STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 8.

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950, 2.

Asymptotische integratie van differentiaalvergelijkingen;
het principe van Langer.

Incompl.

Corput J.G. van der, Veen S.C. van.

1948

Asymptotische integratie van differentiaalvergelijkingen.

§ 1. Voorbereiding en eenvoudige voorbeelden.

1,1. Inleiding.

In dit hoofdstuk worden methoden behandeld ter bepaling van asymptotische ontwikkelingen van oplossingen van differentiaalvergelijkingen, die, in tegenstelling tot de tot nu toe behandelde, geen gebruik maken van integraalvoorstellingen. Zij zijn dus ook van toepassing op differentiaalvergelijkingen, waarvoor voor de oplossingen geen integraalvoorstellingen bekend zijn, zoals bijvoorbeeld de vergelijking van Mathieu. De differentiaalvergelijking wordt omgezet in een integraalvergelijking van het type van Volterra, waarna door opeenvolgende benaderingen de asymptotische ontwikkeling wordt verkregen. Dit principe is al zeer oud, Liouville heeft het al toegepast bij zijn behandeling van Sturm-Liouville problemen.

De methode is tenslotte tot volle ontwikkeling gebracht door Langer, die verschillende gevallen, waarbij de klassieke behandeling moeilijkheden vertoonde, met succes heeft opgelost.

Het gebied der toepassingen is velerlei. De in de quantummechanica bekende W-K-B methode blijkt tot de onderzoekingen van Langer te kunnen worden herleid, waarmede dus een exacte basis voor deze methode is bereikt. In de aerodynamica treedt bij het onderzoek naar de stabiliteit van de laminaire stroming een differentiaalvergelijking van de vierde orde op, waarin het getal van Reynolds als parameter optreedt.

Hoewel Langer zijn onderzoek beperkt tot differentiaalvergelijkingen van de tweede orde is het mogelijk zijn resultaten uit te breiden tot deze differentiaalvergelijking.
Allereerst behandelen wij enkele eenvoudige voorbeelden, die het principe toelichten, daarna zullen wij het verschijnsel van Stokes behandelen.
Nadat hiermede de grondslag is gelegd, behandelen wij de artikels van Langer, die tenslotte gevolgd zullen worden door de twee bovengenoemde toepassingen.

1,2. Asymptotische ontwikkeling voor de polynomen van Legendre.

De differentiaalvergelijking voor de polynomen van Legendre $P_n(x) = P_n(\cos\theta)$, is:

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0 \tag{1}$$

of, na overgang op de hoek θ

$$\frac{d^2P_n}{d\theta^2} + \cot\theta\,\frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0 \tag{2}$$

De oplossing (8) voldoet dus aan:

$$u(\theta) = \alpha_1 \cos(n+\tfrac{1}{2})\theta + \alpha_2 \sin(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(\theta - t)\}}{4\sin^2 t}\, u(t)\, dt \tag{14}$$

Kiezen wij $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$, $0 < \theta < \pi$, dan kunnen de constanten α_1 en α_2 bepaald worden voor de speciale oplossing (4).

Voor $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ is uit de definitievergelijking

$$(1 - 2zh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z) \tag{15}$$

af te leiden:

$$\begin{cases} P_{2m}(0) = (-1)^m \dfrac{1.3.\cdots\cdots(2m-1)}{2.4.\cdots\cdots 2m} \\ P_{2m+1}(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

en verder

$$\begin{cases} P'_{2m}(0) = 0 \\ P'_{2m+1}(0) = (-1)^m \cdot \dfrac{3.5.\cdots\cdots 2m+1}{2.4.\cdots\cdots 2m} \end{cases} \tag{17}$$

Daar voor $\theta = \frac{1}{2}\pi$ de integraal en haar afgeleide beide nul zijn, en tevens:

$$u_0(\theta) = P_n(0) \quad ; \quad u_0'(0) = -P_n'(0) \qquad \text{is:}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 &= \frac{1.3.\cdots\cdots(2m-1)}{2.4.\cdots\cdots 2m} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & n &= 2m \\ \alpha_1 = \alpha_2 &= + \frac{1.3.\cdots\cdots(2m+1)}{2.4.\cdots\cdots 2m} \cdot \frac{1}{2m+\frac{3}{2}} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & n &= 2m+1, \end{aligned} \tag{18}$$

zodat wij de integraalvergelijking kunnen schrijven als:

$$u(\theta) = \lambda_n \cos\{(n+\tfrac{1}{2})\theta - \tfrac{\pi}{4}\} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(\theta - t)\}}{4\sin^2 t}\, u(t)\, dt \tag{19}$$

waarbij

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1.3.\cdots\cdots(2m-1)}{2.4.\cdots\cdots 2m} & n &= 2m \\ \lambda_n &= + \frac{1.3.\cdots\cdots(2m-1)}{2.4.\cdots\cdots 2m} \cdot \frac{2m+1}{2m+1+\frac{1}{2}} & n &= 2m+1 \end{aligned} \tag{20}$$

Dit is de bovengenoemde integraalvergelijking van Volterra.
Met behulp van haar is het nu mogelijk om een asymptotische ontwikkeling af te leiden, geldig voor grote waarden van n.
De eerste term wordt gemakkelijk gevonden,

$$u(\theta) = \lambda_n \cos\{(n+\tfrac{1}{2})\theta - \tfrac{\pi}{4}\} + R_1 \tag{21}$$

Het is op de volgende wijze mogelijk om voor R_1 een schatting te vinden:
Zij M het maximum van u in het interval $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$

dan is

$$|M| \leqq \lambda_n + \frac{M}{4(n+\frac{1}{2})}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon} \frac{dt}{4\sin^2 t}\right| \leqq \lambda_n + \frac{M \cot \varepsilon}{4(n+\frac{1}{2})} \tag{22}$$

dus voor

$$2n+1 > \cot \varepsilon \;;\; M \leqq 2\lambda_n$$

en

$$|R_1| \leqq \frac{\lambda_n \cot \varepsilon}{2n+1} \tag{23}$$

waarmede een schatting van de eerste restterm is gevonden. De opeenvolgende termen van de asymptotische ontwikkeling worden door successive benadering gevonden. Hierbij treedt direct een nadeel van deze methode aan de dag: het is n.l. lastig expliciete uitdrukkingen voor de opeenvolgende termen te vinden.

Het is echter wel mogelijk een majorantenreeks voor de asymptotische ontwikkeling en een schatting voor de restterm te geven, die na afbreken na k termen ontstaat.

Daartoe schrijven wij de vergelijking (19) in de vorm

$$u(\theta) = \lambda_n \cos\left\{(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right\} - \frac{1}{4n+2}\int_{\pi/2}^{\theta} K(\theta,t)\, u(t)\, dt \tag{24}$$

met

$$K(\theta,t) = \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(\theta-t)\}}{\sin^2 t} \tag{25}$$

en definieren de opeenvolgende benaderingen $u_k(\theta)$ door volledige industie:

$$\begin{aligned} u_1(\theta) &= \lambda_n \cos\left\{(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right\} \\ u_{k+1}(\theta) &= \lambda_n \cos\left\{(n+\tfrac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}\right\} - \frac{1}{4n+2}\int_{\pi/2}^{\theta} K(\theta,t)\, u_k(t)\, dt \end{aligned} \tag{26}$$

Voor de opeenvolgende termen

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_k &= u_k - u_{k-1} \qquad k \geqq 2 \end{aligned} \tag{27}$$

wordt dan de recurrente betrekking

$$v_{k+1}(\theta) = -\frac{1}{4n+2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} K(\theta,t)\, v_k(t)\, dt = -\frac{1}{4n+2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\sin\{(n+\frac{1}{2})(\theta-t)\}}{\sin^2 t}\, v_k(t)\, dt \tag{28}$$

Wordt het maximum van $|v_k(\theta)|$ in $\varepsilon<\theta<\pi-\varepsilon$ aangeduid door M_k, dan is

$$|v_{k+1}(\theta)| \leqq \frac{1}{4n+2}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{M_k}{\sin^2 t}\, dt\right| \leqq \frac{M_k}{4n+2}\cot \varepsilon \tag{29}$$

dus

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} \leqq \frac{\cot \varepsilon}{4n+2} \quad \text{of} \quad M_k \leqq M_1\left(\frac{\cot \varepsilon}{4n+2}\right)^{k-1} = \lambda_n\left(\frac{\cot \varepsilon}{4n+2}\right)^{k-1} \tag{30}$$

$$u \sim \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

word t dus gemajoreerd door de meetkundige reeks:

$$\lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cot \varepsilon}{4n+2}\right)^{k-1} \tag{32}$$

die als $4n+2 > \cot \varepsilon$ convergeert.

De restterm naafbreken na de k^{e} term is dus kleiner dan

$$\lambda_n \left(\frac{\cot \varepsilon}{4n+2}\right)^{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{\cot \varepsilon}{4n+2}} \tag{33}$$

1,3 Cylinderfuncties.

De cylinderfuncties van de n^{e} orde C_n voldoen aan de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2 C_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dC_n}{dx} + \left(1-\frac{n^2}{x^2}\right) C_n = 0 \tag{1}$$

De tweede term kan verdreven worden door de substitutie

$$u(x) = x^{1/2} C_n(x) \tag{2}$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = \frac{n^2 - 1/4}{x^2} u \tag{3}$$

De verwante differentiaalvergelijking is

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0 \tag{4}$$

met als fundamenteel stel oplossingen e^{ix}, e^{-ix}

Daar voor grote x het rechterlid van de vergelijking (3) klein wordt, ligt het voor de hand asymptotische oplossingen met deze methode te zoeken, die geldig zijn voor grote x.

In de integraalvergelijking, die wij op dezelfde wijze als bij de Legendre polynomen afleiden, nemen wij dan als ondergrens ∞.

Zij blijkt te worden:

$$u(x) = \alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 e^{-ix} + \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\int_{\infty}^{x} \frac{\sin(x-t)}{t^2} u(t)\, dt \tag{5}$$

Wij beschouwen alleen de oplossing, waarvoor $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, en voeren als nieuwe functie in

$$w(x) = u(x)\, e^{-ix} \tag{6}$$

De integraalvergelijking voor $w(x)$ wordt dan:

$$w(x) = 1 + \frac{n^2 - 1/4}{2i}\int_{\infty}^{x} \frac{1-e^{-2i(x-t)}}{t^2} w(t)\, dt \tag{7}$$

De opeenvolgende termen in de ontwikkeling

$$w(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \tag{8}$$

definieren wij door:

$$v_0 = 1$$

$$v_{k+1}(x) = \frac{n^2 - 1/4}{2i}\int_{\infty}^{x} \frac{1-e^{-2i(x-t)}}{t^2} v_k(t)\, dt \qquad k \geq 0 \tag{9}$$

Is x complex, dan kiezen wij de integratieweg, zo dat steeds $\mathrm{Im}(x-t) \leqq 0$ is. Is dan het maximum van $|v_k|$ M_k, dan is steeds

$$\left|\frac{1-e^{-2i(x-t)}}{2i}\, v_k\right| \leqq M_k \tag{10}$$

Indien de integratieweg verder zo gekozen is, dat $|t|$ monotoon toeneemt, dan is

$$|v_{k+1}(x)| \leqq \left(m^2-\tfrac{1}{4}\right) M_k \int_x^\infty \frac{|dt|}{|t^2|} \tag{11}$$

Voor de laatste integraal kunnen verschillende schattingen gemaakt worden, de voorwaarde $\Im m(x-t) \leqq 0$ in aanmerking genomen, al naar mate

$$2k\pi < \arg x < (2k+1)\pi$$

of

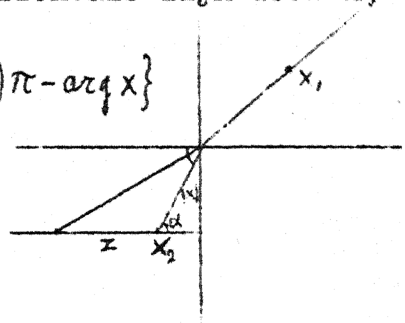
$$(2k+1)\pi < \arg x < (2k+2)\pi$$

is.

In het eerste geval kiezen wij eenvoudig als integratieweg de rechte door de oorsprong door x. Dan is

$$\int_x^\infty \frac{|dt|}{|t^2|} = \int_{|x|}^\infty \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{|x|} \tag{12}$$

In het tweede geval kiezen wij de halve horizontale lijn door x, die in hetzelfde kwadrant ligt.



Dan is, als $\alpha = \operatorname{Min}\{\arg x-(2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi-\arg x\}$

$$\int_x^\infty \frac{|dt|}{|t|^2} = \int_0^\infty \frac{dz}{|x|^2+z^2+2|x|z\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{|x|\sin\alpha}\int_0^\infty \frac{d\,\dfrac{z+|x|\cos\alpha}{|x|\sin\alpha}}{1+\left(\dfrac{z+|x|\cos\alpha}{|x|\sin\alpha}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{|x|\sin\alpha}\left\{-\operatorname{bg\,tg}\cot\alpha+\operatorname{bg\,tg}\infty\right\} = \frac{\alpha}{|x|\sin\alpha} \leqq \frac{\pi}{2|x|} \tag{13}$$

Steeds is dus:

$$\frac{M_{k+1}}{M_k} \leqq \left(m^2-\tfrac{1}{4}\right)\frac{\pi}{2|x|} \tag{14}$$

en de reeks (8) wordt dus gemajoreerd door de reeks

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(m^2-\frac{1}{4})\pi}{2|x|}\right\}^k, \tag{15}$$

die als

$$|x| > \frac{\pi}{2}\left(m^2-\tfrac{1}{4}\right)$$

een convergente meetkundige reeks voorstelt.

Wij zullen er nu toe overgaan de opeenvolgende termen $v_k(x)$ expliciet op te schrijven. De hoofdterm van de asymptotische ontwikkeling komt overeen met de hoofdterm in de bekende reeksen van Hankel om de volledige formele overeenstemming te bewijzen moeten de v_k expliciet berekend worden uit de recursie formules (8).

Wij zoeken $v_k(x)$ in de vorm:

$$v_k(x) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} a^k_\mu \frac{(\mu-1)!}{(2ix)^\mu} \tag{16}$$

epassen van (8) op deze reeks levert $v_{k+1}(x)$. Allereerst is het
s nodig te berekenen

$$\frac{1}{2i}\int_{\infty}^{x} \frac{1-e^{-2i(x-t)}}{t^2}\,\frac{dt}{(2it)^\mu} = \int_0^x \frac{d(2it)}{(2it)^{\mu+2}} - e^{-2ix}\int_{\infty i}^{2xi}\frac{e^t\,dt}{t^{\mu+2}}$$

$$= -\frac{1}{(\mu+1)(2ix)^{\mu+1}} - \frac{1}{(2ix)^{\mu+2}} - e^{-2ix}(\mu+2)\int_{\infty i}^{2xi}\frac{e^t\,dt}{t^{\mu+3}} \sim$$

$$\sim -\frac{1}{(\mu+1)(2ix)^{\mu+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\mu+\nu)!}{(2ix)^\nu} \tag{17}$$

lgens (8) wordt dan uit (16) afgeleid:

$$v_{k+1}(x) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^{k+1}\frac{(\mu-1)!}{(2ix)^\mu} \sim -\left(n^2-\tfrac{1}{4}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{a^k_\mu}{\mu(\mu+1)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\mu+\nu)!}{(2ix)^{\mu+\nu+1}} \sim$$

$$\sim -\left(n^2-\tfrac{1}{4}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(\mu-1)!}{(2ix)^\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\frac{a^k_\lambda}{\lambda(\lambda+1)} \tag{18}$$

.s

$$a_\mu^{k+1} = -\left(n^2-\tfrac{1}{4}\right)\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\frac{a^k_\lambda}{\lambda(\lambda+1)} \tag{19}$$

ı

$$a^1_\mu = \begin{matrix} 1 & \mu=0 \\ 0 & \mu \geqq 1 \end{matrix}$$

;ellen wij $b_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a^k_\mu$,

ın wordt de asymptotische formule voor u

$$u \sim e^{ix}\sum_{k=0}^{\infty} v_k(x) \sim e^{ix}\cdot\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(\mu-1)!}{(2ix)^\mu}\,b_\mu \tag{20}$$

ıt (19) volgt:

$$a^{k+1}_{\mu+1} = -(n^2-1/4)\sum_{\lambda=0}^{\mu}\frac{a^k_\lambda}{\lambda(\lambda+1)} = -(n^2-1/4)\sum_{\lambda=0}^{\mu-1}\frac{a^k_\lambda}{\lambda(\lambda+1)} - (n^2-1/4)\frac{a^k_\mu}{\mu(\mu+1)} \tag{21}$$

ıs

$$a^{k+1}_{\mu+1} = a^{k+1}_\mu - \frac{n^2-1/4}{\mu(\mu+1)}\,a^k_\mu \tag{22}$$

ı

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{k+1}_{\mu+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+1}_\mu - \frac{n^2-1/4}{\mu(\mu+1)}\sum_{k=1}^{\infty} a^k_\mu$$

$$b_{\mu+1} - a^1_{\mu+1} = b_\mu - a^1_\mu - \frac{n^2-1/4}{\mu(\mu+1)}\,b_\mu$$

ɔor $\mu \geqq 1$ wordt dus:

$$b_{\mu+1} = \left\{1 - \frac{n^2-1/4}{\mu(\mu+1)}\right\} b_\mu , \tag{23}$$

ɜrwijl $b_1 = 1$

(24

Nu kan de formele asymptotische ontwikkeling gemakkelijk in de vorm van Hankel gebracht worden door middel van

$$\mu!\, b_{\mu+1} = \frac{-1}{\mu+1}\left\{n^2-(\mu+\tfrac{1}{2})^2\right\}(\mu-1)!\, b_\mu ,$$

Volkomen analoog hieraan is een asymptotische ontwikkeling te vinden, uitgaande van e^{-ix} , die ontstaat door in de formules i door −i te vervangen. Over de toevoeging van deze asymptotische formules aan de cylinderfuncties is nog niets gezegd. Dit komt ter sprake bij het verschijnsel van Stokes.

1,4. Het verschijnsel van Stokes.

Onder het verschijnsel van Stokes verstaan wij het verschijnsel, dat voor een bepaalde functie in een zeker gebied een bepaalde asymptotische ontwikkeling geldt, terwijl bij overschrijden van de grens van het gebied deze eerste haar geldigheid verliest en een andere asymptotische ontwikkeling voor dezelfde functie geldt.
Als eerste voorbeeld behandelen wij de oplossing van de vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - y = 0$$

vastgelegd door

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ y'=1 \end{matrix}\right\} \text{ voor } z=0$$

Zij is

$$y = \operatorname{sh} z = \tfrac{1}{2}\left(e^{+z} - e^{-z}\right)$$

Beschouwen wij nu het halfvlak:

$$(k-\tfrac{1}{2})\pi < \arg z < (k+\tfrac{1}{2})\pi$$

dan wordt het asymptotische gedrag gegeven door

$$y = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \sim \tfrac{1}{2}e^{z} \qquad k \text{ even}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \sim -\tfrac{1}{2}e^{-z} \qquad k \text{ oneven}$$

daar de weggelaten term in het beschouwde geval ~ 0 is.

1,5 Het verschijnsel van Stokes voor cylinderfuncties.

In § 2,1 is voor de functies van Hankel van de eerste en tweede soort afgeleid de asymptotische formule:

$$H_\nu^{(1)}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\, e^{i(\xi-\frac{1}{2}\nu\pi-\pi/4)} \sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\Gamma(\nu+h+\tfrac{1}{2})\left(\frac{i}{2\xi}\right)^h, \qquad (1)$$

geldig, indien δ een getal >0 voorstelt, voor:

$$-\pi+\delta \leq \arg\xi \leq 2\pi-\delta$$

$$H_\nu^{(2)}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\, e^{-i(\xi-\frac{1}{2}\nu\pi-\pi/4)} \sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\Gamma(\nu+h+\tfrac{1}{2})\left(\frac{-i}{2\xi}\right)^h, \qquad (2)$$

geldig voor $-2\pi+\delta \leq \arg\xi \leq \pi-\delta$

De functie $J_\nu(\xi)$ is gedefinieerd door:

$$J_\nu(\xi)=\tfrac{1}{2}\left\{H_\nu^{(1)}(\xi)+H_\nu^{(2)}(\xi)\right\} \tag{3}$$

heeft dus voor $-\pi+\delta \leq \arg\xi \leq \pi-\delta$, waar beide bovenstaande formules gelden, de asymptotische ontwikkeling:

$$J_\nu(\xi)=\left(\frac{1}{2\pi\xi}\right)^{1/2}\frac{2}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{\cos\left(\xi-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{\pi}{4}\right)\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{2h}\Gamma\left(\nu+2h+\tfrac{1}{2}\right)\frac{(-1)^h}{(2\xi)^{2h}}-\right. \tag{4}$$
$$\left.-\sin\left(\xi-\tfrac{1}{2}\nu\pi-\tfrac{1}{4}\right)\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{2h+1}\Gamma\left(\nu+2h+1+\tfrac{1}{2}\right)\frac{(-1)^h}{(2\xi)^{2h+1}}\right\},$$

Indien ξ in een ander gebied ligt, het gebied Ξ_k , gedefinieerd door:

$$(k-1)\pi+\delta \leq \arg\xi \leq (k+1)\pi-\delta,$$

voeren wij in

$$\xi e^{-k\pi i},$$

dan is

$$-\pi+\delta \leq \arg\xi e^{-k\pi i} \leq \pi-\delta$$

en

$$J_\nu(\xi e^{-k\pi i}) = e^{-k\pi\nu i}J_\nu(\xi)$$

Voor $J_\nu(\xi e^{-k\pi i})$ is dan de asymptotische ontwikkeling:

$$J_\nu(\xi e^{-k\pi i})=\left(\frac{1}{2\pi\xi e^{-k\pi i}}\right)^{1/2}\frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}e^{i(\xi e^{-k\pi i}-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4})}\cdot\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\Gamma\left(\nu+h+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{i}{2\xi e^{-k\pi i}}\right)^h$$
$$+\left(\frac{1}{2\pi\xi e^{-k\pi i}}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}e^{-i(\xi e^{-k\pi i}-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4})}\cdot\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\Gamma\left(\nu+h+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{-i}{2\xi e^{-k\pi i}}\right)^h \tag{5}$$

dus in Ξ_k geldt:

Voor $k=2p$

$$J_\nu(\xi)=e^{2pi\pi(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2\pi\xi}\right)^{1/2}e^{i(\xi-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4})}\cdot\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h}$$
$$+e^{2pi\pi(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2\pi\xi}\right)^{1/2}e^{-i(\xi-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{\pi}{4})}\cdot\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})}{(2i\xi)^h} \tag{6}$$

Voor k = 2p + 1

$$J_\nu(\xi) = e^{(2p+1)(\nu+\frac{1}{2})\pi i}\left(\frac{1}{2\pi\xi}\right)^{1/2} e^{i\left(\xi+\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h} +$$

$$+ e^{(2p+1)(\nu+\frac{1}{2})\pi i}\left(\frac{1}{2\pi\xi}\right)^{1/2} e^{-i\left(\xi+\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{\pi}{4}\right)} \sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})}{(2i\xi)^h} \qquad (7)$$

Dus in Ξ_k, gedefinieerd door

$$(k-1)\pi+\delta \leq \arg\xi \leq (k+1)\pi-\delta$$

geldt:

$$J_\nu(\xi) = c_1\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}} e^{i\xi}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h} +$$

$$+ c_2\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}} e^{-i\xi}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})}{(2i\xi)^h} \qquad (8)$$

waarbij

$$c_1 = e^{(k-\frac{1}{2})\pi(\nu+\frac{1}{2})i}\ ;\ c_2 = e^{(k+\frac{1}{2})\pi(\nu+\frac{1}{2})i} \qquad k \text{ even}$$

$$c_1 = e^{(k+\frac{1}{2})\pi(\nu+\frac{1}{2})i}\ ;\ c_2 = e^{(k-\frac{1}{2})\pi(\nu+\frac{1}{2})i} \qquad k \text{ oneven} \qquad (9)$$

De waarden van de coefficienten c_1 en c_2 verspringen hier weer bij overgang van het ene gebied naar het aangrenzende.
De gebieden Ξ_k overlappen elkaar, indien $\delta < \frac{1}{2}\pi$ wordt gekozen, echter zal de bissectrix van elk gebied, n.l. de lijn $\arg\xi = k\pi$ steeds slechts tot één en niet meer dan een gebied behoren, op de reele as is voor $J_\nu(\xi)$ dus steeds slechts één asymptotische ontwikkeling geldig.
Wij kunnen de gebieden Ξ_k dus gekarakteriseerd denken door hun bisectrix, zoals ook de notatie aangeeft.
Langer kiest steeds $\delta > \frac{1}{2}\pi$, zodat daar de gebieden Ξ_k geen punten gemeen hebben.
Dit vergemakkelijkt het overzicht iets, is echter geenszins noodzakelijk.
Uit het feit, dat voor $\delta < \frac{1}{2}\pi$ de gebieden elkaar overlappen volgt, dat daar voor $J_\nu(\xi)$ twee asymptotische ontwikkelingen geldig zijn, die op het eerste gezicht er volmaakt verschillend uitzien. Dit heeft Stokes op het spoor van het verschijnsel gebracht.
Wij beschouwen dit nog eens nader. Formule (4) is geldig voor $J_\nu(\xi)$ in het gebied Ξ_0: $-\pi+\delta \leq \arg\xi \leq \pi-\delta$: en is ontstaan door optellen van (1) en (2)

$$J_\nu(\xi)=\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}}e^{i(\xi-\frac{1}{2}\pi\nu-\frac{1}{4})}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}}e^{-i(\xi-\frac{1}{2}\pi\nu-\frac{1}{4})}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})}{(2i\xi)^h}\,. \tag{10}$$

Daarentegen in Ξ_2: $\delta \leq \arg\xi \leq 2\pi-\delta$ geldt

$$J_\nu(\xi)=\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}}e^{i(\xi+\frac{3}{2}\pi\nu+\frac{3}{4})}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}}e^{-i(\xi-\frac{1}{2}\pi\nu-\frac{1}{4})}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})}{(2i\xi)^h}\,. \tag{11}$$

Beide formules zijn tegelijkertijd geldig voor $\delta \leq \arg\xi \leq \pi-\delta$
Daar is het verschil echter gelijk aan:

$$\frac{1}{(2\pi\xi)^{1/2}}e^{i\xi}\left\{e^{-i(\frac{1}{2}\pi\nu+\frac{1}{4})}-e^{i(\frac{3}{2}\pi\nu+\frac{3}{4})}\right\}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\nu-\frac{1}{2}}{h}\frac{\Gamma(\nu+h+\frac{1}{2})(-1)^h}{(2i\xi)^h}\,, \tag{12}$$

wat, daar voor $\delta \leq \arg\xi \leq \pi-\delta$

asymptotisch gelijk is aan nul.
In de sectoren, waar aangrenzende gebieden elkaar overlappen, is dus het verschil tussen de asymptotische formules nul. Bij het verlaten van het ene gebied is dit niet meer het geval, maar daar zijn dan ook beide formules niet meer tegelijkertijd geldig.

§ 2. De methode van Langer, algemene theorie

1. Veronderstellingen.

Langer beschouwt differentiaalvergelijkingen in het complexe vlak van een variabele s van de tweede orde, waarvan de coefficienten afhankelijk zijn van een parameter λ .
Als de term van de tweede orde verdreven is, wordt de vergelijking op een standaardvorm gebracht. De meest algemene vorm, die Langer beschouwt, is

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\{\lambda\,\psi(s)+\tau(\lambda,s)\}\,w=0 \tag{1}$$

De vergelijking is gedefinieerd in een gebied R_s van het complexe s-vlak, dat enkelvoudig samenhangend is. Onder zekere voorwaarden is het mogelijk om de boven beschreven methode toe te passen.
I. Als eerste voorwaarde geldt

$$\psi(s)\equiv(s-s_0)^\nu\,\psi_1(s), \tag{2}$$

waarbij $\nu > -2$ en $\psi_1(s)$ een in R_s eenwaardige analytische functie is, die $\neq 0$ is.

II. De functie $\tau(\lambda,s)$ kan een pool hebben in s_0, zij kan echter gebracht worden op de vorm:

$$\tau(\lambda,s) \equiv \frac{A_1}{(s-s_0)^2} + \frac{B_1}{s-s_0} + C_1(\lambda,s) \tag{3}$$

waarin A_1 en B_1 constanten zijn en $C_1(\lambda,s)$ een analytische functie, die in elk eindig deelgebied van R_s gelijkmatig begrensd is in λ. De constante factoren in het product $\lambda\,\psi(s)$ zijn zo verdeeld, dat $\psi(s)$ als ontwikkeling in de omgeving van s_0 heeft:

$$\psi(s) \equiv (s-s_0)^{\nu}\left\{1+\alpha_1(s-s_0)+ - - - - - - -\right\} \tag{4}$$

Wij brengen de vergelijking nu op een normaalvorm door te substitueren

$$s - s_0 = \frac{z^2}{4} \tag{5}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left\{\lambda\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+2}\psi_1(s) + \frac{4A_1}{z^2} + B_1 + \frac{z^2}{4}C_1(\lambda,s)\right\}w = 0 \tag{6}$$

door in te voeren

$$w = z^{1/2}u \tag{7}$$

wordt de tweede term verdreven

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{\frac{\lambda}{2^{2\nu+2}}z^{2\nu+2}\psi_1(s) - \frac{3}{4} + \frac{4A_1 - 3/4}{z^2} + B_1 + \frac{z^2}{4}C_1(\lambda,s)\right\}u = 0 \tag{8}$$

Is dan

$$\rho = \frac{\lambda^{1/2}}{2^{\nu+1}}$$

$A^2 = 1 - 4A_1$, arg A is bepaald door $-\frac{\pi}{2} < \arg A \leq \frac{\pi}{2}$ (10)

$$\chi(\rho,z) = B_1 + \frac{z^2}{4}C_1(\lambda,s) \tag{11}$$

$$\phi^2(z) = z^{2\nu+2}\,\psi_1(s) \tag{12}$$

dan kan de vergelijking geschreven worden als:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{\rho^2\varphi^2(z) + \frac{1/4 - A^2}{z^2} + \chi(\rho,z)\right\}u = 0 \tag{13}$$

Het gebied R_s gaat nu over in een gebied R_z

De functie

$$\psi^{1/2}(s) = (s-s_0)^{\nu/2}\cdot\sqrt{1+\alpha_1(s-s_0)+ - - - - - - - -} \tag{14}$$

is in R_s meerwaardig, indien ν geen even getal is.

Voor de overige cylinderfuncties kunnen op dezelfde manier algemeen geldige asymptotische relaties afgeleid worden. De omloopsrelaties voor de functies van Hankel zijn:

$$H_\nu^{(1)}(z\,e^{m\pi i}) = \frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i}\,\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z)$$

Indien

$$(2p-1)\pi < \arg z < (2p+1)\pi$$

stellen wij

$$z' = z\,e^{-2p\pi i};$$

zodat

$$-\pi < \arg z' < +\pi$$

en

$$H_\nu^{(1)}(z) = H_\nu^{(1)}(z'\,e^{2p\pi i}) = \frac{\sin(1-2p)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z') - e^{-\nu\pi i}\,\frac{\sin 2p\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z')$$

Nu is

$$H_\nu^{(1)}(z') \sim \left(\frac{2}{\pi z'}\right)^{1/2} \cdot e^{i(z'-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(-1)^k}{(2iz')^k} \sim$$

$$\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cdot e^{p\pi i + i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(-1)^k}{(2iz)^k} \sim$$

$$\sim (-1)^p \cdot \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(-1)^k}{(2iz)^k}$$

en $H_\nu^{(2)}(z') = H_\nu^{(2)}(z\,e^{-2p\pi i}) \sim \left(\frac{2}{\pi z'}\right)^{1/2} \cdot e^{-i(z'-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz')^k} \sim$

$$\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-p\pi i - i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz)^k} \sim$$

$$\sim (-1)^p \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cdot e^{-i(z-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz)^k},$$

zodat, indien wij schrijven, voor $(m-1)\pi+\delta \leq \arg z \leq (m+1)\pi-\delta$

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim c_{1,m}^{(1)} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(-1)^k}{(2iz)^k} + c_{2,m}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-iz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz)^k}$$

voor m = 2p geldt

$$c_{1,2p}^{(1)} = \frac{\sin(1-2p)\nu\pi}{\sin\nu\pi}(-1)^p \cdot e^{-i(\nu+1/2)\frac{\pi}{2}}$$

$$c_{2,2p}^{(1)} = \frac{\sin 2p\nu\pi}{\sin\nu\pi}(-1)^{p+1} \cdot e^{-i(\nu-1/2)\frac{\pi}{2}}$$

Voor $m = 2p+1$ is

$$2p\pi + \delta \leq \arg z \leq (2p+2)\pi - \delta$$

en de substitutie

$$z' = z\, e^{-(2p+1)\pi i}$$

voert tot

$$-\pi + \delta \leq \arg z' \leq \pi - \delta$$

zodat geldt

$$H_\nu^{(1)}(z') \sim \left(\frac{2}{\pi z'}\right)^{1/2} e^{i(z' - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^k}{(2iz')^k} \sim$$

$$\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} (-1)^p e^{-i(\nu - 1/2)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-iz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz)^k}$$

en

$$H_\nu^{(2)}(z') \sim \left(\frac{2}{\pi z'}\right)^{1/2} \cdot e^{-i(z' - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(2iz')^k} \sim$$

$$\sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} (-1)^{p+1} \cdot e^{i(\nu - 1/2)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{+iz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^k}{(2iz')^k}$$

Verder is voor m = 2p + 1

$$H_\nu^{(1)}(z) = H_\nu^{(1)}\left(z' e^{(2p+1)\pi i}\right) = \frac{\sin(-2p)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_\nu^{(1)}(z') -$$

$$- e^{-\nu\pi i} \frac{\sin(2p+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z'),$$

zodat in dit geval gevonden wordt, dat

$$C^{(1)}_{1,2p+1} = (-1)^p \cdot \frac{\sin(2p+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{-i(\nu + 1/2)\frac{\pi}{2}}$$

$$C^{(1)}_{2,2p+1} = (-1)^{p+1} \cdot \frac{\sin 2p\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{-i(\nu - 1/2)\frac{\pi}{2}}$$

Om analoge formules op te stellen voor de functie $H_\nu^{(2)}(z)$ maken gebruik van de omloopsrelatie:

$$H_\nu^{(2)}\left(z e^{m\pi i}\right) = \frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z) + e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z)$$

en vinden op een analoge wijze

Als $(m-1)\pi + \delta \leq \arg z \leq (m+1)\pi - \delta$

geldt $H_\nu^{(2)}(z) \sim C^{(2)}_{1,m} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k (-1)^k}{(2iz)^k} + C^{(2)}_{2,m} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-iz} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{(2i}$

Hierin is:

$$C^{(2)}_{1,2p} = (-1)^p \frac{\sin 2p\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{(\nu - 1/2)\frac{\pi}{2} i}$$

$$C^{(2)}_{2,2p} = (-1)^p \frac{\sin(1+2p)\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{(\nu + 1/2)\frac{\pi}{2} i}$$

$$C^{(2)}_{1,2p+1} = (-1)^{p+1} \frac{\sin(2p+2)\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{(\nu - 1/2)\frac{\pi}{2} i}$$

$$C^{(2)}_{2,2p+1} = (-1)^p \frac{\sin(2p+1)\nu\pi}{\sin\nu\pi} e^{(\nu + 1/2)\frac{\pi}{2} i}$$

Om een éénwaardige functie $\psi^{1/2}(s)$ te verkrijgen, moet R_s vervangen worden door een deel van een oppervlak van Riemann. Dit oppervlak bezit vertakkingspunten in het punt $s = s_0$ en in de nulpunten van de tweede factor. Daar echter verondersteld is, dat ψ behalve s_0 in R_s geen andere nulpunten bezit, is de wortelvorm in R_s een eenwaardige functie van s.

Het enige vertakkingspunt van het Riemann oppervlak ligt dus in S_0.
Is $\frac{\nu}{2}$ een rationaal getal, voorgesteld door de onvereenvoudigbare breuk p/q, dan is de orde van het vertakkingspunt q, d.w.z. het Riemann oppervlak bezit q bladen, die in S_0 samenhangen. Is ν een irrationaal getal, dan bezit het oppervlak oneindig veel bladen.

Door het gebied R_s nu over dit oppervlak verspreid te denken, verkrijgen wij, dat $\psi^{1/2}(s)$ een eenwaardige functie is van s.
Bij de transformatie $s - s_0 = \frac{z^2}{4}$ gaat dit oppervlak van Riemann over in een ander oppervlak R_z met als enige vertakkingspunt het punt z = 0.
De functie

$$\psi(z) = z\,\psi^{1/2}(s) = z^{\nu-1}\sqrt{1 + \frac{a_1}{4}z^2 + \cdots\cdots} \tag{15}$$

is op dit oppervlak een eenwaardige functie van z. De orde van het vertakkingspunt is hier echter 2 X zo laag als bij het eerste vertakkingspunt, daar telkens 2 bladen van R_s afgebeeld worden op één blad van R_z.

De functie $\chi(\rho,z)$, die in het oorspronkelijke gebied eenwaardig en analytisch was, zal dit ook op R_z zijn. Verder denken wij $\varphi(z)$, die volgens (12) door haar kwadraat is gedefinieerd, zo vastgelegd, dat

$$\lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z)}{z^{\nu+1}} = 1 \tag{16}$$

2. De verwante differentiaalvergelijking.

Wij zoeken een verwante differentiaalvergelijking op te stellen, waarvoor oplossingen direct zijn op te schrijven; hiervoor kiezen wij een oplossing in cylinderfuncties
Volgens Watson voldoet de functie

$$w(z) = \{\psi(z)\}^{\mu}\, C_{\nu}\{\psi(z)\} \tag{1}$$

aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \left\{\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + (2\mu-1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right\}\frac{dw}{dz} + \left\{\mu^2 - \nu^2 + \psi^2(z)\right\}\left\{\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right\}^2 w = 0 \tag{2}$$

Hieruit kan nog de tweede term verdreven worden door, in plaats van $w(z)$ in te voeren een functie

$$\eta(z) = \zeta(z)\cdot w(z) \tag{3}$$

waardoor de vergelijking overgaat in:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \left\{2\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + (2\mu-1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right\}\frac{dy}{dz} + \tag{4}$$

$$\left[(\mu^2-\beta^2+\gamma^2)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + 2\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 - \left\{\frac{\psi''}{\psi'} + (2\mu-1)\frac{\psi'}{\psi}\right\}\frac{\zeta'}{\zeta} - \frac{\zeta''}{\zeta}\right] y = 0$$

Wanneer wij nu ψ en ζ zo kiezen, dat

$$-2\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{\psi''}{\psi'} + (2\mu-1)\frac{\psi'}{\psi} \tag{5}$$

dan wordt dit

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[(\mu^2-\beta^2)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 + \gamma'^2 + 4\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 - \frac{\zeta''}{\zeta}\right] y = 0 \tag{6}$$

Kies nu $\psi' = \rho\varphi$, en definieer $\Phi(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz$ dan is

$$\psi(z) = \xi = \rho\int_0^z \varphi(z)\,dz = \rho\,\Phi(z) \tag{7}$$

en verder

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\frac{\Phi'}{\Phi}, \tag{8}$$

dat na integratie oplevert

$$\zeta(z) = \varphi^{-1/2}(z)\,\Phi^{1/2-\mu} \tag{9}$$

De term γ'^2 is reeds geidentificeerd met $\rho^2\varphi^2$. Om het karakter van de overige termen te onderzoeken, eerst nader bestuderen het gedrag in Φ en $\zeta(z)$. Daar $\varphi(z)$ in R_z regulier is, hoogstens met uitzondering van $z = 0$, waar (4.15) geldt, kan $\varphi(z)$ geschreven worden als

$$\varphi(z) = z^{\nu+1}\varphi_1(z) = z^{\nu+1}\left\{1 + \beta_1 z^2 + \text{------}\right\}$$

Hieruit volgt, dat $\Phi(z)$ de vorm aanneemt

$$\Phi(z) = \frac{1}{\nu+2} z^{\nu+2}\left\{1 + \frac{\nu+2}{\nu+4}\beta_1 z^2 + \text{-------}\right\}$$

dus, daar $\nu > -2$ ondersteld is, regulier is in $z = 0$ en wegens de regulariteit van $\varphi_1(z)$ in R_z ook in R_z.

De functie $\zeta(z)$ heeft nu in de omgeving van $z = 0$ de gedaante

$$\zeta(z) = z^{-\frac{\nu+1}{2} + (\nu+2)(\frac{1}{2}-\mu)}\,(1 + \alpha_1 z + \text{......})^{-1/2}(1 + \beta_1 z + \text{-----})^{1/2-\mu}\,C$$

Zij is, samen met haar reciproke, alleen dan analytisch in R_z, als

$$-\frac{\nu+1}{2} + (\nu+2)\left(\frac{1}{2}-\mu\right) = 0$$

of

$$\mu = \frac{1}{2(\nu+2)} \tag{10}$$

Verder zijn dan ook $\frac{\zeta'}{\zeta}$ en $\frac{\zeta''}{\zeta}$ in R_z analytisch.

Rest ons dus nog het gedrag te onderzoeken van de term

$$(\mu^2-\beta^2)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(\mu^2-\beta^2)\left\{\frac{\varphi}{\Phi}\right\}^2 = (\mu^2-\beta^2)\frac{(\nu+2)^2}{z^2}\left\{\frac{1+\beta_1 z^2+\cdots\cdots}{1+\frac{\nu+2}{\nu+4}\beta_1 z^2+\cdots\cdots}\right\}^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{4\mu^2}\right)\frac{1}{z^2}\left\{1+\gamma_1 z^2+\cdots\cdots\right\} = \qquad (11)$$

$$= \left(\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{4\mu^2}\right)\frac{1}{z^2}$$ + functie, die in R_z analytisch is.

Door de orde β van de cylinderfunctie zo te kiezen, dat

$$\beta = 2\mu A, \qquad (12)$$

hebben wij verkregen dat

$$y(z) = \zeta(z).\,\xi^{\mu}.\,C_\beta(\xi)$$

een oplossing is van de verwante differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left\{\rho^2\varphi^2+\frac{1/4-A^2}{z^2}+\omega(z)\right\}y=0 \qquad (13)$$

waarin $\omega(z)$ een functie is, die in het gehele gebied R_z analytisch is. Daar A zo gekozen is, dat $-\pi/2<\arg A\leq \pi/2$, is en μ een reeel getal is, is β een complex getal met

$$-\pi/2 < \arg\beta \leq \pi/2$$

Door middel van de transformatie $\Phi(z) = \int_0^z \varphi(z)\,dz$ wordt het Riemann oppervlak, waarop z ligt, afgebeeld op een oppervlak van Riemann R_Φ voor de punten Φ.
Het gebied R_z gaat dan over in een gebied R_Φ en de afbeelding van R_z op R_Φ is één-éénduidig.
Het gebied R_z is zodanig, dat $\varphi(z)$ een eenwaardige functie van z is
R_z gaat door de afbeelding $\varphi(z)$ over in een gebied van een φ-vlak.
Om de afbeelding $\Phi(z)$ één-éénduidig te maken, moet het Rieman oppervlak van Φ zodanig zijn, dat R_Φ in ditzelfde gebied wordt getransformeerd.
Een vertakkingspunt van het oppervlak is nu $\Phi=0$
De ontwikkeling in deze omgeving heeft de vorm:

$$\varphi(z) = z^{\nu+1}.\,\varphi_1(z^2) = \Phi^{\frac{\nu+1}{\nu+2}} \quad \times \quad \text{reguliere functie van } \Phi$$

De orde van het vertakkingspunt van R_Φ wordt dus bepaald door de constante ν.
Het gebied R_ξ op het oppervlak van Riemann van de variabele $\xi=\rho\Phi$ ontstaat dus R_Φ met de factor ρ te vermenigvuldigen, dus door een vermenigvuldiging en een draaiing.
In de directe omgeving van $\Phi=0$ is de afbeelding van R_z op R_Φ en R_ξ één-éénduidig. Aan R_z wordt nu de voorwaarde opgelegd, dat deze eigenschap voor het gehele gebied R_z geldt.

3. De oplossingen van de verwante differentiaalvergelijking.

Daar de opsossingen van de verwante differentiaalvergelijking een grote rol spelen, worden zij hier nader bestudeerd.

$$y_1(z) = \zeta(z)\cdot \xi^{\mu}\cdot J_\beta(\xi)$$
$$y_2(z) = \zeta(z)\cdot \xi^{\mu}\cdot Y_\beta(\xi)$$

Hun determinant van Wronski heeft de waarde

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Daar

$$y_1'(z) = \zeta'(z)\cdot \xi^{\mu}\, J_\beta(\xi) + \zeta(z)\left\{\mu\, \xi^{\mu-1} J_\beta(\xi) + \xi^{\mu}\cdot J_\beta'(\xi)\right\}\frac{d\xi}{dz}$$
$$y_2'(z) = \zeta'(z)\cdot \xi^{\mu}\cdot J_\beta(\xi) + \zeta(z)\left\{\mu\, \xi^{\mu-1} J_\beta(\xi) + \xi^{\mu}\cdot J_\beta'(\xi)\right\}\frac{d\xi}{dz}$$

wordt

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \zeta(z)\,\xi^{\mu}\, J_\beta(\xi) & Y_\beta \\ \zeta'\cdot\xi^{\mu}\, J_\beta(\xi) + \zeta\{\mu\,\xi^{\mu-1} J_\beta + \xi^{\mu} J_\beta'\}\frac{d\xi}{dz} & Y_\beta \cdots\cdots Y_\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \zeta\cdot\xi^{\mu}\cdot J_\beta(\xi) & \zeta\cdot\xi^{\mu}\, Y_\beta \\ \zeta\cdot\xi^{\mu}\, J_\beta'\,\frac{d\xi}{dz} & \zeta\,\xi^{\mu}\, Y_\beta'\,\frac{d\xi}{dz} \end{vmatrix} = \zeta^2\cdot\xi^{2\mu}\frac{d\xi}{dz}\begin{vmatrix} J_\beta & Y_\beta \\ J_\beta' & Y_\beta' \end{vmatrix} =$$

$$= \zeta^2\cdot\xi^{2\mu}\cdot\frac{d\xi}{dz}\cdot\frac{2}{\pi\xi}\,.$$

Nu is volgens (7) en (9)

$$\frac{d\xi}{dz} = \rho\cdot q(z) = \rho\,\frac{\Phi^{1-2\mu}}{\zeta^2} = \frac{\rho^{2\mu}\,\xi^{1-2\mu}}{\zeta^2}\,,$$

zodat

$$W(y_1, y_2) = \frac{2\cdot\rho^{2\mu}}{\pi} \neq 0$$

De twee oplossingen y_1 en y_2 zijn dus onafhankelijk.

4. Problemen van Sturm-Liouville

De twee voorafgaande voorbeelden zijn bijzondere gevallen van een klasse van problemen, die bekend zijn onder de naam Sturm-Lionville. Hieronder verstaat men het volgende probleem.
Gegeven is een differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u + \lambda u = 0 \qquad (1)$$

waarbij $p(x)$ en $q(x)$ in een interval $0 \leqq x \leqq l$ bij gedeelten twee keer continue differentieerbare functies zijn en $p(x) > 0$.
Gevraagd wordt een constante λ te bepalen, zodanig, dat daarbij een oplossing behoort van vergelijking (1), die voldoet aan de voorwaarden:

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0 \tag{2}$$

$$\alpha_2 u(l) + \beta_2 u'(l) = 0 \tag{3}$$

en bovendien aan de normeringsvoorwaarde

$$\int_0^l u^2 dx = 1$$

Door de substitutie

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{p}}, \quad L = \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{p}} \tag{4}$$

$$U = u\sqrt[4]{p} \tag{5}$$

gaat de vergelijking over in

$$\frac{d^2U}{dz^2} + (\lambda - Q(z))U = 0 \tag{6}$$

$$Q(z) = q(x) - \frac{1}{4}\frac{p''}{p} + \frac{5}{16}\left(\frac{p'}{p}\right)^2, \tag{7}$$

die door de voorwaarde $p \neq 0$ nergens oneindig wordt
Verder zij de integraal

$$\int_0^L Q^2 dz = M^2$$

De randvoorwaarden worden nu getransformeerd in andere van dezelfde vorm:

$$a_1 U(0) + b_1 U'(0) = 0 \tag{8}$$

$$a_2 U(L) + b_2 U'(L) = 0 \tag{9}$$

en de normeringsvoorwaarde in $\int_0^L U^2 dz = 1$ (10)

Het probleem is nu verder een probleem voor de vergelijking (6) in de vorm:

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \lambda U = Q(z).U \tag{11}$$

Stel $\lambda = \rho^2$

dan kan de verwante vergelijking geschreven worden als

$$\frac{d^2U}{dz^2} + \rho^2 U = 0 \tag{12}$$

met particuliere oplossingen

$$\sin \rho z \quad , \cos \rho z \tag{13}$$

De integraalvergelijking wordt nu :

$$U = \mu . \cos(\rho z + \varphi) + \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin \rho(z-\xi).Q(\xi).U(\xi)\, d\xi, \tag{14}$$

waarin μ, ρ en φ bepaald moeten worden uit de drie voorwaarden (8), (9) en (10)

$$\frac{1}{\rho}U'(z) = -\mu \sin(\rho z+\varphi) + \frac{1}{\rho}\int_0^z \cos \rho(z-\xi)\, Q(\xi)\, U(\xi)\, d\xi \tag{15}$$

Laat φ_1 en φ_2 bepaald worden door:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = +\frac{a_1}{b_1\rho} \; ; \; \operatorname{tg}\varphi_2 = +\frac{a_2}{b_2\rho} \quad , \tag{16}$$

dan leveren (8), (9) en (10)

$$\varphi = \varphi_1 \tag{17}$$

$$\mu \sin(\rho L + \varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{\rho}\int_0^L \cos\{\rho(z-\xi) - \varphi_2\}\, Q.U.d\xi \tag{18}$$

$$\mu^2 \int_0^L \cos^2(\rho z + \varphi_1)\,dz + \frac{2\mu}{\rho}\int_0^L \cos(\rho z+\varphi_1) . \int_0^z \sin\rho(z-\xi) . Q.U.d\xi . dz +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\int_0^L \left\{ \int_0^z \sin\rho(z-\xi) . Q.U.d\xi \right\}^2 dz = 1 \tag{19}$$

Uit deze drie vergelijkingen moet het asymptotische gedrag voor grote ρ onderzocht worden.
Allereerst maken wij schattingen van de integralen met behulp van de ongelijkheid van Schwartz

$$\left\{\int_a^b P(\xi)\,Q(\xi)\,d\xi\right\}^2 \leqq \left\{\int_a^b P^2(\xi)\,d\xi\right\}\left\{\int_a^b Q^2(\xi)\,d\xi\right\} \tag{20}$$

$$\left\{\int_0^L \cos\{\rho(z-\xi)-\varphi_2\} . Q.U.d\xi\right\}^2 \leqq \left[\int_0^L \cos^2\{\rho(z-\xi)-\varphi_2\} \cdot Q^2 \cdot d\xi\right] . \left[\int_0^L U^2 d\xi\right] \leqq M \tag{21}$$

dus

$$\mu \sin(\rho L + \varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\theta_1 M}{\rho} \qquad |\theta_1| \leqq 1 \tag{22}$$

ook is $\left\{\int_0^z \sin\rho(z-\xi) Q U d\xi\right\}^2 \leqq \left\{\int_0^z \sin^2\rho(z-\xi) Q^2 d\xi\right\}\left\{\int_0^z U^2 d\xi\right\} \leqq$

$$\leqq \left\{\int_0^L \sin^2\rho(z-\xi) Q^2 d\xi\right\}\left\{\int_0^L U^2 d\xi\right\} \leqq M^2 \tag{23}$$

zodat uit (19) volgt, dat er getallen θ_k met $|\theta_k| \leqq 1$ zijn, zodat

$$\mu^2\left[\tfrac{1}{2}L + \frac{\theta_4}{2\rho}\right] + \frac{2\mu\,\theta_2}{\rho} LM + \frac{\theta_3 L M^2}{\rho^2} = 1 \tag{24}$$

dus voor voldoend grote ρ is er een constante $|\theta_5| \leqq 1$, onafhankelijk van ρ, zodat:

$$\mu = \sqrt{\frac{2}{L}} + \frac{\theta_5}{\rho}\left\{4M + \frac{2}{L^2}\sqrt{\frac{L}{2}}\right\} \tag{25}$$

Hieruit volgt, dat voor voldoend grote ρ

$$\sin(\rho L + \varphi_1 - \varphi_2) = 2\frac{\theta_4 M}{\rho}\sqrt{\frac{L}{2}} \qquad |\theta_4| \leqq 1 \tag{26}$$

dus geldt de schatting voor grote n:

$$\rho L = n\pi + \frac{C_1}{\rho} - \varphi_1 + \varphi_2 \tag{27}$$

waarbij C_1 onafhankelijk is van n.
De eigenwaarden ρ_n van het probleem van Sturm Lionville gedragen zich dus asymptotisch als

$$\rho = \frac{n\pi}{L} + \frac{C_1}{n} - \frac{\varphi_1}{L} + \frac{\varphi_2}{L} \tag{28}$$

Verder volgt uit dit resultaat en uit de integraalvergelijking (14), met behulp van (23):

$$u(z) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi z}{L} + \varphi_1\right) + \frac{\Psi(z)}{n} \tag{29}$$

waarbij de functie Ψ (z) binnen eindige, van n en z onafhankelijke grenzen ligt.
Hierin is φ_1 bepaald door (16), d.w.z., is $b_1 \neq 0$, dan gedragen de eigenfuncties zich op den duur alle als cos $\frac{n\pi z}{L}$ en de eigenwaarden als $\frac{n\pi}{L}$. Is echter b_1 of b_2 nul, dan gedragen de eigenwaarden zich als $\frac{(n+1/2)\pi}{L}$.
De benadering kan willekeurig ver uitgevoerd worden, door eerst op (14) met $\varphi = \varphi_1$ met nog niet bepaalde μ het iteratieproces willekeurig veel keren uit te voeren en daarna uit (9) en (10) benaderingen voor en te vinden.

5. Onderzoek van de opeenvolgende integralen.

Nu wordt bewezen, dat bij geschikte keuze van ρ de opeenvolgende benaderingen convergeren.

Hiertoe is een onderzoek van de kern $K_j(z,z_1,\rho)$ noodzakelijk en wel in de omgeving van $\xi = 0$ en voor grote ξ.
Daar $K_j(z,z_1,\rho)$ zowel in y_1 en y_2 (welker gedrag voor $\xi \to 0$ eenvoudig is) als in $y_{k,1}$ en $y_{k,2}$ (welker gedrag voor $\xi \to \infty$ betrekkelijk eenvoudig is), uitgedrukt kan worden, ligt het voor de hand voor $\xi \to 0$ de uitdrukking in y_1 en y_2 en voor $\xi \to \infty$ die in y_{k1} en y_{k2} te gebruiken.

Zij z een willekeurig punt op R_z en ξ het bijbehorende punt op R_ξ.
Wij leggen nu aan R_z de voorwaarde op, dat het mogelijk is om het punt ξ met de oorsprong te verbinden door een Γ kromme, dat is een kromme, waarop in R_ξ de ordinaat monotoon met de booglengte varieert, dus òf niet toenemend, òf niet afnemend.

Is N het kleinste der getallen $N, N_2, \overline{N}_1, \overline{N}_2$ van par. 2.3, dan beschouwen wij nu twee gevallen:

a) $|\xi| < N$

b) $|\xi| > N$

Geval a.

In dit geval is

$$y_1(z) = \zeta(z) \cdot \xi^{\mu+\beta} \cdot \eta_1(\xi)$$

en voor $\beta \neq 0$

$$y_2(z) = \zeta(z) \cdot \xi^{\mu-\beta} \cdot \eta_2(\xi)$$

ρ kan zo groot gekozen worden, dat $|\xi| < N$ geheel in R_ξ ligt.
Als integratieweg kiezen wij dan de rechte lijn van 0 naar ξ, zodat

$$K_j(z,z_1,\rho) = -\theta(z,\rho) \cdot \zeta^2(z_1) \cdot e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \xi^{\mu+\beta} \cdot \xi_1^{\mu-\beta} \cdot \eta_1(\xi)\,\eta_2(\xi_1) - \xi_1^{\mu+\beta}\,\xi^{\mu-\beta} \cdot \eta_1(\xi_1)\,\eta_2(\xi) \right\} \qquad (5.1)$$

waaruit volgt

$$|K_j(z,z_1,\rho)| < |\theta(z_1,\rho)|\,|\zeta^2(z_1)| \cdot |e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i}| \cdot \frac{\pi}{2} \cdot M^2 \left\{ |\xi|^{\mu+\beta} |\xi_1|^{\mu-\beta} + |\xi_1|^{\mu+\beta} |\xi|^{\mu-\beta} \right\} \qquad (5.2)$$

Verder is $|\theta(z,\rho)|$ in $|\xi| < N$ begrensd, $|\theta(z,\rho)| < M_6$
en ook $|\zeta(z)| < M_7$
Voeren wij als integratievariabele in $t = |\xi_1|/|\xi| < 1$ dan is

$$|K_j(z,z_1,\rho)| < K \cdot \xi^{2\mu} \cdot |e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i}| \left\{ t^{\mu-\beta} + t^{\mu+\beta} \right\} \qquad (5.3)$$

Wij bewijzen nu door volledige inductie, dat, indien N

$$Y_1^{(n)} = \frac{\xi^{4n\mu+\mu+\beta}}{\rho^{4n\mu}}\cdot\eta_1^{(n)}(\xi), \tag{5.4}$$

waarbij een getal M_8 bestaat, zodat

$$|\eta_1^{(n)}(\xi)| < M_8^n \tag{5.5}$$

Voor n = 0 geldt

$$Y_1^{(0)}(\xi) = \xi^{\mu+\beta}\cdot\eta_1(\xi) \tag{5.6}$$

Neem aan, dat de stelling geldt voor $Y_1^{(n)}$. Nu is

$$Y_1^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{\rho^{2\mu}}\int_0^{\xi} K_1(z,z_1;\rho)\,Y_1^{(n)}(\xi_1)\,\frac{dz_1}{d\xi_1}\cdot d\xi_1 =$$

$$= \frac{1}{\rho^{2\mu}}\int_0^{\xi} K_1(z,z_1;\rho)\,Y_1^{(n)}(\xi_1)\,\frac{\zeta^2(z_1)}{\rho^{2\mu}}\cdot\xi_1^{2\mu-1}\,d\xi_1, \tag{5.7}$$

dus voor $\beta \neq 0$:

$$|Y_1^{(n+1)}(\xi)| < \frac{K}{\rho^{4(n+1)\mu}}\cdot M_7^2\cdot|\xi^{4(n+1)\mu+\mu+\beta}|\cdot M_8^n\cdot\int_0^1(1+t^{2\beta})t^{4(n+1)\mu-1}dt \tag{5.8}$$

Daar $\mu > 0$ en $\mathrm{Re}\,\beta \geqq 0$, volgt hieruit

$$|Y_1^{(n+1)}(\xi)| < \frac{\xi^{4(n+1)\mu+\mu+\beta}}{\rho^{4(n+1)\mu}}\cdot M_8^{n+1} \tag{5.9}$$

Voor voldoend grote ρ zal dus in het gebied $|\xi| < N$ de asymptotische ontwikkeling convergeren.

Voor $\beta = 0$ vinden wij met een geringe wijziging hetzelfde resultaat.

Dus:

Bij de oplossing $y_1(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu}\,J_\beta(\xi)$ van de verwante differentiaalvergelijking behoort een oplossing van de differentiaalvergelijking voor $|\xi| < N$ gegeven door:

$$u_1(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu+\beta}\left\{\xi^{-\beta}J_\beta(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{4n\mu}\cdot\varphi_n(\xi)}{\rho^{4n\mu}}\right\}\quad;\ |\xi| < N \tag{5.10}$$

Voor de functie $\overline{u_1}(z)$, waaruit de afgeleide y'(z) volgt, wordt een analoge ontwikkeling gevonden.

<u>Geval b.</u> $|\xi| > N$

In het geval, dat $|\xi|$ groot is, maken wij gebruik van de asymptotische formule voor $y_1(z)$

$$y_1(z) \sim \zeta(z)\,\xi^{\mu-\frac{1}{2}}\left\{c_1 e^{i\xi}\left(1+\sum\frac{\alpha_n(-1)^n}{\xi^n}\right) + c_2 e^{-i\xi}\left(1+\sum\frac{\alpha_n}{\xi^n}\right)\right\} \tag{5.11}$$

waarbij

$$c_1 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{(2s-\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})\pi i} \qquad \xi \text{ in } \Xi_{2s-1} \text{ of } \Xi_{2s}$$

$$c_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{(2s+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})\pi i} \qquad \xi \text{ in } \Xi_{2s} \text{ of } \Xi_{2s+1}$$

Welk van de twee termen in deze ontwikkeling domineert hangt af van het teken van $\Im(\xi)$

Wij nemen $\Im(\xi) \leq 0$, voor $\Im(\xi) > 0$ geldt een analoge redenering. Dan is er voor $|\xi| > N$ een getal M_{10} zodat

$$|y_1(z)| < |\xi^{\mu - 1/2}| M_{10} \tag{5.12}$$

Om een schatting te verkrijgen voor $K(z, z_1; \rho)$ voor $|\xi| > N$ wordt gebruik gemaakt van de uitdrukkingen

$$K_j(z, z_1; \rho) \frac{dz_1}{d\xi_1} =$$

$$= \frac{i \zeta^3(z_1) \theta(\rho, z_1)}{2} \left\{ Y_{k,1}(z) y_{k,2}(z_1) - Y_{k,2}(z) y_{k,1}(z_1) e^{-2i\xi} \right\} e^{i\xi_1} \xi_1^{2\mu-1} \tag{5.13}$$

$$\frac{i \zeta^4(z_1) \theta(\rho, z_1)}{2} \left\{ Y_{k,1}(z) Y_{k,2}(z_1) - Y_{k,2}(z) Y_{k,1}(z_1) e^{-2i(\xi - \xi_1)} \right\} \xi_1^{2\mu-1}, \tag{5.14}$$

$$\frac{i \theta(\rho, z_1)}{2\rho^{1-4\mu} \phi(z_1)} \left\{ Y_{k,1}(z) Y_{k,2}(z_1) - Y_{k,2}(z) Y_{k,1}(z_1) e^{-2i(\xi - \xi_1)} \right\} \xi_1^{1-2\mu} \frac{dz_1}{d\xi_1} \tag{5.15}$$

Hierin kiezen wij voor k de waarde, die behoort bij het halfvlak, waarin ξ ligt.

In dit geval is voor $|\xi| > N$ een ξ in Ξ_k

$$|Y_{k,j}(z)| \equiv \left| \frac{e^{(-1)^j i\xi}}{\zeta(z)} y_{k,j}(z) \right| < |\xi|^{\mu - 1/2} M_{11} \tag{5.16}$$

Om nu de integraal te kunnen schatten wordt de integratieweg in 3 stukken verdeeld.

Op het eerste stuk is steeds $|\xi_1| < N$, over het tweede stuk is $|\xi_1| > N$ maar ξ_1 ligt binnen een bepaald eindig deelgebied van R_ξ,
het derde stuk is het deel van de kromme, dat buiten dat deelgebied ligt.
Is R_ξ eindig, dan kan voor het deelgebied R_ξ zelf gekozen worden, zodat dan steeds twee bogen Γ_1 en Γ_2 nodig zijn.

Wij bewijzen nu door volledige inductie, dat, indien ρ_μ wordt gedefinieerd door

$$\rho_\mu = \begin{cases} \rho & \mu > 1/4 \\ \rho / \log \rho & \mu = 1/4 \\ \rho^{4\mu} & \mu < 1/4 \end{cases} \tag{5.17}$$

voor $Y_1^{(n)}(z)$ geldt voor $|\xi| > N$

$$|Y_1^{(n)}(z)| < \frac{\xi^{\mu - 1/2}}{\rho_\mu^n} \cdot M_{12} \tag{5.18}$$

Volgens (5.12) geldt de stelling voor n = 0.
De functie $y_1^{(n+1)}(z)$ is gedefinieerd door:

$$y_1^{(n+1)}(z) = \frac{1}{\rho^{4\mu}} \int_0^{\xi} K_1(z, z_1, \rho) \frac{dz_1}{d\xi_1} y_1^{(n)}(z_1)\, d\xi_1 =$$

$$= \frac{1}{\rho^{4\mu}} \int_{\Gamma_1} + \frac{1}{\rho^{4\mu}} \int_{\Gamma_2} + \frac{1}{\rho^{4\mu}} \int_{\Gamma_3} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 \qquad (5.19)$$

Voor elk dezer integralen wordt nu een schatting gemaakt met behulp van (1.3), 14 en 15.
Daar $\mathcal{J}(\xi)$ negatief is, is steeds $\mathcal{J}(\xi - \xi_1) \leqq 0$ langs de Γ kromme, zodat de exponentiele factoren begrensd zijn. Dan is met (9) en (13) voor $|\xi| > N$ en $|\xi_1| < N$

$$|\mathcal{J}_1| = \left| \frac{1}{\rho^{4\mu}} \int_{\Gamma_1} K_1(z, z_1; \rho) \frac{dz_1}{d\xi_1} y_1^{(n)}(z_1)\, d\xi_1 \right| \leqq$$

$$\left| \frac{\xi^{\mu-1/2}}{\rho^{4\mu}} \cdot M_{12} \cdot M_{13} \cdot \frac{1}{\rho^{4n\mu}} \right| \leqq |\xi|^{\mu-1/2} \cdot M_{14} \cdot \frac{1}{\rho_\mu^{n+1}} \cdot \left\{ \frac{\rho_\mu}{\rho^{4\mu}} \right\}^{n+1} \qquad (20)$$

Verder is

$$|\mathcal{J}_2| = \left| \frac{1}{\rho^{2\mu}} \int_{\Gamma_2} K_1(z, z_1; \rho) \frac{dz_1}{d\xi_1} y_1^{(n)}(z_1)\, d\xi_1 \right| \leqq$$

$$\left| \frac{\xi^{\mu-1/2}}{\rho^{4\mu}} \cdot M_{12} \cdot \frac{M_{14}}{\rho_\mu^{n}} \int_{\Gamma_2} \xi_1^{4\mu-1} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \right| \qquad (21)$$

De waarden van ξ_1 op Γ_2 zijn van dezelfde orde van grootte als ρ, zodat voor $\mu > 1/4$

$$\left| \int_{\Gamma_2} \xi_1^{4\mu-1} \frac{d\xi}{\xi_1} \right| = M_{15}\, \rho^{4\mu-1} \qquad (22)$$

voor $\mu = 1/4$

$$\left| \int_{\Gamma_2} \frac{d\xi}{d\xi_1} \right| = M_{15} \ln \rho \qquad (23)$$

voor $\mu < 1/4$ bepaalt de ondergrens bij ξ = N de waarde in de integraal

$$\left| \int_{\Gamma_2} \xi_1^{4\mu-1} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \right| = M_{15} \qquad (24)$$

Dus

$$|\mathcal{J}_2| \leqq |\xi|^{\mu-1/2} M_{16} \left| \frac{1}{\rho \cdot \rho_\mu^{n}} \right| \qquad \mu > 1/4 \qquad (25)$$

$$|\xi|^{\mu-1/2} M_{16} \left| \frac{\ln \rho}{\rho \cdot \rho_\mu^{n}} \right| \qquad \mu = 1/4 \qquad (26)$$

$$|\xi|^{\mu-1/2} M_{16} \left| \frac{1}{\rho^{4\mu} \rho_\mu^{n}} \right| \qquad \mu < 1/4 \qquad (27)$$

Met de definitie (17) voor ρ_μ geldt dus

$$\left|\mathcal{Y}_2\right| \leqq M_{16} \left|\xi\right|^{\mu-1/2} \frac{1}{\rho_\mu^{n+1}} \tag{28}$$

Rest tenslotte een schatting voor de integraal over het stuk Γ_3.
Hiertoe is het nodig nog een voorwaarde te introduceren:
In het gebied R_z geldt een betrekking

$$\int \left| \frac{\theta(\rho,z)}{\varphi(z)}\, dz \right| < M_{17} \tag{29}$$

met een zekere constante M_{17} uniform t.o.v. alle bogen Γ, waar~~voor~~ $|z| \geqq N_1 > 0$ voor zekere toegelaten waarden van ρ.
Voor $|\xi| \geqq |\xi_1| \geqq N_1$ geldt

$$\begin{aligned} \left|K_j(z,z_1;\rho)\right| &\leqq \left| \frac{\theta(\rho,z_1)}{\phi(z_1)} \right| \cdot \left| \frac{M_{18}}{\rho^{1-4\mu}} \xi^{\mu-1/2} \cdot \xi_1^{\mu-1/2} \cdot \xi_1^{1-2\mu} \right| \leqq \\ &\leqq \left| \frac{\theta(\rho,z_1)}{\phi(z_1)} \right| \cdot \frac{M_{18}}{\rho^{1-4\mu}} \cdot \left| \frac{\xi}{\xi_1} \right|^{\mu-1/2} \leqq \\ &\leqq \left| \frac{\theta(\rho,z_1)}{\phi(z_1)} \right| \cdot \frac{M_{18}|\xi|^{\mu-1/2}}{\rho^{1-4\mu}} \cdot \frac{1}{|N_1|^{\mu-1/2}} \end{aligned} \tag{30}$$

zodat

$$\left|\mathcal{Y}_3\right| \leqq \frac{M_{18}}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho_\mu^{n}} \cdot M_{17} = M_{19} \cdot \frac{\rho_\mu}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho_\mu^{n+1}} \tag{31}$$

In totaal is dus

$$\left| y_1^{(n+1)}(z) \right| \leqq \frac{|\xi|^{\mu-1/2}}{|\rho_\mu^{n+1}|} \left| \left\{ \left(\frac{\rho_\mu}{\rho^{4\mu}} \right)^{n+1} \cdot M_{14} + M_6 \frac{\rho_\mu}{\rho^{4\mu}} + M_{19} \cdot \frac{\rho_\mu}{\rho} \right| \quad ; \tag{31}$$

waarmee de stelling bewezen is.
Wij hebben nu aangetoond, dat voor voldoend grote ρ de reeks:

$$U_1(z) = Y_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y^{(n)}(z)}{\rho_\mu^n} \tag{32}$$

voor $|\xi| > N$ convergeert en de asymptotische ontwikkeling levert van de functie $U_1(z)$.
Een asymptotische ontwikkeling voor de oplossing $u_1(z)$ van de vergelijking kan hieruit direct afgeleid worden voor $|\xi| > N$

$$u_1(z) = y_1(z) + \zeta(z) \cdot \xi^{\mu-1/2} \left\{ e^{i\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^{(1)}(z)}{\rho_\mu^n} + e^{-i\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^{(2)}(z)}{\rho_\mu^n} \right\} . \tag{33}$$

Een dergelijke discussie levert voor de functies $\overline{u_1}(z)$ een analoge ontwikkeling.

<u>De oplossingen van de verwante differentiaalvergelijking</u> (vervolg)

Deze oplossingen zijn geschikt om gebruikt te worden voor een onderzoek van de algemene oplossing in de buurt van $\xi = 0$, dus ook z = 0 van de reeksontwikkeling van de functies van Bessel en Neumann
In deze omgeving wordt met vrucht gebruik gemaakt

$$y_1(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu+\beta}\,\frac{1}{2^{\beta}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\xi/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(k+\beta+1)} \qquad (9)$$

$$y_2(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu-\beta}\,\frac{-2^{\beta}}{\sin\beta\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\xi/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(-\beta+k+1)} - \right.$$

$$\left. -\cot\beta\pi\cdot\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2\beta}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\xi/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\beta+k+1)}\right\}$$

β geen geheel getal (10)

$$y_2(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu-\beta}\,\frac{-2^{\beta}}{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{\beta-1}\frac{(\beta-k-1)!}{k!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k} - \right.$$

$$-2\ln\frac{\gamma\xi}{2}\cdot\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2\beta}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\xi/2)^{2k}}{k!\,(k+\beta)!} +$$

$$\left. +\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k}{k!\,(\beta+k)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{\mu=1}^{k}\frac{1}{\mu}+\sum_{\mu=1}^{k+m}\frac{1}{\mu}\right)\right]\right\}$$

β geheel (11)

Uit de gedaante van de reeksen, die voor β niet geheel in het gehele complexe ξ vlak convergent zijn en uit het feit, dat ζ in R_ξ analytisch is, is het duidelijk, dat wij steeds kunnen schrijven (voor β niet geheel)

$$y_1(z) = \zeta(z)\,\xi^{\mu+\beta}\cdot\eta_1(\xi) \qquad (12)$$

$$y_2(z) = \zeta(z)\,\xi^{\mu-\beta}\cdot\eta_2(\xi) \qquad (13)$$

waarbij steeds getallen N_1 en N_2 te vinden zijn, zodat voor
$|\xi| < N_1$
geldt
$|\eta_1(\xi)| < M_1$
en voor
$|\xi| < N_2$
$|\eta_2(\xi)| < M_2$
waarbij M_1 en M_2 twee, van ξ (en z) onafhankelijke getallen zijn.

Voor β geheel $\neq 0$ behoudt de laatste opmerking haar geldigheid, voor $\beta = 0$ is daarentegen

$$y_2(z) = \zeta(z) . \xi^{\mu} . \log \xi . \eta_3(\xi) \tag{14}$$

waarbij $|\eta_3(\xi)| < M_3$

voor $|\xi| < N_3$

Om ook de afgeleiden y_1' en y_2' te kunnen berekenen, die gegeven zijn door (4) en (5), is het raadzaam nieuwe functies in te voeren naast de functies y. In het algemeen definieren wij:

Is v(z) een functie van z, dan verstaan wij onder $\overline{v}(z)$ de functie gedefinieerd door

$$\overline{v}(z) = \frac{\zeta^2(z)}{\rho^{2\mu}} \left\{ v'(z) - \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} v(z) \right\} \tag{15}$$

Uit (4), (5), gecombineerd met (7) volgt dan, dat:

$$\overline{y}_1(z) = \frac{\zeta^2(z)}{\rho^{2\mu}} \left[\frac{\zeta'}{\zeta} y_1 + \zeta \left\{ \xi^{\mu} J_\beta(\xi) \right\}_\xi . \frac{\rho^{2\mu} \xi^{1-2\mu}}{\zeta^2} - \frac{\zeta'}{\zeta} y_1 \right] =$$

$$= \zeta(z) . \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^{\mu} J_\beta(\xi) \right\} . \xi^{1-2\mu} \tag{16}$$

en

$$\overline{y}_2(z) = \zeta(z) . \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^{\mu} Y_\beta(\xi) \right\} . \xi^{1-2\mu} \tag{17}$$

Voor de functies $\overline{y}_1(z)$ en $\overline{y}_2(z)$ kunnen nu, analoog aan y_1 en y_2 de volgende schattingen gegeven worden

$$\overline{y}_1(z) = \zeta(z) . \xi^{-\mu+\beta} . \overline{\eta}_1(\xi) \tag{18}$$

waarbij $|\overline{\eta}_1(\xi)| < \overline{M}_1$

voor $|\xi| < N_1$

en voor $\beta \neq 0$

$$\overline{y}_2(z) = \zeta(z) . \xi^{-\mu-\beta} . \overline{\eta}_2(\xi) \tag{19}$$

met $|\overline{\eta}_2(\xi)| < \overline{M}_2$ voor $|\xi| < \overline{N}_2$

voor $\beta = 0$

$$\overline{y}_2(z) = \zeta(z) . \xi^{-\mu} . \log \xi . \overline{\eta}_3(\xi) \tag{20}$$

$$|\overline{\eta}_3(\xi)| < \overline{M}_3 \text{ voor } |\xi| < \overline{N}_3$$

Voor grote waarden van ξ is het van voordeel om de functies van Hankel te gebruiken, omdat, bij geschikte formulering voor de functies y eenvoudige asymptotische ontwikkelingen ontstaan.

Met het oog op het verschijnsel van Stokes wordt nu voor iedere gehele k een stel oplossingen $y_{k,j}$ (j = 1.2) gedefinieerd

$$y_{2m+1,1}(z) \equiv y_{2m,1}(z)$$
$$y_{2m,1}(z) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{(\beta+2m+1/2)\frac{\pi i}{2}} . \zeta(z) . \xi^{\mu} H^{(1)}_{\beta}(\xi e^{-2m\pi i}) \tag{21}$$

$$y_{2m-1,2}(z) \equiv y_{2m,2}(z)$$
$$y_{2m,2}(z) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} . e^{-(\beta+2m+1/2)\frac{\pi i}{2}} . \zeta(z) . \xi^{\mu} H^{(2)}_{\beta}(\xi e^{-2m\pi i}) \tag{22}$$

Van elk paar zijn de oplossingen onafhankelijk. Op dezelfde manier als bij y_1 en y_2 vinden wij voor de determinant van Wronski

$$W(y_{k,1}, y_{k,2}) = 2i\rho^{2\mu} \tag{23}$$

Daar $H^{(1),(2)}_{\beta} = J_{\beta} \pm i\, Y_{\beta}$
gelden in de omgeving van $\xi = 0$ voor $y_{k,j}$ en haar afgeleide dezelfde schattingen als voor y_1 en y_2. Hier is het echter van belang om het asymptotische gedrag van de functies te bepalen.
Allereerst bepalen wij de asymptotische ontwikkeling van de oplossing $y_{k,j}$ in het deelgebied Ξ_k van het gebied R_{ξ}, bepaald door:

$$(k-1)\pi + \delta \leq \arg \xi \leq (k+1)\pi - \delta \tag{24}$$

Het gebied R_{ξ} op het oppervlak van Riemann, behorende bij de variabele ξ is zo overdekt door een reeks, elkaar overlappende deelgebieden. Bij elk van deze deelgebieden behoort één - éénduidig een deelgebied Z_k op het Riemann oppervlak, behorende bij de variabele z. Ook deze gebieden overlappen elkaar.
In Ξ_{2m} is $\quad -\pi + \delta \leq \arg \xi e^{-2m\pi i} \leq \pi - \delta,$

in Ξ_{2m+1} is $\quad \delta \leq \arg \xi e^{-2m\pi i} \leq 2\pi - \delta,$

zodat in de som van de twee gebieden is

$$-\pi + \delta \leq \arg \xi e^{-2m\pi i} \leq 2\pi - \delta$$

en dus geldt de asymptotische ontwikkeling:

$$H^{(1)}_{\beta}(\xi e^{-2m\pi i}) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-(\beta+1/2+2m)\frac{\pi i}{2}} . \xi^{-1/2} . e^{+i\xi e^{-2m\pi i}} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h (-1)^h}{(\xi e^{-2m\pi i})^h}\right\} \tag{25}$$

Dus in Ξ_{2m} en Ξ_{2m+1} is:

$$y_{2m+1,1}(z) = y_{2m,1}(z) \sim \zeta(z) . \xi^{\mu-1/2} . e^{+i\xi} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h(-1)^h}{\xi^h}\right\} \tag{26}$$

Verder is in Ξ_{2m-1} en Ξ_{2m} : $\; -2\pi + \delta \leq \arg \xi e^{-2m\pi i} \leq \pi - \delta,$
zodat

$$H_{\beta}^{(2)}(\xi e^{-2m\pi i}) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{(\beta+2m+1/2)\frac{\pi i}{2}} . \xi^{-1/2} . e^{-i\xi e^{-2m\pi i}} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h}{(\xi . e^{-2m\pi i})^h}\right\} \tag{27}$$

dus in Ξ_{2m-1} en Ξ_{2m}:

$$y_{2m-1,2} = y_{2m,2}(z) \sim \zeta(z) . \xi^{\mu-1/2} . e^{-i\xi} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h}{\xi^h}\right\} \tag{28}$$

Ook voor de functies $\bar{y}_{k,j}$ kunnen wij asymptotische ontwikkelingen afleiden, waaruit de ontwikkelingen voor de afgeleiden $y'_{k,j}$ gemakkelijk bepaald kunnen worden

$$\bar{y}_{2m+1,1}(z) = \bar{y}_{2m,1}(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} . e^{(\beta+2m+1/2)\frac{\pi i}{2}} . \xi^{1-2\mu} . \zeta(z) \frac{d}{d\xi}\left\{\xi^{\mu} H_{\beta}^{(1)}(\xi e^{-2m\pi i})\right\} \tag{29}$$

$$\bar{y}_{2m-1,2}(z) = \bar{y}_{2m,2}(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} . e^{-(\beta+2m+1/2)\frac{\pi i}{2}} . \xi^{1-2\mu} . \zeta(z) \frac{d}{d\xi}\left\{\xi^{\mu} H_{\beta}^{(2)}(\xi e^{-2m\pi i}\right. \tag{30}$$

Daar de asymptotische reeksen voor $\xi^{\mu} H_{\beta}^{(1)}(\xi e^{-2m\pi i})$ en $\xi^{\mu} H_{\beta}^{(2)}(\xi e^{-2m\pi i})$ term voor term naar ξ gedifferentieerd kunnen worden, vinden wij voor $\bar{y}_{k,j}$:

$$\bar{y}_{2m+1,1} = \bar{y}_{2m,1} \sim i\zeta(z) . \xi^{-\mu+1/2} . e^{i\xi} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_h (-1)^h}{\xi^h}\right\} \tag{31}$$

$$\bar{y}_{2m-1,2} = \bar{y}_{2m,2} \sim -i\zeta(z) \xi^{-\mu+1/2} . e^{-i\xi} . \left\{1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_h}{\xi^h}\right\} \tag{32}$$

Uit deze asymptotische ontwikkelingen volgt, dat het mogelijk is om een getal M te kiezen, zodat voor $|\xi| > N$ waarin N het kleinste der getallen N_1 N_2 N_3 $\bar{N}_1$ $\bar{N}_2$ $\bar{N}_3$ is, geldt

$$y_{2m+1,1} = y_{2m,1} = \zeta(z) . \xi^{\mu-1/2} . e^{i\xi} \eta_{2m,1}(\xi)$$

$$y_{2m-1,2} = y_{2m,2} = \zeta(z) . \xi^{\mu-1/2} e^{-i\xi} \eta_{2m,2}(\xi)$$

waarbij $|\eta_{2m,1}(\xi)| < M$, $|\eta_{2m,2}(\xi)| < M$

Evenzo

$$\bar{\eta}_{2m+1,1} = \bar{y}_{2m,1} = \zeta(z)\,\xi^{-\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{i\xi}\,\bar{\eta}_{2m,1}(\xi)$$

$$\bar{\eta}_{2m-1,2} = \bar{y}_{2m,2} = \zeta(z)\,\xi^{-\mu+\frac{1}{2}} \cdot e^{i\xi}\,\bar{\eta}_{2m,2}(\xi)$$

Om asymptotische ontwikkelingen te vinden voor alle waarden van ξ moeten wij gebruik maken van de in par.1.6.afgeleide asymptotische ontwikkelingen voor $H^{(1)}_{\beta}(\xi)$ en $H^{(2)}_{\beta}(\xi)$ /

Dit levert:

$$y_{2m,j}(z) \sim \zeta(z)\,\xi^{\mu-\frac{1}{2}}\left\{c^{(m)}_{j,1}\, e^{i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\alpha_h(-1)^h}{\xi^h}\Big) + c^{(m)}_{j,2}\, e^{-i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\alpha_h}{\xi^h}\Big)\right\}$$

waarbij

$$\left.\begin{aligned} c^{(m)}_{1,1} &= (-1)^{m-s+1}\,\frac{\sin(2s-2m-1)\beta\pi}{\sin\beta\pi} \\ c^{(m)}_{2,1} &= (-1)^{m-s+1}\,\frac{i\sin(2s-2m)\beta\pi}{\sin\beta\pi} \end{aligned}\right\} \quad \xi \text{ in } \Xi_{2s-1} \text{ of } \Xi_{2s}$$

$$\left.\begin{aligned} c^{(m)}_{1,2} &= (-1)^{m-s+1}\,\frac{i\sin(2s-2m)\beta\pi}{\sin\beta\pi} \\ c^{(m)}_{2,2} &= (-1)^{m-s}\,\frac{\sin(2s-2m+1)\beta\pi}{\sin\beta\pi} \end{aligned}\right\} \quad \xi \text{ in } \Xi_{2s} \text{ of } \Xi_{2s+1}$$

Evenzo vinden wij een asymptotische ontwikkeling voor y_1

$$y_1(z) = \zeta(z)\cdot\xi^{\mu-\frac{1}{2}}\cdot\left\{c_1\, e^{i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\alpha_h(-1)^h}{\xi^h}\Big) + c_2\, e^{-i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\alpha_h}{\xi^h}\Big)\right\}$$

$$\bar{y}_1(z) = -i\,\zeta(z)\,\xi^{-\mu+z}\left\{c_1\, e^{i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_h(-1)^h}{\xi^h}\Big) + c_2 e^{-i\xi}\Big(1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_h}{\xi^h}\Big)\right\}$$

waarbij

$$c_1 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{(2s-\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})\pi i} \qquad \xi \text{ in } \Xi_{2s-1} \text{ of } \Xi_{2s}$$

$$c_2 = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{(2s+\frac{1}{2})(\beta+\frac{1}{2})\pi i} \qquad \xi \text{ in } \Xi_{2s} \text{ of } \Xi_{2s+1}$$

3a. Formele oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking.

De gegeven differentiaalvergelijking in de standaardvorm 2.1.13 kan kan geschreven worden als:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\rho^2\varphi^2(z)+\frac{1/4-A^2}{z^2}+\omega(z)\right\}u=\left\{\omega(z)-\chi(\rho,z)\right\}u \tag{1}$$

Voeren wij in de functie

$$\theta(\rho,z)\equiv\omega(z)-\chi(\rho,z), \tag{2}$$

dan wordt zij

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\rho^2\varphi^2(z)+\frac{1/4-A^2}{z^2}+\omega(z)\right\}u=\theta(\rho,z)\,u \tag{3}$$

Van de verwante vergelijking is een compleet stel oplossingen, hetzij y_1 en y_2, hetzij $y_{k,1}$ en $y_{k,2}$ bekend, zodat wij een integraalvergelijking kunnen afleiden op de bekende manier.

$$u(z)=\gamma_1 y_1(z)+\gamma_2 y_2(z)-\int_0^z\frac{y_1(z)y_2(z_1)-y_2(z)y_1(z_1)}{W(y_1,y_2)}\theta(\rho,z_1)\,u(z_1)\,dz_1 \tag{4}$$

waarin γ_1 en γ_2 willekeurige constanten zijn.
De oplossing, behorende bij $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$ noemen wij u_1, evenzo die bij $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$ u_2
Analoog in het geval dat $y_{k,1}$ en $y_{k,2}$ als oplossingen van de verwante vergelijkingen worden gekozen.
Zo is

$$u_j(z)=y_j(z)-\int_0^z\frac{y_1(z)y_2(z_1)-y_2(z)y_1(z_1)}{W(y_1,y_2)}\cdot\theta(\rho,z_1)\,u(z_1)\,dz_1 \tag{5}$$

De uitdrukking

$$\frac{y_1(z)y_2(z_1)-y_2(z)y_1(z_1)}{W(y_1,y_2)} \tag{6}$$

is onafhankelijk van de speciale keuze van y_1 en y_2. Verder voeren wij in de functies Y_j en U_j.

$$Y_j(z)=\frac{y_j(z)}{\zeta(z)}e^{(-1)^j\xi i}\quad,\quad U_j(z)=\frac{u_j(z)}{\zeta(z)}e^{(-1)^j\xi i} \tag{7}$$

waardoor de integraalvergelijking voor u_j overgaat in de integraalvergelijking voor U_j

$$U_j(z)=Y_j(z)+\frac{1}{\rho^{2\mu}}\int_0^z K_j(z,z_1;\rho)\,U_j(z_1)\,dz_1 \tag{8}$$

waarin de kern $K(z,z_1;\rho)$ gelijk is aan:

$$K_j(z,z_1;\rho)=-\theta(z_1,\rho)\frac{\zeta(z_1)}{\zeta(z)}e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i}\;\frac{y_1(z)y_2(z_1)-y_2(z)y_1(z_1)}{W(y_1,y_2)}=$$

$$= -\frac{\pi}{2}\,\theta(z_1,\rho)\cdot\zeta^2(z_1)\cdot e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i}\,\frac{y_1(z)\,y_2(z_1)\,e^{+(\xi-\xi_1)i}-y_2(z)\,y_1(z_1)\,e^{-(\xi-\xi_1)i}}{\rho^{2\mu}}=$$

$$=\frac{1}{2}i\,\theta(z_1,\rho)\,\zeta^2(z_1)\,e^{(-1)^j(\xi-\xi_1)i}\,\frac{y_{k,1}(z)\,y_{k,2}(z_1)\,e^{(\xi-\xi_1)i}-y_{k,2}(z)\,y_{k,1}(z_1)\,e^{-(\xi-\xi_1)i}}{\rho^{2\mu}} \tag{9}$$

Stellen wij nu $y_j^{(0)}(z)=y_j(z)$

$$y_j^{(n+1)}(z)=\frac{1}{\rho^{2\mu}}\int_0^z K_j(z,z_1;\rho)\,y_j^{(n)}(z_1)\,dz_1 \tag{10}$$

dan vinden wij door iteratie de formele reeks:

$$U_j(z)\sim y_j(z)+\sum_{n=1}^{\infty} y_j^{(n)}(z) \tag{11}$$

die nader onderzocht moet worden.
Voor dit nader onderzoek zijn nodig schattingen van de opeenvolgende integralen (10)

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN.

§ 1. Principe van de methode van Langer.

In de analyse ontmoeten wij naast differentiaalvergelijkingen, die we voldoende beheersen, andere waarvan wij vrijwel niets weten. Het doel van de methode van Langer is iets nadors te weten te komen over de oplossingen van de differentiaalvergelijking van de tweede soort, en wel met behulp van onze kennis van de differentiaalvergelijking van de eerste soort. Voor de laatste kiezen we een lineaire homogene differentiaalvergelijking van de tweede orde, die we op de volgende gedaante kunnen brengen

$$y'' + P(z)\, y = 0 \tag{1}$$

Dit noemen we de bekende differentiaalvergelijking, als we veel weten over de eigenschappen van de oplossingen zoals ontwikkeling in machtreeksen, asymptotische ontwikkelingen, numerieke tabellen enz. De opgave is nu de eigenschappen op te sporen van de oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$w'' + (\, P(z) + \Theta(z)\,)\, w = 0\,. \tag{2}$$

Deze differentiaalvergelijking noemen we de te onderzoeken vergelijking. We gaan eerst formeel te werk. Van de bekende differentiaalvergelijking kiezen we twee lineair onafhankelijke oplossingen y en Y. Voor deze geldt dus

$$y'' + Py = 0 \quad \text{en} \quad Y'' + PY = 0 \tag{3}$$

waaruit volgt

$$\frac{d}{d\,z}\,(y'\,Y - y\,Y') = y''\,Y - y\,Y'' = 0$$

zodat de determinant van Wronski

$$\Delta = y'(z)\;Y(z) - y(z)\;Y'(z) \tag{4}$$

gelijk is aan een constante. Omdat $y(z)$ en $Y(z)$ lineair onafhankelijk verondersteld zijn, is deze constante niet nul.

Om nu de oplossingen van de te onderzoeken differentiaalvergelijking te vinden, passen we de methode van de variatie van constanten toe in gewijzigde vorm, d.w.z. we stellen

$$w = cy + CY\,, \tag{5}$$

waarin c en C differentieerbare functies van z zijn met de eigenschap

$$c'y + C'Y = 0\,. \tag{6}$$

We krijgen dus

$$w' = c\,y' + C\,Y'$$

$$w'' = c'y' + C'Y' + c\,y'' + C\,Y''$$

Wegens (3) geldt

$$c\,y'' + C\,Y'' = -P(c\,y + C\,Y) = -Pw$$

zódat (2) wordt

(7) $$c'y' + C'Y' + \theta\,w = 0$$

Uit (6) en (7) kunnen we c' en C' oplossen. Wegens (4) wordt de oplossing

$$c' = \frac{-\theta\,Y_w}{\Delta} \qquad C' = +\frac{\theta\,y_w}{\Delta}$$

Derhalve is

(8) $$w(z) = u(z) + \frac{1}{\Delta}\int_{a}^{z}\left\{ y(s)\ Y(z) - y(z)\ Y(s)\right\} \theta(s)\ w(s)\ ds$$

waarin u(z) een oplossing van de bekende differentiaalvergelijking voorstelt; hierin is a willekeurig (a mag ook $\pm\infty$ zijn).

In verband hiermede ligt het voor de hand een operator T in te voeren gedefinieerd door

(9) $$T\,v(z) = \frac{1}{\Delta}\int_{a}^{z}\left\{ y(s)\ Y(z) - y(z)\ Y(s)\right\} \theta(s)\ v(s)\ ds$$

die toegepast kan worden op elke functie v(z), waarvoor het rechterlid betekenis heeft. Met deze notatie wordt (8)

(10) $$w(z) = u(z) + T\,w(z).$$

In de definitie van de operator T treden de lineair onafhankelijke oplossingen y en Y van de bekende differentiaalvergelijking op. Vervangen we deze echter door twee andere lineair onafhankelijke oplossingen y^* en Y^* van de bekende differentiaalvergelijking, met Wronski-determinant Δ', dan krijgen we in plaats van T de operator gedefinieerd door

$$\frac{1}{\Delta'}\ .\ \int_{a}^{z}\left\{ y^*(s)\ Y^*(z) - y^*(z)\ Y^*(s)\right\} \theta(s)\ v(s)\ ds\ .$$

Dit is precies dezelfde operator. Immers er bestaan vier constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ met

$$y^*(z) = \alpha\, y(z) + \beta\, Y(z)$$
$$Y^*(z) = \gamma\, y(z) + \delta\, Y(z) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

Daarbij is

$$\Delta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)\Delta$$

en dus

$$\frac{1}{\Delta'}\left\{ y^*(s)\, Y^*(z) - y^*(z)\, Y^*(s)\right\} = \frac{1}{\Delta}\left\{ y(s)\, Y(z) - y(z)\, Y(s)\right\}$$

zodat de operator niet veranderd is. De operator T is dus onafhankelijk van het paar lineair onafhankelijke oplossingen y en Y van de bekende differentiaalvergelijking. Indien de bekende differentiaalvergelijking en bovendien de functie $\theta(z)$ gegeven is, is de operator T dus door het punt a ondubbelzinnig bepaald. Daarom zullen we T de bij het punt a behorende operator noemen.

De operator T, op (10) toegepast, levert

$$T\, w(z) = T\, u(z) + T^2\, w(z)$$

dus

$$w(z) = u(z) + T\, u(z) + T^2\, w(z)$$

Aldus vinden we voor elk natuurlijk getal n

$$w(z) = u(z) + T\, u(z) + \dots + T^{n-1} u(z) + T^n\, w(z).$$

Na deze formele beschouwingen is het plausibel te verwachten, dat onder bepaalde voorwaarden de functie

$$w(z) = u(z) + T\, u(z) + T^2\, u(z) + \dots$$

een oplossing van de te onderzoeken differentiaalvergelijking voorstelt. We zullen deze vraag in de volgende paragraaf nader bestuderen en wel m.p.v. de majorantenmethode. Om die methode te kunnen toepassen, voeren we een nieuwe operator T_+ in, gedefinieerd door

$$T_+\, v(z) = \int_a^z \left| \frac{y(s)\, Y(z) - y(z)\, Y(s)}{\Delta} \right| . \left| \theta(s)\, v(s) \right|\, ds$$

§ 2. Stellingen.

Hulpstelling. Indien in een interval j met eindpunt a de functie $v(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$.... continu zijn en de reeksen

$$v(z) = \sum_{h=1}^{\infty} v_h(z) \qquad \text{en} \qquad \sum_{h=1}^{\infty} T_+ \, v_h(z)$$

convergeren, dan is in dat interval

$$T\,v(z) = \sum_{h=1}^{\infty} T\,v_h(z)$$

Bewijs. Voor elk natuurlijk getal n geldt immers

$$\begin{aligned}\left| T\,v(z) - \sum_{h=1}^{n} T\,v_h(z) \right| &= \left| T\left\{ v(z) - \sum_{h=1}^{n} v_h(z) \right\} \right| \\ &\leqq T_+ \left\{ v(z) - \sum_{h=1}^{n} v_h(z) \right\} \\ &\leqq T_+ \left\{ \sum_{h=n+1}^{\infty} v_h(z) \right\} \\ &\leqq \sum_{h=n+1}^{\infty} T_+ \, v_h(z)\end{aligned}$$

en bij onbegrensd aangroeiende n nadert het laatste lid tot nul.

Wij gaan nu de volgende stelling bewijzen, waarin zowel de operator T als de operator T_+ optreden.

Stelling 1. Zij j een interval met eindpunt a; een der eindpunten of beide mogen in het oneindige liggen. Een in het eindig liggend eindpunt wordt naar willekeur wel of niet tot het interval gerekend. Stel de in de bekende differentiaalvergelijking voorkomende functie $P(z)$ en de in de te onderzoeken differentiaalvergelijking optredende functie $\Theta(z)$ op j continu. Zij $u(z)$ in j een oplossing van de bekende differentiaalvergelijking met de eigenschap, dat de reeks

$$(11) \qquad w(z) = u(z) + T\,u(z) + T^2\,u(z) + \ldots\ldots ,$$

waarin T de bij a behorende operator voorstelt, in een convergente reeks overgaat, als de operator T vervangen wordt door de corresponderende operator T_+.

In dat geval convergeert in j de in (11) voorkomende reeks en voldoet haar som vooreerst aan de te onderzoeken differentiaalvergelijking en geldt bovendien de relatie

(12) $\qquad w(z) = u(z) + T\,w(z)$.

In het speciale geval, dat a tot j behoort, is w(z) de oplossing van de te onderzoeken differentiaalvergelijking met de eigenschappen

(13) $\qquad w(a) = u(a) \qquad \text{en } w'(a) = u'(a)$.

<u>Bewijs</u>. De reeks (11) gaat, als men T door T_* vervangt, over in een convergente majorant. Elke term in die majorant is een monotone functie van z, zodat die reeks in het interval $a < z < b$ (waar b een willekeurig punt in j voorstelt) uniform convergeert. Dus de som w(z) is in j een continue functie van z.
Volgens de hulpstelling is

$$T\,w(z) = T\,u(z) + T^2\,u(z) + \cdots = w(z) - u(z)$$

dus

(14) $$w(z) = u(z) + Tw(z) = u(z) + \frac{Y(z)}{\Delta}\int_a^z y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds - \frac{y(z)}{\Delta}\int_a^z Y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds \, .$$

Het rechterlid, dus ook het linkerlid is een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide is

$$w'(z) = u'(z) + \frac{Y'(z)}{\Delta}\int_a^z y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds - \frac{y'(z)}{\Delta}\int_a^z Y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds + \frac{Y(z)}{\Delta}\,y(z)\,\Theta(z)\,w(z) - \frac{y(z)}{\Delta}\,Y(z)\,\Theta(z)\,w(z)$$

(15) $$w'(z) = u'(z) + \frac{Y'(z)}{\Delta}\int_a^z y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds - \frac{y'(z)}{\Delta}\int_a^z Y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds$$

Door opnieuw te differentieren krijgen we

$$w''(z) = u''(z) + \frac{Y''(z)}{\Delta}\int_a^z y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds - \frac{y''(z)}{\Delta}\int_a^z Y(s)\,\Theta(s)\,w(s)\,ds + \frac{Y'(z)}{\Delta}\,y(z)\,\Theta(z)\,w(z) - \frac{y'(z)}{\Delta}\,Y(z)\,\Theta(z)\,w(z)$$

Omdat u, y en Y aan de bekende differentiaalvergelijking voldoen vinden we wegens (4)

$$w''(z) = - P(z)\ u(z) - P(z)\ T\ w(z) - \Theta(z)\ \ w(z)$$
$$= - \left(P(z) + \Theta(z)\right)\ \ w(z)$$

waaruit blijkt, dat w(z) inderaad aan de te onderzoeken differentiaalvergelijking voldoet.

Behoort a tot j, dan volgt uit (14) en (15)

$$w(a) = u(a) \qquad w'(a) = u'(a)$$

Stelling 2. Stel de voorwaarden van stelling 1 gelden. Zij verder U(z) een van u(z) lineair onafhankelijke oplossing van de bekende differentiaalvergelijking met de eigenschap, dat de reeks

$$W(z) = U(z) + T\ U(z) + T^2\ U(z) + \cdots\cdots$$

in een convergente reeks overgaat, als de operator T door de corresponderende operator T_+ wordt vervangen. Dan zijn w(z) en W(z) twee lineair onafhankelijke oplossingen van de te onderzoeken differentiaalvergelijking.

Bewijs. Laten α en β twee willekeurige constanten voorstellen. Stelling 1, toegepast op $\alpha\, w(z) + \beta\, W(z)$ in plaats van w, levert
$\alpha\, w(z) + \beta\, W(z) = \alpha\, u(z) + \beta\, U(z) + T\{\alpha\, w(z) + \beta\, W(z)$
Kiezen we α en β zodat $\alpha\, w(z) + \beta\, W(z)$ identiek nul is, dan is dus ook $\alpha\, u(z) + \beta\, U(z)$ identiek nul. Omdat u en U lineair onafhankelijk zijn, is $\alpha = \beta = 0$, zodat w(z) en W(z) eveneens lineair onafhankelijk zijn.

§3 . De hoofdstelling.

We geven in de volgende stelling voldoende voorwaarden aan, opdat de condities van stelling 1 gelden.

Stelling 3. Zij j een interval, waarvan a een eindpunt is; een of meer der eindpunten van j mogen in het oneindige liggen; een in het eindige gelegen eindpunt van j mag naar willekeur tot j gerekend worden of niet.

Onder $\varphi(z)$ en $\Lambda(z)$ verstaan we twee functies, die in j continu en positief zijn. $\Lambda(z)$ stelt een monotoon niet afnemende functie voor, indien z, te beginnen bij a het interval j monotoon doorloopt.

Stel de bekende differentiaalvergelijking bezit in j minstens één paar lineair onafhankelijke oplossingen y(z) en Y(z) met

$$|y(z)| \leq \varphi(z)\Lambda(z) \qquad \text{en}$$
$$|Y(z)| \leq \varphi(z)\Lambda^{-1}(z)$$

Dan is voor iedere in j continue functie u(z) en voor elk natuurlijk getal n

$$T_+^n\, u(z) \leq \frac{2^n}{|\Delta|^n (n-1)!}\, \varphi(z)\Lambda(z)\int_a^z \varphi(s)\Lambda^{-1}(s)\left|\Theta(s)u(s)\right| \rho^{n-1}(s,z)\, ds$$

indien

$$\rho(s,z) = \int_s^z \varphi^2(t)\, |\Theta(t)|\, dt$$

<u>Bewijs</u>. Zonder de algemeenheid te schaden, kunnen we aannemen, dat a linkereindpunt van j is. Anders vervangen we z door -z.

Als we invoeren

$$D(s,z) = \left|\frac{y(s)\,Y(z) - y(z)\,Y(s)}{\Delta}\right|$$

dan geldt

$$T_+\, u(z) = \int_a^z \left|\frac{y(s)Y(z) - y(z)Y(s)}{\Delta}\,\Theta(s)u(s)\right| ds = \int_a^z D(s,z)\left|\Theta(s)u(s)\right| ds$$

$$T_+^2\, u(z) = \int_a^z D(s_1,z)\,|\Theta(s_1)| \cdot \left\{\int_a^{s_1} D(s_2,s_1)\,|\Theta(s_2)u(s_2)|\, ds_2\right\} ds_1$$

$$\iint\limits_{a \leq s_2 \leq s_1 \leq z} D(s_1,z)\, D(s_2,s_1)\; |\Theta(s_1)|\; |\Theta(s_2)| \cdot |u(s_2)|\, ds_1\, ds_2$$

Algemeen vindt men voor elk natuurlijk getal n

$$T_+^n\, u(z) = \iint\cdots\int\limits_{a \leq s_n \leq \cdots \leq s_1 \leq z} D(s_1,z)D(s_2,s_1)\cdots D(s_n,s_{n-1})\left|\Theta(s_1)\cdots\Theta(s_n)\right| \cdot$$
$$|u(s_n)|\, ds_1\, ds_2 \cdots ds_n$$

Indien t en s in j liggen met $t \leqq s$ dan geldt

$$D(t,s) \leqq \left|\frac{y(t)\ Y(s)}{\Delta}\right| + \left|\frac{y(s)\ Y(t)}{\Delta}\right|$$

$$\leqq \frac{2}{|\Delta|}\varphi(s)\varphi(t)\left\{\Lambda(t)\ \Lambda^{-1}(s) + \Lambda(s)\ \Lambda^{-1}(t)\right\}$$

$$\leqq \frac{2}{|\Delta|}\varphi(s)\varphi(t)\Lambda(s)\ \Lambda^{-1}(t)$$

wegens de monotonie van de functie Λ. Dus

$$T_+^n u(z) \leqq \frac{2^n}{|\Delta|^n}\varphi(z)\Lambda(z)\int\int_{a \leqq s_n \leqq \dots \leqq s_1 \leqq z}\cdots\int \varphi^2(s_1)\dots\varphi^2(s_{n-1})\varphi(s_n)$$

$$\cdot\Lambda^{-1}(s_n)\left|\Theta(s_1)\dots\Theta(s_n)\right| \quad ds_1\dots ds_n$$

We kunnen hiervoor schrijven

$$T_+^n u(z) \leqq \frac{2^n}{|\Delta|^n}\varphi(z)\Lambda(z)\cdot\int_a^z X(s_n)\, ds_n$$

waarin

$$X(s_n) = \int_{s_n \leqq s_{n-1} \leqq \dots \leqq s_1 \leqq z}\cdots\cdots\int \prod_{\nu=1}^{n-1}\left\{\varphi^2(s_\nu)\ |\Theta(s_\nu)|\right\} ds_1\dots ds_{n-1}$$

De integraal in deze laatste integraal is symmetrisch in $s \dots s_{n-1}$ en verandert niet bij permutatie van de (n-1) variabelen; $(n-1)!\ X(s_n)$ is gelijk aan een integraal met dezelfde integrand als $X(s_n)$ doch met als integratiegebied de (n-1)-dimensionale kubus

$$s_n \leqq s_{n-1} \leqq z;\quad s_n \leqq s_{n-2} \leqq z; \dots s_n \leqq s_1 \leqq z.$$

Dus geldt

$$(n-1)!\ X(s_n) = \int_{s_n}^{z}\cdots\int_{s_n}^{z}\prod_{\nu=1}^{n-1}\left\{\varphi^2(s_\nu)\left|\Theta(s_\nu)\right|\right\}\cdot\ ds \dots ds_{n-1}$$

$$X(s_n) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_{s_n}^{z}\varphi^2(s)\left|\Theta(s)\right| ds\right]^{n-1} = \frac{\rho^{n-1}(s_n, z)}{(n-1)!}$$

waaruit volgt

$$T_+^n u(z) \leq \frac{2^n}{|\Delta|^n (n-1)!} \varphi(z) \Lambda(z) \int_a^z \rho^{n-1}(s,z)\varphi(s) \Lambda^{-1}(s)\, ds$$

Opmerking. Indien de integraal

$$\rho(s,z) = \int_s^z \varphi^2(t) |\Theta(t)|\, dt$$

convergeert voor s = a dan geldt in het bijzonder

$$T_+^n u(z) \leq \frac{2^n}{|\Delta|^n (n-1)!} \varphi(z) \Lambda(z) \left[\int_a^z \varphi^2(t) |\Theta(t)|\, dt \right]^{n-1} \cdot \int_a^z \varphi(s) \Lambda^{-1}(s) |\Theta(s) u(s)|\, ds$$

In dat geval convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_+^n u(z) \quad \text{en dus zeker} \quad \sum_{n=1}^{\infty} T^n u(z)$$

snel en wel minstens als de exponentiele reeks. Deze opmerking is zeer belangrijk, in verband met stelling 1.