STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZD 2

Priemeinden en einden.

Voordracht topologiesche dag, 11.10.1948.

H.Freudenthal.

1948

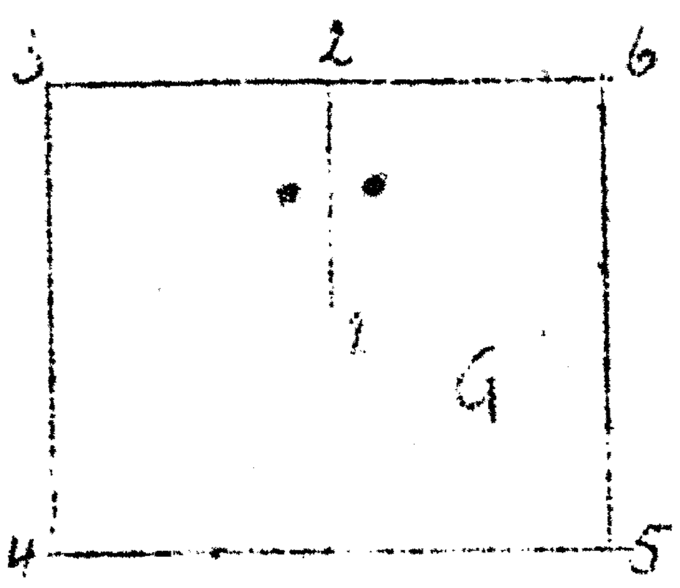
Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Topologische dag, 11 October 1948.

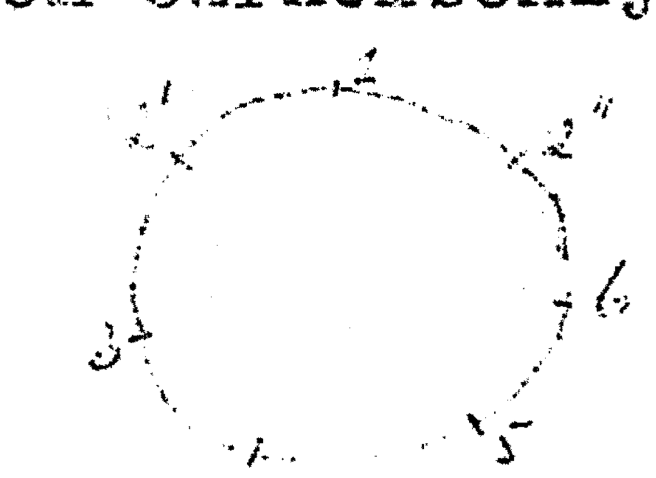
Syllabus. Prof.Dr. H. Freudenthal.

Priemeinden en einden.



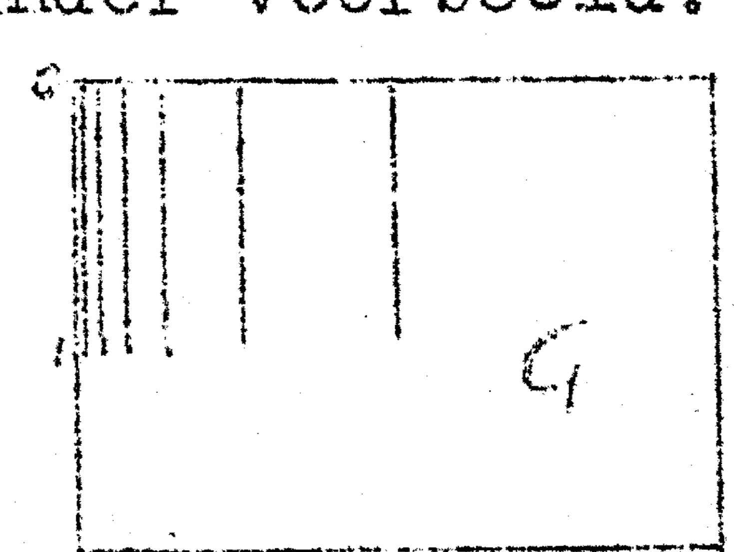
Priemeinden. Voorbeeld: G is een vierkant zonder rand, waaruit ook nog een lijnstuk 12 is weggelaten. De aangeduide stippen vlak bij elkaar aan verschillende oevers van de inkeping zijn, in G bekeken, helemaal niet vlak bij elkaar. "Zij konden bijeen niet komen, het water was veel te diep". In ons geval zelfs zo diep, dat ook zwemmen niets geeft. De prins moet om de bron van de rivier heenlopen, als hij bij zijn meisje wil komen.

Precieser kunnen wij definieren: natuurlijke afstand van twee punten in G = ondergrens der breedten van alle bogen, die die twee punten verbinden. Vullen we na deze vermetrisering G met randpunten aan (door het "volledig" omhulsel te vormen, dwz. limieten van fundamentaal rijen te adjungeren), dan vallen de twee oevers van de inkeping uiteen, en de afgesloten G, G^* genaamd, wordt homeomorf met een cirkelschijf.



Deze beschouwingswijze is door Caratheodory (Math. Ann. 73 (1913)) uitgevonden. Ze was gesuggereerd door functietheoretische feiten: de conforme afbeelding van G op de eenheidscirkel behandelt de twee oevers als verschillend.

Ander voorbeeld: De inkepingen verdichten zich bij het lijnstuk 01



van de omtrek van het vierkant. In de natuurlijke metriek liggen deze punten op oneindige afstand van het inwendige van G. Ze zijn "onbereikbaar" door bogen uit G. G^* wordt niet compact op deze manier. We zoeken echter een natuurlijke compactificatie van G. Die bereikt Caratheodory als volgt:

$\gamma = (G_1, G_2, \ldots)$ is een dalende rij deelgebieden van G, elk begrensd door een boog, die met zijn uiteinden op de rand van G steunt.

$\gamma' = (G_1', G_2', \ldots)$ analoog. $\gamma \prec \gamma'$ betekent: elk G_i bevat bijna alle G_j.

$\gamma \sim \gamma'$ betekent : $\gamma \prec \gamma' \prec \gamma$. γ ~~heeft~~ heet een minimaal, wanneer uit $\gamma' \prec \gamma$ steeds volgt: $\gamma' \sim \gamma$. Een equivalentieklas van minimale γ's heet een priemeinde. Aanvulling van G met zijn priemeinden (waarvoor nog een begrip limiet moet worden vastegelgd) geeft een compacte G^*. In het 1^e voorbeeld beantwoorden aan punten van de inkeping (behalve uiteinde) twee priemeinden. In het 2^e voorbeeld beantwoordt aan het hele lijnstuk 01 één priemeinde.

Einden. Een ruimte kan over het algemeen op veel manieren gecompactificeerd worden. De rechte door middel van 1 of 2 punten (ook nog anders). Het vlak door een oneigenlijke rechte of door één oneigenlijk punt. Vaak is er een bijzonder natuurlijke compactificering: bij de rechte zijn er duidelijk twee gescheiden oneindigheden aan te wijzen — waarom zou men die laten samenvallen ? In het geval van het vlak: waarom een rechte, als het zuiniger met één punt kan.

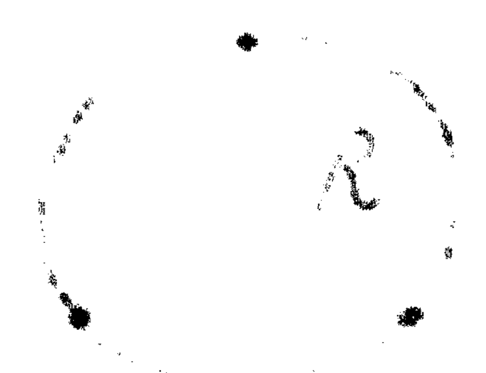
De ideale compactificering (J. de Groot, Diss. 1942) kan door twee eisen worden afgedwongen : Een minimaliteitseis — de toegevoegde verzameling moet zo "dun" mogelijk zijn (geen lijn als het met punten kan). Een maximaliteitseis — er mogen geen toe te voegen punten worden samengeworpen, als ze gescheiden kunnen worden gehouden.

De compactificatie van een wijde klasse ruimten R is in mijn proefschrift (Math. Zeitschrift 33 (1930)) als volgt geschied:

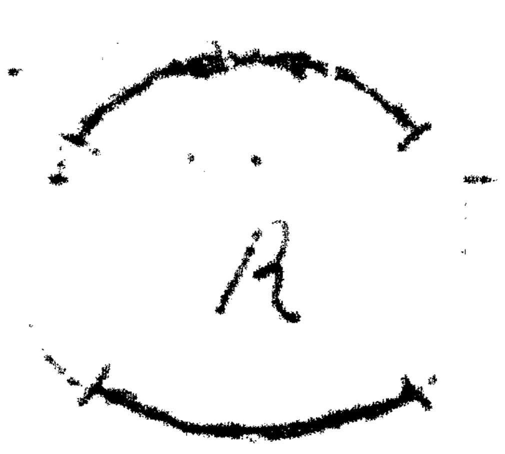
G_ν zijn nu niet-compacte gebieden van R met compacte rand. Voor het overige dezelfde definities als daarstraks. De "priemeinden" heten nu eindpunten. Inderdaad krijgt de rechte 2, het vlak één eindpunt. Deze betrokken klasse ruimten is uitgebreid in Annals of Math. 43 (1942). Nog een andere klasse van ruimten is behandeld in Comment. Helvet. 17 (1944) naar aanleiding van onderzoekingen van H. Hopf.

Weer de priemeinden. B. Kaufmann (Math. Ann. 103 (1930) en St. Mazurkiewicz (Fundamenta 33 (1940) hebben Caratheodory's priemeinden op gebieden in willekeurig veel dimensies uitgebreid. Dit is een zeer moeilijk onderwerp. Kaufmann is er niet bijzonder in geslaagd. Zijn compactificering is niet hijster geslaagd; de ontstaande ruimte is pathologisch. Mazurkiewicz heeft die fout vermeden, maar zijn artikel bestaande uit 50 blz. met haast uitsluitend definities is vrijwel onleesbaar. Hij werkt niet als Caratheodory met inschakelingen van gebieden, maar met puntenrijen en definieert de topologie in R^* niet door omgevingen, maar door limieten, wat steeds zeer lastig is.

Priemeinden en einden. Het gemeenschappelijke in de definities van priemeinden en einden heb ik al aangetoond. Wat is nu het verschil tussen die twee ? Heeft men G vermetrisseerd en in de nieuwe metriek volledig gemaakt (fig. 3), dan bestaat zijn rand uit de inkepingen dubbel geteld, en uit de omtrek van het vierkant, zonder het stuk 01, maar uit het punt 1. In het punt 1 gedraagt de aangevulde G zich nu zeer onaangenaam: 1 bezit geen compacte omgevingen, zelfs niet omgevingen met compacte rand. In de eindentheorie wordt zulks (ten minste het laatste) echter steeds verondersteld. Willen we de "priemeinden" als "eindpunten" beschouwen, dan moeten we de eindentheorie zo uitbreiden, dat we dergelijke compactheidseisen in R laten vallen. Voorbeeld: Het inwendige van een cirkel plus drie randpunten. In de



cirkel geen metriek. In de drie randpunten zijn er geen omgevingen met compacte rand. Wij vermijden weer, hele bogen aan R toe te voegen, zijn dus genoodzaakt de boog tussen telkens twee van die drie punten als punt te beschouwen. Maar dan worden de drie punten onder elkaar geïdentificeerd. R wordt gecompactificeerd door één punt, dat bovendien nog die drie punten opslokt. Voorbeeld: Het inwendige van een cirkel plus twee gescheiden bogen



op de rand. — De resterende bogen worden elk één punt. De compactificatie van R is een cirkelschijf met rand.

Voorbeeld: Het inwendige van een bol plus een meridiaan op het boloppervlak. Compactificatie: de open bol aangevuld met één punt (sferische ruimte).

De minimaliteits-eis in de compactificeringstheorie was tot nu toe: De toegevoegde verzameling moet 0-dimensionaal zijn. Aangezien in een 0-dimensionale verzameling $\mathcal{V}$ ieder punt een omgeving bezit met een tot $\mathcal{V}$ vreemde rand, betekent dit, dat de toegevoegde punten (eindpunten) omgevingen moeten bezitten, waarvan de rand geheel in de oorspronkelijke R ligt, dus compact is. De eindpunten werden dan door inkrimpende open verzamelingen met compacte rand gedefinieerd. Dezelfde weg te volgen in ruimten, waar niet elk punt zulke omgevingen in voldoende mate bezit, zou een te grote beperking zijn. We zullen daarom ook niet eisen, dat de verzameling dereindpunten nuldimensionaal is, maar dat deze een discontinuum is, dwz. dat zij geen continuum bevat — dit is de zwakste "dunheidseis", die men tot nog toe kent. Er zijn zelfs oneindigdimensionale discontinua — deze eis is dus veel zwakker dan die van nuldimensionaliteit.

Zij R overal dicht in $\tilde{R}$, $\tilde{R}\setminus R$ een discontinuum en $\tilde{R}\setminus R$ plaatselijk samenhangend in elk punt van $\tilde{R}\setminus R$, en compact. In dat geval zullen we $\tilde{R}$ als de ware compactificatie van R erkennen. Willen wij die vanuit R construeren, dan gaan we als volgt te werk: Laat A_n een dalende rij samenhangende afgesloten verzamelingen in R zijn. Hun afsluitingen $\tilde{A}_n$ in $\tilde{R}$ zijn tevens compact. Hun doorsnede $\tilde{A}$ is een continuum of een punt in $\tilde{R}$. In het eerste geval moet $\tilde{A}$ ook punten van R bevatten (want in $\tilde{R}\setminus R$ was geen continuum). Bevat $\tilde{A}$ geen punten van R, is dus de doorsnede van de A_n leeg, dan bestaat de doorsnede der $\tilde{A}_n$ zeker uit een punt van $\tilde{R}\setminus R$. We kunnen dus de <u>punten</u> van $\tilde{R}\setminus R$ definieren door dalende rijen afgesloten samenhangende verzamelingen van R.

Om de topologie in $\tilde{R}$ te verkrijgen, vragen we ons af wanneer twee verzamelingen A en B uit R elkaar in de zin van $\tilde{R}$ raken, dwz. in $\tilde{R}$ een gemeenschappelijk punt p krijgen. Zijn $\tilde{U}_n$ inkrimpende omgevingen van p in $\tilde{R}$ met doorsnee p, dan zijn hun doorsneden U_n met R samenhangende verzamelingen, die van A naar B"oversteken". Hun doorsnede in R bekeken is leeg. We kunnen het elkander raken in $\tilde{R}$ van twee verzamelingen A en B uit R, dus definieren vanuit R door : er zijn afgesloten samenhangende verzamelingen, die van A naar B oversteken en waarvan de doorsnee in R leeg is.

Op deze heuristische beschouwingen is nu gebaseerd de navolgende

Systematische opbouw. I.

1. R metriseerbaar, separabel, samenhangend, plaatselijk samenhangend.
2. Z heet "brug" tussen V en W (in R), als Z afgesloten is en tussen V en W samenhangt, dwz. niet gesplitst kan worden in twee niet aan elkaar plakkende verzamelingen, waarvan de één vreemd tegen V en de ander vreemd tegen W is.
3. Luchtbrug tussen V en W : dalende rij bruggen tussen V en W, waarvan de doorsnee uitsluitend punten van V en W bevat.
4. De open verzamelingen O en P heten verkleefd aan elkaar, als er een luchtbrug tussen die twee bestaat.
5. O en P heten verwijderd van elkaar — notatie $O \curlywedge P$ — als ze niet aan elkaar verkleefd zijn, dus als geen luchtbrug ertussen mogelijk is.
6. Is $O_1 \subset O_2 \curlywedge P$, dan ook $O_1 \curlywedge P$ (Triviaal).
7. Is $O_1 \curlywedge P$ en $O_2 \curlywedge P$, dan $(O_1 \vee O_2) \curlywedge P$. (Niet geheel triviaal, maar we slaan het bewijs over).
8. Is $O_1 \curlywedge P_1$ en $O_2 \curlywedge P_2$, dan $(O_1 \vee O_2) \curlywedge (P_1 \wedge P_2)$. (Triviale conclusie uit 6 en 7).

II.

1. Men zou kunnen menen, dat deze begrippen voldoende waren. Dit is merkwaardig genoeg niet het geval. Men komt er bijv. niet mee, als men een afgesloten verzameling in de zin van R definieert als verzameling, die alle punten bevat, waarmee zij verkleefd is. Dit is te onscherp en leidt tot pathologieën. We slaan een geheel andere weg in.
2. We beschouwen continue reële functies f gedefinieerd op R. $E[f < \alpha]$ betekent: verzameling van alle $x \in R$ met $f(x) < \alpha$. Analoog $E[f > \alpha]$ enz.
3. We gaan de punten en afgesloten verzamelingen van de te construeren $\tilde{R}$ definieren als het ware als nulpunten en nulpunt-verzamelingen van dergelijke functies. Hiervoor leggen we aan die functies nog eisen op:

ϕ is de verzameling van alle continue functies in R met

1. $f \geqslant 0$,
2. inf $f = 0$,
3. voor alle $0 < \alpha < \beta$ geldt: $E[f<\alpha] \wedge E[f>\beta]$

De eerste eis is alleen voor het gemak opgelegd. De tweede bewerkt dat f in $\tilde{R}$ inderdaad nulpunten bezit (een continue functie in een compacte ruimte neemt haar ondergrens aan). De derde eis geeft te kennen in welke zin f, in R beschouwd, continu moet zijn.

4. $f \succ g$ (lees: f asymptotisch groter dan of gelijk aan g) betekent: Uit $\lim f(x_n) = 0$ volgt steeds $\lim g(x_n) = 0$. Of: bij elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ met "$f(x) < \delta$ impliceert $g(x) < \epsilon$". Is $f \succ g$, dan zullen hun nulpuntverzamelingen in $\tilde{R}$ in de omgekeerde relatie staan.
5. $f \succ g \succ h \rightarrow f \succ h$.
6. $f \succ f$.
7. Is $f \succ g \succ f$, dan zeggen we $f \sim g$ ("equivalent"). Dit begrip equivalentie bezit de gebruikelijke eigenschappen.
8. $h = \max(f, g)$ is een afkorting voor $h(x) = \max(f(x), g(x))$. Zijn $f, g \in \phi$, dan voldoet h aan II. 3.1 (triviaal) en aan II 3.3

Bewijs:

$$E[h<\alpha] = E[f<\alpha] \cup E[g<\alpha]$$
$$E[h>\beta] = E[f>\beta] \cap E[g>\beta]$$

maak nu gebruik van I.8.

9. Onder de veronderstellingen van II 8 zal ook aan II 3.2 zijn voldaan, indien er een rij x_n bestaat, zodat $\lim f(x_n) = \lim g(x_n) = 0$ is. Oftewel: indien $E[f<\frac{1}{n}] \cap E[g<\frac{1}{n}] \neq 0$ voor alle n is. We zeggen dan, dat max (f,g) echt bestaat (nl. als lid van ϕ).
10. $\max(f,g) \succ f$ en g. (Triviaal).
11. Elke $h \succ f$ en g is ook $\succ \max(f,g)$. (Triviaal). max (f,g) is dus een kleinste f en g overtreffende element van ϕ (als het echt bestaat).
12. We tonen nu aan, dat zulk een kleinste overtreffende ook bij een aftelbare verzameling van elementen van ϕ bestaat (indien zij zoiets tenminste telkens met zijn eindig velen bezitten). Zij $f_1, f_2, \ldots$ deze verzameling. We maken er een nieuwe van door te definieren: $g_1 = f_1$, $g_{i+1} = \max(g_i, f_{i+1}) = \max(f_1, \ldots f_{i+1})$ (volgens veronderstelling bestaat dit). De g_i vormen een stijgende rij $g_i < g_{i+1}$ met (als zij bestaat) dezelfde kleinste overtreffende als de rij der f_i. We veronderstellen in 't vervolg dus van te voren, dat de gegeven f_i een stijgende rij vormen, en bewijzen (in......), dat er een kleinste overtreffende f is.

Als volgt de constructie van f.

13. $f_n < f_{n+1}$

14. Def: $U_n = E[f_n < \frac{1}{n}]$
(Voor n = 0 stelle men $\frac{1}{n} = \infty$, dus $U_0 = R$).

15. $U_{n+1} \subset U_n$ wegens 13 en wegens $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

16 Def: $f = \max\ (f_n, \frac{1}{n+1})$ in $U_n \setminus U_{n+1}$,
$= 0$ in $\bigcap U_n$.

17. In $U_n \setminus U_{n+1}$ geldt : $f \geqslant \frac{1}{n+1}$, wegens 16,
$f_n < \frac{1}{n}$ " 14,
dus $f < \frac{1}{n}$ " 16,
dus $\frac{1}{n+1} \leqslant f < \frac{1}{n}$

18. Is omgekeerd $\frac{1}{n+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{n}$
dan is $x \in U_m \setminus U_{m+1}$
voor m $\neq$ n onmogelijk (want anders was wegens 17 $\frac{1}{m+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{m}$)
maar ook $x \in \bigcap U_m$
is onmogelijk (want daar is f = 0). Dus
$x \in U_n \setminus U_{n+1}$.

19. $E[\frac{1}{n+1} \leqslant f < \frac{1}{n}] = U_n \setminus U_{n+1}$ (Conclusie uit 17-18).

20. $U_n = E[f < \frac{1}{n}]$ (Volgt uit 19).

21. Zij $\alpha > 0$. We bepalen n zo dat
$\frac{1}{n+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$
Zij $f(x) < \alpha$.
Wegens 20 is daar $x \in U_n$. Twee gevallen:
1) $x \in U_n \setminus U_{n+1}$. Dan $f_n(x) = f(x)$ wegens 16, dus ook $f_n(x) < \alpha$.
2) $x \in U_{n+1}$. Dan $f_{n+1}(x) < \frac{1}{n+1}$ wegens 14,
$f_n(x) < f_{n+1}(x)$ wegens 13,

dus weer $f_n(x) < \alpha$.
Dus: uit $f(x) < \alpha$ volgt $f_n(x) < \alpha$.

22. Zij nu $f(x) \geqslant \alpha$. Dan $f(x) > \frac{1}{n+1}$, dus $x \notin U_{n+1}$ wegens 20.
Twee gevallen:
1) $x \in U_n \setminus U_{n+1}$. Dan $f_n(x) \geqslant \alpha$ wegens 16.
2) $x \notin U_n$. Dan $f_n(x) \geqslant \frac{1}{n}$ wegens 14, dus weer $f_n(x) \geqslant \alpha$.
Dus: uit $f(x) \geqslant \alpha$ volgt $f_n(x) \geqslant \alpha$.

23. Voor $\frac{1}{n+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$ geldt: $E[f < \alpha] = E[f_n < \alpha]$.

24. $\frac{1}{n+1} \leqslant \beta < \frac{1}{n}$.
Is $f(x) \leqslant \beta$, dan is $f(x) < \alpha$ voor alle $\alpha > \beta$, dus
wegens 21 ook $f_n(x) < \alpha$ voor alle $\alpha > \beta$, dus $f_n(x) \leqslant \beta$.
Is $f(x) > \beta$, dan is analoog $f_n(x) > \beta$.
Dus $E[f > \beta] = E[f_n > \beta]$

25. f is continu, dwz. de origineel verzameling van elk open getallen-interval is in R open. Bewijs: Wegens 23 is $E[f < \alpha] = E[f_n < \alpha]$, en dit is open, omdat f_n continu is.

Analoog $E[f>\beta]$ open. Hun doorsnee is een willekeurig open interval.

26. $f \geqslant 0$. Triviaal.

27. inf $f = 0$. Bewijs : x_n willekeurig in U_n. $f(x_n) < \frac{1}{n}$ wegens 20, dus lim $f(x_n) = 0$.

28. $E[f<\alpha] \curlywedge E[f>\beta]$. Bewijs: Zij $\frac{1}{n+1} < \alpha \leqslant \frac{1}{n}$. Volgens veronderstelling $E[f_n<\alpha] \curlywedge E[f_n>\beta]$: Twee gevallen:
1) $\beta < \frac{1}{n}$. Dan volgt het gestelde uit 23-24.
2) $\beta \geqslant \frac{1}{n}$. Dan $E[f>\beta] = E[f_n>\beta]$ wegens 24.
$\subset E[f_n>\beta]$ wegens 13.
en hieruit volgt het gestelde wegens 23 en I 6.

29. In 25-28 is bewezen : $f \in \Phi$

30. $f \succ f_k$ voor alle k. Bewijs: Zij lim $f(x_\nu) = 0$, dus $f(x_\nu) < \frac{1}{m}$ voor bijna alle ν. Dan wegens 23
$f_m(x_\nu) < \frac{1}{m}$ voor bijna alle ν. Dus wegens 13
$f_n(x_\nu) < \frac{1}{m}$ " " " . (en $k \leqslant m$). Dus
$\lim_\nu f_k(x_\nu) = 0$. Dus
$f \succ f_k$

31. Zij $g \succ f_k$ voor alle k. Is nu lim $g(x_\nu) = 0$, dan ook
$\lim_\nu f_k(x_\nu) = 0$, dus
$f_k(x_\nu) \leqslant \frac{1}{k}$ voor bijna alle ν, dus wegens 23
$f(x_\nu) \leqslant \frac{1}{k}$ " " " , dus
lim $f(x_\nu) = 0$, dus
$g \succ f$.
Dus f is een kleinste element van Φ, die alle f_k overtreft.

III.

1. $f \in \Phi$ heet maximaal, wanneer uit $f \succ g$ volgt: $f \sim g$. Alle met een maximale f equivalente leden van Φ zijn maximaal.

2. Elke klasse equivalente maximale leden van Φ heet punt van $\tilde{R}$.

3. Zij $\pi \in \tilde{R}$. Dan definieren we omgevingen van π als volgt: Zij f willekeurig in π gekozen. We kiezen verder een $\epsilon > 0$, en we zoeken alle minimale $g \in \Phi$, waarvoor een $\delta > 0$ bestaat, zodat $g(x) < \delta$ impliceert $f(x) < \epsilon$. De omgeving $\tilde{U}_{f,\epsilon}$ van π bestaat uit de equivalentieklassen van alle dergelijke g. Is nu $g' \sim g$, dan is er een δ' (wegens II, 4 en 7), zodat $g'(x) < \delta'$ impliceert $g(x) < \delta$, dus ook $f(x) < \epsilon$. De definitie is dus onafhankelijk van de keuze van g en zijn equivalentieklasse.

4. π is in elk van zijn omgevingen bevat. Triviaal.

5. Is $\tilde{U}$ omgeving van π en $\rho \in \tilde{U}$, dan is er een omgeving $\tilde{V}$ van ρ, die in $\tilde{U}$ bevat is. Bewijs: $\tilde{U} = \tilde{U}_{f,\epsilon}$ $g \in \rho$.
$g(x) < \delta$ impliceert $f(x) < \epsilon$. $\tilde{V} = \tilde{U}_{g,\delta}$. $\rho' \in \tilde{V}$, $g' \in \rho'$
Dus is er een $\delta > 0$, zodat $g'(x) < \delta'$ impliceert $g(x) < \delta$, dus $f(x) < \epsilon$. Dus $\rho' \in \tilde{U}$. Dus $\tilde{V} \subset \tilde{U}$.

6. Is $\tilde{U}$ en $\tilde{V}$ omgeving van π, dan is er een omgeving $\tilde{W}$ van π met $\tilde{W} \subset \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Bewijs: $\tilde{U} = U_{f,\varepsilon}$, $\tilde{V} = U_{f',\varepsilon'}$, $f \sim f'$ $f'' = \max(f,f')$, $\varepsilon'' = \min(\varepsilon,\varepsilon')$. $\tilde{W} = U_{f'',\varepsilon''}$.

7. Is $\pi \neq \rho$, dan zijn er omgevingen $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ van π en ρ met $\tilde{U} \cap \tilde{V} = 0$. Bewijs: $f \in \pi$, $g \in \rho$. Bestaat max (f,g) echt, dan $\succ$ f en g. Dus√ f $\sim$ g. Onmogelijk, omdat $\pi \neq \rho$. Dus max (f,g) bestaat niet echt. Dus volgens II 9. $E[f<\frac{1}{n}] \cap E(g<\frac{1}{n}) = 0$ van zekere n. $\tilde{U} = \tilde{U}_{f,1/n}$, $\tilde{V} = \tilde{U}_{g,1/n}$ voldoen.

8. In 4 - 7 hebben we bewezen dat $\tilde{R}$ een Haudorff ruimte is.

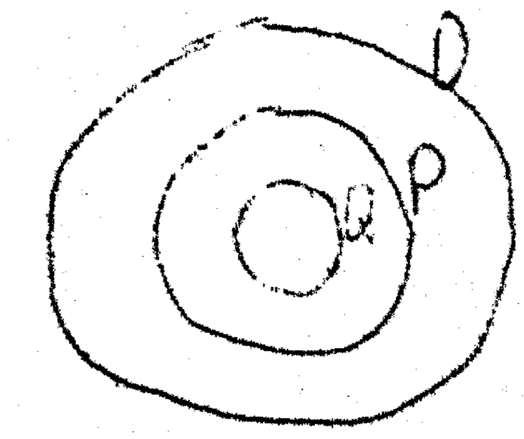
IV.

1. We tonen nu aan, dat $\tilde{R}$ aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet, dwz. dat we het aangegeven omgevingsstelsel door een aftelbaar stelsel kunnen vervangen. Voor dit doel bewijzen wij de <u>Stelling</u>: Er is een aftelbaar stelsel $\mathfrak{K}$ van deel-verzamelingen van R, zodat geldt: Is $f \in \phi, \varepsilon < \alpha$, dan is er een $K \in \mathfrak{K}$ met $E[f<\varepsilon] \subset K \subset \bar{K} \subset E[f<\alpha]$

2. Hieruit volgt inderdaad het 2^e aftelbaarheidsaxioma, want dit zegt: Er is een aftelbaar stelsel $\mathfrak{U}$ van open verzamelingen in $\tilde{R}$, zodat bij twee omgevingen $\tilde{V} \subset \tilde{W}$ van π een $\tilde{U} \in \mathfrak{U}$ is te vinden met $\tilde{V} \subset \tilde{U} \subset \tilde{W}$. Zij nu $\tilde{V} = \tilde{U}_{f,\varepsilon}$ $\tilde{W} = U_{f,\alpha}$. We kiezen dan K overeenkomstig 1 en $\tilde{U}$ als verzameling van alle g met "$g(x) < \delta$ impliceert $x \in \bar{K}$ van zekere $\delta > 0$".

3. Om de stelling te bewijzen, bewijzen we eerst een <u>Hulpstelling</u>: $O = E[f<\alpha]$, $Q = E[f<\gamma]$, $\alpha > \gamma > 0$. Dan is Q reeds in <u>eindig</u> veel componenten van O bevat.
Bewijs: $P = E[f<\beta]$, $\alpha > \beta > \gamma$.
$(R \setminus \bar{P}) \curlywedge Q$ Wegens II, 3.3.
O als open verzameling in een separabele ruimte bezit maar aftelbaar veel componenten; O_1, O_2.... zijn degenen die punten van Q bevatten. (De veronderstelling, dat er oneindig veel zijn, wordt weerlegd). Aangezien R samenhangt, bevat elke O_i randpunten van O, dus punten van $R \setminus \bar{P}$.
$T_n = \bigcup_{n}^{\infty} O_i$ is brug tussen $R \setminus \bar{P}$ en Q; $T_{n+1} \subset T_n$.
Dit kan geen luchtbrug zijn, dus is er een

$$p \in \wedge T_n, \; p \notin R \setminus \bar{P}, \; p \notin Q$$



Wegens de tweede relatie is $p \in \bar{P}$ dus in O.
Wegens de eerste is p verdichtingspunt van de rij O_1, O_2..... Dat kan niet; in een plaatselijk samenhangende ruimte kunnen de componenten van een open verzameling O zich nergens in O verdichten.

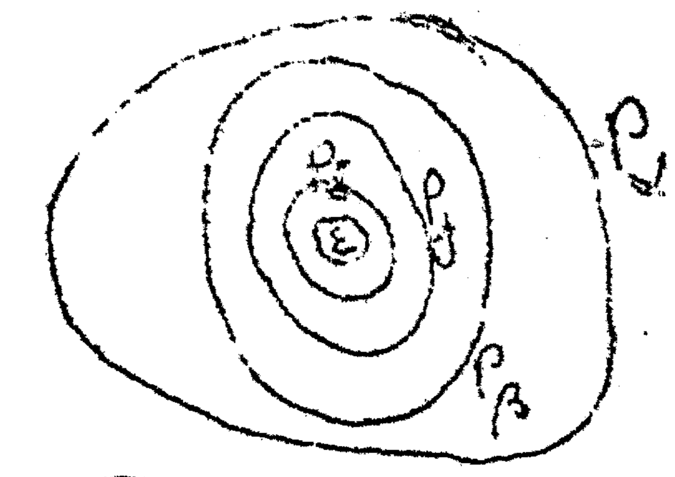
√wegens maximaliteit van f en g: max (f,g) $\sim$ f en g. Dus

4. Bewijs van de stelling uit IV 1.:

$$E[f<\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon] = P_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon}$$

$$\alpha>\beta>\gamma>\delta>\varepsilon>0$$

We kiezen in R een aftelbare basis $\mathfrak{L}$ van open verzamelingen.
We overdekken $\overline{P_\beta}\setminus P_\gamma$ met W_ν-en $\in \mathfrak{L}$ zodat $\overline{W_\nu} \subset P_\alpha$ (1) en $\overline{W_\nu} \cap P_\delta = 0$ (2) is,



(3) $\overset{n}{\bigcup} W_\nu = X_n$ open.

(4) $R \setminus X_n = Y_n$ vormen een dalende rij afgesloten verzamelingen. Waren ze allemaal bruggen tussen $R\setminus \overline{P_\beta}$ en P_γ, dan was er wegens II 3.3 een strijdigheid, omdat

(5) $\bigcap Y_n \cap \overline{P_\beta}\setminus P_\gamma = 0$ (wegens (1)-(4))

een luchtbrug zou leveren. Dus is er een Y_m, die niet brug is, die dus uit elkaar valt in niet aan elkaar plakkende verzamelingen B en C met

(6) $B \cap P_\gamma = C \cap (R \setminus \overline{P_\beta}) = 0$

(7) $Y_m = B \cup C$, dus wegens (4)

$B \cup C \cup X_m = R$

$B \cap P_\delta = 0$ wegens (6), $X_m \cap P_\delta = 0$ wegens (2) en (3), dus

(8) $P_\delta \subset C$

Nu is wegens de hulpstelling P_ε in eindig veel componenten van P_δ bevat, dus wegens (8) in eindig veel componenten van C, dus wegens (7) in de vereniging K van eindig veel componenten van $Y_m = R \setminus X_m$. Met deze K is aan de formule van IV 1, voldaan. Vormt men nu van alle eindige groepen uit $\mathfrak{L}$ (a) de verenigingen, neemt men (b) hiervan de complementen, (c) hiervan de componenten, (d) hiervan alle verenigingen van z'n eindig velen, dan is dat een aftelbaar stelsel $\mathfrak{R}$. Onze K is in $\mathfrak{R}$ bevat. Want door (a) kregen we X_m, door (b) Y_m, door (c) zijn componenten en door (d) hun eindige verenigingen.

V.

Compactheid van $\tilde{R}$. Met behulp van IV wordt aangetoond, dat niet alleen elke aftelbare, maar een willekeurige verzameling van $f \in \Phi$ een kleinste overtreffende bezit.

VI.

$\tilde{R}$ is plaatselijk samenhangend. Berust op de idee van de hulpstelling van IV.

VII. Equivalentie van onze theorie met die van Mazurkiewicz.

BIJVOEGSEL.

$o =$	lege verzameling.
$A \vee B$	vereniging van A en B.
$\bigcup A_n$	vereniging der A_n.
$A \cap B$	doorsnee van A en B.
$\bigcap A_n$	doorsnee der A_n.
$p \in A$	p element van A.
$p \notin A$	p niet element van A.
$A \setminus B$	verzameling van alle p A, B.
$\bar{A}$	afsluiting van A.

Alle ruimten worden metriseerbaar verondersteld.

Separabiliteit of tweede aftelbaarheidsaxioma: Er is een basis van speciale open verzamelingen, zodat elke open verzameling als vereniging van deze speciale verzameling kan worden voorgesteld.

Verzamelingen A en B plakken aan elkaar: Minstens één dezer verzamelingen bezit een punt of verdichtingspunt van de andere.

A samenhangend: niet splitsbaar in twee niet aan elkaar plakkende verzamelingen.

R plaatselijk samenhangend: bezit willekeurig kleine samenhangende omgevingen.

R compact: iedere oneindige verzameling bezit verdichtingspunt.

R plaatselijk compact: elk punt bezit omgeving U, zodat $\bar{U}$ compact is.

Component van A: maximale samenhangende deelverzameling van A.

In een separabele ruimte zijn er slechts aftelbaar veel paarsgewijs vreemde open verzamelingen (want iedere moet een basis-verzameling bevatten.

Is die ruimte bovendien plaatselijk samenhangend, dan is iedere component O' van een open verzameling O open (want $p \in O'$ moet een samenhangende omgeving U bezitten, die in O bevat is, die dus, omdat ze samenhangt, ook in de component O' bevat is).

De componenten O_1, O_2, ...van O kunnen zich ook nergens in O verdichten (want zo'n verdichtingspunt p zou een samenhangende omgeving $U \subset O$ bezitten en U zou geheel in één component bevat zijn).