus wordt een vlakke golf, die zich in de positieve x -richting voortplant, beschreven door

$$\varphi = A e^{ikx}, \tag{3}$$

waarin A , de amplitude, een (complexe) constante is.

Het is voor later van belang, dat wij even nagaan wat het gemiddelde (per tijdseenheid) energietransport per eenheid van oppervlak loodrecht op de voortplantingsrichting is. De momentane energiestroom

wordt gegeven door het product van geluidsdruk en deeltjes-snelheid. Dit is kwadratisch in de kenmerkende grootheden. We moeten, na toevoeging van $\exp(-i\omega t)$, op reële grootheden overgaan:

$$p \rightarrow \operatorname{Re} \left[-c \rho_0 ikA \exp(ikx - i\omega t) \right],$$

$$u_x \rightarrow \operatorname{Re} \left[-ikA \exp(ikx - i\omega t) \right].$$

Men controleert gemakkelijk dat het product van deze reële grootheden, gemiddeld over de tijd, gelijk is aan $\frac{1}{2} c \rho_0 k^2 |A|^2$. De energiestroom per eenheid van oppervlak loodrecht op de voortplantingsrichting van de vlakke golf (3) is dus

$$W_x = \frac{1}{2} c \rho_0 k^2 |A|^2. \quad (4)$$

Zijn α, β, γ de richtingscosinussen van de voortplantingsrichting van een vlakke golf (ten opzichte van het rechthoekige stelsel x, y, z) dan wordt deze vlakke golf beschreven door

$$\varphi = A e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1) \quad (5)$$

De functies (3) en (5) voldoen in het eindige aan de golfvergelijking (1); ze hebben een singulariteit in het oneindige. In (3) ligt de bron bij $x = -\infty$.

In latere beschouwingen zullen wij ook wel eens complexe waarden van k moeten aannemen (verliezen door absorptie, demping). Voor de physica is dan altijd voldoende dat k^2 in het eerste kwadrant ligt. Dus

$$0 \leq \arg k \leq \pi/4. \quad (6)$$

De homogene vlakke golf (5) is het prototype van oplossing der golfvergelijking. Door superpositie van vlakke golven kunnen wij zeer algemene, en voor de physica de algemene, oplossingen van (1) construeren. Als wij in (5) voor de amplitude A een functie van α, β, γ nemen, en vervolgens gaan integreren over een stuk van de (reële of complexe) eenheidsbol, dan krijgen wij de algemene golf functie

$$\varphi = \iint A(\alpha, \beta, \gamma) e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\Omega. \quad (7)$$

Dit superpositieproces zal straks aan een voorbeeld worden toegelicht.

§ 4. Isotrope puntbron.

In spherische coördinaten r, ϑ, ψ , samenhangende met de rechthoekige door

$$x = r \sin \vartheta \cos \psi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \psi, \quad z = r \cos \vartheta$$

met $r \geq 0, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$, wordt de Laplace-operator gegeven door

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

Hangt φ slechts van r af, dan reduceert zich (1) tot

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right)(r\varphi) = 0,$$

zodat $r\varphi(r) = A \cos kr + B \sin kr$. Een isotrope puntbron (in de oorsprong) die energie uitstraalt naar het oneindige is (let op de tijdfactor) dus te beschrijven door

$$\varphi = A \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (8)$$

Strikt genomen is (8) alleen buiten $r = 0$ een oplossing van (1). Eigenlijk is (8) een oplossing van een inhomogene golfvergelijking met in het rechterlid een functie evenredig aan $\delta(r) r^2$. Hierin is, schrik niet, de delta-functie van Dirac!

Beschouw nu de energiestraling van de puntbron (8). Deze kan op twee manieren worden berekend. Allereerst kijken wij op grote afstand. Daar hebben wij bijna vlakke golven. Alleen de variaties met r in de phasefactor $\exp(ikr)$ spelen een rol. Voor $r \rightarrow \infty$ heeft men

$$p \sim -c \rho_0 ik \frac{A}{r} e^{ikr}, \quad u_r \sim -ik \frac{A}{r} e^{ikr}.$$

Op grote afstand r kunnen wij het veld (8) opvatten als een vlakke golf in de radiale richting met amplitude A/r . Volgens (4) is dan de energiestroomdichtheid

$$W_r \sim \frac{1}{2} c \rho_0 k^2 |A|^2 / r^2.$$

Vermenigvuldigen wij dit met het totale oppervlak $4\pi r^2$, en nemen wij $r \rightarrow \infty$, dan wordt de per tijdseenheid uitgestraalde energie der puntbron gelijk aan

$$W = 2\pi c \rho_0 k^2 |A|^2. \quad (9)$$

Nu een tweede methode voor het berekenen van de energiestraling. Beschouw een bolletje met straal ξ . Neem aan, dat (8) het stralingsveld beschrijft van een bolletje met pulserend oppervlak. De snelheid der luchtdeeltjes aan het oppervlak is $-\partial\varphi/\partial r$ voor $r = \xi$. Neem gemakshalve $A = 1$, dan is deze snelheid

$$v = \left(-ik + \frac{1}{\xi}\right) \frac{e^{ik\xi}}{\xi},$$

terwijl de druk gelijk is aan

$$p = -c \rho_0 ik \frac{e^{ik\xi}}{\xi}.$$

Gaan wij weer over op de reële delen, dan komt er

$$pv \rightarrow \frac{1}{\xi} \left[k \sin(k\xi - \omega t) + \frac{1}{\xi} \cos(k\xi - \omega t) \right] \left[\frac{c \rho_0 k}{\xi} \sin(k\xi - \omega t) \right].$$

Middelen we over de tijd, dan wordt het rechterlid $\frac{1}{2} c \rho_0 k^2 / \xi^2$. Met ruimtewinkel $4\pi \xi^2$, en $\xi \rightarrow 0$, vinden wij weer (9).

Blijkbaar kunnen wij in deze laatste methode de straal van het bolletje willekeurig groot nemen; door iedere bol met straal r en middelpunt in de oorsprong vloeit de energie (9). Het onderscheidt tussen de twee methodes valt hier bijna weg, doordat het zo'n triviaal voor-

beeld is. Later zullen wij minder triviale voorbeelden ontmoeten.

Tot nu toe is alles vrij eenvoudig gehouden. Nu komen er moeilijker dingen.

§ 5. Sommerfeld's integraal.

In cilindrische coördinaten wordt de Laplace operator

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Beschouw voorlopig alleen axiaal-symmetrische oplossingen van de golfvergelijking. Daarvoor is $\partial/\partial \psi = 0$. Separeer de golfvergelijking op de bekende manier: $\psi = f(z) g(\rho)$. Dan komt er

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dg}{d\rho} + \lambda^2 g = 0, \quad \frac{d^2 f}{dz^2} + (k^2 - \lambda^2) f = 0.$$

De eerste vergelijking is die der Besselfuncties van de orde nul en argument $\lambda \rho$. In cilindrische coördinaten z, ρ, ψ heeft men dus de axiale golfsystemen

$$\psi(z, \rho) = e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0(\lambda \rho),$$

waarin λ willekeurig. Door vermenigvuldiging met een amplitude-factor $A(\lambda)$ en integratie over λ krijgt men een zeer algemene axiale oplossing van de golfvergelijking.

In het bijzonder willen wij nagaan, wat de volgende integraal wordt

$$\psi = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda. \quad (10)$$

Hierin is ondersteld $\rho \geq 0, z > 0, k > 0$. Diè tak van $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ is bedoeld, welke voor $\lambda \rightarrow \infty$ gelijk λ wordt. De integratieweg vermijdt het vertakkingspunt $\lambda = k$ door een boogje beneden de reële λ -as; $0 \geq \arg \sqrt{\lambda^2 - k^2} \geq -\pi/2$. Voor $0 \leq \lambda \leq k$ is dus $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ gelijk aan $-i \sqrt{k^2 - \lambda^2}$.

De onderstaande manipulaties zijn alle verantwoord. Er geldt

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \int_0^{\infty} \lambda \rho J_0(\lambda \rho) e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\lambda \\ z \frac{\partial \psi}{\partial \rho} &= \int_0^{\infty} \lambda z J_0'(\lambda \rho) \frac{e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \right] J_0'(\lambda \rho) \lambda d\lambda \\ &= -e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} J_0'(\lambda \rho) \lambda \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \left[J_0'(\lambda \rho) + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \lambda \rho J_0''(\lambda \rho)] d\lambda \\ & = \int_0^\infty e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} [J_0'(\lambda \rho) + \lambda \rho J_0''(\lambda \rho)] d\lambda. \end{aligned}$$

Door optellen vindt men

$$\begin{aligned} z \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \int_0^\infty e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} [\lambda \rho J_0''(\lambda \rho) + J_0'(\lambda \rho) + \dots \\ & \dots + \lambda \rho J_0(\lambda \rho)] d\lambda = 0 \end{aligned}$$

op grond van de differentiaalvergelijking van $J_0(\lambda \rho)$. Uit de partiële differentiaalvergelijking $z \rho' - \rho \psi_z = 0$ volgt, dat ψ een functie is van $z^2 + \rho^2$. Kies nu in (10) $\rho = 0$. Dan wordt

$$\psi(\rho = 0) = \int_0^\infty \frac{e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda = -\frac{1}{z} e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \Big|_0^\infty = \frac{e^{ikz}}{z}.$$

Dus volgt

$$\int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-z \sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda = \frac{e^{ik \sqrt{z^2 + \rho^2}}}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}. \quad (11)$$

Het rechterlid is een analytische functie van k . De integraal convergeert in het algemene geval (6) als $|\arg \sqrt{\lambda^2 - k^2}| \leq \pi/2$. Dus geldt (11) ook voor complexe k met (6).

Het hier gegeven bewijs van (11) is ontleend aan Van Hasselt (Wiskundige opgaven met de oplossingen XVII, vraagstuk 1). De relatie (11), waarbij dus de puntbron (8) in Besselfunctie-golven is ontwikkeld, draagt de naam van Sommerfeld's integraal. Ze is bekend geworden door Sommerfeld's onderzoek over de voortplanting van radiogolven over vlakke aarde [Ann. Physik (4) 28, 665 (1909)]. Daarvòr was (11) reeds toegepast door Lamb [Proc. London Math. Soc. (2) 7, 122 (1909)].

Natuurlijk kan men (11) op tal van andere manieren bewijzen, maar het korte en eenvoudige bewijs van Van Hasselt wilde ik U niet onthouden.

Als men in (11) de integratieweg boven het vertakkingspunt had genomen, dan zou $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = +i \sqrt{k^2 - \lambda^2}$ voor $0 \leq \lambda \leq k$. Men had dan een voorstelling van $\{\exp[-ik \sqrt{z^2 + \rho^2}]\} / \sqrt{z^2 + \rho^2}$ gekregen. In deze laatste vorm is ook Sommerfeld's integraal door Van Hasselt bewezen. In de literatuur wordt niet altijd voldoende acht geslagen op dit essentiële verschilpunt, wat zich vaak uit in tekenfouten.

De identiteit (11) kan nog in diverse andere, equivalenten vormen optreden. Bijvoorbeeld: ($\rho > 0$)

$$\frac{e^{ik\sqrt{z^2+\rho^2}}}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(\lambda\rho) \frac{e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \lambda d\lambda, \quad (12)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\rho\sqrt{\lambda^2-k^2}) \cos \lambda z d\lambda, \quad (13)$$

waarbij $|\arg \sqrt{\lambda^2-k^2}| \leq \pi/2$. De functies $H_0^{(1)}$ en K_0 zijn de bekende uit Watson's Theory of Bessel Functions (1944). In Watson's boek vindt men allerlei generalisaties van Sommerfeld's integraal. Toepassingen van (12) en (13) bij Weyrich [J. Reine Angew. Math. 172, 133 (1934)] en Schelkunoff [Proc. Inst. Radio Engrs. 24, 1388 (1936)]

§ 6. Formule van Weyl.

Wij zullen nu het veld van de puntbron in vlakke golven ontwikkelen naar de idee van (7). Ga uit van (11). Voor $k > 0$, $z > 0$,

$r = \sqrt{z^2+\rho^2}$, geldt

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^k \frac{\lambda d\lambda}{-i\sqrt{k^2-\lambda^2}} J_0(\lambda\rho) e^{iz\sqrt{k^2-\lambda^2}} + \int_k^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} J_0(\lambda\rho) e^{-z\sqrt{\lambda^2-k^2}}.$$

Stel in de eerste $\lambda = k \cos \vartheta$, en in de tweede $\lambda = k \cosh \vartheta$. Dan wordt

$$\frac{e^{ikr}}{r} = ik \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta J_0(k\rho \cos \vartheta) e^{ikz \sin \vartheta} d\vartheta + k \int_0^{\infty} \cosh \vartheta J_0(k\rho \cosh \vartheta) e^{-kz \sinh \vartheta} d\vartheta.$$

Stel in de eerste integraal $\vartheta = u$, en in de tweede $\vartheta = -iu$. Dan komt er

$$\frac{e^{ikr}}{r} = ik \int_0^{\pi/2} \cos u J_0(k\rho \cos u) e^{ikz \sin u} du.$$

Stel tenslotte $u = \frac{\pi}{2} - \vartheta'$. dan

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \int_0^{\pi/2-i\infty} J_0(k\rho \sin \vartheta') e^{ikz \cos \vartheta' \sin \vartheta'} d\vartheta'.$$

Nu is volgens een bekende integraalvoorstelling

$$J_0(k\rho \sin \vartheta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\rho \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi')} d\psi',$$

en dus

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi/2-i\infty} e^{ik[\rho \sin \vartheta' \cos(\psi - \psi') + z \cos \vartheta'] \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

Ga nu over op rechthoekige coördinaten, $x = \rho \cos \psi$, $y = \rho \sin \psi$, dan wordt

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi/2 - i0} e^{ik[x \sin \vartheta' \cos \psi' + y \sin \vartheta' \sin \psi' + z \cos \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta']}$$

of

$$\frac{e^{ikr}}{ikr} = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\Omega, \quad (14)$$

waarin $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; α, β, γ richtingscosinnussen, $d\Omega$ element van eenheidsbol. In (14) wordt geïntegreerd over de halve complexe eenheidsbol. De voorwaarde $z > 0$ is essentiël. In het bewijs is ondersteld $k > 0$ maar (14) geldt voor $\text{Im } k \geq 0, k \neq 0$. Formule (14) is gegeven door Weyl [Ann. Physik (4) 60, 481 (1919)] met toepassing op radiogolfvoortplanting over vlakke aarde. Ons bewijs is verschillend van dat van Weyl. De laatste gebruikt een overgang op een nieuwe poolas in de richting \vec{r} . Ik kan zijn bewijs niet volgen, vanwege moeilijkheden bij de integratiegrenzen, zulks in verband met complexe richtingen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m .

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr C.J. Bouwkamp.

Stralingstheorie

II

§ 7. Straling van membraam, trillende in starre wand.

Laat een vlak membraam harmonisch trillen in een oneindig uitgestrekte starre wand (model van luidspreker). Op ieder ogenblik is de normaal-snelheid van het membraam gelijk aan de normaal-snelheid van de luchtdeeltjes ter plaatse. Deze snelheids-amplitude zij een gegeven functie v van de plaats op het membraam F (membraam is deel van xy -vlak; de rest van xy -vlak is starre wand). Het stralingsveld in de halfruimte $z \geq 0$ wordt beschreven door snelheidspotentiaal φ . Deze is voor $z > 0$ een continu-differentieerbare oplossing van de golfvergelijking (1), die voldoet aan de volgende randvoorwaarden:

- (a) $\partial\varphi/\partial z = -v$ op het membraam F ;
- (b) $\partial\varphi/\partial z = 0$ op de rest van het vlak $z = 0$ (staare wand);
- (c) in overeenstemming met Sommerfeld's uitstralingsprincipe geldt:

$$\varphi = \frac{e^{ikR}}{R} K(\vartheta, \psi) + o\left(\frac{1}{R}\right) \quad (R \rightarrow \infty) \quad (15)$$

waarin R de afstand tot een geschikt gekozen oorsprong is, en ϑ, ψ de spherische coördinaten rondom de z -as (normaal van F). De functie $K(\vartheta, \psi)$ noemen we de karakteristiek van het membraam. Het stralingsdiagram is bepaald door $|K|^2$.

Wij zullen onderstellen, dat v op F continu en begrensd is. Men kan zich afvragen of het bovengesteld randwaardeprobleem een oplossing heeft, en of die oplossing eenduidig is. Nader onderzoek leert, dat de gegeven voorwaarden niet voldoende zijn voor de eenduidigheid der oplossing. Er dienen nog zekere regulariteitseisen gesteld te worden met betrekking tot het gedrag van de functie φ voor $z = 0$, speciaal op de rand van het membraam. Men kan b.v. eisen, dat φ en grad φ kwadratisch integreerbaar zijn in elk eindig deel der gesloten halfruimte $z \geq 0$. Misschien is er later een gelegenheid om op deze kwesties nader in te gaan. Ik laat dit eerst rusten.

De vraag of er "überhaupt" een oplossing bestaat, is ook niet triviaal, als tenminste v van nul verschillend is aan de rand van F (deze rand nemen wij continu en "stückweise glaat"). Dit komt ter sprake in de volgende paragraaf.

§ 8. Klassieke formule van Rayleigh.

Neem (x, y, z) in rechterhalfruimte. Isoleer dit punt door bolletje met straal ε . Neem een grote halfbol, die (x, y, z) inwendig bevat, met straal R en middelpunt ergens op F . Laten φ en G oplossingen van de golfvergelijking zijn; φ regulier in $z \geq 0$; G regulier in $z \geq 0$ met uitzondering van (x, y, z) . Dan geldt volgens Green

$$0 = \iiint (\varphi \Delta G - G \Delta \varphi) d\tau = \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df,$$

waarin geïntegreerd wordt over het volume: halve bol R min bolletje ε , en over de begrenzing daarvan (n is normaal naar buiten). Neem voor G de tweede Greense functie van de halfruimte. Deze is

$$G = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

met $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}$ en ξ, η, ζ het integratiepunt. $\partial G / \partial n = -\partial G / \partial \zeta = 0$ voor $\zeta = 0$. Laat $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. De bijdrage van het vlak $\zeta = 0$ tot de oppervlakte integraal is dus

$$-2 \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} df.$$

De bijdrage van het oneindige halvebol-oppervlak nadert tot nul voor $R \rightarrow \infty$ (bij de uitstralingsvoorwaarde). De bijdrage van het bolletje wordt in de limiet $\varepsilon \rightarrow 0$ gelijk aan $\varphi(x, y, z) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) 4\pi \varepsilon^2 = -4\pi \varphi$. Dan komt er dus

$$= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} df \quad (16)$$

Deze formule is afkomstig van Rayleigh (loc. cit. § 278). Als de normaalafgeleide van de snelheidspotentiaal gegeven is op een oneindig uitgestrekt plat vlak, dan kan men met deze formule de snelheidspotentiaal in de halfruimte bepalen. Het is een soort integraalvergelijking voor φ , of ook een soort Huygens-principe; alleen met dit verschil dat (16) rigoreus geldt, althans onder zekere aan φ op te leggen voorwaarden.

Rayleigh's afleiding van (16) is essentiëel fysisch. De samenhang met randwaardeprobleem en Greense functies der halfruimte werd in mijn dissertatie besproken, (Groningen, 1941); later ook door Sommerfeld Ann. Physik 42, 389 (1942/3) uitdrukkelijk vermeld en bewezen.

De hier geschetste afleiding is bedoeld als heuristisch. Wij zijn nu zover, dat we vermoeden, dat de oplossing van het probleem gesteld in § 7 als volgt luidt:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int v \frac{e^{ikr}}{r} df. \quad (17)$$

§ 9. Discussie van (17).

Aufpunkt x, y, z met $z \geq 0$; Quellpunkt ξ, η, ζ met $\zeta = 0$;

$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$; $v = v(\xi, \eta)$; $df = d\xi d\eta$; $\varphi = \varphi(x, y, z)$;
 $F =$ gebied in 't eindige van ξ, η vlak met sectiegewijs-gladde rand;
 $v(\xi, \eta)$ is begrensd op F en sectiegewijs-continu met eindig aantal lijne
 van discontinuïteiten, zodanig, dat er in ieder punt ξ, η van F een ge-
 middelde v bestaat.

Blijkbaar is $r^{-1} \exp(ikr)$ voor x, y, z buiten F een oplossing van de golf-
 vergelijking (1) die daar (α) oneindig-vaak differentieerbaar is en (β)
 aan de uitstralingsvoorwaarde voldoet. De eigenschappen (α) en (β) blij-
 ven bij integratie met belegging v als in (17) bestaan. Aan de voorwaarde
 (c) van § 7 is dus reeds voldaan. Verder is buiten F de functie φ een
 even functie van z . Dus $\partial\varphi/\partial z = 0$ op 't verlengde van F ; dus (b) is
 vervuld. Tenslotte de voorwaarde (a). Voor $z > 0$ geldt

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(\frac{1}{r} - ik\right) df.$$

Laat Q enig punt van F zijn en laat het Aufpunkt loodrecht (in de z -rich-
 ting dus) tot Q naderen. Dan geldt

$$\left| \frac{z}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r^2} ik df \right| < \text{constante } z \int_F \frac{df}{r^2}$$

Zij s een bovenste grens voor de afstand van twee willekeurige punten op
 F , dan is

$$z \int_F \frac{df}{r^2} \leq z \int_0^s \frac{2\pi r d\sigma}{r^2 + z^2} = \pi z \log \left(1 + \frac{s^2}{z^2}\right)$$

Voor $z \rightarrow 0$ nadert het rechterlid tot nul. Dus voor $\lim z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim -\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \lim \frac{z}{2\pi} \int_F v \frac{e^{ikr}}{r^3} df \\ &= \lim \frac{z}{2\pi} \int_F \frac{v}{r^3} df \\ &= \lim \frac{z}{2\pi} \bar{v}_Q \int_F \frac{df}{r^3} = \lim \frac{z}{2\pi} \bar{v}_Q \int_0^s \frac{2\pi r d\sigma}{(z^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \bar{v}_Q \frac{z}{|z|} = \pm \bar{v}_Q. \end{aligned}$$

Wij hebben dus bewezen, dat aan de voorwaarde (a) van § 7 voldaan is in
 die zin, dat $\partial\varphi/\partial z$ niet naar $-v$ maar naar de gemiddelde waarde $-\bar{v}_Q$
 nadert. Het optreden van dergelijke gemiddelde waarden is wel bekend
 in andere gebieden dan wiskunde, b.v. bij Fourrierreeksen. Is Q een hoek-
 punt van een rechthoekig membraam terwijl v_0 de waarde van v in dit hoek-
 punt is, dan is $\bar{v} = \frac{1}{4}v_0$.

§ 10. Acoustische impedantie.

In het vervolg onderstellen wij, dat de functie v uit § 9 reëel is, zodat de snelheidsamplitude overal op het membraam eenzelfde fase heeft. Vanzelfsprekend mogen faseverschillen π optreden. Uit (17) volgt dan de snelheids-potentiaal en de druk. Deze splitsen we in reële en imaginaire delen

$$\varphi = \varphi_1 + i \varphi_2, \quad p = p_1 + i p_2 = c \rho_0 k (\varphi_2 - i \varphi_1).$$

Derhalve is voor een snelheids-amplitude $V = v \cos \omega t$ de reële potentiaal en druk gegeven door

$$\begin{aligned} \phi &= \varphi_1 \cos \omega t + \varphi_2 \sin \omega t \\ P &= c \rho_0 k \left\{ \varphi_2 \cos \omega t - \varphi_1 \sin \omega t \right\}. \end{aligned}$$

Noem dW de energie, die door het membraam in het interval $(t, t + dt)$ wordt uitgestraald in de halfruimte $z \geq 0$. Dan is

$$\frac{dW}{dt} = \int_F p V df = \int_F (p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t) v \cos \omega t df.$$

Dit schrijven wij als

$$\frac{dW}{dt} = w_1 \cos^2 \omega t + w_2 \sin \omega t \cos \omega t, \quad (18)$$

waarin w_1 en w_2 het reële en het imaginaire deel van een complexe grootheid w is, n.l.

$$w = w_1 + i w_2 = \int_F (p_1 + i p_2) v df = \int_F p v df. \quad (19)$$

Als men in een gegeven geval de integraal (19) kan uitrekenen (waarbij p de complexe druk is op het membraam), dan vindt men de per tijdseenheid in de halfruimte uitgestraalde energie door $\frac{1}{2} w_1$ te bepalen. De grootheid w_2 daarentegen is een maat voor de energie-fluctuatie tussen het aandrijf-mechanisme van het membraam en het stralingsveld. Deze term draagt niet bij tot de gemiddelde energiestroom. Men noemt w de acoustische impedantie van het membraam, naar analogie met b.v. de impedantie van een stralende antenne in de leer van het electromagnetisme. De grootheid w_1 komt overeen met het ohmse gedeelte en w_2 met het reactieve gedeelte van een elektrische impedantie. Wil het membraam zo goed mogelijk aan zijn doel beantwoorden, dan kiest men w_1 zo groot mogelijk en w_2 zo klein mogelijk. Nu is het bekend, dat men een antenne liefst "afstemt", d.w.z. de antenne zo dimensioneert, dat deze bij de gebruikte draaggolf-frequentie zuiver ohms is. In dit geval is $w_2 = 0$. Onder deze omstandigheid is de energiestraling van de antenne in de ruimte monotoon. Merkwaardigerwijs geldt dit niet voor een acoustisch membraam zoals hier beschouwd. Wij zullen bewijzen, dat w_2 altijd negatief is. Het membraam is dus equivalent met een inductantie (spoel).

Uit (19), de eerste relatie van (2), en (17) volgt gemakkelijk

$$w_1 = \frac{c \rho_0 k}{2 \pi} \int \int_F v v' \frac{\sin ks}{s} df df', \quad (20)$$

$$-w_2 = \frac{c \rho_0 k}{2} \int \int_F v v' \frac{\cos ks}{s} df df', \quad (21)$$

waarin s de afstand is tussen de oppervlakte-elementen df en df' ; beide integralen zijn dubbele oppervlakte-integralen !

Uit het feit, dat w_1 een maat is voor de gemiddelde energiestraling van het membraam volgt natuurlijk, dat w_1 positief is voor $v \neq 0$, en nul voor $v = 0$, onafhankelijk van de speciale vorm van F . We zullen laten zien, dat hetzelfde voor $-w_2$ geldt. Op zichzelf is het een interessant mathematisch probleem het positief-semidefiniete karakter van de twee integralen (20) en (21) te bewijzen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m .

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr C.J. Bouwkamp.

Stralingsstheorie

III

§ 11. Stralings-karakteristiek.

De formule voor het reële deel van de impedantie w kan op de volgende manier worden getransformeerd. Laat een sterretje aanduiden het geconjugeerde complexe. Bedenkt men, dat $v = v^*$, dan vindt men uit (19)

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_F (pv^* + p^*v) df,$$

en dus op grond van (2)

$$w_1 = \frac{1}{2} c \int_F ik \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) df. \quad (22)$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze formule geldt voor willekeurige, niet noodzakelijk reële, functies v . Is echter v complex, dan zal (18) in het algemeen ook een term met $\sin^2 \omega t$ bevatten, zodat men dan niet van een acoutische impedantie kan spreken.

In formule (22) wordt over het oppervlak van het membraan geïntegreerd, maar zonder dat de waarde der integraal verandert, kunnen wij voor F ieder oppervlak in $z > 0$ nemen, dat door de rand van het membraan gaat. Dit volgt uit de stelling van Green: door integratie van $\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ over een gesloten oppervlak waarbinnen zich geen singuliere punten bevinden, vindt men nul.

Wij nemen nu speciaal voor dit gesloten oppervlak de vereniging van het halve boloppervlak in het oneindige en de staere wand. De staere wand levert geen bijdrage, omdat daar $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0$ is. Wij behoeven dus alleen de bijdrage van de halve bol in aanmerking te nemen.

Laten R, ϑ, φ spherische coördinaten voorstellen om de normaal (z -as) van het membraan. Dan geldt asymptotisch voor $R \rightarrow \infty$ op dit boloppervlak

$$\varphi \sim K(\vartheta, \varphi) \frac{e^{ikR}}{R}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \sim ik\varphi$$

$$df = R^2 d\omega = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Substitueren wij dit in (22), dan krijgen wij

$$w_1 = c \rho_0 k^2 \int_{R \rightarrow \infty} |\varphi|^2 df = \frac{1}{c \rho_0} \int_{R \rightarrow \infty} |p|^2 df.$$

De samenhang tussen de karakteristiek K en de geluidsdruk-amplitude is gegeven door

$$|p| = c \rho_0 k |K| / R,$$

zodat wij voor $R \rightarrow \infty$ krijgen

$$w_1 = c \rho_0 k^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} |K(\vartheta, \psi)|^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (23)$$

Wij interpretern (23) als volgt. De gemiddelde, per tijdseenheid in de ruimtehoek $d\Omega$ uitgestraalde energie is

$$\frac{1}{2} c \rho_0 k^2 |K(\vartheta, \psi)|^2 d\Omega.$$

De naam stralingskarakteristiek voor K is dus goed gekozen. Als $|K|^2$ in spherische coördinaten ϑ, ψ wordt uitgezet, krijgt men het stralings-diagram van het membraan.

Door de (verborgen) integratie (23) over het oneindig-verre boloppervlak krijgt men dus slechts het reële deel van de acoustische impedantie. Natuurlijk kan men de energie-fluctuatie door een willekeurig oppervlak bepalen door integratie van PV voor dit oppervlak. Directe technische betekenis heeft deze grootheid echter alleen voor het geval dat het oppervlak zich reduceert tot het membraan-oppervlak.

Het is gemakkelijk om K te berekenen als functie van v . Als σ en ψ_0 vlakke poolcoördinaten in F zijn, heeft men

$$r^2 = R^2 - 2\sigma R \cos \chi + \sigma^2, \quad \cos \chi = \sin \vartheta \cos(\psi - \psi_0),$$

en voor grote waarde van R geldt

$$\frac{e^{ikr}}{r} \sim \frac{e^{ikR}}{R} e^{-ik\sigma \cos \chi}.$$

dus vindt men

$$K(\vartheta, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_F v e^{-ik\sigma \cos \chi} df.$$

Het is meestal gemakkelijker de druk op grote afstand te bepalen, dan op het membraan. Daarom zal (23) - (24) veelal praktischer zijn, dan (19), maar wil men beslist de gehele acoustische impedantie weten, dan moet van de methode (19) worden gebruik gemaakt. Wij zullen echter laten zien, dat een aan (23) analoge formule geldt voor de grootheid w_2 .

§ 12. Cirkelvormige membraan.

Laat F een cirkelvormige membraan zijn met straal a . De voorgescreven snelheidsamplitude v ken men in de Fourierreeks ontwikkeld denken:

$$v(\sigma, \psi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ v_m(\sigma) \cos m \psi_0 + u_m(\sigma) \sin m \psi_0 \right.$$

Neem eerst zo'n term

$$v = v(\sigma) \cos m \psi_0. \quad (25)$$

Het gehele getal m geeft het aantal radiale knooppunten. Nulpunten van $v(\sigma)$ komen overeen met cirkelvormige knooppunten. Voor Rayleigh's "piston" is $m = 0$, $v(\sigma) = v_0$. Voor de snelheidsamplitude (25) gaan wij K en w_1 bepalen. Uit (24) volgt

$$K(\psi, \psi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a v(\sigma) \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} e^{-ik\sigma \sin \psi} \cos(\psi - \psi_0) \cos m \psi_0 d\psi_0$$

Wij moeten eerst de integraal over ψ_0 berekenen. Stel $z = k\sigma \sin \psi$.

$$I = \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos(\psi - \psi_0)} \cos m \psi_0 d\psi_0.$$

Nieuwe variabele $\alpha = \psi - \psi_0$:

$$I = \cos m \psi \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} e^{-iz \cos \alpha} \cos m \alpha d\alpha - \sin m \psi \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} e^{-iz \cos \alpha} \sin m \alpha d\alpha.$$

Geen van beide overblijvende integralen hangt van ψ af, omdat over een volle periode van $\cos \alpha$ geïntegreerd wordt. In de tweede integraal kiezen wij als integratiegrenzen $-\pi$ en π . De integrand is oneven in α . Dus de term met $\sin m \psi$ verdwijnt. Er blijft dus over

$$I = \cos m \psi \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \alpha} \cos m \alpha d\alpha \right]$$

Voor de term tussen de vierkante haken heeft men, als $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{2} e^{-im\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\beta - z \sin \beta)} d\beta + \frac{1}{2} e^{im\pi/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(-m\beta - z \sin \beta)} d\beta \\ = \frac{1}{2} \left\{ e^{-im\pi/2} J_m(z) + e^{im\pi/2} J_{-m}(z) \right\} = e^{-im\pi/2} J_m(z).$$

Daarmee vinden wij

$$K(\psi, \psi_0) = \cos m \psi e^{-im\pi/2} \int_0^a J_m(k\sigma \sin \psi) v(\sigma) \sigma d\sigma.$$

Wij voeren een functie $f_m(\lambda)$ in, die voor het vervolg van groot belang is:

$$f_m(\lambda) = \frac{1}{a^2} \int_0^a J_m(\lambda \sigma) v(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (26)$$

Dan wordt de stralingskarakteristiek voor de belegging (25)

$$K(\nu, \psi) = a^2 i^{-m} f_m(k \sin \nu) \cos m\psi. \quad (27)$$

Als wij waren uitgegaan van $v = v(\nu) \sin m\psi$ hadden wij ook (27) gekregen met dien verstande, dat $\cos m\psi$ door $\sin m\psi$ vervangen worden. In beide gevallen is de azimuthale variatie van het stralingsveld dezelfde als die van de voorgeschreven amplitude v . Dit geldt trouwens voor het gehele stralingsveld (niet alleen voor K). In het algemene geval heeft men dus de karakteristiek

$$K(\nu, \psi) = a^2 \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m} \left[f_m(k \sin \nu) \cos m\psi + g_m(k \sin \nu) \sin m\psi \right].$$

De stralingskarakteristiek is dus additief met betrekking tot de Fouriercomponenten van $v(\nu, \psi)$, zoals kon worden verwacht.

De additiviteit geldt echter ook voor de stralingsweerstand, omdat de functies $\sin m\psi$, $\cos m\psi$ orthogonaal zijn in $[0, 2\pi]$. Hetzelfde geldt voor de grootheid w_2 . Derhalve is er energetisch geen wisselwerking tussen elk tweetal trillingen met verschillende aantallen radiale knooplijnen. Er is ook geen wisselwerking tussen twee trillingswijzen met dezelfde aantallen knooplijnen als deze wijzen in elkaar overgaan door een draaiing over $(2n+1)\pi/2m$, met n geheel getal. Door deze transformatie gaan $\sin m\psi_0$ en $\cos m\psi_0$ in elkaar over. Om de acoustische impedantie voor het algemene geval van $v(\nu, \psi)$ te berekenen, kunnen we dus volstaan met (25) te beschouwen en de energieën daarna te adderen.

Uit (23) volgt

$$w_1 = c \epsilon_0 a^4 k^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 m\psi \, d\psi \int_0^{\pi/2} f_m^2(k \sin \nu) \sin^2 \nu \, d\nu.$$

Met Neumann's factor

$$\epsilon'_m = 1 (m=0)$$

$$\epsilon_m = 2 (m > 0)$$

is

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\psi \, d\psi = \frac{2\pi}{\epsilon_m}.$$

Voor bovendien een nieuwe integratievariabele in $\lambda = k \sin \nu$. Dan wordt

$$w_1 = \frac{2\pi c \epsilon_0 a^4 k}{\epsilon_m} \int_0^k \frac{f_m^2(\lambda)}{k^2 - \lambda^2} \lambda \, d\lambda. \quad (28)$$

§13. Analoge integraal voor w_2 .

Ga nu in (17) de Sommerfeldse integraal (§5) substitueren. Dan komt er

$$\varphi = \varphi(z, \rho, \psi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k^2}}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\psi} v J_0(s\lambda) \, d\psi,$$

waarbij gesteld is; $r^2 = z^2 + s^2$; $s^2 = \rho^2 - 2\rho\sigma \cos(\psi - \psi_0) + \sigma^2$.

In het geval (25) is

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v J_0(s\lambda) df = \int_0^{\rho} v(\sigma) \sigma d\sigma \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(s\lambda) \cos m\psi_0 d\psi_0.$$

Volgens het z.g. additie-theorema der Besselfuncties geldt

$$J_0(s\lambda) = J_0(\lambda \sqrt{\rho^2 - 2\rho\sigma \cos(\psi - \psi_0) + \sigma^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(\lambda\rho) J_n(\lambda\sigma) \cos n(\psi - \psi_0),$$

zodat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(s\lambda) \cos m\psi_0 d\psi_0 = J_m(\lambda\rho) J_m(\lambda\sigma) \cos m\psi.$$

Met onze definitie van f_m komt er dus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v J_0(s\lambda) df = a^2 f_m(\lambda) J_m(\lambda\rho) \cos m\psi. \quad (29)$$

Voor de snelheidspotentiaal tengevolge van (25) heeft men dus voor $z > 0$

$$(z, \rho, \psi) = a^2 \cos m\psi \int_0^{\infty} e^{-z} \sqrt{\lambda^2 - k^2} J_m(\lambda\rho) f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}. \quad (30)$$

Zoals reeds werd vermeld, is de afhankelijkheid in de ψ dezelfde als die voor de gegeven functie v (25). Opmerkelijk verder is, dat de functie f_m , die volgens (27) de karakteristiek van het membraan bepaalt, zelfs het gehele stralingsveld bepaalt !

Inmiddels kunnen we een zeer interessante asymptotische relatie afleiden door gebruik te maken van (27). Wij weten, dat ($R \rightarrow \infty$)

$$\varphi \sim K(\vartheta, \psi) \frac{e^{ikR}}{R} = a^2 i^{-m} f_m(k \sin \vartheta) \cos m\psi \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Substitueer nu in (30) $z = R \cos \vartheta$, $\rho = R \sin \vartheta$ ($0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}$) en vergelijk. Dan vindt men

$$\int_0^{\infty} e^{-R \cos \vartheta} \sqrt{\lambda^2 - k^2} f(\lambda) J_m(\lambda R \sin \vartheta) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \sim \frac{e^{i(kR - m\frac{\pi}{2})}}{R} f(k \sin \vartheta). \quad \left(\begin{array}{l} R \rightarrow \infty \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2} \end{array} \right) \quad (31)$$

Natuurlijk is in ons verhaal de functie $f(\lambda)$ aan zekere beperkingen gebonden, immers $a^2 f_m(\lambda) = \int_0^{\rho} J_m(\lambda\sigma) v(\sigma) \sigma d\sigma$, maar $v(\sigma)$ is algemeen genoeg om (31) niet triviaal te doen zijn. In ons geval is $f(\lambda)$ een z.g. gehele functie (machtreeksontwikkeling convergeert voor elke eindige λ). In Sommerfeld's theorie van radiovoortplanting over vlakke

aarde speelt een dergelijke asymptotische relatie als (31) een fundamentele rol. In dit laatste geval is echter $f(\lambda)$ algebraïsch:

$$f(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2} + k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}.$$

Het is, mijns inziens, twijfelachtig (althans niet rigoreus bewezen), dat (31) op het geval van Sommerfeld van toepassing is, hoewel de uitkomst van vele onderzoekers met (31) in overeenstemming is. Dit alles als intermezzo. Wij keren nu naar de acoustische impedantie terug.

Wij gaan uit van formule (19), en nemen daarin voor p de waarde op het membraan, welke waarde volgt uit (30):

$$p = -c \rho_0 i k \varphi(0, \sigma, \psi_0) = -c \rho_0 i k a^2 \cos m \psi_0 \int_0^\infty J_m(\lambda \sigma) f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus} \\ w &= \int p v d f = -c \rho_0 i k a^2 \int_0^a v(\sigma) \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} \cos^2 m \psi_0 d\psi \int_0^\infty f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \\ &= -\frac{2\pi c \rho_0 i k a^2}{\epsilon_m} \int_0^\infty f_m(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \int_0^a J_m(\lambda \sigma) v(\sigma) \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Met de definitie (26) der functie $f_m(\lambda)$ komt er dus

$$w = -\frac{2\pi c \rho_0 i k a^4}{\epsilon_m} \int_0^\infty f_m^2(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}. \quad (32)$$

Als wij dit in reëel en imaginair deel splitsen, krijgen wij voor w_1 formule (28) terug, terwijl

$$-w_2 = \frac{2\pi c \rho_0 k a^4}{\epsilon_m} \int_k^\infty \frac{f_m^2(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda. \quad (33)$$

Wij zien hieruit, dat de functie $f_m(\lambda)$ ook direct het reactieve deel der acoustische impedantie bepaalt.

Uit (33) volgt $-w_2 > 0$ (als $v \neq 0$). De acoustische impedantie is additief t.o.v. de bijdrage der termen van de reeks voorafgaande aan formule (25). Dus $-w_2 > 0$ ook in het algemene geval. Dit theorema is zelfs geldig voor elk membraan, cirkelvormig of niet, want wij kunnen het membraan altijd uitgebreid denken met stukken waar $v = 0$ genomen wordt.

Passen wij in (32) een geschikte transformatie der integratie-variabele toe (zie §6), dan vinden wij

$$w = \frac{2\pi c \rho_0 k^2 a^4}{\epsilon_m} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} f_m^2(k \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

hetgeen ook in de vorm

$$w = c \rho_0 k^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2 - i\infty} |K(r, \psi)|^2 \sin r dr$$

kan worden geschreven, waarbij dus over complexe richtingen geïntegreerd wordt. Men vindt dus de acoustische impedantie van het membraan volledig door integratie over het stralingsdiagram, mits dit laatste op geschikte wijze in het complexe wordt voortgezet.

§ 14. Rayleigh's "piston".

Hiervoor is $v = \text{constant} = v_0$. Voor de acoustische impedantie komt er

$$w = c \rho_0 v_0^2 \pi a^2 \left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} - i \frac{H_1(2ka)}{ka} \right],$$

waarin H_1 de functie van Struve is.

§ 15. Andere voorbeelden.

Voor diegenen onder U, die hun energie willen spuiten op enkele toepassingen van de voorafgaande algemene theorie, volgen hier enige voorbeelden (kennis van Besselfuncties is wel vereist!).

Neem snelheidsverdeling $v(\sigma, \psi_0) = (\sigma/a)^m \cos(m\psi_0 + \delta)$ met m geheel en δ constant.

De druk op grote afstand R is

$$\left| \frac{p}{\rho_0} \right| = \frac{2\pi a^2}{\lambda_0 R} \frac{J_{m+1}(ka \sin \psi)}{ka \sin \psi} \cos(m\psi + \delta).$$

$$w = \frac{2\pi c \rho_0 a^2}{\varepsilon_m} \int_0^{\pi/2 - i\infty} \frac{J_{m+1}^2(ka \sin \psi)}{\sin \psi} d\psi.$$

$$\frac{w_1}{c \rho_0} = \frac{\pi a^2}{(m+1)\varepsilon_m} \left[1 - \sum_{n=0}^m (2n+1) \frac{J_{2n+1}(2ka)}{ka} \right].$$

$$\int_0^{\pi/2 - i\infty} \frac{J_n^2(z \sin \psi)}{\sin \psi} d\psi = \int_0^{2z} \frac{J_{2n}(\xi) - i E_{2n}(\xi)}{\xi} d\xi,$$

waarin E functie van Weber.

$$w_2 = \frac{2\pi c \rho_0 a^2}{\varepsilon_m} (-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ka)^{2n+1}}{(2n+1) \Gamma(n-m+\frac{1}{2}) \Gamma(n+m+\frac{5}{2})}$$

$$- \int_0^{2z} \frac{E_{2m+2}(\xi)}{\xi} d\xi = - \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m (2n+1) \frac{H_{2n+1}(2z)}{2z} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^m \left\{ \frac{n+1}{m+1} \frac{(2n+1)!}{(4n+3)!} - \frac{(2m-2n)!}{(m-n)!} \frac{(m+n+1)!}{(2m+2n+3)!} \right\} \frac{(4z)^{2n+1}}{2n+1}.$$

Hiermede is w uitdrukbaar in eindige reeks van Bessel en Struve functies

Bewijs verder de asymptotische formule

$$\int_0^{2z} \frac{E_{2m+2}(\xi)}{\xi} d\xi \sim -\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^m (2n+1) \frac{Y_{2n+1}(2z)}{2z} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2z} + \frac{(2m+1)(2m+3)}{3(2z)^3} + \frac{(2m-1)(2m+1)(2m+3)(2m+5)}{5(2z)^5} + \dots \right]$$

(B) Onderzoek dergelijke problemen voor

$$v(\sigma, \psi_0) = \left(1 - p \frac{\sigma^2}{a^2}\right) \left(1 - q \frac{\sigma^2}{b^2}\right) \quad (p, q \geq 0)$$

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr C.J. Bouwkamp.

Stralingstheorie.

IV

§ 16. Maxwell-vergelijkingen.

Onze vergelijkingen zullen in Gauss-eenheden worden geschreven. Wij beperken ons tot stromen en ladingen in vacuum ($\epsilon = \mu = 1$). Ladingsdichtheid ρ en stroomdichtheid \vec{J} zijn "willekeurige" functies van plaats en tijd, zodanig dat aan de wet van behoud van lading is voldaan (continuïteits-vergelijking)

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Het electromagnetische veld \vec{E} , \vec{H} van deze ladingen en stromen voldoet aan het systeem partiële differentiaalvergelijkingen

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (5)$$

waarin c de lichtsnelheid voorstelt. De grootheden \vec{J} en ρ zijn alleen van nul verschillend in een eindig gebied rondom de oorsprong (voor alle tijden). Verder voldoende vaak differentieerbaar.

§ 17. Electromagnetische potentialen.

Wij gaan formules afleiden, die ons in staat stellen het veld van gegeven stromen en ladingen te bepalen. Heuristisch gaat het aldus:

Probeer een vector te vinden zodanig dat

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (6)$$

Dan is aan (2) automatisch voldaan. Substitueer dan (6) in (3).

Dit geeft

$$\operatorname{rot} \left\{ \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\} = 0.$$

Probeer dus een scalar φ te vinden zodanig dat

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (7)$$

Als het nu gelukt om de hulpgrootheden φ en \vec{A} uit de bronnen \vec{J} en ρ te bepalen, zijn wij klaar.

Substitueer (7) in (4). Dit geeft:

$$\begin{aligned} 4\pi\rho &= \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ &= -\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial t}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A} \end{aligned}$$

Een kleine vervorming geeft:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]. \quad (8)$$

Substitueer verder (6) in (5). Dit geeft:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

of ook

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \operatorname{grad} \left[\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right].$$

Na is de vector operator "grad div - rot rot" gelijk aan Δ , mits we alles in rechthoekige coördinaten doen. Dus $\Delta \vec{A}$ zij een vector met componenten ΔA_x , ΔA_y , ΔA_z . Dan geldt:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J} + \operatorname{grad} \left[\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]. \quad (9)$$

Het is duidelijk, dat \vec{A} en φ eenduidig het veld \vec{E} , \vec{H} bepalen. Het omgekeerde geldt niet. Wij kunnen bij \vec{A} de gradiënt van een willekeurige scalar optellen zonder dat \vec{E} verandert. \vec{E} verandert dan wel, maar de laatste verandering kan worden geneutraliseerd door bij φ een geschikte functie op te tellen, en een verandering van φ heeft op \vec{H} geen invloed.

Anders gezegd: de rotatie van \vec{A} is reeds vastgelegd door \vec{H} , maar de divergentie van \vec{A} kunnen wij nog kiezen. Een der vele mogelijkheden is de volgende:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

In dit geval reduceren (8) en (9) zich tot

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (11)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (12)$$

Dit zijn in totaal vier inhomogene scalaire golfvergelijkingen.

Wij kunnen gemakkelijk een particuliere oplossing van het systeem (11, 12) aangeven. Als de term $\partial^2/\partial t^2$ in (11) afwezig is, krijgt men de potentiaalvergelijking

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho$$

waarvan de algemene oplossing is

$$\varphi = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

afgezien van een additieve functie, die oplossing is van de homogene vergelijking $\Delta\varphi = 0$.

Evenzo heeft men de bekende "geretardeerde" oplossing

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

van vergelijking (11) als wel de term $\partial^2/\partial t^2$ aanwezig is. De fysieke interpretatie van deze formule is duidelijk. De bijdrage van de ladingdichtheid ρ ter plaatse ξ, η, ζ en op tijd t uit zich op de plaats x, y, z pas over een tijd $t - \frac{r}{c}$; $\frac{r}{c}$ is de tijd nodig voor het licht om een signaal over t brengen over de afstand r .

Wij vermoeden dus, dat de fysieke oplossing van ons probleem - uit gegeven stromen en lading het veld te berekenen - gegeven wordt door de vergelijkingen

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

met

$$\varphi = \int \frac{[\rho]}{r} dV \tag{13}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}]}{r} dV. \tag{14}$$

Hierin geeft [] retardatie aan.

18. Consistentie-bewijs.

De wijze waarop (13) en (14) verkregen zijn, is alleen heuristisch. Wel is het eenvoudig in te zien, dat de door (13) en (14) gedefinieerde potentialen aan de overeenkomstige golfvergelijkingen (11, 12) voldoen. En gewoonlijk kan men in een goed leerboek over het electromagnetisch veld een bewijs hiervan vinden. Er wordt echter meestal vergeten, dat men hiermede nog niet klaar is. Immers, er moet nog worden bewezen, dat de gedefinieerde potentialen (13, 14) bovendien de nevenvoorwaarde

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

vervullen. Dit lukt met bekende eigenschappen uit de vector-rekening.

Er geldt:

$$\text{div} (\varphi \vec{a}) = \varphi \text{div } \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad } \varphi.$$

Dus

$$\text{div}_x \frac{[\vec{j}]}{r} = \frac{1}{r} \text{div}_x [\vec{j}] + [\vec{j}] \cdot \text{grad}_x \frac{1}{r}$$

$$\text{div}_\xi \frac{[\vec{j}]}{r} = \frac{1}{r} \text{div}_\xi [\vec{j}] + [\vec{j}] \cdot \text{grad}_\xi \frac{1}{r}$$

waarbij de indices x en ξ aanduiden, dat gedifferentieerd wordt naar de coördinaten van het veldpunt x, y, z , respectievelijk van het integratiepunt ξ, η, ζ . Optellen en toepassen van

$$\text{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) = - \text{grad}_\xi \left(\frac{1}{r} \right)$$

geeft

$$\text{div}_x \frac{[\vec{J}]}{r} + \text{div}_\xi \frac{[\vec{J}]}{r} = \frac{1}{r} \text{div}_x [\vec{J}] + \frac{1}{r} \text{div}_\xi [\vec{J}] \quad (15)$$

Verder geldt voor iedere vector

$$\text{div} \vec{J}(x, y, z, t - \frac{r}{c}) = \left\{ \text{div} \vec{J}(x, y, z, \tau) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot \text{grad} r \right\}_{\tau = t - \frac{r}{c}}$$

of in de $[\]$ -schrijfwijze.

$$\text{div} [\vec{J}] = \left[\text{div} \vec{J} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot \text{grad} r \right].$$

Dit resultaat passen wij toe op div_x en div_ξ . Optellen geeft dan

$$\text{div}_x [\vec{J}] + \text{div}_\xi [\vec{J}] = \left[\text{div}_x \vec{J} + \text{div}_\xi \vec{J} \right].$$

Dit gecombineerd met (15) geeft

$$\text{div}_x \frac{[\vec{J}]}{r} + \text{div}_\xi \frac{[\vec{J}]}{r} = \frac{1}{r} \left[\text{div}_x \vec{J} + \text{div}_\xi \vec{J} \right] = \frac{1}{r} \left[\text{div}_\xi \vec{J} \right]$$

omdat de niet-geretardeerde vector \vec{J} alleen van ξ, η, ζ afhangt.

Integreer nu over de hele ruimte:

$$\int \text{div}_x \frac{[\vec{J}]}{r} dV + \int \text{div}_\xi \frac{[\vec{J}]}{r} dV = \int \frac{1}{r} \left[\text{div}_\xi \vec{J} \right] dV.$$

Bij de eerste integraal kan men div_x buiten het integraalteken brengen.

De tweede integraal geeft, omgevormd met de stelling van Gauss, de uitkomst nul, omdat in het oneindige de stroom overal nul is. Er komt dus

$$\text{div}_x \int \frac{[\vec{J}]}{r} dV = \int \frac{1}{r} \left[\text{div}_\xi \vec{J} \right] dV.$$

Dit resultaat is gemakkelijk te onthouden: De operator "divergentie" werkende op de integraal

$$\int \frac{[\vec{J}]}{r} dV \quad (16)$$

met betrekking tot de veldpunt-coördinaten kan door het integraalteken en de retardatiehaken geschreven worden, waarbij de factor $\frac{1}{r}$ als constante wordt beschouwd en daarna de divergentie genomen wordt met betrekking tot de integratiecoördinaten.

Dezelfde regel geldt ook voor de operator $\partial/\partial t$, en wel op veel eenvoudiger wijze. Inderdaad is de volgende relatie bijna triviaal:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{[\vec{J}]}{r} dV = \frac{1}{c} \int \frac{[\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}]}{r} dV \quad (17)$$

Optelling van (16) en (17) geeft, met de definities (13) en (14),

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \int \frac{[\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}]}{r} dV.$$

Het rechterlid is nul, vanwege de continuïteits-vergelijking (1). Dus is bewezen, dat bij de definities (13) en (14) aan de bijvoorwaarde

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

wordt voldaan.

Om eerlijk te zijn, moeten wij opmerken, dat het veld \vec{E}, \vec{H} gedefinieerd door (6, 7, 13, 14) slechts een particuliere oplossing van Maxwell's vergelijkingen is. Wanneer we overal $t - \frac{r}{c}$ door $t + \frac{r}{c}$ krijgen we een veld uit "geavanceerde" potentialen. Bovendien kunnen wij er een willekeurige oplossing van de homogene Maxwell-vergelijkingen optellen ($\rho = \vec{J} = 0$). Op grond van physische overwegingen is het duidelijk, dat de hier gegeven particuliere oplossing meteen de oplossing is.

§ 19. Monochromatische straling.

Het feit, dat men wel eens over het hoofd zag, dat de nevenvoorwaarde (18) essentiëel is, en bovendien berust op de continuïteitsvergelijking, uitte zich soms in allerlei moeilijkheden en paradoxen. Neem maar eens het hypothetische geval, dat de stroom in een dunne rechte draad vloeit en overal even groot is op het segment $-1 \leq z \leq 1$, $x = y = 0$; \vec{J} is dus een vector van constante grootte in de z-richting, voor $-1 \leq z \leq 1$; $\vec{J} = 0$ daarbuiten. Dan is hier \vec{A} een vector met alleen een z-component:

$$A_z = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 \frac{[J]}{r} dz$$

waarin I de constante grootte voorstelt. Uit de continuïteitsvergelijking zou men vermoeden, dat $\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial I}{\partial z} = 0$ is, en dus $\varphi = 0$. Als men dan het veld uitrekent, blijkt niet aan de Maxwell-vergelijkingen te zijn voldaan. Hoe komt dit? Natuurlijk is $\frac{\partial I}{\partial z} \neq 0$, maar omdat

$$I = \begin{array}{c} \text{—} \\ -1 \quad \quad \quad +1 \\ \text{—} \end{array}$$

volgt

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \begin{array}{c} \text{—} \\ \text{—} \end{array}$$

Men moet dus de delta-functies aan de uiteinden in acht nemen. Fysisch wil dit zeggen dat, als de stroom aan de uiteinden van nul verschillend is, er puntladingen aanwezig zijn. Dit geeft wel een scalaire potenti-

aal φ . Deze moeilijkheden doen zich voor als men zich beperkt tot zuiver-harmonische verschijnselen met tijdfactor $e^{-i\omega t}$. Dan is

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

equivalent met

$$\operatorname{div} \vec{A} = i \frac{u}{c} \varphi,$$

zodat φ kan worden geëlimineerd.

In dit geval is

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{I} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} dV \quad (19)$$

en het veld bepaald door

$$\vec{H}_0 = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (20)$$

$$-ik\vec{E} = k^2 \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}, \quad (21)$$

waarin $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ en λ de golflengte in de vrije ruimte. In deze formules zijn de "drukletters" onafhankelijk van de tijd. De factor $e^{-i\omega t}$ is overal stilzwijgend toe te voegen, zodat b.v.

$$\vec{A} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{A} e^{-i\omega t} \right\}$$

met $\operatorname{Re} \{ \} =$ reële deeler van $\{ \}$.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - 0.

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr C.J.Bouwkamp.

Stralingstheorie

V

§ 20. Electriche dipool.

Een electriche dipool kan fysisch op verschillende manieren worden benaderd. Bijv. door een harmonisch trillende puntlading. Of ook, twee bolletjes op korte afstand van elkaar met oscillerende lading en vonk. Uit het gezichtspunt van antenne-theorie kunnen wij het beste een electriche dipool opvatten als het grensgeval van een lineaire antenne, kort t.o.v. de golflengte, met uniforme stroomverdeling. Het product stroomsterkte maal lengte is het moment van de dipool. Niet te verwarren met het gewone begrip dipoolmoment (gelijk aan lading maal afstand). Een electriche dipool in de antenne-theorie is bepaald door zijn moment M , een vector. Ondanks het academische karakter van deze antenne speelt ze een overwegende rol in theorie en praktijk. Het is een geliefd model als bron van radiogolven. Het is een veldsingulariteit van het allereenvoudigste type.

§ 21. Veld van electriche dipool.

Neem \vec{M} in positieve z-richting in de oorsprong. Dan heeft de vector-potentiaal \vec{A} maar één component. We nemen als tijdfactor $\exp(+j\omega t)$. Dan is, als $|\vec{M}| = M$,

$$A_z = \frac{M}{c} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (1)$$

waarin r de afstand tussen veldpunt en oorsprong is. Voer in ruimtelijke poolcoördinaten r, ϑ, φ . Dan is

$$A_r = \frac{M}{c} \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad A_\vartheta = -\frac{M}{c} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad A_\varphi = 0 \quad (2)$$

De uitdrukking voor rot \vec{A} in poolcoördinaten zijn wel bekend. Het magneetveld blijkt alleen een φ -component te hebben

$$H_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right\}$$

zodat

$$H_\varphi = \frac{j k M}{c} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} \right\} \quad (3)$$

Het electriche veld kunnen wij eenvoudig uit $j k \vec{E} = \text{curl } \vec{H} - (4\pi/c) \vec{I}$ bepalen. Buiten de oorsprong is toch $\vec{I} = 0$. Dan volgt $E_\varphi = 0$,

$$E_\vartheta = -\frac{1}{jkr} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi), \quad E_r = \frac{1}{jkr \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta H_\varphi).$$

Invullen en uitwerken geeft:

$$E_r = \frac{2jkM}{c} \cos \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (4)$$

$$E_\vartheta = \frac{jkM}{c} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right\} \quad (5)$$

Ziehier de volledige uitdrukkingen van het electromagnetische veld van een elektrische Hertzse dipool.

Voor kleine afstanden r gelden de benaderingen

$$H_\varphi \approx \frac{M}{c} \frac{\sin \vartheta}{r^2}, \quad E_r \approx \frac{2M \cos \vartheta}{j\omega r^3}, \quad E \approx \frac{M \sin \vartheta}{j\omega r^3} \quad (6)$$

In de buurt van de dipool volgt het magnetisch veld dus overeenkomstig de wet van Biot en Savart; stroomelement $Il = M$. Het elektrische veld is hier gelijk aan het statische veld van een gewone elektrische dipool met dipoolmoment $M/j\omega$. De naam elektrische dipool van Hertz komt voort uit het feit dat het elektrische veld overweegt voor $r \rightarrow 0$. Merk op dat er een phaseverschil van 90° is tussen E en H .

Voor het veld op grote afstand vinden wij

$$H_\varphi \approx E_\vartheta \approx \frac{jkM}{c} \sin \vartheta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (7)$$

De Poynting vector is radiaal gericht. Het veld in de golfzone heeft het karakter van een vlakke golf. In de golfzone zijn E en H in phase, onderling loodrecht, en loodrecht op de voorstraal; althans in de benadering $O(r^{-1})$. In het overgangsgebied $r \rightarrow 0$ tot $r \rightarrow \infty$ vermindert het phaseverschil van $\pi/2$ tot 0 . De phasesnelheid, als dit begrip zin heeft, van E en H is dus niet gelijk aan c , de lichtsnelheid.

Het elementaire voorbeeld van de elektrische Hertzse dipool laat dus al duidelijk zien dat in de buurt van de antenne phaseverschillen en afstanden weinig met elkaar te doen hebben. In de golfzone ($r \rightarrow \infty$) is er stricte evenredigheid. Deze eigenschap wordt wel eens over het hoofd gezien bij gekoppelde antennes.

§ 22. Energiestraling.

Het tijdgemiddelde van de Poynting vector is

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi} \overline{\text{Re}(H_\varphi) \text{Re}(E_\vartheta)} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{kM}{cr}\right)^2 \sin^2 \vartheta$$

De door de dipool per tijdseenheid uitgezonden energie (power) is dus

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \bar{S} = \frac{k^2 M^2}{4c} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta$$

of wel

$$P = \frac{k^2 M^2}{3c}.$$

Men is in de techniek gewoon, de dipool te vervangen door een equivalente ohmse weerstand bij de stroomsterkte $I = M/l$, waar l lengte van de dipool is. Voor zo'n weerstand geldt $P = \frac{1}{2} RI^2$. Derhalve is de "stralingsweerstand" van de dipool

$$R = \frac{2P}{I^2} = \frac{2k^2 l^2}{3c} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (8)$$

waarin λ de golflengte is.

Een andere nuttige formule geeft het verband tussen de amplitude van het veld in de golfzône en de power:

$$|E_{\vartheta}| = |H_{\varphi}| = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3P}{c}} \sin \vartheta \quad (r \rightarrow \infty) \quad (9)$$

Gebruikt men geen Gauss-eenheden, maar praktische eenheden (volt, ampère, coulomb, ohm), dan is

$$E = \frac{60\pi l I}{\lambda r} \sin \vartheta e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})}, \quad (10)$$

met E_{ϑ} in volt/meter; I in ampère; λ , r en l in meter.

Verder

$$H_{\varphi} = \frac{l I}{2\lambda r} \sin \vartheta e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{2})} \quad (11)$$

in ampère/meter. Deze formules gelden in de golfzône.

Voor de stralingsweerstand in ohms geldt

$$R = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 790 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (12)$$

Ook geldt in praktische eenheden

$$|E_{\vartheta}| = \frac{3\sqrt{10P}}{r} \sin \vartheta, \quad (13)$$

E in volt/meter; P in watt; r in meter. Voor vele doeleinden is ook nuttig de formule

$$|E_{\vartheta}| = \frac{300 \sqrt{P_{kW}}}{r_{km}} \sin \vartheta \frac{mV}{m} \quad (14)$$

mV/m = millivolt per meter, km = kilometer; kW = kilowatt.

§ 23. Halve-golf antenne.

Voor de practijk van belang is een antenne bestaande uit een lange maar dunne cilindrische draad, die in het midden gevoed wordt. Zij $2l$ de lengte. De stroomverdeling langs de draad is dan in goede benadering

$$I(\xi) = I_0 \sin(kl - k|\xi|) \quad |\xi| \leq l$$

De vector potentiaal heeft alleen een component in de z -richting:

$$A_z = \frac{I_0}{c} \int_{-l}^l \sin(kl - k|\xi|) \frac{e^{-jkr}}{r} d\xi$$

Dit is een functie van z en ρ (cylindercoördinaten). Het veld is te vinden uit

$$\begin{aligned} H_{\varphi} &= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ jkE_z &= k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\ jkE_{\rho} &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial \rho} \\ H_z = H_{\rho} = E_{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

In spherische coördinaten:

$$A_r = A_z \cos \vartheta, \quad A_\vartheta = -A_z \sin \vartheta, \quad A_\varphi = 0.$$

Op grote afstand van de antenne geldt:

$$A_z \approx \frac{I_0}{kc} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_{-x}^x \sin(x-|t|) e^{jt} \cos \vartheta \, dt$$

met $x = kl = 2\pi l/\lambda$

De integraal is elementair:

$$A_z = \frac{2I_0}{kc} \frac{\cos(x \cos \vartheta) - \cos x}{\sin^2 \vartheta} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

De overeenkomstige formules voor het veld zijn

$$H_\varphi \approx E_\vartheta \approx \frac{2jI_0}{c} \frac{\cos(x \cos \vartheta) - \cos x}{\sin \vartheta} \frac{e^{-jkr}}{r}$$

Vector van Poynting:

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} |E_\vartheta|^2 = \frac{|I_0|^2}{2\pi cr^2} \left[\frac{\cos(x \cos \vartheta) - \cos x}{\sin \vartheta} \right]^2$$

De power wordt:

$$P = \frac{|I_0|^2}{c} \int_0^\pi \frac{[\cos(x \cos \vartheta) - \cos x]^2}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta$$

De integraal is gelijk aan

$$F(x) = C(2x) + \left[\frac{1}{2}S(4x) - S(2x) \right] \sin 2x \\ + \left[C(2x) - \frac{1}{2}C(4x) \right] \cos 2x$$

waarin

$$C(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt \\ S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Stralingsweerstand (in ohms) is

$$R = \frac{60}{\sin^2 x} F(x) \quad 0 < x \leq \frac{3\pi}{4}$$

Voor halve-golf antenne $x = \pi/2$.

Dan $R = 73$ ohm. In dit geval geldt ook

$$|E_\vartheta| = \frac{314 \sqrt{P_{kW}}}{r_{km}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \frac{mV}{m}$$

§ 24. Buiging.

De stralingsformules, waaruit het veld bij gegeven stromen kan worden bepaald, leiden ook gemakkelijk tot het volgende resultaat:

Bij buiging van een willekeurig invallende elektromagnetische golf aan een vlak oneindig goed geleidendscherm, is het tangentiële magneetveld in de opening ongestoord! Toepassing van het Kirchhoff-principe geeft zeer goede resultaten, zelfs als de opening en de golflengte van dezelfde orde van grootte zijn.

Einde.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m (O).

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door Dr H.A. Lauwerier.

Cybernetica.

I

Inleiding.

Cybernetica beschouwt de problemen welke optreden bij het besturen van mechanismen en processen. Voorbeelden zijn:

- 1) Thermostaat.
- 2) Niveauregeling bij toiletstortbak
- 3) Besturing van schip d.m.v. roer, fiets.
- 4) Luchtdoelgeschut.

Meer ingewikkelde voorbeelden zijn te vinden in de physiologie:

- 1) Stabilisatie van lichaamstemperatuur.
- 2) Stabilisatie van de rechtopstaande houding van de mens.
- 3) Besturing van grijpbeweging.

of in de economie.

- 4) Stabilisatie van marktevenwicht.

Hier zullen we ons in het bijzonder bezighouden met het onderzoek van servomechanismen (S.M) en automatische regelingen (A.R.)

Servomechanismen dienen om automatisch de een of andere grootheid in een systeem zo nauwkeurig mogelijk de veranderingen van een andere grootheid te laten volgen.

Automatische Regelingen dienen om automatisch de een of andere grootheid in een systeem constant te houden.

§ 2. In de praktijk wordt vaak gebruik gemaakt van blokschema's waarbij telkens verschillende elementen tot een z.g. kastje verenigd worden dat een zekere karakteristiek bezit

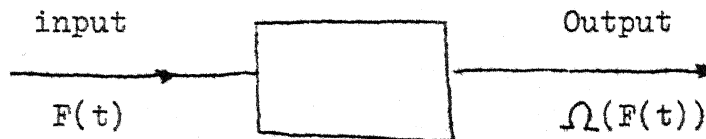


fig. 1

Aan een dergelijk kastje onderscheidt men de binnenkomende informatie, de input, welke doorgaans een tijdfunctie $F(t)$ is, en een uittredende getransformeerde informatie $\Omega\{F(t)\}$, de output.

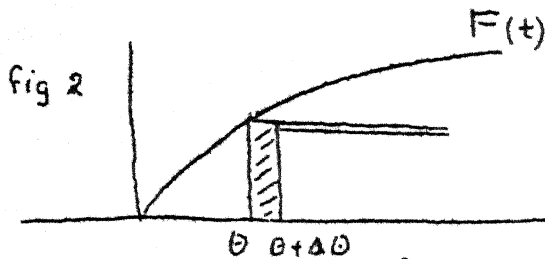
In alle hieronder volgende beschouwingen onderstellen we steeds met lineaire systemen te maken te hebben. We beschouwen dan slechts lineaire operatoren:

$$\Omega(\alpha F + \beta g) = \alpha \Omega F + \beta \Omega g.$$

Dit betekent, dat we van het superpositiebeginsel gebruik kunnen maken. Beschouw b.v. eens de responsie van een dergelijk kastje op de input

$$F(t) = U(t) \quad \begin{cases} = 0 & t < 0 \\ = 1 & t > 0 \end{cases}$$

en laat de output gelijk zijn aan $G(t) = R(t)$, dan kan hieruit afgeleid worden hoe het kastje reageert op een willekeurige input $F(t)$:



Denk $F(t)$ benaderd door een trapjescurve met treden van de breedte $\Delta\theta$.

Hiervoor kunnen we schrijven

$$\sum F(\theta) \{ U(t-\theta) - U(t-\theta-\Delta\theta) \}.$$

De responsie is

$$\sum F(\theta) \{ R(t-\theta) - R(t-\theta-\Delta\theta) \} \text{ of}$$

in eerste benadering $\frac{d}{dt} \sum F(\theta) R(t-\theta) \Delta\theta$.

Limietovergang $\Delta\theta \rightarrow 0$ geeft dus de responsie

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) R(t-\theta) d\theta.$$

Een nog eenvoudiger uitdrukking kunnen we verkrijgen met toepassing van de Dirac functie $\delta(t)$ die een stoot op $t = 0$ met intensiteit 1 voorstelt. Formeel kunnen we $\delta(t)$ als de afgeleide van de unit functie $U(t)$ beschouwen. Is nu de responsie van het kastje op een $\delta(t)$ functie gelijk aan $X(t)$ dan is weer t.g.v. het superpositiebeginsel $X(t)$ ook de afgeleide van $R(t)$ dus wordt de responsie op een willekeurige input $F(t)$ nu gelijk aan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) X(t-\theta) d\theta$$

Rechtstreeks volgt dit weer uit het feit dat de trapjescurve welke tot $f(t)$ nadert als $\sum F(\theta) \delta(t-\theta) \Delta\theta$ geschreven kan worden.

Schema.

<u>input</u>	<u>output</u>
$\delta(t)$	$X(t)$
$U(t)$	$R(t) = \int_0^t X(\theta) d\theta$
$F(t)$	$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) X(t-\theta) d\theta =$ $= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) R(t-\theta) d\theta.$
$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$	$\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2$
$\frac{dF}{dt}$	$\frac{dG}{dt}$
$\int_{-\infty}^t F(\theta) d\theta$	$\int_{-\infty}^t G(\theta) d\theta.$

Belangrijk is de responsie op een sinusvormige input. Beschouw b.v. de input $ae^{-i\omega t}$ waarvan alleen het reële deel fysische betekenis heeft.

De output wordt $a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\theta} X(\theta) d\theta \cdot e^{-i\omega t}$,
d.w.z. precies hetzelfde periodieke verschijnsel, maar met een andere
(complexe) amplitude.

De amplitudetransformatie $x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\theta} X(\theta) d\theta$ (1)

is de bekende Fourier transformatie welke ook verderop een belangrijke
rol zal spelen. In het algemeen is $x(\omega)$ gemakkelijker te vinden dan
 $X(t)$ b.v. wanneer het te onderzoeken systeem door lineaire differentiaal-
vergelijkingen gekarakteriseerd is. Uit $x(\omega)$ kunnen we $X(t)$ a.r. terug-
vinden

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(\omega) d\omega \quad (2)$$

waarbij de integratie heel vaak met behulp van de residustelling uitge-
voerd kan worden.

Is $F(t)$ een willekeurige inputfunctie, dan kunnen we $F(t)$ in sinus-
componenten ontwikkelen

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(\omega) d\omega \\ f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} F(t) dt. \end{array} \right.$$

De component $\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} f(\omega) d\omega$ geeft de responsie $\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t} f(\omega) x(\omega) d\omega$
zodat de totale responsie ook als

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(\omega) x(\omega) d\omega \text{ geschreven kan worden.}$$

Mathematisch betekent dit niet anders dan dat de Fourier transform van

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) X(t-\theta) d\theta$ gelijk aan $f(\omega) x(\omega)$ is:

$$\mathcal{F} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) X(t-\theta) d\theta = \mathcal{F} F(t) \cdot \mathcal{F} G(t) \quad (3)$$

3. Servomechanismen.

Het schema van een servomechanisme is in principe

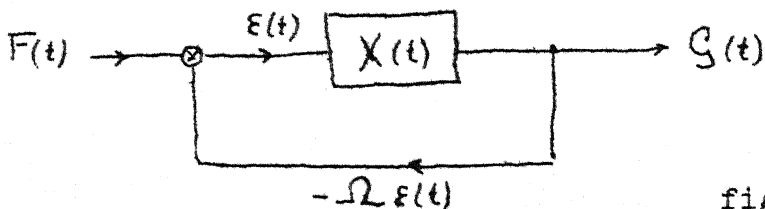


fig. 3

Hierbij wordt dus verlangd dat de output $G(t)$ zo getrouw mogelijk de
inputfunctie $F(t)$ volgt.

Daartoe wordt de output $G(t)$ voortdurend met $F(t)$ vergeleken (terugkop-
peling) zodat op de servo de aandrijvende kracht $\mathcal{E}(t) = F(t) - G(t)$ werkt.
Uit de figuur volgt

$$F(t) - \Omega \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t)$$

of

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\theta) X(t-\theta) d\theta = \varepsilon(t) \quad (4)$$

De discussie van (3) kan na op verschillende wijzen geschieden.

1°. Beschouw een sinusinput met frequentie ω .

2°. Beschouw de Fourier transform van (4).

3°. Beschouw de Laplace transform van (4).

In verband met het in de vorige paragraaf besprokene komen deze methoden in feite op hetzelfde neer.

In de practijk is het prettig om met Laplace transform te werken. Bij statistische beschouwingen kiezen we bij voorkeur de Fourier transform.

We stellen dus

$$f(s) = \mathcal{L} \{ F(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (5)$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (6)$$

Spreeken we af dat steeds $s = -\omega i$, dan zijn zowel (1) en (5) als (2) en (6) identiek.

Toepassing van Laplacetransformatie op (4) geeft i.v.m. (3)

$$f(s) = \mathcal{L}(\varepsilon) \cdot \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\varepsilon),$$

of

$$\mathcal{L}(\varepsilon) = \frac{1}{1+X(s)} f(s) \quad (7)$$

en

$$g(s) = \frac{X(s)}{1+X(s)} f(s) \quad (8)$$

Uit (8) blijkt, dat het blokschema van een serve vervangen kan worden door een equivalent kastje met transmissie karakteristiek $\frac{X(s)}{1+X(s)}$

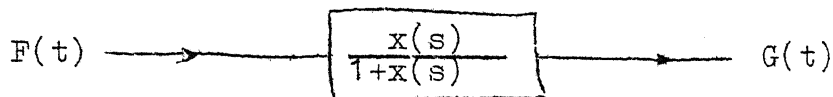


fig. 4

4. De werking van een serve kan proportioneel zijn hetgeen wil zeggen dat voor de output $H(t)$, verkregen uit een input $F(t)$ op de serve zonder terugkoppeling, geldt, dat

of

$$\Delta H = \alpha \Delta F$$

$$R(t) = \alpha U(t).$$

α is de proportionaliteitsfactor.

Een integrerende werking wil zeggen

$$\Delta H = \beta \int_0^t \Delta F dt$$

$$R(t) = \beta t$$

Een differentierende werking wil zeggen

$$\Delta H = \gamma \frac{d}{dt} \Delta F.$$

Gecombineerd krijgen we

$$\Delta H = \left(\alpha + \beta \int_0^t dt + \gamma \frac{d}{dt} \right) \Delta F \quad (9)$$

Hieruit volgt dat voor de transmissiekarakteristiek geldt

$$x(s) = \alpha + \frac{\beta}{s} + \gamma s \quad (10)$$

De teruggekoppelde servo heeft de karakteristiek

$$\frac{x(s)}{1+x(s)} = \frac{\beta + \alpha s + \gamma s^2}{\beta + (1+\alpha)s + \gamma s^2} \quad (11)$$

Uit (11) volgen allerlei belangrijke conclusies.

Voor zuiver proportionele actie gaat het rechterlid van (11) over in $\frac{\alpha}{1+\alpha}$

hetgeen wil zeggen dat in fig. 3

$$G(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha} F(t),$$

zodat de output nooit geheel gelijk aan $F(t)$ kan worden maar er slechts principieel van afwijkt.

Toevoeging van een integrerende actie geeft

$$\mathcal{L} G(t) = \left(1 - \frac{s}{\beta + (1+\alpha)s} \right) \mathcal{L} F(t),$$

waaruit volgt, dat de output veranderingen in de input nauwkeuriger volgt. De responsie op $F(t) = U(t)$ is b.v.

$$\left\{ 1 - \frac{1}{1+\alpha} e^{-\frac{\beta}{1+\alpha}t} \right\} U(t).$$

Vergroting van β verbetert dus het proces.

5. Stabiliteit.

Alleen die servo's zijn bruikbaar voor welke $X(t)$ niet onbepaald aangroeit. Een ingaande verstoring of verandering mag niet versterkt worden. Nu moet dus $x(s)$ in het rechterhalfvlak analytisch zijn, en ook moet de "terugkoppeloperator" $\frac{x(s)}{1+x(s)}$ dit zijn, hetgeen uit de responsie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \frac{x(s)}{1+x(s)} \frac{ds}{s}$$

volgt.

De functie $1+x(s)$ mag dus in het rechterhalfvlak geen nulpunten hebben. Dit onderzoek wordt door Nyquist a.v. verricht.

Hulpstelling. Is $w = \varphi(s)$ een functie analytisch in en op de gesloten kromme C met uitzondering van polen binnen C en heeft $\varphi(s)$ geen nulpunten op C , dan beschrijft w een curve C' , welke de oorsprong in het w -vlak zo vaak omcirkelt als het excès van de nulpunten boven de polen van $\varphi(s)$ in C bedraagt.

Bewijs.

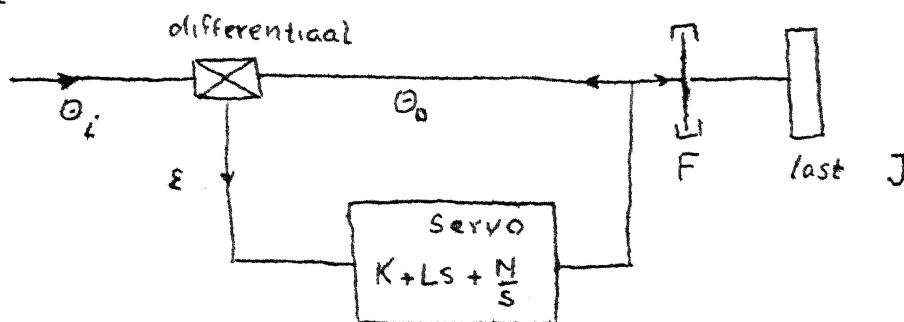
$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds.$$

Nyquist kiest nu voor $\varphi(s)$ de functie $x(s)$ en voor C de imaginaire as, eventueel voorzien van singulariteiten omzeilende halve cirkeltjes. Het aantal malen dat de beeldkromme C' het punt -1 omcirkelt is nu gelijk aan het aantal nulpunten van $x(s)+1 = 0$ in het rechterhalfvlak.

In vele gevallen is $x(s)+1 = 0$ te schrijven als een gewone algebraïsche vergelijking. Hierop kan dan het bekende criterium van Hurwitz toegepast worden.

Voorbeeld. De in de praktijk voorkomende systemen zijn i.h.a. aanmerkelijk ingewikkelder dan het in 3 gegeven schema.

Een typisch voorbeeld is



Twee assen worden in hun relatieve positie vergeleken door een differentiaal. Het verschil ϵ bestuurt een servo met proportionele K , differentiërende L en integrerende actie N . De servo drijft een last met traagheidsmoment J aan. Een demping F vertraagt de output evenredig met de snelheid $\dot{\theta}_0$. De vergelijking van het systeem is

$$K\epsilon + L \frac{d\epsilon}{dt} + N \int \epsilon dt = J \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + F \frac{d\theta_0}{dt},$$

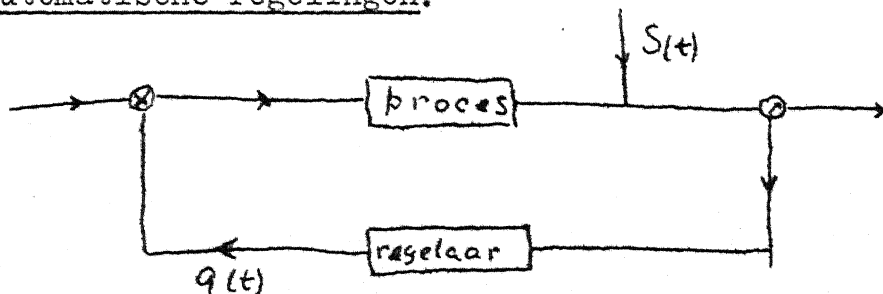
dus wegens $\epsilon = \theta_i - \theta_0$

$$\mathcal{L} \epsilon = \frac{s^2 J + sF}{s^2 J + s(L+F) + K + \frac{N}{s}} \mathcal{L} \theta_i.$$

De stabiliteitseis is

$$K(L+F) > JN.$$

§ 6 Automatische regelingen.

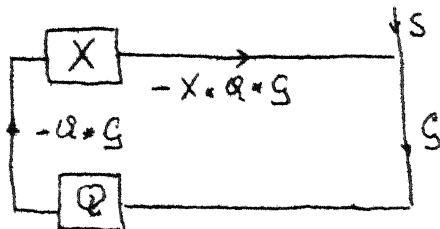


Bij een in het bovenstaand schema van een geregeld proces wordt door de regelaar getracht de bedrijfsgrootte $x(t)$ zo goed mogelijk constant (=0) te houden. De regelaar wordt door een verstoring in het proces in actie gebracht. De regelgrootte $g(t)$ brengt dan in het bedrijf de verstoring tegenwerkende wijzigingen aan, waardoor dus in feite weer een terugkoppeling gevormd is.

Proces en regelaar worden gekarakteriseerd door hun responsie op een δ -verstoring:

responsie proces $X(t)$
 responsie regelaar $-Q(t)$.

Laat nu een storing $S(t)$ het bedrijf beïnvloeden. De door de gecombineerde actie van proces + regelaar gevormde bedrijfsvariabele noemen we $G(t)$. Dan zal dus $G(t)$ een van S, Q en X afhankende functie zijn. Deze wordt uit het hieronder volgende schema gemakkelijk afgelezen.



$$S(t) - X(t) * Q(t) * G(t) = G(t) \quad (12)$$

of na Laplace transformatie

$$\mathcal{L} S(t) - x(s)q(s) \mathcal{L} G(t) = \mathcal{L} G(t)$$

of

$$\mathcal{L} G(t) = \frac{1}{1+x(s)q(s)} \mathcal{L} S(t) \quad (13)$$

De conclusies die uit (13) getrokken kunnen worden zijn analoog als bij de servo's. Stabiliteit eist weer dat de wortels van

$$1 + x(s)q(s) = 0 \quad (14)$$

in het linkerhalfvlak liggen.

De procesresponsies $X(t)$ kunnen zeer verschillend zijn. We onderscheiden de volgende typen—we kiezen de responsie

$R_x(t) = \int_0^t X(\theta) d\theta$ van het proces t.o.v. een eenheidsverstoring van de regelaar

I. Proces met zelfregulatie $R_x(t) \rightarrow 1$

1) $R_x = 1 - e^{-t} \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right)$.

2) $R_x = \left\{ 1 - \exp - \frac{t-t_D}{t_c} \right\} U(t-t_D)$, proces met wachttijd t_D .

3) $R_x = U(t-t_D)$.

II. Proces zonder zelfregulatie $R_x(t) \rightarrow \infty$.

$$1) R_x = \int_0^t \left\{ 1 - e^{-\theta} \sum_0^{n-1} \frac{\theta^j}{j!} \right\} d\theta.$$

$$2) R_x = (t-t_D) U(t-t_D).$$

De corresponderende Laplace transform ($x(s) \doteq X(t)$) zijn.

$$I \quad 1) \quad x(s) = \frac{1}{(s+1)^n} \quad 2) \quad x(s) = \frac{e^{-t_D s}}{s t_c + 1} \quad 3) \quad x(s) = e^{-t_D s}.$$

$$II. \quad 1) \quad x(s) = \frac{1}{s(s+1)^n} \quad 2) \quad x(s) = \frac{e^{-t_D s}}{s}.$$

Een belangrijke kwestie is hoe we bij een gegeven proces een optimale regelaar zullen vinden. Daartoe beschouwen we het procesgedrag bij een eenheidsverstoring $S(t) = U(t)$.

Uit (13) volgt

$$G(t) = \frac{1/s}{1+x(s)q(s)}.$$

We eisen nu voor optimale regeling, dat

$$\int_0^{\infty} G^2(t) dt = \text{minimaal}$$

Volgens de stelling van Parsefal is dit equivalent met

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{1/s}{1+x(s)q(s)} \right|^2 ds = \text{minimaal} \quad (15)$$

Het linkerlid van (15) kan eenvoudig berekend worden wanneer de integrand een quotient van polynomen is:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{A(s)}{B(s)} \right|^2 \frac{ds}{s^2} \quad (16)$$

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n \quad a_j \text{ reëel.}$$

$$B(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n \quad b_j \text{ reëel, } B(s_m) = 0$$

Voor (16) kan men schrijven ($s \rightarrow si$)

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(si)A(-si)}{B(si)B(-si)} \frac{ds}{s^2}$$

(intandig bij $s=0$).

De polen in het beneden halfvlak zijn $s = s_m i$, dus vinden we de uitdrukking

$$\frac{A(s_m)A(-s_m)}{s_m^2 B(-s_m)B'(s_m)} \quad (17)$$

een symmetrische vorm in de wortels van $B(s) = 0$, dus rationaal uitdrukbaar in de coëfficiënten van $A(s)$ en $B(s)$.

In de praktijk neemt men meestal genoegen met proportionele + integrerende regelaars, dus met $q(s) = \alpha + \frac{\beta}{s}$.

De coëfficiënten α , β moeten dan uit het minimum probleem bepaald worden.

Voorbeeld

Proces I_3 geeft voor $n=3$ de conditie

$$M = \frac{1}{2\pi i} \int \left| \frac{(s+1)^6}{\{s(s+1)^3 + \alpha s + \beta\}^2} \right| ds = \text{minimum.}$$

Uit (17) volgt (na moeizaam rekenen)

$$M = \frac{9 - k + 9\beta + 6\beta k - 3\beta^2}{2\beta(9k - k^2 - 9\beta)}, \quad k = \alpha + 1.$$

Stabiliteit eist

$$9k > k^2 + 9\beta.$$

MATISCH CENTRUM,
oerhaavestr. 49,
T E R D A M - O.

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk

door Dr H.A. Lauwerier.

Cybernetica

II en III

Fourier-transformatie.

In de onderstaande twee stellingen vatten we de voornaamste schappen van de F-transformatie samen, welke we bij de latere bewijzen nodig zullen hebben.

Is $f(x) \in L_2$ dan geldt voor

$$g(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(y) e^{ixy} dy, \tag{1.1}$$

$g(x) \in L_2$ en

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \tag{1.2}$$

$$f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A g(y) e^{-ixy} dy. \tag{1.3}$$

Stelling van Plancherel

Is $g_1(x) = Ff_1(x)$ en $g_2(x) = Ff_2(x)$, dan is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \overline{g_2(x)} dx, \tag{1.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(x) dx, \tag{1.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f_1(x) f_2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(y-x) dx, \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y-x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g_1(y) g_2(y) dy. \tag{1.7}$$

Correlatiefuncties.

Laat $F(t)$ een reële of complexe tijdfunctie zijn, welke zich het gehele interval $-\infty < t < +\infty$ uitstrekt. We stellen ons voor, dat het gedetailleerde gedrag van $F(t)$ te weinig overzichtelijk is. Om toch wat van $F(t)$ te kunnen vertellen, beschouwen we enkele statistische grootheden, welke met $F(t)$ in verband staan:

$$\overline{[F(t)]}_{Av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t) dt$$

gemiddelde waarde van $F(t)$.

$$\sigma^2 = \left| F(t) \right|_{Av}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t) \overline{F(t)} dt \quad (2.1)$$

is het kwadratisch gemiddelde van $F(t)$.

$$\varphi_{FF}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t+\tau) \overline{F(\tau)} d\tau \quad (2.2)$$

is de aan $F(t)$ toegevoegde autocorrelatiefunctie.

Tijdfuncties, waarvan deze statistische eigenschappen onafhankelijk zijn van de keuze van het begintijdstip $t = 0$ heten stationnaire tijdreeksen. D.w.z.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{FF}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t_1+\tau) \overline{F(t_2+\tau)} d\tau \\ \text{met } t_1 - t_2 = t. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

We merken op, dat $\varphi_{FF}(0) = \sigma^2$ en $\overline{\varphi_{FF}(-t)} = \varphi_{FF}(t)$.

We beperken ons hier tot die stationnaire tijdreeksen, waarvan de gemiddelde waarde nul is, en waarvan de autocorrelatiefunctie voor elke t bestaat.

Voorbeelden.

a) $F(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t},$

$$\varphi_{FF}(t) = |A_1|^2 e^{i\omega_1 t} + |A_2|^2 e^{i\omega_2 t},$$

$$\varphi_{FF}(0) = |A_1|^2 + |A_2|^2.$$

b) $F(t) \in L_2 \quad \varphi_{FF}(t) = 0.$

c) $F(t) = e^{i|t|^{1/2}} \quad \varphi_{FF}(t) = 1.$

d) $F(t) = e^{it^2} \quad \varphi_{FF}(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0. \end{cases}$

Uit deze voorbeelden blijkt, dat de autocorrelatiefunctie slechts de amplitudeinformatie van $F(t)$ overneemt, maar de faseinformatie van $F(t)$ verwaarloost. Het is dus duidelijk, dat $F(t)$ niet uit $\varphi_{FF}(t)$ teruggevonden kan worden.

Een belangrijke eigenschap van $\varphi_{FF}(t)$ is

1) $|\varphi_{FF}(t)| \leq \varphi_{FF}(0). \quad (2.4)$

2) Is $\varphi_{FF}(t)$ continu in $t = 0$, dan is $\varphi_{FF}(t)$ overal continu.

Bewijs

$$1) \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t+\tau) \overline{F(\tau)} d\tau \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T |F(t+\tau)|^2 d\tau \int_{-T}^T |F(\tau)|^2 d\tau = \varphi_{FF}^2(0).$$

$$\begin{aligned} \left| \varphi_{FF}(t+\varepsilon) - \varphi_{FF}(t) \right|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \left| \int_{-T}^T \left\{ F(t+\tau+\varepsilon) - F(t+\tau) \right\} \overline{F(\tau)} d\tau \right|^2 \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \left| F(t+\tau-\varepsilon) - F(t+\tau) \right|^2 d\tau \int_{-T}^T |F(\tau)|^2 d\tau = \\ &= \varphi_{FF}(0) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ |F(t+\tau-\varepsilon)|^2 + |F(t+\tau)|^2 - F(t+\tau-\varepsilon)\overline{F(t+\tau)} + \right. \\ &\quad \left. - \overline{F(t+\tau-\varepsilon)}F(t+\tau) \right\} d\tau = \\ &= \varphi_{FF}(0) \left\{ 2\varphi_{FF}(0) - \varphi_{FF}(-\varepsilon) - \varphi_{FF}(\varepsilon) \right\} \rightarrow 0 \quad \text{voor } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Naast de autocorrelatie van een functie kunnen we ook de kruiscorrelatie van twee functies $F(t)$ en $G(t)$ beschouwen

$$\varphi_{FG}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(t+\tau) \overline{G(\tau)} d\tau. \quad (2.5)$$

φ_{FG} en φ_{GF} behoeven niet gelijk te zijn; $\varphi_{GF}(t) = \overline{\varphi_{FG}(-t)}$. Stationnaire tijdreeksen waarvoor de kruiscorrelatie nul zijn, heten onafhankelijk.

§ 3. Het spectrum.

Bij elke Fouriercomponent $A e^{-i\omega t}$ van een stationnaire tijdreeks behoort een "energie" $|A|^2$. In het energie-frequentie diagram levert dit op de plaat ω een Diracfunctie van de intensiteit $|A|^2$. De tijdreeks $\sum_k A_k e^{i\omega_k t}$ levert aldus een lijnenspectrum met totale intensiteit

$\sum_k |A_k|^2$. Onze taak is het dus om $F(t)$ in zijn Fouriercomponenten te ontbinden

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega) d\omega,$$

zodat uit $|f(\omega)|^2$ het spectrum kan worden afgeleid. I.h.a. bestaat $f(\omega)$ niet, omdat $F(t)$ niet tot L_2 behoort te behoren.

Echter beschouwen we nu $\varphi_{FF}(t)$ welke de volledige energiejnformatie levert. Het spectrum is nu zonder meer de F-transform van de autocorrelatiefunctie

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi_{FF}(t) dt. \quad (3.1)$$

Om van het lijnenbestanddeel af te zijn, kunnen we i.p.v. (3.1) ook a priori het geïntegreerde spectrum beschouwen:

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\omega t}}{t} \varphi_{FF}(t) dt. \quad (3.2)$$

Deze formule vormt bij Wiener het uitgangspunt van zijn beschouwingen.

§ 4. Lineaire operatoren.

Een lineaire operator kan bepaald worden door zijn responsie $X(t)$ op een deltafunctie $\delta(t)$. Het is duidelijk, dat in de hier beschouwde fysische systemen $X(t) = 0$ voor $t < 0$. De responsie $G(t)$ op een input $F(t)$ is

$$G(t) = \int_{-\infty}^t F(\tau)X(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} F(t-\tau)X(\tau)d\tau. \quad (4.1)$$

Voor de Fouriertransforms

$$x(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} X(t)dt, \quad (4.2)$$

enz. geldt volgens (1.7)

$$g(\omega) = f(\omega)x(\omega). \quad (4.3)$$

Als $F(t) = e^{-i\omega t}$ is volgens (4.1)

$$G(t) = e^{-i\omega t}x(\omega).$$

Men schrijft vaak $x(\omega) = \exp\{A(\omega) - iB(\omega)\}$, waarbij $A(\omega)$ de "gain" geeft en $B(\omega)$ de faseverschuiving.

Een lineaire operator is dus vol edig gekenmerkt door de functie $x(\omega)$, welke volgens (4.2) in het bovenvlak $\text{Im } \omega > 0$ analytisch is.

In sommige gevallen is $X(t)$ geen functie in eigenlijke zin, terwijl toch $x(\omega)$ bestaat. In feite zorgen we, dat formule (4.3) steeds geldig blijft.

Een typisch voorbeeld is de differentieeroperator

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{d}{dt} F(t), \\ X(t) &= \delta'(t), \\ x(\omega) &= -\omega i, \quad \text{Im } \omega > 0. \end{aligned}$$

§ 5. Probleem van Wiener.

Gegeven is een stationnaire tijdfunctie $F(t)$. Gevraagd wordt een optimale operator $X(t)$ te vinden, welke slechts op het verleden van $F(t)$ werkt zodanig, dat de responsie $G(t)$ een zo goed mogelijke benadering vormt van $F(t+\alpha)$ ($\alpha > 0$).

Dit is dus een voorspellingsoperator.

Zo goed mogelijk wil zeggen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |G(t) - F(t+\alpha)|^2 dt = \text{minimum}. \quad (5.1)$$

Voor (5.1) schrijven we

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| F(t+\alpha) - \int_0^{\infty} F(t-\tau)X(\tau)d\tau \right|^2 dt = \varphi(0) - 2\text{Re} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha+\tau)\overline{X(\tau)}d\tau + \\ &+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} F(t-\sigma)X(\sigma)d\sigma \int_0^{\infty} \overline{F(t-\tau)X(\tau)}d\tau = \\ &= \varphi(0) - 2\text{Re} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha+\tau)\overline{X(\tau)}d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(\tau-\sigma)\overline{X(\sigma)}\overline{X(\tau)}d\sigma d\tau. \end{aligned} \quad (5.2)$$

De uitdrukking (5.2) moet nu minimaal gemaakt worden. Daartoe passen we een variatieprincipe toe. Stel

$$X(\tau) \rightarrow X(\tau) + \varepsilon \delta X(\tau)$$

en differentieer naar ε en laat $\varepsilon \rightarrow 0$. We vinden

$$\int_0^{\infty} \left[\varphi(\alpha + \tau) - \int_0^{\infty} \varphi(\tau - \sigma) X(\sigma) d\sigma \right] \delta X(\tau) d\tau = 0.$$

Dit leidt tot

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha + t) = \int_0^{\infty} \varphi(t - \sigma) X(\sigma) d\sigma \\ t > 0, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

waaruit dus $X(t)$ bepaald moet worden.

Het rechterlid van (5.3) is geen volledige convolutie, zodat toepassing van Fourier-transformatie zonder meer tot niets leidt.

Het kunstje

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(A) \psi_2(t-A) dA, \quad (5.4)$$

met $\psi_1(t) = 0 \quad t > 0,$

en $\psi_2(t) = 0 \quad t < 0.$

is een goede remedie. Substitutie in (5.3) geeft

$$\int_{-\infty}^0 \psi_1(A) \psi_2(\alpha + t - A) dA = \int_{-\infty}^0 \psi_1(A) \int_0^{\infty} \psi_2(t - \sigma - A) X(\sigma) d\sigma. \quad (5.5)$$

Aan (5.5) is voldaan, zodra

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_2(\alpha + s) = \int_0^{\infty} \psi_2(s - \sigma) X(\sigma) d\sigma \\ s = t - A > 0. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Toepassing van F-transformatie geeft nu

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega s} \psi_2(\alpha + s) ds = \int_0^{\infty} X(\sigma) d\sigma \int_0^{\infty} e^{i\omega s} \psi_2(s - \sigma) ds,$$

dus

$$\int_0^{\infty} e^{i\omega s} \psi_2(\alpha + s) ds = \int_0^{\infty} e^{i\omega \sigma} X(\sigma) d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(s-\tau)} \psi_2(s-\tau) ds,$$

of

$$x(\omega) = \frac{1}{\psi_2(\omega)} \int_0^{\infty} e^{i\omega s} \psi_2(\alpha + s) ds, \quad (5.7)$$

waarmee de voorspellingsoperator dus bekend is.

Alles berust nu op de mogelijkheid van (5.4). Fourier-transformatie geeft

$$\phi(\omega) = \psi_1(\omega) \psi_2(\omega). \quad (5.8)$$

Men heeft

$$\psi_2(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i(u+vi)t} \psi_2(t) dt, \quad (5.9)$$

$$\omega = u+vi$$

zodat $\psi_2(\omega)$ voor $v \geq 0$ blijkbaar een begrensde analytische functie is. Omgekeerd zijn deze eigenschappen van $\psi_2(\omega)$ voldoende, opdat $\psi_2(t)$ voor negatieve t nul is. Analoge eigenschappen gelden voor $\psi_1(\omega)$ voor

voor $\text{Im } \omega \leq 0$.

Men heeft $\phi(u) \geq 0$. Gezocht wordt nu een ontbinding

$$\phi(u) = \psi_1(u) \psi_2(u),$$

waarbij $\psi_1(u+vi)$ $v < 0$ en $\psi_2(u+vi)$ $v > 0$ analytisch zijn. Als dus

$$\psi_2(\omega) = P(u, v) + iQ(u, v)$$

dan moet

$$\psi_1(\omega) = P(u, -v) - iQ(u, -v),$$

en

$$|\psi_2(u)| = \sqrt{\phi(u)}. \quad (5.10)$$

Van de in $v \geq 0$ begrensde analytische functie ψ_2 kennen we slechts de modulus op de reële as. Hoe dit te completeren?

Van de functie

$$\lambda(\omega) = \ln \psi_2(\omega)$$

is de waarde van het reële deel op de reële as bekend, nl.

$$\text{Re } \lambda(u) = \ln |\psi_2(u)| = \frac{1}{2} \ln \phi(u).$$

Dus

$$\text{Re } \lambda(\omega) = \text{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln \phi(s)}{s-(u+vi)} ds = \text{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\omega \ln \phi(s)}{s^2 - \omega^2} ds$$

en

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\omega \ln \phi(s)}{s^2 - \omega^2} ds. \quad (5.11)$$

De functies $\psi_1(\omega)$ en $\psi_2(\omega)$ zijn daarmee dus gevonden. $\psi_2(\omega)$ is nu analytisch in het bovenvlak en bezit daar ook geen nulpunten.

Uit (5.7) volgt dus nu $x(\omega)$ nl.

$$x(\omega) = \frac{1}{\psi_2(\omega)} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \psi_2(t+\alpha) dt. \quad (5.12)$$

Voorbeeld

1)

$$\psi(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|},$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2},$$

$$\psi_1(\omega) = \frac{1}{\omega-i}, \quad \psi_2(\omega) = \frac{1}{\omega+i},$$

$$\psi_2(t) = -ie^{-t},$$

$$x(\omega) = (\omega+i) \frac{-ie^{-\alpha}}{1-i\omega} = e^{-\alpha}.$$

2)

$$\psi(t) = \frac{e}{2\sqrt{2}} \left(\sin \frac{t}{\sqrt{2}} + \cos \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad t > 0,$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{1+\omega^4},$$

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{\left(\omega + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(\omega + \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)},$$

$$x(\omega) = i\omega\sqrt{2} e^{-\alpha/\sqrt{2}} \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + e^{-\alpha/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right)$$

Hierbij treedt dus een differentieeroperator op.

§ 6. Gegeneraliseerde Fourier-transforms.

Voor sommige doeleinden is het toch wel plezierig om ook van functies, die niet tot L_2 behoren een F-transform te kunnen definiëren, b.v. $F(t) = t$. Daartoe beschouwen we

$$\left\{ \begin{array}{l} f^+(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} F(t) dt, \\ f^-(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} F(t) dt. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

De eerste integraal bestaat voor $\text{Im } \omega > \omega_0^+$.

De tweede integraal bestaat voor $\text{Im } \omega < \omega_0^-$.

$$\text{Als } \omega_0^- > \omega_0^+$$

bestaat de gewone F-transform

$$f(\omega) = f^+(\omega) + f^-(\omega)$$

in de strook $\omega_0^+ < \text{Im } \omega < \omega_0^-$.

Als $\omega_0^- < \omega_0^+$, bestaat $f(\omega)$ dus niet. Echter kunnen we $f^+(\omega)$ en $f^-(\omega)$ analytisch voortzetten. In het gebied, waar de beide functies nu bepaald zijn, kan dus $f(\omega)$ gedefinieerd worden.

We nemen nu aan, dat $f^+(\omega)$ en $f^-(\omega)$ in het gehele vlak analytisch zijn met uitzondering van enkel- of meervoudige polen. Aldus is dus $f(\omega) = f^+ + f^-$ een in het gehele vlak analytische F-transform. De omkering van (6.1) en (6.2) is blijkbaar

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\omega t} f^+(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-i\omega t} f^-(\omega) d\omega \quad (6.3)$$

waarbij $a > \omega_0^+$ en $b < \omega_0^-$.

Voorbeelden

$$1) \quad F(t) = t \quad f(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}.$$

$$2) \quad F(t) = e^{-|t|} \quad f(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}.$$

Als $\overline{F(-t)} = F(t)$ geldt ook hier dat $f(\omega)$ reëel is op de reële as, of algemener

$$f^-(\omega) = \overline{f^+(\overline{\omega})}$$

$$f^+(\omega) = \overline{f^-(\overline{\omega})}.$$

In toegevoegde punten neemt $f(\omega)$ dus toegevoegde waarden aan.

§ 7. De integraalvergelijking van Wiener.

De integraalvergelijking van Wiener beschouwen we hier in de volgende vorm

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(t) - \int_0^{\infty} \varphi(t-\sigma) X(\sigma) d\sigma = 0 \\ t \geq 0. \end{array} \right. \quad (7.1)$$

We nemen aan, dat op de t-as $|\zeta(t)| < e^{\varepsilon|t|}$ en $|\varphi(t)| < e^{\varepsilon|t|}$ voor elke

$\varepsilon > 0$. De F-transforms $Z^+(\omega)$ en $\phi^+(\omega)$ zijn dus analytisch en begrensd in elk bovenhalfvlak $\text{Im } \omega \geq \varepsilon > 0$. Analoog $Z^-(\omega)$ en $\phi^-(\omega)$.

We zien, dat aan (7.1) een gehele klasse $X(t)$ functies voldoen. We beschouwen hieruit die $X(t)$ functies voor welke $x(\omega)$ analytisch is in $\text{Im } \omega > 0$ en

$$\left| \int_0^\infty \varphi(t-\sigma) X(\sigma) d\sigma \right| < e^{\varepsilon|t|} \quad -\infty < t < +\infty$$

voor elke $\varepsilon > 0$. Aldus bestaat de gegeneraliseerde F-transform van de functie

$$Q(t) = \zeta(t) - \int_0^\infty \varphi(t-\sigma) X(\sigma) d\sigma$$

nl. $q^-(\omega)$ of $q(\omega)$, welke elk benedenhalfvlak $\text{Im } \omega \leq \varepsilon < 0$ analytisch en begrensd is. Voor $t < 0$ kunnen we $Q(t)$, dus $q(\omega)$ vrij kiezen, mits

$|Q(t)| < e^{\varepsilon|t|}$. De F-transform van $Q(t)$ kunnen we ook schrijven als

$$q(\omega) = Z(\omega) - \phi(\omega)x(\omega). \quad (7.2)$$

De oploswijze is dus hieruit $x(\omega)$ zodanig te bepalen, dat

1^e. $x(\omega)$ analytisch in het bovenvlak $\text{Im } \omega > 0$,

2^e. $q(\omega)$ analytisch in het benedenvlak $\text{Im } \omega < 0$.

Beschouw eerst de homogene vergelijking met $\zeta(t) = 0$

$$\phi(\omega)x(\omega) = q(\omega). \quad (7.3)$$

We kunnen $\phi(\omega)$ op de vroeger beschreven wijze ontbinden in het product

$\phi_1(\omega) \phi_2(\omega)$ met $\phi_1(\omega)$ analytisch en nulpuntenvrij voor $\text{Im } \omega > 0$ en

$\phi_2(\omega)$ analoog in $\text{Im } \omega \leq 0$. Uit (7.3) volgt, indien $x(\omega)$ analytisch in $\text{Im } \omega \geq 0$ is

$$x(\omega) = \frac{1}{\phi_1(\omega)} \left\{ \frac{q(\omega)}{\phi_2(\omega)} \right\}$$

zodat $\frac{q(\omega)}{\phi_2(\omega)}$ een gehele functie voorstelt, of m.a.w.

$$x(\omega) = \frac{G(\omega)}{\phi_1(\omega)} \quad (7.4)$$

Indien we voor $x(\omega)$ polen op de reële as toelaten, kunnen we dus voor $G(\omega)$ een willekeurige analytische functie met slechts reële polen kiezen. De keuze van $G(\omega)$ wordt natuurlijk beperkt door het gedrag van $x(\omega)$ voor $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$.

Er rest nu nog een particuliere oplossing van de volledige vergelijking (7.2) te vinden. Nu moet dus

$$Z(\omega) - \{x(\omega) \phi_1(\omega)\} \phi_2(\omega) = q(\omega) \quad (7.5)$$

in het benedenvlak vrij van polen zijn. Stel nu

$$x(\omega) \phi_1(\omega) = y(\omega)$$

$$\frac{Z(\omega)}{\phi_2(\omega)} = W(\omega)$$

$$\frac{q(\omega)}{\phi_2(\omega)} = r(\omega).$$

(7.5) gaat nu over in

$$W(\omega) - y(\omega) = r(\omega)$$

met $y(\omega)$ analytisch in bovenhalfvlak en $r(\omega)$ analytisch in benedenhalfvlak. $W(\omega)$ moeten we nu opvatten als de complete F-transform van een functie $w(t)$ waarvan $W^+(\omega)$ en $W^-(\omega)$, de eenzijdige F-transform in boven- resp. benedenhalfvlak analytisch zijn. Door nu $r(\omega) = W^-(\omega)$ te kiezen, is aan alle eisen voldaan. We vinden zo

$$x(\omega) = \frac{1}{\phi_1(\omega)} W^+(\omega),$$

of

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi \phi_1(\omega)} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} dt \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\eta t} \frac{z(\eta)}{\phi_2(\eta)} d\eta, \quad a > 0. \quad (7.6)$$

De algemene oplossing van (7.1) is dus de som van (7.4) en (7.6).

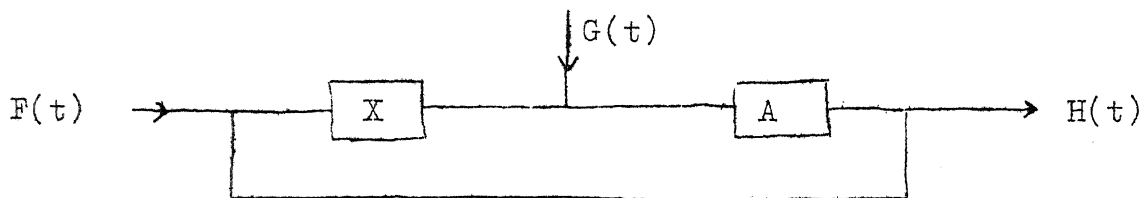
§ 8. Uitgebreid probleem van Wiener.

Het in § 5 opgeloste probleem kan aanzienlijk gegeneraliseerd worden. In deze § beschouwen we een input, die opgebouwd is uit een stationnaire tijdreeks $F(t)$ welke de informatie bevat en een stationnaire tijdreeks $G(t)$ welke de ruis voorstelt. Men kan nu vragen naar een operator X , die toegepast op $F + G$ zo goed mogelijk $F(t+\alpha)$ benadert. Dit betekent dus, dat

$$\lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| F(t+\alpha) - \int_0^{\infty} F(t-\tau) + G(t-\tau) X(\tau) d\tau \right|^2 dt \quad (8.1)$$

minimaal gemaakt moet worden.

Een iets ingewikkelder probleem komt te voorschijn bij het hieronder gegeven diagram van een servo



A is een gegeven operator, X is een corrigerend netwerk. We lezen af

$$(F-H) * X * A + G * A = H$$

dus

$$h(\omega) = \frac{a(\omega)x(\omega)}{1+a(\omega)x(\omega)} f(\omega) + \frac{a(\omega)}{1+a(\omega)x(\omega)} g(\omega).$$

Stel nu

$$\frac{a(\omega)x(\omega)}{1+a(\omega)x(\omega)} = \xi(\omega),$$

dan is

$$h(\omega) = \xi(\omega) f(\omega) + a(\omega) \{ 1 - \xi(\omega) \} g(\omega).$$

De onbekende operator $\xi(\omega)$ moet uit

$$\lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(t) - H(t)|^2 dt = \text{minimum} \quad (8.2)$$

afgeleid worden. Beide problemen zijn vervat in: De output in een lineaire combinatie van de onbekende operator van het volgende type:

$$H = (A_1 * F + B_1 * G) * X + (A_2 * F + B_2 * G) \quad (8.3)$$

Het minimum principe is

$$\lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(t+\alpha) - H(t)|^2 dt = \text{minimum}, \quad (8.4)$$

dus

$$\mathcal{P}_{FF}(0) - 2\text{Re} \mathcal{P}_{FH}(\alpha) + \mathcal{P}_{HH}(0) = \text{minimum}. \quad (8.5)$$

We maken nu gebruik van de volgende herleidingsen en notaties

$$L = A_1 * F + B_1 * G$$

$$M = A_2 * F + B_2 * G$$

$$\mathcal{P}_{A(B+C)}(t) = \mathcal{P}_{AB}(t) + \mathcal{P}_{AC}(t)$$

$$\mathcal{P}_{AD * C}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{AB}(t+\sigma) \overline{C}(\sigma) d\sigma.$$

Hiertoe kunnen we voor (8.5) schrijven

$$\left\{ \mathcal{P}_{FF}(0) - 2\text{Re} \mathcal{P}_{FM}(\alpha) + \mathcal{P}_{MM}(0) \right\} - 2\text{Re} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{FL}(t+\alpha) \overline{X}(t) dt + \\ + 2\text{Re} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{ML}(t) \overline{X}(t) dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(\sigma_1 - \sigma_2) \overline{X}(\sigma_1) X(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 = \text{min}. \quad (8.6)$$

Toepassing van het variatieprincipe

$$X(t) \rightarrow X(t) + \varepsilon \delta X(t)$$

geeft de integraalvergelijking van Wiener (7.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(t-s) X(s) ds, \\ t > 0 \end{array} \right. \quad (8.7)$$

v. arbij

$$\zeta(t) = \mathcal{P}_{FL}(t+\alpha) - \mathcal{P}_{ML}(t).$$

Het is interessant om (8.7) op een iets andere wijze af te leiden. De uitdrukking

$$-2\text{Re} \int_0^{\infty} \zeta(t) \overline{X}(t) dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(\sigma_1 - \sigma_2) \overline{X}(\sigma_1) X(\sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$$

moet geminimeerd worden. Substitueer nu

$$\zeta(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(t-s) Y(s) ds,$$

dit geeft

$$- \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(t-s) Y(s) \overline{Y}(t) ds dt + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{LL}(t-s) \{X(s) - Y(s)\} \{ \overline{X}(t) - \overline{Y}(t) \} ds dt$$

of

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |y(\omega)|^2 \phi_{LL}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\omega) - y(\omega)|^2 \phi_{LL}(\omega) d\omega \quad (8.8)$$

welke uitdrukking dus inderdaad minimaal wordt voor $y(\omega) = x(\omega)$ of $Y(t) = X(t)$. Het door de uit (6.7) gevonden $x(\omega)$ bereikte minimum is dus

of

$$\left\{ \mathcal{P}_{FF}(0) - 2\text{Re} \mathcal{P}_{FM}(\alpha) + \mathcal{P}_{MM}(0) \right\} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \psi_3(t) dt \right|^2 d\omega$$

$$\varphi_{FF}(0) - 2\text{Re} \varphi_{FH}(\alpha) + \varphi_{MM}(0) - \int_0^{\infty} |\psi_3(t)|^2 dt \quad (8.9)$$

We leiden nu uitdrukkingen af voor $\varphi_{LL}(\omega)$ en $Z(\omega)$. We maken gebruik van

$$\phi_{AB^*C}(\omega) = \phi_{AB}(\omega) \overline{c(\omega)}.$$

Daarmee is

$$\begin{aligned} \phi_{LL}(\omega) &= \overline{a_1}(\omega) \phi_{LF}(\omega) + \overline{b_1}(\omega) \phi_{LG}(\omega) = \\ &= \overline{a_1}(\omega) \phi_{FL}(\omega) + \overline{b_1}(\omega) \phi_{GL}(\omega), \end{aligned}$$

en tenslotte

$$\phi_{LL}(\omega) = |a_1|^2 \phi_{FF} + 2\text{Re} a_1 \overline{b_1} \phi_{FG} + |b_1|^2 \phi_{GG}. \quad (8.10)$$

Evenzo

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= e^{-i\alpha\omega} \{ \overline{a_1} \phi_{FF} + \overline{b_1} \phi_{FG} \} - \{ \overline{a_1} a_2 \phi_{FF} + \overline{a_1} b_2 \phi_{GF} + \\ &+ a_2 \overline{b_1} \phi_{FG} + \overline{b_1} b_2 \phi_{GG} \} \end{aligned} \quad (8.11)$$

In het belangrijke geval, dat ruis en informatie niet gecorreleerd zijn, heeft men eenvoudig

$$\begin{cases} \phi_{LL}(\omega) = |a_1|^2 \phi_{FF} + |b_1|^2 \phi_{GG} \\ Z(\omega) = \overline{a_1} \phi_{FF} e^{-i\alpha\omega} - \overline{a_1} a_2 \phi_{FF} - \overline{b_1} b_2 \phi_{GG} \end{cases} \quad (8.12)$$

Voorbeeld

Beschouw het oorspronkelijke probleem van Wiener, dat bij het begin dezer § ter sprake kwam

$$\phi_{FF} = \frac{1}{1+\omega^2}, \quad \phi_{GG} = \varepsilon^2 \text{ ("witte ruis")}, \quad \phi_{FG} = 0.$$

Nu is $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$. Volgens (6.12)

$$\phi_{LL}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} + \varepsilon^2,$$

$$Z(\omega) = \frac{e^{-i\alpha\omega}}{1+\omega^2}.$$

Dus

$$\phi_1(\omega) = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} - \varepsilon i\omega}{1 - i\omega},$$

$$\phi_2(\omega) = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon i\omega}{1 + i\omega},$$

$$W(\omega) = \frac{e^{-i\alpha\omega}}{(\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon i\omega)(1 - i\omega)},$$

$$w(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\omega - it\omega}}{(\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon i\omega)(1 - i\omega)} d\omega =$$

$$\begin{cases} \frac{e^{-t-\alpha}}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon} & t + \alpha > 0 \\ \exp \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} (t+\alpha) \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon} & t + \alpha < 0 \end{cases}$$

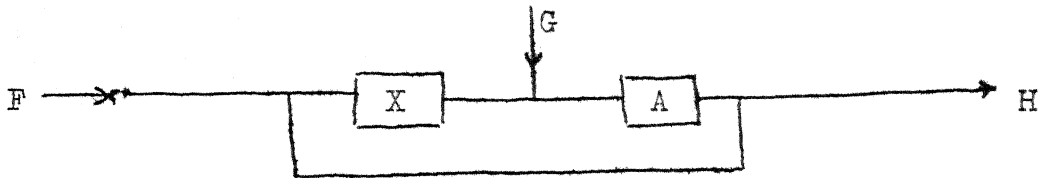
Tenslotte ($\alpha > 0$)

$$x(\omega) = \frac{1}{\phi_1(\omega)} \int_0^{\infty} \frac{e^{t(i\omega-1)-\alpha}}{\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon} dt,$$

dus

$$x(\omega) = \frac{e^{-\alpha}}{(\sqrt{1+\varepsilon^2} + \varepsilon)(\sqrt{1+\varepsilon^2} - \varepsilon i\omega)}$$

Voorbeeld



$$a(\omega) = -\frac{1}{\omega^2},$$

$$h(\omega) = \left\{ f(\omega) + \frac{g(\omega)}{\omega^2} \right\} \xi(\omega) - \frac{1}{\omega^2} g(\omega),$$

$$\phi_{FF}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}, \quad \phi_{FG}(\omega^2) = 0, \quad \phi_{GG}(\omega) = \varepsilon^2,$$

$$a_1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{\omega^2}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{\omega^2}.$$

Volgen: (8.12)

$$\phi_{LL}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{\varepsilon^2}{\omega^4},$$

$$z(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{\varepsilon^2}{\omega^4}.$$

De ontbinding van ϕ is

$$\phi_1 = \frac{(\omega + \alpha_1)(\omega + \alpha_2)}{i(\omega + i)\omega^4}$$

$$2 = \frac{i(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2)}{\omega - i}$$

met $\alpha_1 \alpha_2 = -\varepsilon$; $\alpha_1 + \alpha_2 = i\sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}$; $\text{Im } \alpha_{1,2} > 0$. Nu is dus

$W(\omega) = \phi_1(\omega)$, zodat een particuliere oplossing $\xi(\omega) = 1$ is. De algemene oplossing is

$$\xi(\omega) = 1 + \frac{G(\omega)}{\phi_1(\omega)}$$

$$x(\omega) = \frac{\xi(\omega)}{a(\omega) \{1 - \xi(\omega)\}}$$

$$x(\omega) = -\omega^2 \frac{G(\omega) + \phi_1(\omega)}{G(\omega)}$$

waarbij $G(\omega)$ een gehele functie is (met evt. reële polen). Door passende keuze van $G(\omega)$ kunnen we nu een goede operator vinden.

ξ

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

door W.H.Muller.

De theorie van de spelen en het economisch gedrag.

Het enige jaren geleden verschenen boek van J.von Neumann en O.Morgenstern "Theory of games and economic behavior" wil een nieuwe formulering geven van de problemen uit de economische toepassingen van de wiskunde. De nadruk ligt ten eerste op het scherp stellen van de problemen en ten tweede wordt getracht de grondslagen van de mathematische theorie zó vast te leggen, dat in die gevallen, die ook een oplossing in de niet wiskundige theorie hebben, de oplossingen in beide theorieën overeenstemmen. Pas indien dit het geval is, kan er aan gedacht worden de theorieën van Neumann en Morgenstern toe te passen op problemen, die niet op andere wijze kunnen worden opgelost. De schrijvers geven voor slechts een zeer klein deel van de gestelde problemen oplossingen of oplossingsmethoden aan. De opzet is echter zo nieuw, dat dit in plaats van als een gebrek, beter als een uitdaging kan worden gezien. Verdere beschouwingen over de theorie kunnen echter beter worden gehouden, nadat de theorie zelf is uiteengezet.

De algemene definitie van een spel.

Onderscheiden moet worden een spel, d.i. een verzameling van abstracte regels - de spelregels - en een partij, de concretisering van het spel, het spelen van het spel van begin tot eind.

Het spel Γ wordt gespeeld door n spelers en bestaat uit een rij zetten $M_1, M_2 \dots M_n$, die achtereenvolgens plaatsvinden. Voor iedere zet M_k bestaan α_k verschillende mogelijkheden $a_k(1) \dots a_k(\alpha_k)$. Een zet kan zijn een persoonlijke zet, wanneer een van de spelers een keus doet uit de α_k mogelijkheden, of een waarschijnlijkheidszet, waarbij de keus wordt gedaan door een of ander mechanisme, waaruit de mogelijkheden met bepaalde bekende waarschijnlijkheden $P_k(1) \dots P_k(\alpha_k)$ te voorschijn kunnen komen. B.v. bij tric-trac wisselen waarschijnlijkheids-zetten - het gooien met de dobbelstenen - en persoonlijke zetten - het verzetten van de schijven - elkaar af.

Door de spelregels moet vóór elke zet vast staan of het een waarschijnlijkheids-zet is, of een persoonlijke zet; in het laatste geval bovendien van welke speler. Dit kan gebeuren door het geven van een getal κ uit de rij $(0, 1, \dots, n)$.

$k_k = 0$ betekent een waarschijnlijkheids-zet; $k_k = 1 \dots n$ een persoonlijke zet resp. van speler $1 \dots n$.

De zet kan worden gekarakteriseerd door het nummer $\bar{\sigma}_k = (1 \dots \alpha_k)$ van de gekozen mogelijkheid.

Een partij wordt volledig beschreven door een rij getallen $\sigma_1 \dots \sigma_v$ die voor iedere zet het nummer van de gekozen mogelijkheid aangeven. De winst van de speler k is een functie van deze getallen

$$F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_v) \quad k=1, \dots, n$$

De keuze van de speler k_k in de zet M_k wordt bepaald door zijn kennis van de vroegere zetten, dat zijn de zetten, die in de tijd aan M_k zijn vooraf gegaan. Na afloop van de zet M_{k-1} , moet in ieder geval het getal k_k bekend zijn; verder bij een waarschijnlijkheids-zet de mogelijkheden $a_k(1) \dots a_k(\alpha_k)$ de waarschijnlijkheden $P_k(1) \dots P_k(\alpha_k)$; bij een persoonlijke zet moeten aan de speler k_k de mogelijkheden $a_k(1) \dots a_k(\alpha_k)$ bekend zijn. Het is echter niet nodig, dat k_k de resultaten van alle vroegere zetten kent. Bij schak en tric-trac is dit wel het geval, bij bridge niet. Bridge wordt door 2 spelers gespeeld, maar iedere speler bestaat uit 2 personen. Zo komt het, dat de speler (N-Z) bij de helft van zijn zetten wel weet wat voor kaarten in zijn hand heeft en bij de andere zetten niet, m.a.w. de informatie is niet transitief. Nauwkeuriger beschouwd betekent dit het volgende.

Bridge begint met 4 waarschijnlijkheids-zetten: M_1 : N krijgt 13 kaarten; M_2 : O krijgt 13 kaarten; M_3 : Z krijgt 13 kaarten; M_4 : W krijgt 13 kaarten. Ieder bod is ook een zet, daarna begint het uitspelen van de kaarten. Neem aan dat de kaarten van O op tafel liggen. De zet M_k is: N speelt een kaart uit. M_λ is: Z speelt een kaart uit. M_k is vroeger dan M_λ . De speler (N-Z) weet bij M_1 het resultaat van M_1 , bij M_2 weet hij het resultaat van M_k maar niet van M .

Algemeen is voor een zet M_k bekend de waarde van een verzameling Φ_k van functies $f_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$

waaronder het nummer van de speler $k_k = k_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$
en het aantal mogelijke keuzen $\alpha_k = \alpha_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$

De speler moet zijn keuze dus uitsluitend baseren op de kennis van de waarde van deze functies, daarnaast kan hij echter al zijn vernuft en inzicht te hulp roepen. Aangenomen wordt, dat het aantal zetten van het spel een door de spelregels bepaalde constante is. Daarvoor is slechts nodig dat er een getal \mathcal{D}^* bestaat, zodat de spelregels geen partij met meer dan \mathcal{D}^* zetten toestaan (vgl. de remiseregels bij schak). In de praktijk bestaat dit getal \mathcal{D}^* meestal wel, door "sabotage" kan een partij soms wel oneindig lang duren (voortdurend down gaan bij bridge om de robber tegen te houden). Een partij met minder dan \mathcal{D}^* zetten, wordt aangevuld tot \mathcal{D}^* zetten, met waarschijnlijkheids-zetten, waarbij het de waarschijnlijkheid één heeft, dat er niets gebeurt.

Strategie.

Een strategie is een volledig plan, dat een speler van te voren opmaakt, en waarin hij zijn gedrag in iedere mogelijke situatie, die in het spel kan voorkomen, vastlegt.

Het resultaat van een partij voor de speler k hangt nu af van de strategie, die hij kiest, maar ook van de strategieën, die de tegenstanders voor zich kiezen. Iedere speler kiest zijn strategie onafhankelijk van alle anderen en zonder de keuze van de anderen te kennen. De uitslag van een partij hangt dus af van de keuze van de strategieën en van de uitslag van de waarschijnlijkheids-zetten. Laat de speler k de keuze hebben tussen β_k strategieën (dit aantal is reusachtig groot, maar eindig) en laat alle waarschijnlijkheidszetten samen resulteren in β_0 mogelijkheden met waarschijnlijkheden $P^{(1)} \dots P^{(\beta_0)}$

Het resultaat van de speler k kan dan worden uitgedrukt door $F_k(\pi) = G_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$ met de waarschijnlijkheid $P^{(\tau_0)}$, d.w.z. elk der spelers kiest een getal $\tau_k, k=1 \dots n \quad \tau_n = 1 \dots \beta_n$

d.w.z. een strategie onafhankelijk van alle anderen en de waarschijnlijkheidszetten leveren het nummer $\tau_0 (1 \dots \beta_0)$ met de waarschijnlijkheid $P^{(\tau_0)}$ Deze waarschijnlijkheden worden geëlimineerd door de mathematische verwachting in te voeren

$$K_k(\tau_1 \dots \tau_n) = \sum_{\tau_0=1}^{\beta_0} P^{(\tau_0)} G_k(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$$

De spelen kunnen nu worden verdeeld in spelen met som nul, d.w.z.

$$\sum_{k=1}^n K_k(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0$$

en algemene spelen, waarbij $\sum_{k=1}^n K_k(\tau_1, \dots, \tau_n)$ niet aan beperkingen onderworpen is. De echte spelletjes vallen in de eerste categorie, wat een speler wint, verliezen een of meer anderen. De tweede categorie komt voor in economische toepassingen, als door productie waardevermeerdering ontstaat. Eerst zullen worden beschouwd spelen met som nul. Van deze spelen zal eerst het spel met 2 spelers uitvoerig worden bekeken. De daar gevonden resultaten zullen dan worden toegepast op spelen met meer dan twee spelers en som nul, terwijl tenslotte iets zal worden gezegd over de algemene spelen en hun toepassingen op de economie.

Het spel met twee spelers en som nul.

Het meest eenvoudige geval is een spel met 1 speler, b.v. patience. Een partij is hier min of meer een strijd tegen waarschijnlijkheidszetten. De theorie schakelt deze laatste echter uit door het bepalen van de mathematische verwachting. Er blijft dus over een functie $K(\tau) \tau=1 \dots \beta$ waarin de speler de variabele τ willekeurig kan kiezen en dit zo zal doen, dat $K(\tau)$ maximaal wordt. Het economische voorbeeld is minder triviaal, het is Robinson Crusoe op zijn eiland, of ook de 100% geleide economie, die door een wil beheerst wordt (Huxley - Brave New World).

In het spel met twee spelers en som nul moeten beide spelers onafhankelijk van elkaar een strategie kiezen; de eerste speler wil $\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2)$ zo groot mogelijk maken, de tweede wil $\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2)$ zo groot mogelijk maken. Het is spel met som nul dus

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) + \mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) = 0$$

zodat we kunnen zetten

$$\mathcal{K}_1(\tau_1, \tau_2) = -\mathcal{K}_2(\tau_1, \tau_2) = \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$$

De eerste speler wil $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ zo groot mogelijk maken, maar beheerst alleen τ_1 .

De tweede speler wil $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ zo klein mogelijk maken, maar beheerst alleen τ_2 .

Dit is het essentiële verschil met het spel met één speler. Bij één speler beheerst de speler alle variabelen, bij twee spelers beheerst ieder maar de helft van de variabelen.

Enige stellingen A) $\max_x \max_y \phi(x,y) = \max_y \max_x \phi(x,y)$

B) $\min_x \min_y \phi(x,y) = \min_y \min_x \phi(x,y)$

C) $\max_x \min_y \phi(x,y) \leq \min_y \max_x \phi(x,y)$

x en y kunnen ieder slechts eindig veel waarden aannemen.

Als in C het gelijktteken geldt voor een punt (x_0, y_0) is dit een zadelpunt.

We beschouwen het spel Γ_1 dat wat betreft de spelregels geheel overeenstemt met Γ , de speler 2 kiest echter zijn strategie, terwijl hij weet welke strategie 1 gekozen heeft;

en het spel Γ_2 dat ook in de spelregels geheel overeenstemt met Γ maar waarin speler 1 zijn strategie kiest, terwijl hij weet, welke strategie 2 heeft gekozen. Vanuit het standpunt van 1 is Γ_1 ongunstiger, Γ_2 gunstiger dan Γ .

Wat gebeurt bij Γ_1 : 2 zal die strategie τ_2 kiezen, die $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ zo klein mogelijk maakt bij de door 1 gekozen $\tau_1 = \tau_1'$ dan ontvangt 1

$$v_1 = \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1', \tau_2)$$

Daarom zal 1 τ_1' zo kiezen, dat dit minimum zo groot mogelijk is; dus de waarde van Γ_1 voor 1 is

$$v_1 = \max_{\tau_1} \min_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$$

als 1 goed speelt wint hij minstens v_1 } v_1 is de waarde van Γ_1 voor 1
als 2 goed speelt wint 1 hoogstens v_1 } $-v_1$ is de waarde van Γ_1 voor 2.
Analoog is de waarde van Γ_2 voor 1

$$v_2 = \min_{\tau_1} \max_{\tau_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$$

als 1 goed speelt wint hij minstens v_2 ,
als 2 goed speelt verliest hij hoogstens v_2 .

Volgens C is

$$v_1 \leq v_2$$

Voor het spel Γ zal gelden $v_1 \leq v \leq v_2$; $\Delta = v_2 - v_1$

In het speciale geval $\Delta = 0$ $v_1 = v = v_2$ geldt:

als 1 goed speelt wint hij minstens v , als 2 goed speelt wint 1 hoogstens v . In dit geval heet v de waarde van het spel Γ voor 1 en heet het spel volkomen bepaald.

Door goed spelen kan 1 minstens v winnen, onafhankelijk wat 2 doet
 " " " " 2 " $-v$ " " " " 1 "

Bij een niet volkomen bepaald spel ($v_1 < v_2$) is het van voordeel zijn tegenstander te "doorgronden", te weten te komen welke strategie hij kiest, vóór zelf zijn keuze te maken.

Een niet volkomen bepaald spel is het volgende: 1 en 2 leggen beide een cent neer, zonder te weten wat de ander doet, Liggen beide munt of beide kruis, dan wint 1, anders 2.

$\mathcal{K}(t_1, t_2)$ heeft de waarden

$$\max_{t_1} \min_{t_2} \mathcal{K}(t_1, t_2) = -1$$

$$\min_{t_2} \max_{t_1} \mathcal{K}(t_1, t_2) = +1$$

$t_1 \backslash t_2$	1	2
1	1	-1
2	-1	1

Als 1 er achter komt, hoe 2 zijn cent gelegd heeft, kan hij zijn cent net zo leggen en wint hij; overeenkomstig voor 2. Het is dus van belang dat een speler zorgt, dat zijn tegenstander niet te weten kan komen, wat hij van plan is te doen. Een afdoend middel is de cent niet neer te leggen, maar op te gooien, dus de twee mogelijkheden tegelijk met de waarschijnlijkheid $\frac{1}{2}$ te spelen. Om hiervan de consequenties na te gaan, zijn enkele hulpstellingen nodig.

Enkele hulpstellingen.

A. Gegeven p punten in een n -dimensionale ruimte $\underline{x}^1 \dots \underline{x}^n$. Een punt \underline{y} behoort hetzij tot de convexe verz. C opgespannen door $\underline{x}^1 \dots \underline{x}^n$, hetzij bestaat er een hypervlak door \underline{y} , zodat C geheel aan een zijde van dit hypervlak ligt.

Bewijs. Neem aan dat \underline{y} niet in C ligt, \underline{z} is het punt van C , dat het dichtst bij \underline{y} ligt, dus waarvoor $|\underline{z} - \underline{y}|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i - y_i|^2$ minimaal is.

Is \underline{u} een willekeurig punt in C , dan ligt ook $t\underline{u} + (1-t)\underline{z}$ in C , dus

$$|t\underline{u} + (1-t)\underline{z} - \underline{y}|^2 \geq |\underline{z} - \underline{y}|^2 \quad \text{of} \quad |(z-y) + t(u-z)|^2 \geq |z-y|^2$$

door overgang op coördinaten voor $t \neq 0$; $2 \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)(u_i - z_i) + t \sum_{i=1}^n (u_i - z_i)^2 \geq 0$
 in de limiet voor $t \rightarrow 0$; $\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)(u_i - z_i) \geq 0$,

daar

$$u_i - y_i = (u_i - z_i) + (z_i - y_i)$$

is

$$\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)(u_i - y_i) = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)(u_i - z_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \geq 0 \quad \text{want} \\ \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 > 0.$$

Dus

$$\sum_{i=1}^n (z_i - y_i) u_i - \sum_{i=1}^n (z_i - y_i) y_i > 0 \quad \text{voor alle } \underline{u} \text{ uit } C.$$

Het hypervlak $\sum_{i=1}^n a_i u_i - b = 0$ met $a_i = (z_i - y_i)$; $b = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i) y_i$ gaat door \underline{y} . C ligt geheel aan een zijde van dit vlak.

B. Gegeven een matrix a_{ij} met n rijen en m kolommen.

Dan bestaan er hetzij m getallen $x_j (j=1 \dots m) \geq 0$; $\sum_{j=1}^m x_j = 1$; met

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq 0 \quad (i=1 \dots n)$$

hetzij n getallen $w_i (i=1 \dots n) \geq 0$; $\sum_{i=1}^n w_i = 1$; met $\sum_{i=1}^n w_i a_{ij} > 0 (j=1 \dots m)$

Bewijs. Beschouw de m kolommen van de matrix a_{ij} als m punten \underline{x}^j in een n -dim. ruimte $x_i^j = a_{ij}$

Pas stelling A toe op de $p=m+n$ punten $\underline{x}^1 \dots \underline{x}^m \delta^1 \dots \delta^n$, waarin δ^i het punt is met i^{de} coördinaat 1 en de andere coördinaten 0, en $\underline{y} = \underline{0}$.

Behoort \underline{y} tot de verzameling C , dan is

$$\sum_{j=1}^m t_j \underline{x}^j + \sum_{i=1}^n s_i \delta^i = \underline{0}; \quad \sum_{j=1}^m t_j + \sum_{i=1}^n s_i = 1; \quad t_j \geq 0; \quad s_i \geq 0$$

$$\text{in coördinaten } \sum_{j=1}^m t_j x_k^j = -s_k \leq 0 \text{ of } \sum_{j=1}^m a_{kj} t_j \leq 0$$

met $x_j = \frac{t_j}{\sum_{j=1}^m t_j}$ is dus $\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq 0$ met $x_j \geq 0$; $\sum_{j=1}^m x_j = 1$

Behoort $\underline{y} = \underline{0}$ niet tot C , dan bestaat een hypervlak $\sum_{i=1}^n a_i u_i = 0$ zodat

$$\sum_{i=1}^n a_i u_i > 0 \text{ voor alle punten van } C; \quad u_i = \delta_i^k \text{ levert } a_i > 0; \quad u_i = x_i^j = a_{ij}$$

levert $\sum_{i=1}^n a_i a_{ij} > 0$ als $w_i = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ is $\sum_{i=1}^n w_i a_{ik} > 0; w_i \geq 0; \sum_{i=1}^n w_i = 1$

Als de spelers in het vroeger genoemde spel de centen opgooien, i.p.v. neerleggen, betekent dit, dat zij beide strategieën met de waarschijnlijkheid $\frac{1}{2}$ spelen.

In het algemeen zal speler 1 niet één strategie, d.w.z. een getal uit

$$1 \dots \beta_1 \text{ kiezen, maar } \beta_1 \text{ getallen } \xi_1 \dots \xi_{\beta_1} \geq 0; \quad \sum_{\tau=1}^{\beta_1} \xi_{\tau} = 1$$

de waarschijnlijkheden van zijn strategieën.

Evenzo kiest 2 β_2 getallen $\eta_1 \dots \eta_{\beta_2} \geq 0$; $\sum_{\tau=1}^{\beta_2} \eta_{\tau} = 1$

als waarschijnlijkheden van zijn strategieën.

Speler 1 heeft nu de mathematische verwachting:

$$K(\xi, \eta) = \sum_{\tau=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau, \tau_2) \xi_{\tau} \eta_{\tau_2}$$

Bij deze opvatting bestaat weer de "waarde" van Γ , (1 speelt eerst), die is

$$v_1' = \max_{\xi} \min_{\eta} K(\xi, \eta)$$

de "waarde" van Γ_2 is $v_2' = \min_{\eta} \max_{\xi} K(\xi, \eta)$

Nu is juist als vroeger $v_1' \leq v_2'$.

We zijn echter een stap verder, want $v_1 \leq v_1' \leq v_2' \leq v_2$

dus als $v_1 = v_2 = v$ is ook $v_1' = v_2' = v$

het omgekeerde hoeft echter niet waar te zijn.

Dit wordt bewezen met behulp van 2 lemma's, die bovendien een nieuw licht werpen op de "gemengde strategie".

$$A. \text{Min}_{\eta} K(\xi, \eta) = \text{Min}_{\tau_2} \sum_{i_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$$

$$B. \text{Max}_{\xi} K(\xi, \eta) = \text{Max}_{\tau_1} \sum_{i_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}$$

Bewijs A.

$$\text{Min}_{\eta} K(\xi, \eta) = \text{Min}_{\eta} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2} \quad \text{Kies speciaal } \eta_{\tau_2} = \xi_{\tau_2}'$$

$$\text{Min}_{\eta} K(\xi, \eta) \leq \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2') \xi_{\tau_1} \quad \text{omdat dit voor alle } \tau_2' \text{ geldt}$$

$$\text{Min}_{\eta} K(\xi, \eta) \leq \text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$$

Verder is voor alle τ_2

$$\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2') \xi_{\tau_1} \geq \text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \quad \text{verm. met } \eta_{\tau_2}' \text{ en tel op over } \tau_2'$$

$$\text{dus } \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2} \geq \left\{ \text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \right\} \left\{ \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} \right\}$$

$$\text{maar } \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta_{\tau_2} = 1$$

$$\text{dus ook } \text{Min}_{\eta} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2} \geq \text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$$

B. wordt analoog bewezen.

Hiermee vinden we voor v_1' en v_2' nieuwe uitdrukkingen

$$v_1' = \text{Max}_{\xi} \text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$$

$$v_2' = \text{Min}_{\eta} \text{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}$$

De 1^{ste} wil zeggen: in spel Γ_2 wint speler 2 niets extra door een gemengde strategie toe te passen, 1 weet precies hoe 2 op zijn keuze zal reageren.

1 zelf bereikt echter wel iets, in de oude methode had 1 slechts de keus tussen de τ_1 , eenheidsvectoren $\xi = \delta_{\tau_1}$, nu wordt het maximum over een ruimer gebied bepaald, dus $v_1 \leq v_1'$ evenzo $v_2' \leq v_2$.

Het blijkt echter dat $v_1' = v_2'$, met de gemengde strategieën is dus ieder spel volkomen bepaald.

Bewijs: Er bestaat hetzij een punt ξ zodat $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \geq 0$ of een η zodat $\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2} \leq 0$

In het eerste geval is ook $\text{Min}_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \xi_{\tau_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \geq 0$

dus zeker het maximum $v_1' \geq 0$

In het tweede geval is ook $\text{Max}_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \leq 0$

dus zeker het Min. $v_2' \leq 0$

Onmogelijk is dus $v_1' < 0 < v_2'$.

Pas hetzelfde toe op: $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) - W$; $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \{\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) - W\} \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2} = K(\xi, \eta) - W$

dan is dus $v_1' - W < 0 < v_2' - W$ onmogelijk, dus kan geen w bestaan, zodat

$v_1' \leq w < v_2'$ dus moet $v_1' = v_2' = v'$.

v' heet de waarde van het spel.

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

Theorie van de spelen en het economisch gedrag.

(vervolg)

W.H.Muller.

Bewezen is $v_1' = \max_{\xi} \min_{\eta} K(\xi, \eta) = \min_{\eta} \max_{\xi} K(\xi, \eta) = v_2'$ en

$$\min_{\eta} K(\xi, \eta) = \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1},$$

$$\max_{\xi} K(\xi, \eta) = \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}$$

$$K(\xi, \eta) = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1} \eta_{\tau_2}$$

A is de verzameling van alle ξ waarvoor $\min_{\eta} K(\xi, \eta)$ zijn $\max v_1'$ bereikt.

B is de verzameling van alle η waarvoor $\max_{\xi} K(\xi, \eta)$ zijn $\min v_2'$ bereikt.

Als speler 1 maar een $\xi = \xi'$ uit A kiest, is $K(\xi', \eta) \geq \min_{\eta} K(\xi', \eta) = v_1'$ dus speler 1 krijgt, als hij verstandig speelt, minstens v_1' , onafhankelijk van wat 2 doet.

Als speler 2 maar een $\eta = \eta'$ uit B kiest, is $K(\xi, \eta') \leq \max_{\xi} K(\xi, \eta') = v_2'$ dus speler 2 krijgt, als hij verstandig speelt, minstens $-v_2'$, onafhankelijk van wat 1 doet.

Als speler 1 een $\xi = \xi'$ uit A kiest en speler 2 een $\eta = \eta'$ uit B kiest, is de uitslag, (d.w.z. de mathematische verwachting) van de partij voor speler 1 steeds $v = v_1' = v_2'$ en voor speler 2 steeds $-v$.

Voor $\xi = \xi'$ uit A en $\eta = \eta'$ uit B is dus $v' = \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1} \eta'_{\tau_2}$

maar ook $v' = v_1' = \min_{\eta} K(\xi', \eta) = \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1}$ dus $v' =$

$$= \sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta'_{\tau_2} \left\{ \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1} \right\}, \text{ zodat}$$

$$\sum_{\tau_2=1}^{\beta_2} \eta'_{\tau_2} \left\{ \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1} - \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1} \right\} = 0.$$

Nu is $\eta'_{\tau_2} \geq 0$ en ook de vorm tussen accoladen is ≥ 0 , er staat dus een som van getallen, die alle ≥ 0 zijn en deze som is nul, dan moet iedere term van die som nul zijn. Dus

Stelling D. Voor die waarden van τ_2 , waarvoor $\sum_{\tau_1=1}^{\beta_1} \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi'_{\tau_1}$ (met ξ' uit A) niet gelijk is aan de minimum waarde v_1' , is voor η' in B: $\eta'_{\tau_2} = 0$.

Zo ook: Voor die waarden van τ_1 , waarvoor $\sum_{\tau_2=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}$ (met η_1 uit B) niet gelijk is aan de maximum waarde v_2' is voor ξ_1 uit A: $\xi_1 = 0$.

Voorbeeld 1.

Voor het reeds genoemde spel van "centen vergelijken" heeft $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ de waarden

$\tau_1 \backslash \tau_2$	1	2
1	1	-1
2	-1	1

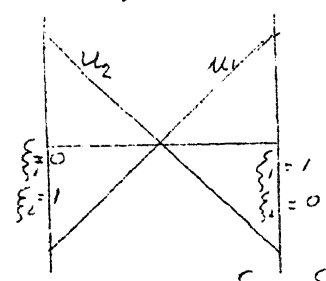
$v_1 = -1$
 $v_2 = +1$

Nu is

$$v_1' = \max_{\xi} \min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$$

In dit geval is $\sum_{\tau_1=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$ voor $\tau_2 = 1 : u_1 = \xi_1 - \xi_2 \geq 0$
 $\tau_2 = 2 : u_2 = -\xi_2 + \xi_1 \geq 0$

Voor iedere (vaste) ξ moet onderzocht worden, welke van deze functies de kleinste is;



dus voor $0 \leq \xi_1 \leq \frac{1}{2}$ is u_1 de kleinste
 voor $\frac{1}{2} \leq \xi_1 \leq 1$ is u_2 de kleinste
 $\min_{\tau_2} \sum_{\tau_1=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \xi_{\tau_1}$ is dus een gebroken lijn. Het maximum $v_1' = 0$

wordt bereikt voor $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}$. Verder is

$$v_2' = \min_{\eta} \max_{\tau_1} \sum_{\tau_2=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2}$$

$$\sum_{\tau_2=1}^2 \mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) \eta_{\tau_2} \text{ is hier: voor } \tau_1=1 \quad w_1 = \eta_1 - \eta_2$$

$$\text{voor } \tau_1=2 \quad w_2 = -\eta_1 + \eta_2$$

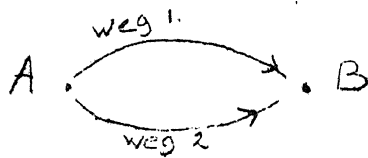
Voor $0 \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2}$ is w_2 de grootste; voor $\frac{1}{2} \leq \eta_1 \leq 1$ is w_1 de grootste.
 Dus het minimum v_2' wordt bereikt voor $\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{2}$.

Beide spelers moeten de twee mogelijkheden met waarschijnlijkheden $1/2$ spelen.

Voorbeeld 2.

Om duidelijk te doen uitkomen, dat de spelers hun strategieën volkomen onafhankelijk van elkaar kiezen, wordt dit voorbeeld ontleend aan de oorlogsstrategie.

"Speler" I heeft twee bommenwerpers, die vanaf het vliegveld A een aanval doen op het doel B. Zij kunnen langs twee wegen van A naar B gaan:



Strategieën: $\tau_1 = 1$; beide gaan langs weg 1
 $\tau_1 = 2$; één langs weg 1, de ander langs weg 2
 $\tau_1 = 3$; beide gaan langs weg 2.

"Speler" II heeft de beschikking over 3 jagers.

Strategieën: $\tau_2 = 1$; alle 3 jagers gestationneerd op weg 1
 $\tau_2 = 2$; 2 jagers op weg 1, 1 jager op weg 2
 $\tau_2 = 3$; 1 jager op weg 1, 2 jagers op weg 2
 $\tau_2 = 4$; alle 3 jagers gestationneerd op weg 2.

Bij een ontmoeting tussen een jager en een bommenwerper is:

- de kans $1/4$ dat ze elkaar niet zien of raken,
- " " $1/4$ dat alleen de jager wordt neergeschoten,
- " " $1/4$ dat alleen de bommenwerper wordt neergeschoten,
- " " $1/4$ dat beide worden neergeschoten,

Voor speler I gelden de volgende waarderingen:

Neerschieten van een bommenwerper - λ
 " " " jager + μ
 Uitvoeren van het bombardement + δ (per bommenwerper).

De weg terug wordt niet bekeken, om het voorbeeld niet te gecompliceerd te maken voor een voordracht.

Voor de functie $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2)$ geldt nu het schema

	1	2	3	4
1	BBJJJ	BBJJ + J	BBJ + JJ	BB + JJJ
2	BJJJ + B	BJJ + BJ	BJ + BJJ	B + BJJJ
3	JJJ + BB	JJ + BBJ	J + BBJJ	BBJJJ

Hierin betekent b.v. BJJ + BJ : één bommenwerper gaat langs weg 1, waar 2 jagers gestationneerd zijn; de andere gaat langs weg 2, waar 1 jager gestationneerd is.

JJ + BBJ: op weg 1 zijn twee jagers gestationneerd, en de twee bommenwerpers gaan langs weg 2, waar zich maar één jager bevindt, enz.

(1) Nu is $BJ = 1/4(JB + B + J + 1)$

JB : de bommenwerper is de jager zonder ongelukken voor beide gepasseerd en voert het bombardement uit: waarde voor I: δ

B : de bommenwerper heeft de jager neergeschoten en voert het bombardement uit. . . Waarde voor I: $\mu + \delta$

J : de jager heeft de bommenwerper neegeschoten.
 Waarde voor I: $-\lambda$

1 : jager én bommenwerper zijn neergeschoten.

Waarde voor I : $-\lambda + \mu$

dus (2) $BJ = 1/4(-2\lambda + 2\mu + 2\delta) = \frac{-\lambda + \mu + \delta}{2}$

Vermenigvuldig (1) vóór met B.

$BBJ = 1/4(BJB + BB + BJ + B) = 1/4 \left\{ \frac{(JB+B+J+1)B}{4} + BB + \frac{JB+B+J+1}{4} + B \right\}$

(3) $BBJ = \frac{1}{16} (JBB + 5 BB + 2 JB + 6 B + J + 1)$

De waarde voor I van de termen is:

$JBB = 2\delta$; $BB = \mu + 2\delta$; $JB = -\lambda + \delta$; $B = -\lambda + \mu + \delta$

$J = -2\lambda$; $1 = -2\lambda + \mu$

(4) $BBJ = \frac{-3\lambda + 3\mu + 5\delta}{4}$

Zo ook

(5) $BJJ = \frac{1}{16} (JJB + 2JB + B + 5JJ + 6J + 1)$

(6) $BJJ = \frac{-3\lambda + 3\mu + \delta}{4}$

(7) $BBJJ = \frac{1}{256} \{ JJB + 10JBB + 10JJB + 25BB + 48JB + 25JJ + 54B + 54J + 29 \}$

(8) $BBJJ = \frac{-41\lambda + 41\mu + 23\delta}{32}$

(9) $BJJJ = \frac{1}{64} \{ JJJB + 3JJB + 3JB + B + 21JJJ + 27JJ + 7J + 1 \}$

(10) $BJJJ = \frac{-7\lambda + 7\mu + \delta}{8}$

(11) $BBJJJ = \frac{1}{4096} \{ JJJB + 42JJJB + 441JJJ + 15JJB + 258JJB + 1107JJ + 75JBB + 518JB + 907J + 125BB + 366B + 241 \}$

(12) $BBJJJ = \frac{-411\lambda + 411\mu + 101\delta}{256}$

Het schema voor de functie $256 V(\tau_1, \tau_2)$ wordt nu:

$\tau_1 \backslash \tau_2$	1	2	3	4
1	$-411\lambda + 411\mu + 101\delta$	$-328\lambda + 328\mu + 184\delta$	$-192\lambda + 192\mu + 320\delta$	512δ
2	$-224\lambda + 224\mu + 288\delta$	$-320\lambda + 320\mu + 192\delta$	$-320\lambda + 320\mu + 192\delta$	$-224\lambda + 224\mu + 288\delta$
3	512δ	$-192\lambda + 192\mu + 320\delta$	$-328\lambda + 328\mu + 184\delta$	$-411\lambda + 411\mu + 101\delta$

stel nog $\lambda - \mu + \delta = \rho$

$\rho > 0$ daar een jager (μ) minder waard is dan een bommenwerper (λ) + de schade door een bombardement δ .

$\tau_1 \backslash \tau_2$	1	2	3	4
1	$-411\rho + 512\delta$	$-328\rho + 512\delta$	$-192\rho + 512\delta$	512δ
2	$-224\rho + 512\delta$	$-320\rho + 512\delta$	$-320\rho + 512\delta$	$-224\rho + 512\delta$
3	512δ	$-192\rho + 512\delta$	$-328\rho + 512\delta$	$-411\rho + 512\delta$

Voor iedere (ξ_1, ξ_2, ξ_3) moet nu worden onderzocht, welke van

$$u_1 = (-411\rho + 512\delta)\xi_1 + (-224\rho + 512\delta)\xi_2 + (512\delta)\xi_3$$

$$u_2 = (-328\rho + 512\delta)\xi_1 + (-320\rho + 512\delta)\xi_2 + (-192\rho + 512\delta)\xi_3$$

$$u_3 = (-192\rho + 512\delta)\xi_1 + (-320\rho + 512\delta)\xi_2 + (-328\rho + 512\delta)\xi_3$$

$$u_4 = (512\delta)\xi_1 + (-224\rho + 512\delta)\xi_2 + (-411\rho + 512\delta)\xi_3$$

de kleinste is.

In fig. 1 zijn aangegeven de gebieden, waar resp. u_1, u_2, u_3, u_4 de kleinste is. Gezicht moet nu worden naar het punt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) waarvoor de kleinste van de u_i in dat punt maximaal is.

Daar de functies u_i lineair zijn, kan dit maximum slechts in een grenspunt van enige gebieden worden aangenomen.

Nu is voor de in Fig. 1 aangegeven punten:

ξ_1	ξ_2	ξ_3	u_1	u_2	u_3	u_4
1	0	0	<u>$-411\rho + 512\delta$</u>	$-328\rho + 512\delta$	$-192\rho + 512\delta$	512δ
0,536	0,464	0	<u>$-324\rho + 512\delta$</u>	<u>$-324\rho + 512\delta$</u>	$-251\rho + 512\delta$	$-104\rho + 512\delta$
0,698	0	0,302	<u>$-257\rho + 512\delta$</u>	<u>$-287\rho + 512\delta$</u>	<u>$-206\rho + 512\delta$</u>	$-124\rho + 512\delta$
0	1	0	$-224\rho + 512\delta$	<u>$-320\rho + 512\delta$</u>	<u>$-320\rho + 512\delta$</u>	$-224\rho + 512\delta$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-205\frac{1}{2}\rho + 512\delta$	<u>$-260\rho + 512\delta$</u>	<u>$-260\rho + 512\delta$</u>	$-205\frac{1}{2}\rho + 512\delta$
0,302	0	0,698	$-124\rho + 512\delta$	<u>$-206\rho + 512\delta$</u>	<u>$-287\rho + 512\delta$</u>	<u>$-257\rho + 512\delta$</u>
0	0,464	0,536	$-104\rho + 512\delta$	$-251\rho + 512\delta$	<u>$-324\rho + 512\delta$</u>	<u>$-324\rho + 512\delta$</u>
0	0	1	512δ	$-192\rho + 512\delta$	$-328\rho + 512\delta$	<u>$-411\rho + 512\delta$</u>

De minima van iedere regel zijn onderstreept.

Het maximum van deze minima ligt in de regel $\xi_1 = \xi_3 = \frac{1}{2}$ en is $-260\rho + 512\delta$

Nu maken wij gebruik van stelling D., die hier zegt dat alleen

$\eta_2 \neq 0$ en $\eta_3 \neq 0$. We hoeven dus slechts te beschouwen de functies

$$w_1 = (-328\rho + 512\delta) + (-192\rho + 512\delta)\eta_3$$

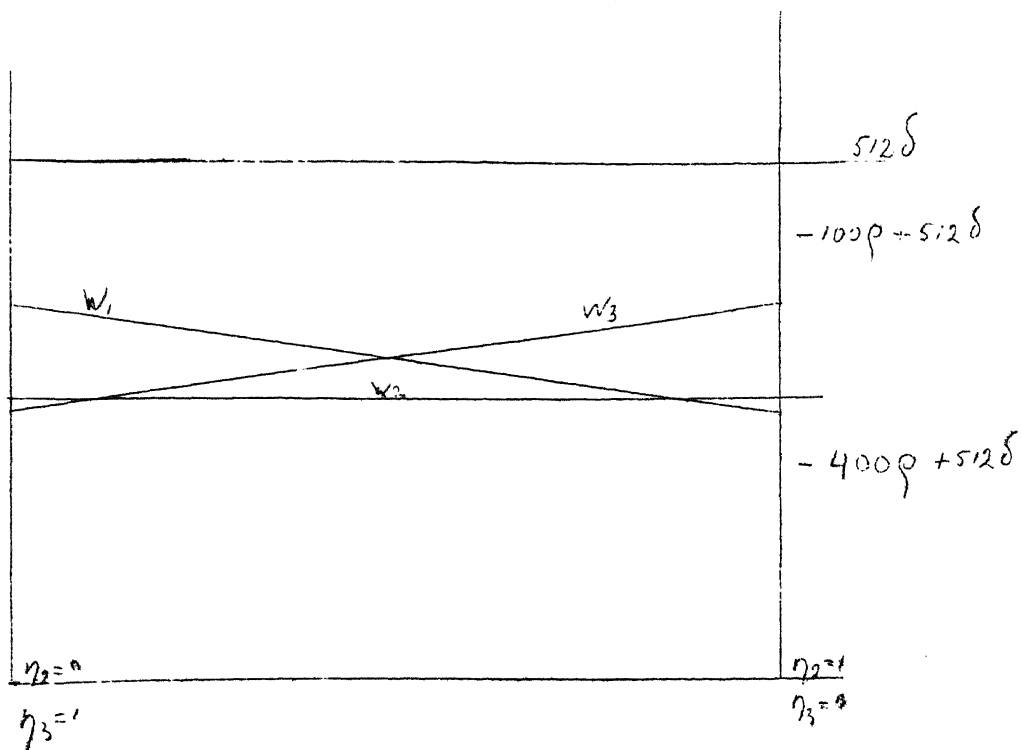
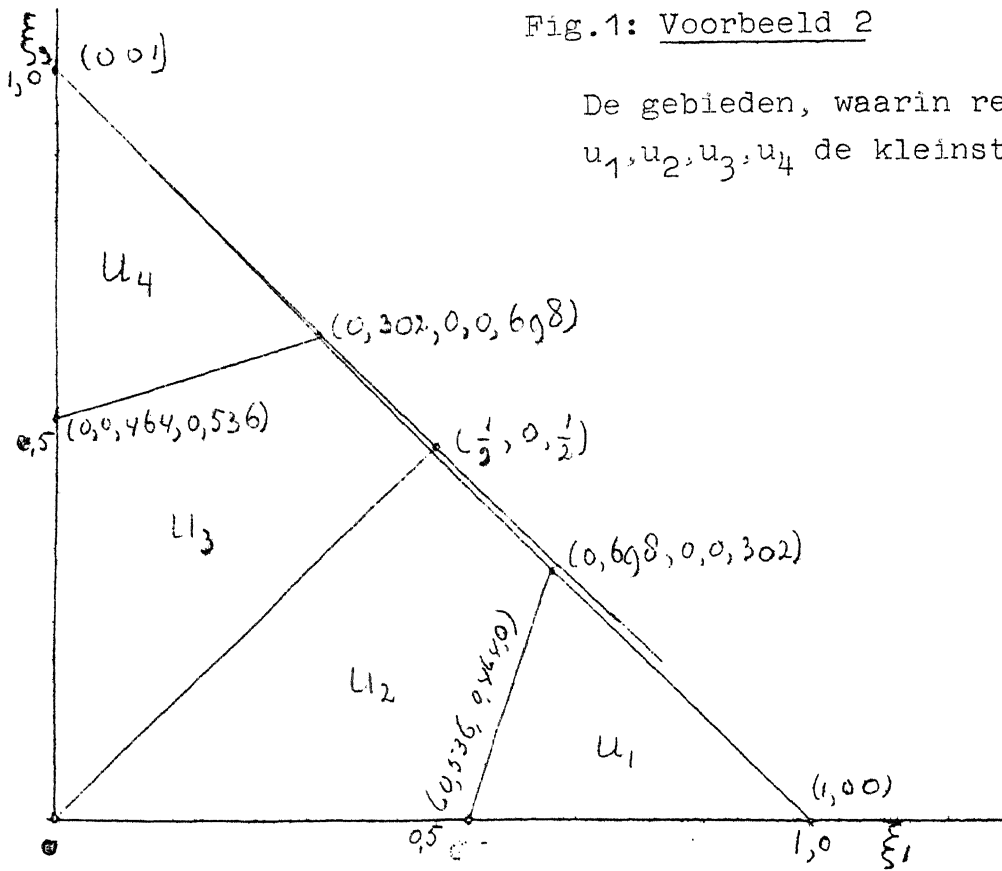
$$w_2 = (-320\rho + 512\delta) + (-320\rho + 512\delta)\eta_3$$

$$w_3 = (-192\rho + 512\delta) + (-328\rho + 512\delta)\eta_3$$

In fig. 2 zijn deze lijnen getekend. Het blijkt, dat voor $0 \leq \eta_2 \leq \frac{1}{2}$ w_1 de grootste is en voor $\frac{1}{2} \leq \eta_2 \leq 1$, w_3 de grootste is. Het minimum wordt bereikt voor $\eta_2 = \eta_3 = \frac{1}{2}$ en is $-260\rho + 512\delta$.

Conclusie: Speler 1 moet steeds beide bommenwerpers langs dezelfde weg sturen en wel langs beide wegen met de waarschijnlijkheid $1/2$.

Speler 2 moet 2 jagers op de weg 1 en 1 jager op weg 2 stationneren, of 1 jager op de weg 1 en 2 jagers op weg 2, en ook weer deze mogelijkheden met de waarschijnlijkheden $1/2$.



Colloquium

Mathematische Problemen uit de praktijk.

Theorie van de spelen en het economisch gedrag.

(vervolg)

Het spel met n spelers en som nul.

Wij gaan nu over tot het beschouwen van een spel met n spelers met som nul. Iedere speler heeft hier zijn eigen functie $\mathcal{K}_k(\tau_1, \dots, \tau_n)$ die hij maximaal tracht te maken, maar hij beheerst alleen de variabele τ_k . De resultaten van de theorie van het spel met twee spelers kunnen nu worden toegepast, door de overige (n-1) spelers samen te vatten tot één speler. Gevonden wordt dus de waarde van het spel $v(k)$ voor de speler k. Speler k kan dus, als hij goed speelt, minstens $v(k)$ verkrijgen. Alle spelers samen zullen dus minstens $\sum_{k=1}^n v(k)$ kunnen krijgen, in werkelijkheid krijgen alle spelers samen 0, dus

$$\sum_{k=1}^n v(k) \leq 0$$

Onder de $v(k)$ zullen dus, tenzij ze alle nul zijn, negatieve moeten voorkomen, d.w.z. er zijn spelers, die als zij alleen blijven, verlies zullen lijden. De speler k zal, als zijn tegenspeler goed speelt, ook hoogstens $v(k)$ kunnen krijgen, maar dan moet ieder van de (n-1) overige spelers de goede strategie kiezen, d.w.z. er moeten tussen die spelers afspraken gemaakt worden, zij moeten een coalitie vormen. De hele verdere theorie is gebaseerd op deze coalities. Een groep spelers, die een coalitie vormt, treedt naar buiten op als één speler, de leden van de coalitie overleggen onderling, welke strategieën zij zullen kiezen. S is een groep van k spelers i_1, \dots, i_k de overige $e = n - k$ spelers zijn j_1, \dots, j_e . De winst van de coalitie S bedraagt $\sum_{i \in S} \mathcal{K}_i(\tau_1, \dots, \tau_n) = \mathcal{K}(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_k}; \tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_e})$ in \mathcal{K} zijn de variabelen in 2 groepen verdeeld $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_k}$ worden door de coalitie beheerst. Op de bekende wijze wordt een getal $v(S)$ gevormd, de waarde van het spel voor de coalitie S. Als de coalitie S goed speelt, dan verkrijgt hij minstens $v(S)$; de coalitie S krijgt hoogstens $v(S)$ als ook de overige spelers "goed spelen", dus ook een coalitie vormen. De hele verdere theorie is gebaseerd op de coalities en hun karakteristieke functies $v(S)$. Deze theorie kan dus alleen worden toegepast op spelen, waarbij de spelregels zich niet tegen het vormen van coalities verzetten. Aan iedere deelverzameling S van de verzameling I (1...n) van de spelers, wordt nu een getal $v(S)$ toegevoegd. De keuze van deze getallen is binnen de volgende drie beperkingen volkomen vrij.

A.1: $v(I)=0$ want we beschouwen een spel met som nul.

A.2: $v(S) = -v(-S)$ ($-S$ is de verzameling die overblijft als S uit I wordt verwijderd). Als beide coalities goed spelen, ligt het resultaat van het spel vast. Speciaal $v(\emptyset) = -v(-I) = 0$

A.3: $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)$ als S en T geen spelers gemeen hebben ($S \cup T$ is de vereniging van S en T , de verzameling, die bestaat uit de spelers van S en de spelers van T). Als S goed speelt, kan hij $v(S)$ krijgen, als T goed speelt, kan hij $v(T)$ krijgen. De coalitie $S \cup T$ kan dus $v(S)+v(T)$ krijgen, daar $S \cup T$ door goed spel minstens $v(S \cup T)$ kan krijgen moet $v(S)+v(T) \leq v(S \cup T)$.

Bij iedere functie $v(S)$ die aan A.1;A.2;A.3 voldoet, is een spel te construeren, dat deze functie als karakteristieke functie heeft. Voor een spel met 3 personen moet de karakteristieke functie dus de gedaante hebben $-v(1)=v(2,3)=a$; $-v(2)=v(3,1)=b$; $-v(3)=v(1,2)=c$.

Uit A.3 volgt de voorwaarde $a+b+c > 0$.

Voor een spel met 4 personen: $-v(1)=v(2,3,4)=a$
 $-v(2,3)=v(1,4)=p$ $-v(2)=v(1,3,4)=b$
 $-v(1,3)=v(2,4)=q$ $-v(3)=v(1,2,4)=c$
 $-v(1,2)=v(3,4)=r$ $-v(4)=v(1,2,3)=d$

A.3 geeft $a+b \geq r$; $b+c \geq p$; $a+c \geq q$; $a+d \geq -p$; $b+d \geq -q$; $c+d \geq -r$.

Deze vele mogelijkheden kunnen worden ingeperkt door toepassing van "strategische aequivalentie". Beschouw een spel Γ waarbij de winst voor de speler k gegeven wordt door $X_k(\tau_1, \dots, \tau_n)$ daarnaast een spel Γ' waarbij de winst voor de speler k gegeven wordt door $X_k(\tau_1, \dots, \tau_n) + \alpha_k^0$ waarin α_k^0 constanten zijn met $\sum_{k=1}^n \alpha_k^0 = 0$. De spelen Γ en Γ' zijn strategisch aequivalent, omdat Γ' uit Γ kan worden afgeleid door eerst de spelers de bedragen α_k^0 te geven en dan Γ te gaan spelen. Voor $v'(S)$ horende bij het spel Γ' geldt $v'(S) = v(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0$. Uit iedere groep van strategisch aequivalente spelen kan nu één gekozen worden als representant. Daarvoor kiezen we het spel met $\bar{v}(k) = v(k) - \alpha_k^0 = -\gamma$ ($k=1..n$). Het spel met de karakteristieke functie $\bar{v}(k)$ heet gereduceerd.

Dit zijn n verg. voor α_k^0 en γ , de $(n+1)$ ste verg. is $\sum_{k=1}^n \alpha_k^0 = 0$, dus $\gamma = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v(i)$ $\alpha_k^0 = v(k) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v(i)$

daar $\sum_{i=1}^n v(i) \leq 0$ is $\gamma \geq 0$.

Door herhaaldelijke toepassing van $\bar{v}(S \cup T) \geq \bar{v}(S) + \bar{v}(T)$ volgt $\bar{v}(S) \geq \sum_{i \in S} \bar{v}(i)$ dus voor een verzameling van p elementen is

$$\bar{v}(S) \geq -p\gamma \text{ en } \bar{v}(-S) \geq -(n-p)\gamma \text{ daar } \bar{v}(-S) = -v(S) - p\gamma \leq \bar{v}(S) \leq (n-p)\gamma$$

Voor $p=0, 1, (n-1)$ en n gelden de sterkere relaties $-0 \cdot \gamma = \bar{v}(\emptyset)$; $1 \cdot \gamma = \bar{v}(S)$ als S 1 element heeft. $\bar{v}(S) = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} v(i) = \gamma$ als S $(n-1)$ elementen heeft. $\bar{v}(S) = (n-n)\gamma = 0$ als S n elementen heeft.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

a. $\gamma = 0$ dan volgt uit B $\bar{v}(S) = 0$ voor alle verzamelingen S. Bij het gereduceerde spel kan geen enkele coalitie op winst hopen, maar hoeft ook geen verlies te vrezen. Dit spel heet niet essentieel.

Bij het algemene niet essentiële spel krijgt speler k : α_k^0 en als hij goed speelt nooit minder; hij kan alleen meer krijgen, als een andere speler slecht speelt.

Een spel van twee spelers is steeds niet essentieel. $v(1) = v$, $v(2) = -v$; $\alpha_1^0 = -v$; $\alpha_2^0 = v$; $\bar{v}(1) = \bar{v}(2) = 0$. In het algemene spel krijgt speler 1 $+v$, speler 2 $-v$.

b. $\gamma \neq 0$ dan kan $\gamma = 1$ worden genomen door de munteenheid te veranderen.

Voor het spel met 3 spelers is $-\bar{v}(1) = -\bar{v}(2) = -\bar{v}(3) = \bar{v}(1,2) = \bar{v}(2,3) = \bar{v}(1,3) = 1$. Er is dus slechts één type spel met 3 spelers.

Voor 4 spelers is $-\bar{v}(1) = -\bar{v}(2) = -\bar{v}(3) = -\bar{v}(4) = v(1,2,3)$

$v(1,3,4) = v(1,2,4) = v(2,3,4) = 1$.

$-\bar{v}(2,3) = \bar{v}(1,4) = 2x_1$; $-\bar{v}(1,3) = \bar{v}(2,4) = 2x_2$;

$-\bar{v}(1,2) = \bar{v}(3,4) = 2x_3$.

Voorwaarde B geeft $-1 \leq x_i \leq +1$ $i=1,2,3$.

Van spelen met 4 spelers bestaat dus een drievoudige oneindigheid van typen. Voor $n > 4$ neemt de verscheidenheid zeer sterk toe met het aantal spelers.

Het spel is nu dus teruggebracht tot onderhandelingen tussen de spelers over de coalities, die gevormd zullen worden. In iedere keer dat het spel wordt gespeeld, in iedere partij moeten deze onderhandelingen tot een goed eind worden gebracht en iedere speler moet het hem toekomende krijgen. Het resultaat van een partij is dus een toerekening

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ waarbij de speler k dus α_k ontvangt.

Verder is $\alpha_k \geq v(k)$ ~~dat niemand genezen zal nemen~~ met minder dan hij geheel alleen

zonder enige hulp zal kunnen krijgen. Iedere speler zal die toerekeningen prefereren, waarbij hij zoveel mogelijk krijgt; hij zal tot die coalitie toetreden, die hem zo veel mogelijk biedt. Dit wordt uitgedrukt door het begrip domineren. De toerekening α domineert de toerekening β ($\alpha \succ \beta$) als er een verzameling S bestaat, waarvoor

$$C_1. \sum_{i \in S} \alpha_i \leq v(S) \quad C_2. \alpha_i > \beta_i \quad i \in S$$

De voorwaarde C_1 geeft aan, dat de spelers van S niet het onmogelijke verlangen. Hun tegenstanders kunnen S altijd beletten meer dan $v(S)$ te krijgen.

Beschouw nu de volgende toerekeningen:

$$\alpha = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$\beta = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon; \frac{1}{4} + \varepsilon; \frac{1}{4} - \varepsilon; \frac{1}{4} - \varepsilon; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2}; \frac{1}{4} - \varepsilon; \frac{1}{4} - \varepsilon; -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

dan is $\underline{\alpha} \leftarrow \underline{\beta} (3,4)$ $\underline{\beta} \leftarrow \underline{\gamma} (1,2)$ $\underline{\alpha} \leftarrow \underline{\gamma} (3,4)$
 $\underline{\beta} \leftarrow \underline{\alpha} (1,2)$ $\underline{\gamma} \leftarrow \underline{\beta} (5,6)$ $\underline{\gamma} \leftarrow \underline{\alpha} (1,2,5,6)$
 $\underline{\delta} = (\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{2} ; \frac{1}{4} + \varepsilon ; \frac{1}{4} - \varepsilon ; \frac{1}{4} - \varepsilon ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$

dan is $\underline{\alpha} \leftarrow \underline{\delta} (3,4)$; $\underline{\delta} \leftarrow \underline{\alpha} (1,2,6)$

tussen $\underline{\beta}$ en $\underline{\delta}$ en tussen $\underline{\gamma}$ en $\underline{\delta}$ bestaat in geen van beide richtingen de relatie van dominatie.

Op deze relatie moeten de spelers nu hun beslissing baseren.

Zelfs is bij iedere toerekening $\underline{\alpha}$ in een essentieel spel een toerekening $\underline{\beta}$ te vinden, met $\underline{\beta} \leftarrow \underline{\alpha}$.

Bewijs: neem een gereduceerd spel $4n$; $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\alpha_1 \geq \bar{v}(1) = -\gamma$

Was nu $\alpha_i = \bar{v}(1)$ voor alle i dan was

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \bar{v}(1) = -n\gamma < 0$$

in strijd met $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Is nu b.v. $\alpha_1 > \bar{v}(1)$ dan is dus $\sum_{i=2}^n \alpha_i < \bar{v}(2\dots n)$

als $\underline{\alpha} = \frac{1}{n} \{ \bar{v}(2,n) - \sum_{i=2}^n \alpha_i \}$ stel dan $\underline{\beta} = \{ \alpha_1 - (n-1)\varepsilon ; \alpha_2 + \varepsilon ; \dots, \alpha_n + \varepsilon \}$

dan is $\underline{\beta}$ een toerekening met

$$\beta_i \geq \bar{v}(1) ; \beta_i = \alpha_i + \varepsilon > \alpha_i \quad (i=2\dots n) \quad \sum_{i=2}^n \beta_i = \sum_{i=2}^n \alpha_i + (n-1)\varepsilon < \bar{v}(2\dots n)$$

die dus $\underline{\alpha}$ domineert.

Bij een essentieel spel is het dus niet mogelijk dat één toerekening door allen als "de beste" zal worden aanvaard. "De beste toerekeningen" d.i. "de oplossing" zullen een verzameling V vormen met de volgende eigenschappen.

D1. Geen toerekening van V domineert een andere toerekening uit V .

D2. Iedere toerekening niet in V wordt door een toerekening uit V gedomineerd.

Op grond van D2 zal een groep spelers boven iedere toerekening niet in V steeds een toerekening uit V prefereren. Op grond van D1 is nooit een meerderheid te vinden, die op grond van materiële motieven één toerekening uit V prefereert boven een andere toerekening uit V . Voor het gereduceerde spel met 3 spelers bestaat V uit de toerekeningen

$$\underline{\alpha}' = \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \} \quad \underline{\alpha}'' = \{ \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2} \} \quad \underline{\alpha}''' = \{ -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \}$$

Geen toerekening uit V domineert een andere toerekening uit V . Neem nu een $\underline{\beta} = \{ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \}$; $\beta_2 \geq \bar{v}(1) = -1$; $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$ niet in V . Daar verwisseling van de spelers slechts de elementen van V onderling verwisselt.

mogen we aannemen $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$

als $\beta_2 < \frac{1}{2}$ is ook $\beta_1 < \frac{1}{2}$ dus $\underline{\alpha}' \leftarrow \underline{\beta}$; als $\beta_2 \geq \frac{1}{2}$ is ook $\beta_3 \geq \frac{1}{2}$ en $\beta_1 \leq -1$, maar $\beta_1 \geq -1$ dus $\beta_1 = -1$ en $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}$ dus $\underline{\beta} = \underline{\alpha}'''$

Op grond van welke motieven zal nu tussen $\underline{\alpha}'$, $\underline{\alpha}''$, $\underline{\alpha}'''$ worden gekozen?

Dit kunnen alleen motieven zijn, die buiten het kader van de theorie vallen. Zal de "uitgesloten" speler, die 1 verliest, niet aan een ander iets extraas willen geven, als deze zijn besluit wil veranderen?

Met deze "extraas" of compensaties is al rekening gehouden, omdat $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zijn bepaald door uitsluitend te letten op de karakteristieke functies en niet meer op de $\mathcal{K}_k(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3)$ of zelfs $\sum \mathcal{K}_k(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3) \{ \bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3 \}$ die vroeger bepaalden wat ieder kreeg. Het is zelfs toegelaten, dat de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ niet een mogelijk waardesysteem van deze functies vormen, maar dat naast hetgeen ieder door de spelregels krijgt toebedeeld, één speler aan een ander een compensatie betaalt, om de laatste in een coalitie te trekken. Laat b.v. $\underline{\alpha}'$ tot stand dreigen te komen, als 3 b.v. $\underline{\alpha}$ extra aan 2 biedt, dan zou ontstaan $\underline{\beta} = (-1, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon)$ die wordt door $\underline{\alpha}'$ gedomineerd, maar 1 is weinig geneigd met 3 een coalitie te vormen, dus 3 moet een compensatie geven om de dreigende coalitie te voorkomen. De schrijvers redden de oplossing door deze soort compensaties "onbehoorlijk" te noemen.

Colloquium

Mathematische Problemen uit de praktijk.

Theorie van de spelen en het economisch gedrag.

(vervolg)

De oplossing V^I van het gereduceerde spel met 3 spelers en som nul, die uit de 3 toerekeningen α' , α'' en α''' bestaat, is niet de enige oplossing. Er bestaan nog vele oplossingen, die ieder uit oneindig veel toerekeningen bestaan.

$$V^{II} = (\alpha_1, \alpha_2, c)$$

c is een vast gekozen getal $-1 \leq c < \frac{1}{2}$ en α_1 en α_2 voldoen alleen aan de eis $\alpha_1 + \alpha_2 = -c$; $\alpha_1 \geq -1$; $\alpha_2 \geq -1$. Iedere waarde van c geeft een oplossing, die uit oneindig veel toerekeningen bestaat. Analoo $V^{III} = (\alpha_1, c, \alpha_3)$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -c$; $\alpha_1 \geq -1$; $\alpha_3 \geq -1$. c is een vast gekozen getal $-1 \leq c < \frac{1}{2}$

$$V^{IV} = (c, \alpha_2, \alpha_3)$$

c is een vast gekozen getal $-1 \leq c < \frac{1}{2}$ $\alpha_2 + \alpha_3 = -c$; $\alpha_1 \geq -1$; $\alpha_3 \geq -1$.

Bij deze oplossingen wordt een der spelers dus "afgekocht" met een bedrag, dat minder is dan hij in een coalitie kan krijgen, maar niet minder dan hetgeen hij voor zich alleen kan krijgen.

De "winst" wordt tussen de andere spelers verdeeld. De manier waarop deze verdeling geschiedt, blijft in het midden; iedere verdeling, waarbij beide spelers minstens -1 krijgen, is mogelijk.

Als voorbeeld zullen wij verder voor een spel van 4 personen met som nul enkele oplossingen aangeven.

Spel: $v(\emptyset) = 0$; $v(1) = -1$; $v(1,2) = 0$; $v(1,3) = 0$; $v(1,4) = 0$; $v(1,2,3,4) = 0$

Het doel van dit spel is een coalitie van 3 spelers te vormen; zo'n coalitie wint, de speler die alleen blijft, verliest. Staan er twee coalities van twee spelers tegenover elkaar, dan is het spel "remise". Laat nu de spelers 1 en 2 samen besluiten een der andere spelers over te halen, met hen een coalitie te vormen. Beschouw dan het spel met 3 spelers $(1,2) = 1$; 3 en 4. Deze spelen nu een spel met 3 spelers met

$$v(1') = v(1,2) = 0; v(3) = -1; v(4) = -1.$$

Dit spel is niet gereduceerd; voor het bijbehorende gereduceerde spel is

$$\bar{v}(1') = v(1') - 2/3 = -2/3; \bar{v}(3) = v(3) + 1/3 = -2/3; \bar{v}(4) = v(4) + 1/3 = -2/3; \gamma = 2/3.$$

De oplossing V^I is hier

$$(1/3, 1/3, -2/3) (1/3, -2/3, 1/3) (-2/3, 1/3, 1/3).$$

Om tot het niet gereduceerde spel te komen moet bij deze toerekeningen worden bijgeteld $(+2/3; -1/3; -1/3)$ dan komt $(1, 0, -1)(1, -1, 0)(0, 0, 0)$.

In dit spel met 3 spelers is de eerste speler de coalitie (1,2). Deelt deze coalitie gelijk op, dan geeft dit de toerekeningen

$$(1/2, 1/2, 0, -1) (1/2, 1/2, -1, 0) (0, 0, 0, 0)$$

We hadden ook van een andere coalitie dan (1,2) kunnen uitgaan; als vermoedelijke oplossing ontstaat dan:

$$\underline{\alpha}' = (1/2; 1/2; 0; -1) + \text{permutaties}$$

$$\underline{\alpha}'' = (0, 0, 0, 0)$$

Om te bewijzen dat dit een oplossing is, zullen we trachten een $\underline{\beta}$ te construeren, die niet door $\underline{\alpha}'$ of $\underline{\alpha}''$ wordt gedomineerd. Als dit niet mogelijk blijkt te zijn, is aan D2 voldaan.

We mogen onderstellen $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4$ omdat een permutatie van de spelers de toerekeningen van $\underline{\alpha}'$ onder elkaar permuteert en $\underline{\alpha}''$ invariant laat.

1. als $\beta_1 < 0$ én $\beta_2 < 0$ dan is $\underline{\alpha}'' \leftarrow \underline{\beta}$
 als $\beta_1 \geq 0$ dan is $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 0$ daar de som nul is, is dan $\underline{\beta} = \underline{\alpha}''$.
 dus $\beta_1 < 0; \beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 0$
2. als $\beta_2 < 1/2$ én $\beta_3 < 1/2$ dan is $\{0, 1/2, 1/2, -1\} \leftarrow \underline{\beta}$ met $S=(1,2,3)$
 als $\beta_2 \geq 1/2$ dan is $\beta_3, \beta_4 \geq 1/2$ dus $\beta_1 \leq -3/2$ in strijd met $\beta_1 \geq -1$
 dus $\beta_1 < 0; 0 \leq \beta_2 < 1/2; \beta_3 \geq 1/2; \beta_4 \geq 1/2$
3. Dan is in ieder geval $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq 1$ dus $\beta_1 \leq -1$ maar $\beta_1 \geq -1$
 Dit kan alleen als $\beta_1 = 1$ dus $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1; \beta_2 = 0; \beta_3 = \beta_4 = 1/2$
 dus $\underline{\beta} = (-1, 0, 1/2, 1/2)$ één der $\underline{\alpha}'$.

Aan D1 is ook voldaan:

$\underline{\alpha}' = \{1/2; 1/2; 0; -1\}$ domineert niet $\underline{\alpha}'' = (0, 0, 0, 0)$ omdat (1,2) voor $\underline{\alpha}'$ niet effectief is.

$$\alpha_1' + \alpha_2' = 1 \text{ terwijl } v(1,2) = 0$$

Zelfs is ook een oplossing: $\underline{\alpha}' = (\frac{u}{2}, \frac{u}{2}, 0, -u) + \text{perm. } u > 2/3, u \leq 1$,
 $\underline{\alpha}'' = (0, 0, 0, 0)$. We trachten eerst weer een $\underline{\beta}$ te vinden, die niet door een $\underline{\alpha}$ gedomineerd wordt.

We mogen weer onderstellen $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4$

1. als $\beta_1 < 0$ én $\beta_2 < 0$ dan is $\underline{\alpha}'' \leftarrow \underline{\beta}$ als $\beta_1 \geq 0$ dan is $\beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 0$
 dus $\underline{\beta} = \underline{\alpha}''$ dus $\beta_1 < 0; \beta_2, \beta_3, \beta_4 \geq 0$
- 2: als $\beta_2 < \frac{u}{2}$ én $\beta_3 < \frac{u}{2}$ dan is $(0, \frac{u}{2}, \frac{u}{2}, -u) \leftarrow \underline{\beta}$ met $S=(1,2,3)$
 als $\beta_2 \geq \frac{u}{2}$ dan is $\beta_3, \beta_4 \geq \frac{u}{2}$ dus $\beta_1 \leq -\frac{3u}{2} < -1$ daar $u > 2/3$
 dus $\beta_1 < 0; 0 \leq \beta_2 < \frac{u}{2}; \beta_3 \geq \frac{u}{2}; \beta_4 \geq \frac{u}{2}$.
3. dan is in ieder geval $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq u$ dus $\beta_1 \leq -u$
 als $\beta_1 < -u$ dan is daar $\beta_2 < \frac{u}{2}; (-u, \frac{u}{2}, \frac{u}{2}, 0) \leftarrow \underline{\beta}$ met $S=(1,2)$
 als $\beta_1 = -u$ dan is $\beta_2 = 0; \beta_3 = \beta_4 = \frac{u}{2}$ dus $\underline{\beta} = (-u, 0, \frac{u}{2}, \frac{u}{2}) = \underline{\alpha}'$.

Bij bovenstaande oplossing delen de spelers van de winnende coalitie niet gelijk op. Een oplossing, waarbij dit wel het geval is, moet bevatten

$\underline{\alpha}^{III} = (1/3, 1/3, 1/3, -1) + \text{perm.}$ Deze blijken geen oplossing te vormen. Zij vormen een deel van de oplossing

$$\underline{\alpha}^{III} = (1/3, 1/3, 1/3, -1) + \text{perm.}; \underline{\alpha}^{IV} = (1/3, 1/3, -1/3, -1/3) + \text{perm.}$$

Tracht weer een $\underline{\beta}$ te construeren, die niet door $\underline{\alpha}^{III}$ en $\underline{\alpha}^{IV}$ wordt gedomineerd. We mogen aannemen

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4$$

1. daar $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$ is zeker $\beta_1 \leq 0$

2. als $\beta_1 < -1/3$; $\beta_2 < +1/3$ is $(-1/3, 1/3, 1/3, -1/3) \leftarrow \underline{\beta}$

als $\beta_1 < -1/3$; $\beta_2 \geq 1/3$ dan ook $\beta_3, \beta_4 \geq 1/3$ dus $\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \geq 1$ dus $\beta_1 \leq -1$, maar dan is $\beta_1 = 1, \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/3$; zodat moet gelden $\beta_1 \geq -1/3$

3a. als $-1/3 \leq \beta_1 \leq 0$; $\beta_2 < 1/3$; $\beta_3 < 1/3$ dan $(1/3, 1/3, 1/3, -1) \leftarrow \underline{\beta}$

3b. als $-1/3 \leq \beta_1 \leq 0$; $\beta_2 < 1/3$; $\beta_3 \geq 1/3$ dan is ook $\beta_4 \geq 1/3$, $\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 \geq \beta_2 \leq -1/3$, maar dan ook $\beta_1 \leq -1/3$, dus $\beta_1 = -1/3, \beta_2 = -1/3, \beta_3 = 1/3, \beta_4 = 1/3$, zodat moet gelden: $-1/3 \leq \beta_1 \leq 0, \beta_3 \geq 1/3$.

4. als $-1/3 \leq \beta_1 \leq 0$; $\beta_2 \geq 1/3$ dan ook $\beta_3, \beta_4 \geq 1/3$, dus $\beta_1 \leq -1$ in strijd met $\beta_1 \geq -1/3$.

Het algemene spel met n spelers.

In het algemene spel met n spelers Γ wordt aan de functies $\mathcal{K}_k(\tau_1, \dots, \tau_n)$ - die de winst voor de spelers aangeven - geen enkele beperking opgelegd. De definitie van karakteristieke functie berustte echter op een max.min. eigenschap. Wat een coalitie S won, moesten de tegenstanders verliezen.

Om bij het algemene spel deze theorie te kunnen toepassen, wordt gebruik gemaakt van een kunstgreep, nl. het invoeren van een fictieve (n+1)ste speler, waarvan de winst gegeven wordt door $\mathcal{K}_{n+1}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{k=1}^n \mathcal{K}_k(\tau_1, \dots, \tau_n)$. Het algemene spel met n spelers Γ wordt op deze wijze uitgebreid tot een spel Γ^x met (n+1) spelers en som nul. Op Γ^x kan nu de hele vroegere theorie worden toegepast en we moeten nagaan in hoeverre en op welke wijze de resultaten daarvan op Γ kunnen worden overgebracht. Daarbij moet voortdurend in het oog worden gehouden, dat de (n+1)ste speler geen echte speler is, maar een fictie. We zullen hem daarom "de geest" noemen. In de eerste plaats heeft de geest geen zinnen in het spel en geen strategieën. Deze eigenschap heeft hij gemeen met de bankhouder bij roulette die zelfs een bevoorrechte speler is. Hoewel de geest dus geen invloed kan uitoefenen op de gang van het spel Γ^x zelf, blijkt hij toch een volwaardige partner in coalities te zijn, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

In een algemeen spel met 2 spelers hebben de spelers de keus tussen:

1. samenwerken,

2. niet samenwerken.

Kiezen zij beide "samenwerken", dan krijgen zij ieder 1/2; kiest één van de twee "niet samenwerken", dan verliezen ze beide 1.

De functies $K_k(\tau_1, \tau_2)$ zijn

τ_1	τ_2	$K_1(\tau_1, \tau_2)$	$K_2(\tau_1, \tau_2)$	$K_3(\tau_1, \tau_2)$
1	1	1/2	1/2	-1
1	2	-1	-1	2
2	1	-1	-1	2
2	2	-1	-1	2

$v(1)$ wordt bepaald uit het schema

$\tau_1 \backslash \tau_2$	1	2
1	1/2	-1
2	-1	-1

$v(1) = -1$ evenzo $v(2) = -1$.

We kunnen terloops opmerken, dat $v(1)$ uitsluitend bepaald wordt door

$K_1(\tau_1, \tau_2)$, de winst van de tegenstander wordt door de keuze $K_3(\tau_1, \tau_2)$ hierbij aangepast. $v(3)$ wordt bepaald uit het schema

τ_1	1	1	2	2
τ_2	1	2	1	2
$K_3(\tau_1, \tau_2)$	-1	2	2	2

De geest heeft geen keus, de tegenstanders kiezen het minimum $v(3) = -1$.

Dus $v(1) = v(2) = v(3) = -1$.

Γ^* is een gewoon gereduceerd spel van 3 spelers en som nul, waarvoor de oplossing V^I is:

$\alpha^I = (1/2, 1/2, -1)$

$\alpha^{II} = (1/2, -1, 1/2)$

$\alpha^{III} = (-1, 1/2, 1/2)$

Bij α^{II} en α^{III} geeft de geest een der andere spelers een compensatie 3/2 om de coalitie van de echte spelers te voorkomen.

We zullen later zien, dat niet uit alle oplossingen van Γ^* oplossingen voor Γ volgen. De oplossing van Γ^* , die de oplossing voor Γ geeft, is de "afkoopoplossing" (α_1, α_2, c) , en dan nog alleen voor $c = -1$.

De n spelers, die Γ spelen, vormen de verzameling $I = (1, 2, \dots, n)$.

De $(n+1)$ spelers, die Γ^* spelen, vormen de verzameling $I^* = (1, 2, \dots, n, n+1)$

Van Γ^* kunnen op de bekende wijze karakteristieke functies v^* worden

berekend. De karakteristieke functies v van Γ voor een groep spelers

$S \subset I$ wordt gelijkgesteld aan de karakteristieke functie van S in Γ^*

$v(S) = v^*(S)$ voor $S \subset I$.

De karakteristieke functies van Γ^* voldoen aan

A1: $v^*(\emptyset) = 0$; A2: $v^*(S) + v^*(I^* - S) = 0$; A3: $v^*(S) + v^*(T) \leq v^*(S \cup T)$ $S \cap T = \emptyset$

A1 en A3 kunnen onveranderd worden overgenomen, voorzover S en T beide deelverzamelingen van I zijn.

$E_1: v(\emptyset) = 0$; $E_3: v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ voor $S \cap T = \emptyset$; $S \subset I, T \subset I$

Daar S óf $I^* - S$ niet tot I behoren, vervalt A2.

Wel kan A3 worden gespecialiseerd tot $v(S) + v(I - S) \leq v(I)$. Omgekeerd geldt, dat bij iedere functie $v(S)$ gedefinieerd op de deelverzamelingen van I, die voldoet aan E_1 en E_3 , een algemeen spel met n spelers kan worden gevonden, dat $v(S)$ als karakteristieke functie heeft. Wordt $v(S)$ met behulp van A3 uitgebreid tot alle deelverzamelingen van I^* , dan kan het bovengevonden spel met een geest worden uitgebreid, zodat de uitgebreide $v(S)$ karakteristieke functie ervan is. Dit heeft een merkwaardige consequentie. Ga uit van een spel Γ' met (n+1) spelers en som nul, waarbij de functies $v'_k(\tau_1 \dots \tau_{n+1})$ alle (n+1) variabelen bevatten; bepaal de karakteristieke functies $v'(S)$ van Γ' . Laat alle $v'(S)$ weg, waarbij S de speler 1 bevat, dan ontstaat een stel functies, die aan E_1 en E_3 voldoen; construeer daarbij een algemeen spel met n spelers Γ en breid dit op bovenhenoemde wijze uit met een geest tot Γ^* , dan hebben Γ' en Γ^* dezelfde karakteristieke functies, terwijl een der spelers van Γ' in een geest is veranderd.

Een toerekening $\alpha = \{\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}\}$ van Γ bestaat uit de eerste n elementen van een toerekening $\alpha' = (\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$ van Γ^* , de dubbele haken dienen om er op te wijzen, dat niet geest wordt $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

Bij een toerekening in Γ^* horen de eisen $\alpha_i \geq v^*(i)$ $i=1 \dots n+1$

Voor $i=1 \dots n$ worden deze eenvoudig overgenomen.

$i=n+1$ geeft $\alpha_{n+1} \geq v^*(n+1)$ of $\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq v^*(1, 2, \dots, n) = v(I)$ dus:

De som van wat alle spelers krijgen, mag niet groter zijn dan hetgeen door volledige samenwerking bereikt kan worden. Teveel geschenken van buitenaf maakt dat de spelers de belangstelling voor het spel verliezen.

Domineren $\alpha \prec \beta$ wil in Γ^* zeggen, dat er een verzameling S uit I^* bestaat, zodat

$$\sum_{i \in S} \alpha_i \leq v^*(S) \quad \text{en} \quad \alpha_i > \beta_i \quad \text{voor } i \in S$$

Bevat S de geest niet, dan kunnen deze eisen onveranderd worden overgenomen. Bevat S de geest wel, dus $(n+1) \in S$, dan is $S = (n+1) \cup T$ dus $I^* - S = I - T \subset I$.

Dan is $\sum_{i \in (I-T)} \alpha_i = - \sum_{i \in S} \alpha_i \geq -v^*(S) = v^*(I^* - S) = v^*(I - T) = v(I - T)$ dus

$$\sum_{i \in (I-T)} \alpha_i \geq v(I-T) \dots E_1$$

$\alpha_i > \beta_i$ wordt weer overgenomen voor $i \neq (n+1)$; voor $i=n+1$

wordt dit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\alpha_{n+1} < \beta_{n+1} = \sum_{i=1}^n \beta_i$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i < \sum_{i=1}^n \beta_i \dots F_2.$$

F_1 drukt uit, dat de tegenstanders van de coalitie T de plannen van deze coalitie niet kunnen blokkeren, omdat die tegenstanders minstens zoveel krijgen, als ze op eigen kracht kunnen verwerven. C_2 drukt uit, dat als een coalitie zijn positie wil verbeteren, dit voor het geheel nadelig is. De hier in Γ^* beschouwde coalitie bevat echter de geest, die dus als een mogelijke partner in een coalitie wordt beschouwd. Dit moet worden voorkomen, dat betekent dat in Γ^* slechts verzamelingen uit I mogen worden gekozen, om de relatie van domineren te bewijzen. Verzamelingen, die de geest bevatten, komen daarvoor niet in aanmerking. Hiermee is de geest van alle invloed op het spel uitgesloten.

Deze eis heeft tot gevolg, dat voor alle toerekeningen van een oplossing van Γ' nu geldt:

$$\alpha_{n+1} = v^*(n+1) \text{ m.a.w. } \sum_{i=1}^n \alpha_i = v(1, 2, \dots, n)$$

d.w.z. voor een toerekening van een oplossing in Γ is de productie maximaal.

Bewijs:

Laat $\underline{\alpha}^* = (\alpha_1 \dots \alpha_{n+1})$ tot een oplossing V van Γ^* behoren en

$2v \alpha_{n+1} > v^*(n+1)$ als $\alpha_{n+1} - v^*(n+1) = \varepsilon$ construeer dan

$\underline{\beta}^* = (\alpha_1 + \frac{\varepsilon}{n}, \dots, \alpha_n + \frac{\varepsilon}{n}, \alpha_{n+1} - \varepsilon)$ dan is $\underline{\beta}^* \leftarrow \underline{\alpha}^*$ met $S = (1, \dots, n)$ en

$\sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \varepsilon = v(1, 2, \dots, n)$. Dus kan $\underline{\beta}^*$ niet in V liggen. Er moet dus

een $\underline{\gamma}^* \in V$ zijn met $\underline{\gamma}^* \leftarrow \underline{\beta}^*$. Laat dit gebeuren door een verzameling T, dan is voor $i \in T$: $\gamma_i > \beta_i$ maar $\beta_i > \alpha_i$ ($i=1 \dots n$) dus $\gamma_i > \alpha_i$ voor $i \in T$ d.w.z. $\underline{\gamma}^* \leftarrow \underline{\alpha}^*$ wat niet kan, daar beide tot V behoren. De oplossingen van Γ bestaan dus uit toerekeningen $\underline{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ met

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = v(1 \dots n)$$

Strategische aequivalentie. Twee algemene spelen zijn strategisch aequivalent als tussen hun opbrengsten $\mathcal{K}_k(\tau_1 \dots \tau_n)$ en $\mathcal{K}'_k(\tau_1 \dots \tau_n)$ de relaties bestaan

$$\mathcal{K}'_k(\tau_1 \dots \tau_n) = \mathcal{K}_k(\tau_1 \dots \tau_n) + \alpha_k^0$$

met α_k^0 onafhankelijk van $\tau_1 \dots \tau_n$. Aan de constanten α_k^0 wordt nu geen enkele restrictie opgelegd.

Voor de karakteristieke functies geldt dan $v'(S) = v(S) + \sum_{k \in S} \alpha_k^0$. Hiermee

kunnen weer gereduceerde karakteristieke functies worden gedefinieerd door de eisen

$$\bar{v}(i) = v(i) + \alpha_i^0 = -\gamma \quad (i=1 \dots n) \text{ én } v(1 \dots n) + \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 = \bar{v}(1 \dots n) = 0$$

(Deze komt in de plaats van de vroegere eis $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$)

dus

$$\sum_{i=1}^n v(i) - v(I) = -n\gamma; \quad \gamma = \frac{1}{n} \left[v(I) - \sum_{i=1}^n v(i) \right] \geq 0; \quad \alpha_i^0 = -v(i) - \gamma$$

Bij een niet essentiël spel is $\gamma = 0$, bij een essentiël spel is $\gamma > 0$.
 Net als spelen met som nul kan nu weer worden afgeleid de relatie

$$-p\gamma \leq \bar{v}(S) \leq (n-p)\gamma \quad \text{als } S \text{ } p \text{ elementen heeft}$$

voor $p=0$ en $p=1$ geldt $-p\gamma = \bar{v}(S)$ " S p " "

als $p=n$ geldt $\bar{v}(1,2,\dots,n) = (n-n)\gamma = 0$.

Voor spelen met som nul gold bovendien nog voor $p=n-1$ de gelijkheid $v(S) = \gamma$ als S $(n-1)$ elementen heeft.

Deze relatie geldt hier niet. Daaruit volgt dat er een essentiël algemeen spel bestaat met 2 spelers, nl.

$$\bar{v}(1) = \bar{v}(2) = -\gamma \quad v(1,2) = 0$$

Het algemene spel met 3 spelers heeft nu vele mogelijkheden

$$\bar{v}(1) = \bar{v}(2) = \bar{v}(3) = -\gamma$$

$$\bar{v}(2,3) = a_1; \quad \bar{v}(1,3) = a_2; \quad \bar{v}(1,2) = a_3 \quad -2\gamma \leq a_i < \gamma$$

$$\bar{v}(1,2,3) = 0$$

Oplissing voor het algemene spel met 2 spelers.

We beschouwen het spel in de niet gereduceerde vorm. Alle toerekeningen moeten voldoen aan

$$\alpha_1 \geq v(1); \quad \alpha_2 \geq v(2); \quad \alpha_1 + \alpha_2 \leq v(1,2)$$

terwijl de toerekeningen van een oplossing bovendien nog moeten voldoen aan $\alpha_1 + \alpha_2 = v(1,2)$.

Als $v(1) + v(2) = v(1,2)$ bestaat de oplossing uit de enige toerekening

$\alpha = (v(1), v(2))$; het spel is niet essentiël.

Als $v(1) + v(2) < v(1,2)$ dan bestaat de oplossing uit alle toerekeningen (α_1, α_2) die aan bovenstaande voorwaarden voldoen.

Economische interpretatie.

I heeft een ondeelbaar goed, dat hij u waard acht en biedt dit aan II aan, die het v waard acht; $u \leq v$.

Komt de transactie niet tot stand, dan bezit I de waarde u en II de waarde 0. Komt de transactie tot stand tegen een prijs p, $u \leq p \leq v$ dan krijgt I de waarde p en II de waarde $v-p$ (1= geen transactie, 2=wel transactie).

$v(1)$ volgt uit

	\bar{v}_2	1	2
\bar{v}_1		u	u
	2	u	p

$$v(1) = u$$

$v(2)$ volgt uit

$\tau_2 \backslash \tau_1$	1	2
1	0	0
2	0	$v-p$

$v(2)=0$

$v(1,2)$ volgt uit

τ_1	1	1	2	2
τ_2	1	2	1	2
$x_1 + x_2$	u	u	u	v

maximum =v

$v(1,2)=v$

1. Als $u=v$ is het spel niet essentieel.

Dan is ook $u=p \neq v$.

De enige toerekening $(u,0)$ kan ook worden geschreven $(p,v-p)$.

De theorie kan niet uitmaken of de transactie al dan niet tot stand komt.

2. Als $u < v$ bestaat de oplossing uit alle toerekeningen $(p,v-p)$, met $u \leq p, p \leq v$; de transactie kan tot stand komen tegen iedere prijs, die tussen u en v in ligt.

