STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW-007

Over de theorie der analytische functionelen

Voordracht in de serie
"Actůaliteiten"

Dr. C.G. Lekkerkerker

1955

Over de theorie der analytische functionelen

Voordracht in de serie Actualiteiten

Op Zaterdag 21 Mei 1955

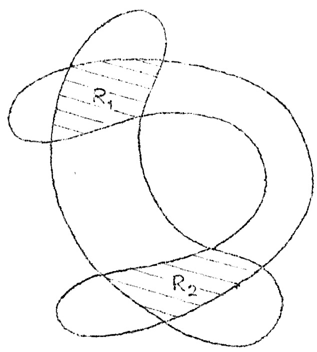
door Dr C.G. Lekkerkerker

In het algemeen is een functioneel een voorschrift, waardoor aan elke functie uit een zekere verzameling H van functies een (reëel of complex) getal wordt toegevoegd. Om tot een afgeronde theorie van functionelen te komen kan men enerzijds de klasse der functionelen op een gegeven verzameling H door nadere eisen, zoals b.v. lineariteit, inperken; anderzijds is het van groot belang welke verzamelingen H men als definitieverzamelingen van functionelen wenst toe te laten. Neemt men voor H een ruimere klasse van functies, dan wordt de klasse der functionelen armer. Zo is, als J een gegeven interval en x_0 een punt van J is, het functioneel dat aan een functie zijn afgeleide in x_0 toevoegt gedefinieerd op de verzameling der op J differentieerbare functies, maar niet op de verzameling der op J continue functies; het functioneel dat aan een functie zijn waarde in x_0 toevoegt is wèl gedefinieerd op de laatste verzameling, maar niet op de - vaak beschouwde - verzameling der op J kwadratisch integreerbare functies.

In deze voordracht zal een uiteenzetting worden gegeven van de grondgedachten van de theorie der analytische functionelen, zoals die in Italië door L. Fantappiè sedert 1925 ontwikkeld en uitgewerkt is. Als argumentwaarden van deze functionelen worden hierbij z.g. locaal-analytische functies gekozen, terwijl voorts aan de functionelen een zekere analiticiteitsvoorwaarde wordt opgelegd. In het volgende zal blijken dat men zo een voldoend ruime klasse van functionelen verkrijgt, waar, analoog aan de rol die de theorie der analytische functies in de wiskunde speelt, de meeste functionelen, die voor de toepassingen van belang zijn, onder vallen.

1. De ruimte van Fantappiè.

Voor ons doel zijn analytische functies in de zin van Weierstrass minder geschikt als uitgangspunt. Deze hebben b.v. het inconveniënt, dat de definitiegebieden van twee analytische functies y_1 en y_2 een niet-samenhangende doorsnee kunnen hebben (zie figuur), zodat de som $y_1 + y_2$ in verschillende analytische functies uiteenvalt. Ook varieert het definitiegebied van een functie niet continu (in de hier beneden gegeven topologie) in



afhankelijkheid van de functie. We nemen nu als uitgangspunt de z.g. locaal-analytische, ultrareguliere functies, gedefinieerd als volgt.

Een complexe functie $y=y(t)$ heet locaal-analytisch, als $y(t)$ gedefinieerd is op een willekeurige, niet-lege, open deelverzameling M van de complexe bol, en in elk punt van M regulier is. Een dergelijke functie $y(t)$ heet verder ultraregulier (biregolare), als geldt $y(\infty)=0$ ingeval het punt ∞ tot M behoort.

Aan de voorgaande definitie valt vooral het volgende op:

1. het gebied M behoeft niet samenhangend te zijn
2. $y(t)$ mag voortzetbaar zijn buiten M.

Het nut van de ultraregulariteit zal later blijken, bij de invoering van de indicatoren; voorlopig heeft deze tot gevolg dat de enige functie, gedefinieerd op de hele complexe bol, de functie is die identiek 0 is. Onder de som van twee locaal-analytische, ultrareguliere functies $y_1(t)$ en $y_2(t)$, gedefinieerd op M_1 resp. M_2, kunnen we nu zonder bezwaar, ingeval $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, de functie verstaan die gedefinieerd is op $M_1 \cap M_2$ en daar gegeven wordt door $y_1(t) + y_2(t)$.

We merken op dat, bij de gegeven definitie, een functie $y(t)$ pas bepaald is, als naast de functiewaarden ook het gebied M gegeven is, waarop we $y(t)$ wensen te beschouwen. We laten dat desgewenst in de notatie tot uiting komen door te schrijven (y,M) of $(y(t),M)$ i.p.v. y. Zijn gegeven twee functies $(y(t),M)$ en $(y_1(t),M_1)$, en is $M_1 \supset M$ en $y(t)=y_1(t)$ voor $t \in M$, dan noemen we $y_1(t)$ een voortzetting van $y(t)$ en $y(t)$ een verkorting (raccorciamento) van $y_1(t)$.

We wensen nu in de verzameling der locaal-analytische, ultrareguliere functies een topologie te definiëren. Zij $(y_0(t),M_0)$ zo'n functie. Zij verder A een willekeurige echte, niet-lege, gesloten (dus compacte) deelverzameling van M en zij σ een willekeurig positief getal. Dan verstaan we onder de omgeving (A,σ) van $y_0(t)$ de verzameling van alle locaal-analytische, ultrareguliere functies $(y(t),M)$, waarvoor geldt:

(1) $\quad M \supset A \quad ; \quad |y(t) - y_0(t)| < \sigma \qquad$ voor $t \in A$.

Men gaat gemakkelijk na dat hierdoor een omgevingsruimte, en dus een topologische ruimte wordt gedefinieerd. We geven die ruimte, de ruimte van Fantappiè geheten, aan met $\mathcal{S}$. Helaas geldt niet het scheidingsaxioma van Hausdorff, maar alleen het zwakkere van Kolmogorov: bij twee verschillende elementen van $\mathcal{S}$ is er tenminste één dat een omgeving bezit die het andere element niet bevat. M.a.w. $\mathcal{S}$ is slechts een T_0-ruimte. De oorzaak hiervan is deze, dat elke voortzetting y van een gegeven functie y_0 deel uitmaakt van elke omgeving (A,σ) van y_0.

Op de gebruikelijke manier worden nu open verzamelingen (gebieden) in $\mathcal{S}$ gedefinieerd. In het algemeen bestaat nog weinig inzicht in de structuur van zulke gebieden (zie [8]). Anders is dit in een belangrijk bijzonder geval, n.l. dat der lineaire gebieden. Een gebied $\mathcal{R}$ in $\mathcal{S}$ heet <u>lineair</u>, als geldt:

(2) $y_1(t) \in \mathcal{R}$, $y_2(t) \in \mathcal{R} \rightarrow c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \in \mathcal{R}$
(c_1 en c_2 willekeurige complexe constanten); dit impliceert dat de definitiegebieden van willekeurig twee functies uit $\mathcal{R}$ een niet-lege doorsnede hebben. Aan <u>Fantappiè</u> [1,2,4,7] dankt men nu de volgende <u>Stelling</u>. Is $\mathcal{R}$ een lineair gebied in $\mathcal{S}$, dan is de doorsnee van de definitiegebieden van de functies uit $\mathcal{R}$ een niet-lege, gesloten, echte deelverzameling A van de complexe bol. En $\mathcal{R}$ bestaat uit alle functies $(y(t),M)$ uit $\mathcal{S}$, waarvan het definitiegebied M de verzameling A omvat.

Men noemt A de <u>karakteristieke verzameling</u> van $\mathcal{R}$ en schrijft $\mathcal{R} = (A)$.
<u>Bewijs.</u> Zij S de complexe bol en B de verzameling der punten van S, waar tenminste één functie uit $\mathcal{R}$ niet gedefinieerd is. Men kan gemakkelijk aantonen, uitgaande van het gekozen omgevingsbegrip in $\mathcal{S}$ (de bases A der omgevingen zijn gesloten verzamelingen in S) en de compactheid van S, dat er bij elk punt τ van B een omgeving U_τ in S en een functie (y_τ, M_τ) uit $\mathcal{R}$ bestaat, zodat $U_\tau \cap M_\tau = \emptyset$.

Hieruit volgt allereerst dat B open is. Verder is $B \neq S$. Anders was n.l. B te overdekken door eindig veel omgevingen $U_{\tau_1}, U_{\tau_2}, \ldots, U_{\tau_k}$ en hadden de definitiegebieden van de bijbehorende functies (y_{τ_1}, M_{τ_1}), $(y_{\tau_2}, M_{\tau_2}), \ldots, (y_{\tau_k}, M_{\tau_k})$ een lege doorsnee, zodat $y_{\tau_1} + y_{\tau_2} + \ldots + y_{\tau_k}$ niet tot $\mathcal{R}$ behoorde, in strijd met de ondersteldo lineariteit van $\mathcal{R}$. We weten dus alvast dat het complement $S - B = A$, d.i. de doorsnee van de definitiegebieden van de functies uit $\mathcal{R}$, niet-leeg en gesloten is. Ook is $A \neq S$ (zie definitie van ultraregulariteit).

Nemen we nu eens een functie $(y,M) \in \mathcal{R}$. Dan is $M \supset A$. Zij $J = S - M$, zodat $J \subset B$. Daar J gesloten is, is J te overdekken door eindig veel omgevingen $U_{\tau_1}, U_{\tau_2}, \ldots, U_{\tau_k}$. De som $\overline{y}$ van de bijbehorende functies $y_{\tau_1}, y_{\tau_2}, \ldots, y_{\tau_k}$ is een functie uit $\mathcal{R}$, op grond van de lineariteitseis, en is gedefinieerd op een zekere (open) verzameling $\overline{M}$, die A omvat, maar zelf bevat is in M. Er is een omgeving (A^*, σ) van $(\overline{y}, \overline{M})$ die in $\mathcal{R}$ bevat is. Uit de lineariteit van $\mathcal{R}$ en de compactheid van A^* volgt nu, dat elke functie uit $\mathcal{S}$, die tenminste op A^* gedefinieerd is, tot $\mathcal{R}$ behoort. Dus $(y,M) \in \mathcal{R}$. Hiermee is de stelling bewezen.

Omgekeerd toont men aan, dat elke niet-lege, gesloten, echte deelverzameling A van S karakteristieke verzameling is van een lineair gebied in $\mathcal{S}$. Men merke op, dat $\mathcal{S}$ zelf niet lineair is.

In de ruimte $\mathcal{S}$ willen we nu lijnen beschouwen, en wel z.g. analytische lijnen. De punten van zo'n lijn zijn dus locaal-analytische, ultrareguliere functies, en wel functies die nog van een complexe parameter α afhangen. We noemen S^2 het topologisch kwadraat van de complexe bol en stellen de volgende definitie op.

Zij Ω een niet-lege verzameling in S en laat aan elke $\alpha \in \Omega$ een locaal-analytische, ultrareguliere functie $y_\alpha = (y_\alpha(t), M_\alpha)$ toegevoegd zijn. Dan heet de schaar y_α een <u>analytische lijn</u> in $\mathcal{S}$, indien de verzameling K der punten (t, α) met $t \in M_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ een open verzameling in S^2 is, en de functie $y(t,\alpha)$, gedefinieerd door

$$y(t,\alpha) = y_\alpha(t) \qquad\qquad ((t,\alpha) \in K)$$

locaal-analytisch in α is, bij vaste t.

De voorstelling $y_\alpha(t)$ van een analytische lijn L is een parametervoorstelling. Men krijgt een andere parametervoorstelling door voor α een omkeerbare, analytische functie $\alpha = \alpha(\beta)$ te substitueren.

In verschillende gevallen is het van belang te weten voor welke waarden van α een gegeven analytische lijn y_α in een gegeven gebied $\mathcal{R}$ van $\mathcal{S}$ doordringt, d.w.z. voor welke waarden van α geldt dat $y_\alpha \in \mathcal{R}$. Men is speciaal geïnteresseerd in de volgende eigenschap:

Dringt een analytische lijn y_α $(\alpha \in \Omega)$ in een gebied $\mathcal{R}$ van $\mathcal{S}$, dan is de verzameling $\Omega' \subseteq \Omega$, zodat $y_\alpha \in \mathcal{R}$ voor $\alpha \in \Omega'$, open.

Om van de geldigheid van deze eigenschap verzekerd te zijn, legt Fantappiè [1,2,7] aan een analytische lijn nog een vervelende bijvoorwaarde op. Hij eist n.l. dat het complement $\mathfrak{J}_\alpha = S - M_\alpha$ van de definitieverzameling van y_α $(\alpha \in \Omega)$ continu varieert met α; hierbij is de continuïteit gegrond op het volgende begrip distantie (scarto) van twee niet-lege, gesloten deelverzamelingen $\mathfrak{J}_1$ en $\mathfrak{J}_2$ op de complexe bol:

$$\text{dist.}\ (\mathfrak{J}_1,\mathfrak{J}_2) = \max\ \left[\rho(\mathfrak{J}_1,\mathfrak{J}_2),\ \rho(\mathfrak{J}_2,\mathfrak{J}_1)\right],$$

met $\rho(\mathfrak{J}_i,\mathfrak{J}_j) = \max\limits_{x \in \mathfrak{J}_j} \text{afst.}\ (x,\mathfrak{J}_i)$.

Nader onderzoek [9,10] leert echter:

1. dat men kan volstaan met een zwakkere continuïteitseis: $\mathfrak{J}_\alpha$ zij bevat in een willekeurige ε-omgeving van $\mathfrak{J}_{\alpha_0}$, wanneer α op de complexe bol beperkt wordt tot een voldoend kleine omgeving van α_0.

2. aan deze continuïteitseis is automatisch voldaan, als K een open verzameling in S^2 is.

Het bewijs van de genoemde eigenschap verloopt dan in grote trekken als volgt. Zij α_0 een punt van Ω, zodat $y_{\alpha_0} \in \mathcal{R}$. Dan is er een omgeving (A,σ) van y_{α_0}, geheel bevat in $\mathcal{R}$. Daarbij is $\mathfrak{J}_{\alpha_0}$ disjunct met A, dus ook $\mathfrak{J}_\alpha$ disjunct met A als α tot een zekere omgeving U_0 van α_0 behoort. Dus is $y(t,\alpha)$ gedefinieerd voor $t \in A$, $\alpha \in U_0$. Daar $y(t,\alpha)$ analytisch en dus continu is, geldt dan ook

$$|y(t,\alpha) - y(t,\alpha_0)| < \sigma \qquad \text{voor } t \in A,$$

d.w.z. $y_\alpha(t) \in \{(A,\sigma)$ van $y_{\alpha_0}\} \subset \mathcal{R}$,
als α tot een geschikte omgeving van α_0 beperkt wordt. Hiermee is Fantappiè's bijvoorwaarde overbodig geworden.

2. Lineaire analytische functionelen.

Een functioneel $Fy=F[y(t)]$ heet (locaal-) analytisch, indien aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

a) F is gedefinieerd op een gebied $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$

b) is $y_0 \in \mathcal{R}$ en y_1 een voortzetting van y_0 (zodat dus ook $y_1 \in \mathcal{R}$, zie p.2), dan is $Fy_1=Fy_0$

c) dringt een analytische lijn $y_\alpha(t)$ door in $\mathcal{R}$, zeg voor $\alpha \in \Omega'$, dan is $f(\alpha)=F[y_\alpha(t)]$ een locaal-analytische functie van α voor $\alpha \in \Omega'$.

De eis b) zegt ongeveer, dat de waarden van y_1 in een deelgebied reeds bepalend zijn voor de waarde van F. We merken nog op (zie [10]) dat het voor de geldigheid van c) voldoende is dat de daarin uitgesproken eigenschap "slechts" geldt voor analytische lijnen die aan de hierboven genoemde bijvoorwaarde van Fantappiè voldoen.

Een functioneel Fy heet lineair als geldt:

a') F is gedefinieerd op een lineair gebied $\mathcal{R}=(A)$, alsook b)

d) op $\mathcal{R}$ is $F[y_1+y_2]= Fy_1+Fy_2$.

Voorbeelden van lineaire functionelen zijn

1) $F\,y = y'(t_0)$ op $\mathcal{R}=(A)=(\{t_0\})$

2) $F\,y = \int_a^b y(t)dt$ op $\mathcal{R}=(A)=([a,b])$.

Het is nog een onopgelost probleem, of in het algemeen een analytisch functioneel F, gedefinieerd op een gebied $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, continu is op $\mathcal{R}$. In de gekozen topologie betekent continuïteit van F in een punt $y_0 \in \mathcal{R}$, dat er bij elk positief getal ε een omgeving (A,σ) van y_0 binnen $\mathcal{R}$ is te vinden zodat $|F\,y - F\,y_0| < \varepsilon$ als $y \in (A,\sigma)$. Er zijn wel partiële resultaten [2,11,13]. Nodig en voldoende voor de continuïteit van een analytisch functioneel F in een punt y_0 is b.v., dat er in $\mathcal{R}$ een omgeving (A,σ) van y_0 is, waar F begrensd is, anders gezegd: doorloopt y_1 de verzameling functies met $y_1 \in (A)$ en $\max\limits_{t\in A}|y_1(t)-y_0(t)|=\frac{1}{2}\sigma$ en noemen we $\delta(y_1)$ het grootste positieve getal δ, zodat $y_0+\alpha(y_1-y_0) \in (A,\sigma)$ en tevens $|F[y_0+\alpha(y_1-y_0)] - F\,y_0| < 1$ als $|\alpha| < \delta$, dan is $\inf\limits_{y_1} \delta(y_1) > 0$. Met behulp hiervan laat zich aantonen [2,12], dat een lineair analytisch functioneel continu is in elk punt van het definitiegebied (A).

We beschouwen nu verder alleen functionelen die zowel lineair als analytisch zijn. Is F een lineair analytisch functioneel op (A) en

$y(t) \in (A)$, dan is $F[\alpha\, y(t)] = \alpha F[y(t)]$ voor elk complex getal α. Want uit d) volgt dat dit juist is als α rationaal is. En daar $\alpha\, y(t)$ een analytische lijn is (α willekeurig eindig), volgt uit c) dat $F[\alpha\, y(t)]$ een analytische functie van α is, zodat de bewering ook voor willekeurige α geldt.

Dringt verder een analytische lijn y_α door in het definitiegebied (A) van F, dan mag men differentiëren onder het teken F:

$$\frac{d}{d\alpha} F\,[y_\alpha(t)] = F\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\, y_\alpha(t)\right] \quad \text{, dus ook}$$

(4) $$\frac{d^n}{d\alpha^n} F\,[y_\alpha(t)] = F\left[\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\, y_\alpha(t)\right] \qquad \text{(n een natuurlijk getal).}$$

Dit is een vergaande generalisatie van het differentiëren van een bepaalde integraal onder het integraalteken. Het bewijs berust vnl. op de overweging, dat voor $\alpha_0 \in \Omega'$ en geschikte $\rho > 0$ de functieschaar $\overline{y}_\alpha(t)$, gedefinieerd door

$$\overline{y}_{\alpha_0}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\, y_\alpha(t)\right)_{\alpha=\alpha_0}, \quad \overline{y}_\alpha(t) = \frac{y_\alpha(t) - y_{\alpha_0}(t)}{\alpha - \alpha_0} \quad (0 < |\alpha - \alpha_0| < \rho),$$

een analytische lijn is en dat F langs die lijn continu is.

Omgekeerd kunnen we een weg C beschouwen in het gebied Ω', waar $y_\alpha(t)$ in (A) doordringt, en hebben dan

(5) $$\int_C F\,[y_\alpha(t)]\, d\alpha = F\left[\int_C y_\alpha(t)\, d\alpha\right].$$

We kunnen nu overgaan tot de behandeling van de z.g. indicatoren. Bij een analytische functie is het zó, dat de waarde in een willekeurig punt, door de formule van Cauchy, uit te drukken is m.b.v. de waarden van de functie op een geschikt gekozen gesloten lijn. Een dergelijk verschijnsel treedt op bij analytische functionelen. Is F een lineair analytisch functioneel, op een lineair gebied (A), dan is met een hierna te behandelen formule de waarde van F in een willekeurig punt van (A) uit te drukken m.b.v. de waarden van F op een bepaalde analytische lijn. Het verrassende is, dat men hierbij voor alle lineaire analytische functionelen met eenzelfde analytische lijn kan volstaan.

Zij $y_\alpha(t)$ de volgende analytische lijn:

(6) $y_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha - t}$ voor α eindig en $t \neq \alpha$, $y_\alpha(t) = 0$ voor $\alpha = \infty$, t eindig.

We hebben hier $\mathfrak{I}_\alpha = S - M_\alpha = \{\alpha\}$. Zij nu (A) een lineair gebied. Dan is het complement $B = S - A$ niet-leeg en open, en dringt de lijn $y_\alpha(t)$ door in (A) voor $\alpha \in B$.

We beschouwen nu een lineair analytisch functioneel F op (A) en zetten:

(7) $$u(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha - t}\right] \qquad (\alpha \notin A).$$

De functie $u(\alpha)$ is als zodanig locaal-analytisch en verder ook ultra-regulier: $u(\infty) = F0 = 0$. Laat $y=(y(t),M)$ een element van (A) zijn en zij $J = S-M$. Dan zijn J en A gesloten, disjuncte deelverzamelingen van de complexe bol. Zij C een gesloten kromme, zonder doorsnijdingen, maar niet noodzakelijk samenhangend, die J en A scheidt (curva separatrice). Laat C van een zodanige oriëntering voorzien zijn, dat A geheel tot het binnengebied van C behoort. Voor een punt t binnen C geldt dan

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(\tau)}{\tau - t}\, d\tau .$$

Om F te kunnen toepassen, zonder last te hebben van de beperking voor t, voeren we nog in de verkorting $\overline{y}(t)$ van $y(t)$ op het binnengebied van C. Wegens (5) en b) is dan

$$F[y(t)] = F[\overline{y}(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C F\left[\frac{y(\tau)}{\tau - t}\right] d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_C y(\tau)\, F\left[\frac{1}{\tau - t}\right] d\tau,$$

in verband met (7) dus

$$(8) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\tau) y(\tau)\, d\tau .$$

Dit is de gewenste formule. Formule (8) is bewezen door Fantappiè [1,2,6,7] en legt de eigenlijke grondslag voor de toepassingen. De functie $u(\alpha)$, gedefinieerd door (7), wordt de antisymmetrische indicator (l'indicatrice emisimmetrica) van F genoemd. Kent men $u(\alpha)$, dan kan men algemeen $F[y(t)]$ berekenen. De antisymmetrie zit hem hierin dat, op grond van de keuze van de oriëntering van C, de integraal in (8) van teken verandert, als men de rollen van $u(\tau)$ als indicator en $y(\tau)$ als willekeurige functie verwisselt.

In de hierboven gegeven voorbeelden is

$$u(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha - t}\right)'_{t=t_0} = \frac{1}{(\alpha - t_0)^2}, \text{ dus } y'(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{y(\tau)}{(\tau - t_0)^2}\, d\tau, \quad \text{resp.}$$

$$u(\alpha) = \int_a^b \frac{dt}{\alpha - t} = \log \frac{a-\alpha}{b-\alpha}, \text{ dus } \int_a^b y(t)dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{a-\tau}{b-\tau} \cdot y(\tau)\, d\tau .$$

Deze zo afgeleide eenvoudige formules zijn nu van een algemeen standpunt uit belicht.

Er is ook een symmetrische indicator $w(\alpha)$, gedefinieerd door

$$(9) \quad w(\alpha) = F\left[\frac{1}{1 - \alpha t}\right] \qquad (\alpha \notin A'),$$

waar A' de getransformeerde van A is d.m.v. de transformatie $t' = \frac{1}{t}$. Er geldt $u(\alpha) = \frac{1}{\alpha} w(\frac{1}{\alpha})$.

3. Toepassingen.

Zij H een lineaire verzameling van functies en zij K een operator op H, die aan elke functie uit H weer een functie uit H toevoegt:

$$f \in H \quad \longrightarrow \quad Kf \in H.$$

We noemen I de identieke operator en onderstellen verder nog dat K lineair is op H:

$$K(f_1+f_2) = K\,f_1 + K\,f_2, \qquad K(c\,f) = c\,K\,f.$$

De verzameling van alle operatoren op H van het beschouwde type is een ring. In het bijzonder kunnen we alle polynomen p(K) in een gegeven operator K beschouwen. Deze polynomen zijn in correspondentie te brengen met de polynomen $p(\lambda)$ in een onbepaalde λ . Deze correspondentie

(10) $\quad \Theta_o : p(\lambda) \rightarrow p(K)$

bezit de volgende vier eigenschappen:

1) met de som van twee polynomen in λ correspondeert de som van de bijbehorende polynomen in K:

$$p_1(\lambda) + p_2(\lambda) \rightarrow p_1(K) + p_2(K)$$

2) analoog geldt voor het product van twee polynomen:

$$p_1(\lambda).p_2(\lambda) \rightarrow p_1(K).p_2(K)$$

3) met 1 en λ corresponderen I resp. K

4) hangt $p(\lambda)$ analytisch van een parameter α af, d.w.z. is

$$p(\lambda) = p_\alpha(\lambda) = c_o(\alpha) + c_1(\alpha)\lambda + \ldots + c_n(\alpha)\lambda^n,$$

met in zeker gebied analytische functies $c_o(\alpha), c_1(\alpha), \ldots, c_n(\alpha)$, dan is ook het corresponderende polynoom $p_\alpha(K)$ analytisch, in die zin dat

$$p_\alpha(K)f = c_o(\alpha)f + c_1(\alpha)K\,f + \ldots + c_n(\alpha)K^n f$$

analytisch van α afhangt.

Nu gaat het er bij de symbolische rekenwijze (Heaviside) met name om, een vergelijking voor een onbekende functie y van de gedaante $p(K)y=f$ op te lossen. Anders gezegd: wat is het resultaat van de operator $\frac{1}{p(K)}$, toegepast op f. Om deze vraag te beantwoorden trachten we de bovenbeschouwde correspondentie Θ_o uit te breiden tot een correspondentie

(11) $\quad \Theta : g(\lambda) \rightarrow g(K)$,

waarbij $g(\lambda)$ varieert in een zeker gebied $\mathcal{R}$ van locaal-analytische functies uit $\mathcal{S}$, dat de functie $\frac{1}{p(\lambda)}$ bevat, en de g(K) operatoren zijn, die in H werken, terwijl de eigenschappen 1) - 4) behouden blijven. De functies uit H hoeven niet analytisch te zijn. Omdat de som van twee functies $g_1(\lambda)$ en $g_2(\lambda)$ gedefinieerd moet zijn, moet $\mathcal{R}$ lineair zijn.

Laten we eens onderstellen dat er een lineair gebied $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ bestaat, waar de polynomen toe behoren, en dat er een correspondentie van de gedaante (11) bestaat, zodat geldt:

1°. $g_1(\lambda) + g_2(\lambda) \rightarrow g_1(K) + g_2(K)$
2°. $g_1(\lambda) \,.\, g_2(\lambda) \rightarrow g_1(K) \,.\, g_2(K)$ } als $g_1(\lambda), g_2(\lambda) \in \mathcal{R}$
3°. $1 \rightarrow I$, $\lambda \rightarrow K$

4°. is $g_\alpha(\lambda)$ een analytische lijn in $\mathcal{S}$, die in $\mathcal{R}$ doordringt voor $\alpha \in \Omega'$, dan is voor de corresponderende operator, zeg $g_\alpha(K)$, $g_\alpha(K)$ f analytisch in α voor $\alpha \in \Omega'$.

Voor de polynomen levert dit juist de correspondentie Θ_0. We schrijven nu

(12) $g(K)f = F[g(\lambda)] = F[g(\lambda);\ f]$ $\quad (g(\lambda) \in \mathcal{R}, f \in H)$.

Dit is, evenals f, een functie uit H, zeg $F[g(\lambda)]\ (x)$, nog afhangend van f en $g(\lambda)$. We denken nu het argument x en de functie f vast. Dan is het een functioneel, gedefinieerd op $\mathcal{R}$. Op grond van 1°-4° kunnen we er de volgende eigenschappen voor afleiden.

Vooreerst is er een niet-lege, gesloten, echte deelverzameling A van de complexe bol S, zodat $\mathcal{R} = (A)$. Daar de polynomen tot $\mathcal{R}$ behoren, is $\infty \notin A$. Dus A is begrensd. Verder volgt uit 4° dat het functioneel F analytisch is op (A) en uit 1° dat F lineair is. Hierbij geldt nog, wegens 2° en 3°,

(13) $F[\lambda^n] = K^n f \quad (n=0,1,2,\dots)$,

(14) $F[g_1(\lambda).g_2(\lambda);\ f] = F[g_1(\lambda);\ F[g_2(\lambda);\ f]]$.

Het functioneel $F[g(\lambda)]$ is gedefinieerd als $g(\lambda) \in (A)$, d.w.z. als $g(\lambda)$ gedefinieerd is op A. Dus is $g(K)f$ onder meer bekend, als $g(\lambda)$ een rationale functie is met polen buiten A. We kunnen hierbij algemeen $g(K)f = F[g(\lambda)]$ berekenen, als we maar de indicator van F kennen. Noemen we L_α de operator die correspondeert met de functie $g(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}$ $(\alpha \notin A)$, en stellen we $L_\alpha f = \gamma(\alpha; f)$. Dan geldt

(15) $g(K)f = F[g(\lambda)\ ;\ f] = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(\lambda;f)\, g(\lambda)\, d\lambda$,

voor alle functies $g(\lambda)$ uit $\mathcal{S}$, wier definitiegebied de verzameling A omvat. De contour C worde hierbij gekozen, zoals in 2 is uiteengezet.

Over de berekening van $\gamma(\alpha;f)$, welke functie op zichzelf eenduidig is bepaald door het functioneel F, en evenals f een functie uit H is (afhangend van α en f), is het volgende te zeggen. Voor $\alpha \notin A$ behoort $\frac{1}{\alpha-\lambda}$ tot $\mathcal{R}$, alsook $\alpha - \lambda$. Wegens 2° is dan

$$(\alpha-\lambda) \,.\, \frac{1}{\alpha-\lambda} = 1 \rightarrow (\alpha - K).L_\alpha \ ,$$

dus $(\alpha-K)L_\alpha = I$, ofwel $(\alpha-K)\,\gamma(\alpha;f) = f$. De functie γ moet dus een oplossing zijn van de functionaalvergelijking

(16) $\alpha y - Ky = f \qquad (\alpha \notin A,\ f \in H)$.

We keren nu de zaak om (zie [11]). Zij weer H een lineair gebied van functies en K een operator die in H werkt. Dan zijn de volgende drie voorwaarden voldoende voor het bestaan van een correspondentie Θ van de gedaante (11) op een of ander lineair gebied $\mathcal{R}=(A)$, die voldoet aan de eisen 1^o-4^o (A begrensd):

I. voor $\alpha \notin A$ heeft de vergelijking (16) een eenduidig bepaalde oplossing $y=\gamma(\alpha;f)$ voor elke $f\in H$

II. die oplossing $\gamma(\alpha;f)$ is een analytische functie van α

III. bij elke $f\in H$ is de integraal in het rechterlid van (15) weer een functie uit H.

Bewijs. Allereerst hangt $\gamma(\alpha;f)$, krachtens de structuur van de vergelijking (16) en de eenduidige bepaaldheid van de oplossing, lineair van f af. Verder is $\gamma(\alpha;f)=0$ voor $\alpha=\infty$; dus is $\gamma(\alpha;f)$ als functie van α gedefinieerd, locaal-analytisch en ultraregulier op het gebied S-A. We construeren nu de correspondentie Θ door aan elke functie $g(\lambda)$ uit $\mathcal{R}$ de operator $g(K)$ toe te voegen, die bepaald is door (15).

Uit de integraalvoorstelling is duidelijk dat het resultaat van $g(K)$, toegepast op f, analytisch van een parameter α afhangt, waar $g(\lambda)$ dat doet. Dus geldt 4^o. Evenzo is 1^o evident. Om 3^o te bewijzen voeren we even in de symmetrische indicator $\bar{\gamma}(\alpha;f)=\frac{1}{\alpha}\gamma(\frac{1}{\alpha};f)$. Die is analytisch in de oorsprong en dus te ontwikkelen als

$$\bar{\gamma}=\xi_0+\xi_1\alpha+\xi_2\alpha^2+\dots \qquad (|\alpha|<\rho)$$

en voldoet verder aan de vergelijking

$$(16') \qquad \bar{\gamma}-\alpha K\bar{\gamma}=f.$$

Dit levert $\xi_0=\bar{\gamma}_{\alpha=0}=f$ en, na differentiëren, $\xi_1=K\xi_0=Kf$. Anderzijds leert berekening $\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(\lambda;f)\,\lambda^n d\lambda=\xi_n \quad (n=0,1,2,\dots)$.

Toepassing van de aan 1 en λ toegevoegde operatoren op f geeft dus inderdaad $f=If$ resp. Kf. Daarmee is 3^o bewezen.

Om tenslotte 2^o aan te tonen, moeten we enerzijds vormen

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(\lambda;f)\,g_1(\lambda)g_2(\lambda)\,d\lambda$$

en anderzijds

$$P'=\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(\lambda;g_2(K)f)\,g_1(\lambda)\,d\lambda\,,$$

met $g_2(K)f=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\gamma(\lambda;f)\,g_2(\lambda)\,d\lambda$,

en laten zien dat P en P' overeenstemmen. Het zijn functionelen op $\mathcal{R}$, zowel van $g_1(\lambda)$ als van $g_2(\lambda)$. Het is nu voldoende te laten zien, dat deze uitdrukkingen dezelfde indicator hebben, dus dat ze overeenstemmen als we speciaal kiezen $g_1(\lambda)=\frac{1}{\alpha-\lambda}$, $g_2(\lambda)=\frac{1}{\beta-\lambda}$ $(\alpha,\beta\notin A)$. Residuenberekening geeft (bij de genoemde speciale keuze):

$$P = \frac{1}{\beta-\alpha}\left\{\gamma(\alpha;f) - \gamma(\beta;f)\right\},$$

zodat $(K-\beta)(K-\alpha)P = \frac{1}{\beta-\alpha}\left\{-(K-\beta)\ f + (K-\alpha)f\right\} = f$.
Anderzijds is $P' = \gamma(\alpha;f')$ met $f' = \gamma(\beta,f)$, dus $(K-\beta)(K-\alpha)P' = (K-\beta)f' = f$.
Hieruit volgt, in verband met I, $P=P'$. Dus geldt 2^{o}.

Als voorbeeld beschouwen we de operator $\mathfrak{J}$, gedefinieerd door

$$\mathfrak{J}f = \int_{x_o}^{x} f(t)\,dt,$$

op de ruimte der op zeker interval $[a,b]$ continue functies ($x_o, x \in [a,b]$). De vergelijking (16) wordt hier $\alpha\gamma - \mathfrak{J}\gamma = f$. Voor $\bar{\gamma} = \mathfrak{J}\gamma$ is dus $\alpha\bar{\gamma}' - \bar{\gamma} = f$, alsook $\bar{\gamma}(x_o)=0$. Hierdoor is $\bar{\gamma}$, en dus γ, eenduidig bepaald. Men vindt

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} f(x) + \frac{1}{\alpha^2}\int_{x_o}^{x} e^{(x-t)/\alpha}\ f(t)\,dt = L_\alpha f(x).$$

De eigenschappen I-III gelden voor $\alpha \neq 0$. Dus kan men op natuurlijke wijze (d.w.z. zodat 1^{o}-4^{o} gelden) aan elke in de oorsprong analytische functie $g(\lambda)$ een operator $g(\mathfrak{J})$ toevoegen; daarbij is $g(\mathfrak{J})$ bepaald door

$$(17)\quad g(\mathfrak{J})f = g(0)\ f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda^2}\, g(\lambda)\int_{x_o}^{x} e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}\ f(t)\,dt.$$

Men kan algemener een in $\lambda=0$ analytische functie $g(\lambda,x)$ beschouwen en komt dan tot de volgende bepaling van $g(\mathfrak{J},x)$:

$$(17')\quad g(\mathfrak{J},x) = g(0,x) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\lambda}{\lambda^2}\int_{x_o}^{x} e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}\ g(\lambda,t)\,dt.$$

Het is vooral deze formule, die op uitgebreide schaal gebruikt wordt bij het oplossen van partiële differentiaalvergelijken (met randvoorwaarden, zodat de oplossing eenduidig bepaald is). Als voorbeeld zij genoemd de parabolische vergelijking

$$(18)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = f(x,y)$$

met constante coëfficiënten a,b,c en randvoorwaarden

$$z(x_o,y) = \varphi_o(y), \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_o} = \varphi_1(y)$$

(alle bekende functies analytisch). Toepassing van $\mathfrak{J}$ op (18) levert

$$\frac{\partial z}{\partial y} + b\mathfrak{J}\frac{\partial z}{\partial y} + (a+c\mathfrak{J})z = \mathfrak{J}f + a\ \varphi_o(y) + \varphi_1(y),$$

met $z(x_o,y) = \varphi_o(y)$. Men vervangt nu in deze vergelijking $\mathfrak{J}$ door λ, lost z op als functie $\bar{z}$ van λ,x,y en "vervangt" tenslotte, onder toepassing van (17'), λ door $\mathfrak{J}$. Er komt zo

$$z(x,y) = \bar{z}(x,y;0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_o} \frac{d\lambda}{{}^2}\int_{x_o}^{x} e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)}\ \bar{z}(t,y;\lambda)\,dt,$$

waar C_0 een voldoend kleine cirkel om de oorsprong is. Hiermee is de oplossing van (18) teruggebracht tot een kwadratuur en de berekening van een residu.

In [1,2,3,14,15,16] worden op een dergelijke manier grote klassen van differentiaalvergelijkingen behandeld. In [17] wordt, aan de hand van een voorbeeld, iets algemener dan (18), het nut van deze methode tegenover de methode van de transformatie van Laplace afgewogen.

Alle in deze syllabus beschouwde problemen zijn gegeneraliseerd voor het geval van functionelen en gebieden van analytische functies van meer variabelen [1,7,10] . Weliswaar gaat hierbij iets van de harmonie van het eendimensionale geval verloren. Zo kan men als indicator van een lineair, analytisch functioneel F van analytische functies van m variabelen zowel de uitdrukking

$$F\left[\frac{1}{(\alpha_1-t_1)(\alpha_2-t_2)\ldots(\alpha_m-t_m)}\right]$$

als

$$F\left[\frac{1}{1+\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2+\ldots+\alpha_m t_m}\right]$$

nemen [18] . Deze indicatoren zijn in het algemeen niet meer gedefinieerd in elk punt $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ buiten het karakteristieke gebied A van het definitiegebied van F.

LITERATUUR

1. L. Fantappiè, Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones, Barcelona 1943.
2. F. Pellegrino, La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications, Aanhangsel in P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris 1951.
3. F. Pellegrino, Die analytischen Funktionale und ihre Anwendungen, Matematisk Tidsskrift, B, 1949, 31-62.
4. L. Fantappiè, Ueberblick über die Theorie der analytischen Funktionale und ihre Anwendungen, Jahresber.d.Deutschen Math.Ver., 43 (1933)
5. L. Fantappiè, I funzionali analitici, Mem.Acc.Lincei, ser.6ª, 3 (1930)
6. L. Fantappiè, Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari, Rend.Lincei, ser.6ª, 15 (1932)
7. L. Fantappiè, Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici, Atti R. Acc.d'Italia, Classe di sci.fis.,mat.e nat., 12 (1942), 617-706.

8. F. Pellegrino, Su alcune proprietà fondamentali delle regioni funzionali non lineari ,Rend. Acc.Lincei, ser.8ª, 5 (1948), 333.
9. D. del Pasqua - F. Pellegrino, Linee quasi analitiche dello spazio di Fantappiè, etc., Rend.di Mat.e appl.,ser.5ª, 12, Roma,1953, 188-228.
10. C.G. Lekkerkerker, Varietà quasi analitiche e funzionali iperanalitici (verschijnt in Rend.di Mat., Roma).
11. H.G. Haefeli - F. Pellegrino, Ueber die Stetigkeit der analytischen Funktionale, Comm. Math.Helv.21 (1948).
12. F. Pellegrino, Ancora sulla continuità dei funzionali analitici, Rend.di Mat. e appl., ser. 5ª, 12, Roma 1950, 104-122.
13. H.G. Haefeli- F. Pellegrino, Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktionale, Comm.Math.Helv.23 (1949), 153-173.
14. L. Fantappiè, Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque, Atti R. Acc.d'Italia, Classe di sci.fis.,mat.e nat., 8 (1937), no.13.
15. L. Fantappiè, Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque, Rend.Acc.d'Italia, ser. 7ª, 2 (1941).
16. L. Fantappiè, I funzionali analitici e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, Varenna 1954 (gestencild collegedictaat).
17. E. Batschelet, Die Operatorenmethode von L. Fantappiè und die Laplace-Transformation, Comm.Math. Helv.22 (1949), 200-214.
18. L. Fantappiè, L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi, Annali di Mat.pura ed appl., ser 4ª, 22 (1943), 182-289.