STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 13

Grondslagen der wiskunde.

Cursus Eindhoven 1949/50.

incompl.

A.Heyting.

1950

Prof.dr. A. Heyting

Grondslagen der Wiskunde

(1949/50)

Colloquium <u>Grondslagen der Wiskunde</u> Eindhoven 11 Oct.1949.

1. De ruimte R is een verzameling van punten.
2. De rechten zijn deelverzamelingen van R.
3. Er bestaat minstens een rechte.
4. Elke rechte bevat minstens drie verschillende punten.
5. Zijn A en B verschillende punten, dan bestaat er een rechte, die A en B bevat.
6. Zijn A en B verschillende punten, dan bestaan er geen twee verschillende rechten, die A en B bevatten.
7. Er bestaat geen rechte, die alle punten bevat.
8. Is A een punt, b een rechte, die A niet bevat, dan bestaat er een rechte, die A bevat en met b geen punt gemeen heeft.
9. Is A een punt, b een rechte, die A niet bevat, dan bestaan er geen twee verschillende rechten, die A bevatten en met b geen punt gemeen hebben.
10. Een rechte bevat niet meer dan drie verschillende punten.

GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

Prof. Dr A. Heyting

Axioma's der Euclidische Meetkunde.

I. 1-7 Zie 11 Oct. 1949, no. 1-7

II. 1. Ligt B tussen A en C, dan ligt B tussen C en A, en A, B en C zijn drie verschillende punten van een lijn.

2. Zijn A, B en C drie verschillende punten op een lijn, dan ligt één en slechts één van die punten tussen de beide andere.

3. Zijn A en B verschillende punten, dan bestaat er een punt C, zodat B tussen A en C ligt.

4. Zijn A, B en C punten buiten een lijn l, en ligt tussen A en B een punt van l, maar tussen A en C geen punt van l, dan ligt tussen B en C een punt van l.

III. 1. Een verplaatsing V voert ieder punt A in een punt VA = B over.

2. Ligt B tussen A en C en is V een verplaatsing, dan ligt VB tussen VA en VC.

3. Ligt B tussen A en C, dan kan lijnstuk AB door geen verplaatsing in lijnstuk AC overgaan.

4. Ligt D binnen $\angle$ BAC, dan kan $\angle$ BAC door geen verplaatsing in $\angle$ BAD overgaan.

5. Iedere verplaatsing heeft een inverse, die een verplaatsing is.

6. Het product van twee verplaatsingen is weer een verplaatsing.

7. Er is een verplaatsing, die een gegeven punt A in een gegeven punt A', een gegeven halve rechte l met uiteinde A in een gegeven rechte l' met uiteinde A' en een door l begrensd halfvlak in een bepaald door l' begrensd halfvlak overvoert.

IV. (Continuiteitsaxioma van Dedekind). Wanneer de punten van een halve lijn l met uiteinde A in twee klassen L en R worden verdeeld, zodat ieder punt van L tussen A en ieder punt van R ligt, dan bevat l een punt P zodat ieder punt van L tussen A en P ligt, terwijl P tussen A en ieder punt van R ligt.

V. (Parallelenaxioma). Door een punt buiten een lijn gaat slechts één lijn, die de eerste lijn niet snijdt.

Toelichtingen.

Grondbegrippen zijn: punt, rechte (lijn), tussen, verplaatsing.

Bij III. 3 Lijnstuk AB is de verzameling van alle punten, die tussen A en B liggen

Bij III. 4 Laat een lijn l en een punt A gegeven zijn. Twee punten B en C van l liggen op dezelfde halve lijn l met uiteinde S, als S niet tussen B en C ligt. Men kan bewijzen, dat l door S in twee halve lijnen verdeeld wordt.

Twee punten P en Q buiten een lijn l liggen aan dezelfde kant van l, als l geen punt tussen P en Q bevat. Men kan bewijzen, dat l het vlak in twee halfvlakken verdeelt, zodat P en Q aan dezelfde kant van l liggen, wanneer ze aan dezelfde kant van l liggen.

$\angle$BAC bestaat uit de halve lijnen AB en AC. P ligt binnen $\angle$BAC, als P aan dezelfde kant van AB ligt als C, en aan dezelfde kant van AC als B.

Bij III 5,6 Deze axioma's drukken uit, dat de verplaatsingen een transformatiegroep vormen.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam-O.

GRONDSLAGEN DER WISKUNDE.

Prof. Dr A. Heyting

I. Inleiding

§1. In het kort werden enige hoofdpunten uit de geschiedenis der logica besproken. Ter sprake kwam: Voor bijzonderheden zie: E.W. Beth, Geschiedenis der Logica, Service's Encyclopaedie 1944.

1. De praedicatenlogica van Aristoteles.
2. De uitsprakenlogica der Stoa (Chrysippus).
3. Het programma van Leibniz voor de opstelling van een "Characteristic universalis", "Ars combinatoria" en "Calculus ratiocinator".
4. De klassenlogica van Boole en de relatielogica van Peirce.

§2. De formalisering der logica, door Leibniz geeist, werd door Boole en door degenen die zijn werk voortzetten tot stand gebracht. Peano ging verder en trachtte de gehele wiskunde te formaliseren.

§3. De logicisten, in de eerste plaats Dedekind en Frege, later Whitehead en Russell, trachtten alle wiskundige begrippen op grond van logische begrippen te definieren. Voor het begrip "aantal" geschiedt dit als volgt.

Een relatie R tussen twee verzamelingen A en B heet een-eenduidig wanneer 1^o uit a R b en a' R b volgt a = a'; 2^o uit a R b en a R b' volgt b= b'. Twee verzamelingen, waartussen een een-eenduidige relatie bestaat, heten gelijkmachtig. De verzameling van alle verzamelingen, die gelijkmachtig met A zijn, heet de machtigheid of het kardinaalgetal van A. Voor eindige verzamelingen valt dit begrip "machtigheid" samen met het gebruikelijke begrip "aantal".

Voorbeelden van definities van speciale aantallen. 0 is het kardinaalgetal van de verzameling van alle dingen, die niet gelijk zijn aan zichzelf. Onder $\{x\}$ verstaan wij de verzameling van alle dingen, die gelijk zijn aan x.
1 is het kardinaalgetal van $\{0\}$.

4. De paradox van Russell. Zij E de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. 1^o geval. E bevat E als element: dan bevat E zichzelf niet als element volgens de definitie. 2^o Geval

E bevat E niet als element; dus bevat E zichzelf als element volgens de definitie. Zowel in het eerste geval als in het tweede komt men tot een tegenstrijdigheid.

Deze en andere paradoxen maken een diepgaande revisie van de logic[a] noodzakelijk.

§5. De axiomatische methode bestaat in het volgende.

1. Alle grondbegrippen van een theorie worden opgesomd.

2. Ieder begrip moet uitsluitend op grond van de grondbegrippen worden gedefinieerd.

3. Alle grondstellingen (axioma's) worden geformuleerd.

4. Iedere stelling moet langs zuiver logische weg uit de grondstellingen worden afgeleid.

§6. Tot de grondbegrippen behoren begrippen van grondelementen en van grondrelaties. Een model voor een axiomatische theorie is een verzameling van elementen, waartussen zekere relaties bestaan, die aan de axioma's voldoen. Twee modellen M_1 en M_2 zijn isomorf, wanneer tussen M_1 en M_2 een een-eenduidige afbeelding mogelijk is met de volgende eigenschap: Beantwoordt aan een grondrelatie R in M_1 de relatie R_1, in M_2 de relatie M_2, en bestaat tussen twee elementen van M_1 de relatie R_1, dan bestaat tussen hun beeldelementen de relatie R_2. Een stelsel axioma's heet categorisch, als elke twee modellen daarvoor isomorf zijn.

Is Q één der axioma's uit het stelsel A, dan kan men een nieuw stelsel A' vormen uit niet-Q en de overige axioma's van A. Heeft men een model voor A', dan is Q onafhankelijk van de overige axioma's. Deze begrippen werden aan een voorbeeld verduidelijkt. (zie afzonderlijk blaadje).

§7. De vooruitgang der wiskunde in de laatste 50 jaar berust voor een belangrijk deel op de toepassing der axiomatische methode. Als grondslag voor de wiskunde stuit zij echter op grote bezwaren. Wanneer voor een stelsel axioma's niet tevoren een model is geconstrueerd, weet men niet, of er objecten bestaan, die met de grondbegrippen corresponderen. De toepassing der logische begrippen als "bestaan", "volgen uit" op zulk een leeg systeem mist elke grond. Men moet met het systeem kunnen werken alsof het niet op een inhoud betrekking heeft. Hiervoor is nodig, dat de logica mede in het proces der axiomatisatie betrokken wordt. Dit geschiedt het beste door formalisatie.

§8. Een geformaliseerde theorie of calculus wordt als volgt gedefinieerd.

1. Er is een lijst van tekens. (Meestal is de lijst oneindig groot, doordat natuurlijke getallen als indices worden toegelaten).

2. Bepaalde tekencombinaties worden als formules beschouwd; er zijn regels gegeven, waardoor van iedere tekencombinatie kan worden uitgemaakt, of zij een formule is of niet.

3. Er is een lijst van formules, die als axioma's worden beschouwd.

4. Er zijn afleidingsregels gegeven, waardoor uit zekere formules een nieuwe formule kan worden afgeleid.

5. Een formule, die of zelf axioma is, of uit de axioma's door een eindig aantal toepassingen der afleidingsregels kan worden afgeleid, heet een afleidbare formule of een stelling.

§9. Over de calculus wordt geredeneerd in de metamathematica. Deze maakt gebruik van eenvoudige wiskundige begrippen, met inbegrip van de volledige inductie. Tot haar gebied behoren de problemen der contradictievrijheid (nu niet meer door een model te bewijzen), volledigheid (in nader te preciseren zin) en de vraag, hoe uit te maken, of een gegeven formule afleidbaar is of niet (definiet systeem).

De metamathematica is scherp gescheiden van het werken met het formule systeem zelf. Hiervoor zijn zekere eenvoudige practische vaardigheden nodig, en men moet er voor kunnen tellen.

§10. Het woord "axioma" komt in verschillende betekenissen voor.

1. Voorwaarde voor het bestaan van een theorie. (In deze zin is het bestaan van onveranderlijke en herkenbare tekens een axioma voor elke calculus).

2. Onomstotelijke waarheid. (Lange tijd werden de axioma's der Euclidische meetkunde als zodanig beschouwd; vele beschouwen de grondstellingen der logica als axioma's in deze zin).

3. Een stelling, die als uitgangspunt voor de afleiding van nieuwe stellingen wordt gebruikt (zie § 5).

4. Uitgangsformule in een calculus (zie § 8). Wij gebruiken het woord alleen in de betekenissen 3 en 4.

§11. De intuitionisten stellen zich ten doel, de wiskunde zo streng mogelijk op te bouwen, zonder ze door formalisatie van haar inhoud te beroven. Zij gaat uit van de begrippen "eenheid" en "onbeperkte herhaling", die in alle wetenschappelijk denken en ook in veel denken buiten de wetenschap liggen besloten en die wij kunnen denken als in hoge mate vrij van niet ter zake doende inhouden. Filosofie of logic kan geen grondslag voor de wiskunde geven; zij heeft zulk een grondslag ook niet nodig. Ook een fundering door formalisatie is onmogelijk

De rol der taal blijft beperkt tot het leggen van contact tussen verschillende wiskundigen. De opbouw der wiskunde bestaat in een construeren in onze geest, waarbij iedere stap onmiddellijk duidelijk moet zijn. Deze evidentie komt niet toe aan de logische stellingen, zoals het beginsel van het uitgesloten derde. De logische beginsels zijn zeer algemene stellingen, geldig voor willekeurige wiskundige systemen, en hebben dus een bewijs nodig. De overtuiging, dat iedere stelling of juist, of onjuist is, berust op filosofische gronden, die wij niet als grondslag voor de wiskunde aanvaarden. "De stelling A is juist" betekent: "Ik kan A bewijzen". "A is onjuist" betekent: "Ik kan uit de onderstelling A een tegenspraak afleiden".
Er is nooit bewezen, dat één van beide altijd mogelijk is.

II. Uitsprakenrekening.

§12. Grondtekens der uitsprakenrekening (U).

$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$; een onbepaald voort te zetten rij veranderlijken a, b, ..., a_1, a_2, ...

Formule 1). Iedere veranderlijke is een formule.

2) Is A een formule, dan is $\neg A$ een formule.

3) Zijn A en B formules, dan zijn $A \wedge B$, $A \vee B$ en $A \rightarrow B$ formules.

4) Slechts die tekenreeksen zijn formules, waarvoor dit op grond van de regels 1, 2, 3 kan worden aangetoond.

§13. Wij beschouwen een tweede calculus (C).

Grondtekens: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, 0, 1, =

Termen 1) 0 en 1 zijn termen.

2), 3), 4) analoog met § 12.

Formules. Iedere formule heeft de vorm A = B, waarin A en B termen zijn.

Grondformules. $\neg 0 = 1$. $\neg 1 = 0$.

De overige zijn van de vorm $x \lambda y = z$, waarin λ één der tekens $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ is en x, y, z ieder één der tekens 0,1 voorstelt. Wij vatten ze samen in de tabellen:

$\wedge$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\rightarrow$	0	1
0	0	$\cancel{0}$ 1
1	0	0

Afleidingsregels. Uit $\alpha = \beta$ leidt men af $\beta = \alpha$. Uit $\alpha = \beta$ en $\beta = \gamma$ leidt men af $\alpha = \gamma$.

... van de uitsprakenrekening voor iedere veranderlijke 0 of 1, dan ontstaat een term T uit C. In C is of $T = 0$ of $T = 1$ afleidbaar, en niet beide tegelijk.

<u>Bepalingen</u>. Twee formules uit U heten equivalent ($A \sim B$), als zij bij iedere substitutie dezelfde waarde geven.

Een formule heet een <u>identiteit</u>, als zij bij iedere substitutie de waarde 0 levert.

$$A \vee A \sim A \qquad A \wedge A \sim A .$$

In de zin der equivalentie zijn de bewerkingen $\wedge$ en $\vee$ commutatief; verder gelden de beide distributieve wetten

$$(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$
$$(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

en de beide formules van de Morgan:

$$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

Nog twee belangrijke equivalenties:

$$\neg\neg A \sim A . \qquad A \rightarrow B \sim \neg A \vee B.$$

De equivalentie is een klassenvormende relatie tussen formules, want 1. $A \sim A$; 2. Uit $A \sim B$ volgt $B \sim A$; 3. Uit $A \sim B$ en $B \sim C$ volgt $A \sim C$. In de zin der equivalentie kan men twee der tekens $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ uitdrukken in het derde en de negatie. Al de tekens zijn uit te drukken in het teken $|$ gedefinieerd door

$$a \mid b = \neg a \vee \neg b; \ \neg a \sim a \mid a, \ a \wedge b \sim (a \mid b) \mid (a \mid b)$$

§ 15. Een formule heeft de <u>conjunctieve normaalvorm</u> als zij de vorm heeft $A \wedge B \wedge C \wedge \ldots$, waarin A, B, C enz. disjuncties zijn met termen van de vorm a of $\neg a$ (a is een veranderlijke). Iedere formule is equivalent met een formule in de conjunctieve normaalvorm.

Een formule in de conjunctieve normaalvorm is dan en slechts dan een identiteit, als iedere conjunctieterm eenzelfde veranderlijke zowel zonder als met $\neg$ bevat. In de uitsprakenrekening, opgebouwd met behulp van $\vee$, $\wedge$, $\neg$ geldt de dualiteitsstelling: Twee equivalente formules gaan in equivalente formules over, als men overal $\wedge$ met $\vee$ verwisselt. Een identiteit gaat door deze verwisseling over in een formule, die identiek onjuist is, en omgekeerd.

Duaal tegenover de conjunctieve normaalvorm staat de disjunctieve normaalvorm.

De formules A en B zijn dan en slechts dan equivalent als $A \rightarrow B$ en $B \rightarrow A$ identiteiten zijn

Het aantal juistheidsfuncties (functies, die slechts de waarden 0 en 1 aannemen) van n veranderlijken is 2^{2^n}; deze worden verkregen door de formule

$$(a_1 \wedge \neg a_1) \vee (a_2 \wedge \neg a_2) \vee \ldots \vee (a_n \wedge \neg a_n)$$

met behulp van de eerste distributieve eigenschap in een conjunctieve normaalvorm te brengen. De deelconjuncties hiervan (met inbegrip van de lege formule) zijn de elementaire conjuncties in n veranderlijken.

Iedere formule is equivalent met een elementaire conjunctie.

III. Relatierekening.

§17. In een relatierekening treden twee soorten veranderlijken op: dingveranderlijken en relatieveranderlijken, de laatste met 0,1,2..... argumenten. Aan de tekens uit de uitsprakenberekening worden toegevoegd de quantoren ($\forall x$) ("voor iedere x") en ($\exists x$) ("er bestaat een x, zodat"). In een formule of deel van een formule, waarvoor een quantor geplaatst is, is de veranderlijke x gebonden.

Een formule is een tekenreeks, die op grond van de volgende regels is opgebouwd:

1. Een uitspraakveranderlijke is een formule.
2. Een relatieveranderlijke, waarbij voor alle argumenten dingveranderlijken zijn ingevuld, is een formule.
3. Is A een formule, dan is $\neg A$ een formule.
4. Zijn A en B formules, zodanig, dat geen veranderlijke in A vrij en in B gebonden optreedt, of omgekeerd, dan zijn $A \wedge B$, $A \vee B$ en $A \rightarrow B$ formules.
5. Treedt x in A als vrije veranderlijke op, dan zijn $(\forall x)A$ en $(\exists x)A$ formules.

Axioma's zijn:

1. Iedere identiteit uit de uitsprakenrekening.
2. $(\forall x)a(x) \rightarrow a(y)$.
3. $a(y) \rightarrow (\exists x)a(x)$.

Regels:

I a. Een vrije dingveranderlijke mag overal, waar zij voorkomt, vervangen worden door een dingveranderlijke, die nog nergens voorkomt.

b. Een gebonden dingveranderlijke mag in het gebied van een bepaalde quantor door een andere dingveranderlijke vervangen worden, mits door deze vervanging weer een formule ontstaat.

c. Voor een uitspraakveranderlijke mag een willekeurige formule worden gesubstitueerd, die geen der dingveranderlijken bevat, die al in de oorspronkelijke formule voorkwam, terwijl door de substitutie weer een formule moet ontstaan.

d. Voor een relatieveranderlijke f met n argumenten kan als volgt een formule $B(x_1, \ldots, x_n)$ gesubstitueerd worden, die geen veranderlijke bevat, die ook in de oorspronkelijke formule A optreedt. Staat ergens in A, $f(y_1, \ldots, y_n)$ (waarin $y_1, \ldots, y_n$ veranderlijken zijn, die niet alle verschillend behoeven te zijn), dan vervangen wij dit door $B(y_1, \ldots, y_n)$. Het resultaat van de substitutie moet weer een formule zijn.

II. Zijn A en $A \to B$ afleidbaar, dan is B afleidbaar.

III. Is de formule $A \to B(x)$ afleidbaar, terwijl x in A niet voorkomt, dan is $A \to (\forall x)B(x)$ afleidbaar.

IV. Is de formule $B(x) \to A$ afleidbaar, terwijl x in A niet voorkomt, dan is $(\exists x)B(x) \to A$ afleidbaar.

§18. Men leidt nu gemakkelijk af de regel: Is A(x) een afleidbare formule dan ook $(\forall x)A(x)$; en de formules: $(\exists x)a(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\neg a(x)$ (1)

$(\forall x)a(x) \leftrightarrow \neg(\exists x)\neg a(x)$ (2)

De formules A en B heten <u>aequivalent</u> $A \sim B$, wanneer zowel $A \to B$ als $B \to A$ afleidbaar is.

Aequivalentiestelling. Bevat de formule A de formule B als bouwsteen en is $B \sim B'$, terwijl de formule A' uit A ontstaat, door de bouwsteen B te vervangen door B', dan geldt $A \sim A'$.

Bewijs door inductie langs de opbouw van formule A.

§19. <u>Stelling</u>. Bevat een formule A geen vrije dingveranderlijke en geen uitspraak- of relatieveranderlijke en is B afleidbaar uit A, dan is $A \to B$ afleidbaar.

<u>Bewijs</u>. Volgens regel Ic vervangen we alle veranderlijken, die in A voorkomen door veranderlijken, waarop in de afleiding van B uit A nergens de substitutieregel toegepast wordt. Daarna plaatsen wij voor iedere formule in die afleiding $A \to$. Het blijkt, dat zij daardoor het karakter van een afleiding behoudt, Het resultaat is nu $A \to B$.

Het belang van deze stelling ligt in het volgende. De axioma's van een wiskundige theorie vormen gewoonlijk, als men hun conjunctie beschouwt, een formule A, die aan de voorwaarden van de stelling voldoet. De vraag, of een stelling B uit die axioma's afgeleid kan worden, kan dus teruggebracht worden tot de vraag of de formule $A \to B$ in de relatierekening afleidbaar is. In het bijzonder geldt dit voor de vraag of het stelsel axioma's vrij van tegenspraak is.

§20. De relatierekening is vrij van tegenspraak. Om dit te bewijzen, laten wij in een formule alle dingveranderlijken en quantoren weg en vervangen wij alle relatieveranderlijken door hun uitspraakveranderlijken. Iedere afleidbare formule gaat daardoor over in een identiteit uit de uitsprakenrekening. Dit kan echter niet met A en $\neg A$ tegelijk het geval zijn. Dit bewijs komt hierop neer, dat men de relatierekening to-

past op een verzameling van dingen, die slechts één element bevat.
§21. De relatierekening is niet volledig ~~in de zin van §8~~; na toevoeging van een niet afleidbare formule aan de axioma's behoeft geen tegenspraak te ontstaan. Voorbeeld:

$$(\exists x)\ a(x) \rightarrow (\forall x)\ a(x) \qquad (3)$$

is niet afleidbaar. Het bewijs uit §20 blijft echter geldig na toevoeging van (3) als axioma. (3) is identiek juist, als er slechts één individu bestaat, maar niet meer, als de individuenverzameling meer dan één element bezit.

Een formule heet k-identiek, als zij identiek juist is in iedere individuenverzameling van hoogstens k elementen. Nauwkeuriger: vervang in de formule F overal $(\forall x)\ A(x)$ door $A(1) \wedge \ldots\ldots \wedge A(k)$, $(\exists x) A(x)$ door $A(1) \vee \ldots\ldots \vee A(k)$; nadat zo alle quantoren geëlimineerd zijn, beschouwen wij elke combinatie van een relatievariabele met als argumenten getallen uit de rij $1, \ldots\ldots, k$ als een nieuwe uitspraakveranderlijke. Verkrijgen wij zo een identiteit uit de uitsprakenrekening, dan is F k-identiek.

$$(\forall x)\ a(x) \vee (\forall x)(\neg a(x) \vee b(x)) \vee (\forall x)(\neg a(x) \vee \neg b(x))$$

is 2-identiek, maar niet 3-identiek.

Laat F de conjunctie zijn van de formules

$$(\forall x)\ \neg\ a(x,x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(a(x,y) \wedge a(y,z) \rightarrow a(x,z))$$

$$(\forall x)(\exists y)\ a(x,y)$$

¬F is k-identiek voor ieder natuurlijk getal k. Neemt men echter als individuenverzameling alle natuurlijke getallen en voor a(x,y) de relatie $x < y$ dan is F juist. De vraag naar de afleidbaarheid van F is dus gelijkwaardig met de vraag, of de axioma's voor de ordening der natuurlijke getallen tot een tegenspraak leiden.
§22. De vraag naar een methode, waardoor een willekeurige formule uit de relatierekening gemaakt kan worden, of zij afleidbaar is, noemt men het decisieprobleem (Entscheidungsproblem). Volgens §19 zou een oplossing hiervan automatisch de oplossing geven van een uitgebreide klasse van wiskundige problemen. Evenwel is door Church bewezen, dat het decisieprobleem onder zeer algemene onderstellingen over de te gebruiken redeneermiddelen onoplosbaar is.

Het decisieprobleem is wel voor sommige klassen van formules opgelost; ook heeft men het algemeen decisieprobleem tot dat voor speciale klassen van formules teruggebracht.

IV. <u>Logistiek</u>.

§23. Voor de bespreking van enige paradoxen en de indeling van de paradoxen in logische en semantische wordt verwezen naar E.W. Beth, Wijsbegeerte der Wiskunde, Nijmegen 1948 (aan te halen als "Beth").

Ter vermijding van de logische paradoxen stelde Russell de typentheorie op (Beth blz.282).

Ten gevolge van de onderscheiding der typen, moeten de meeste begrippen, o.a. de in §3 behandelde, voor ieder type opnieuw worden gedefinieerd.

§24. Bepalingen. Gegeven een relatie R. Een klasse α heet R-<u>erfelijk</u> als $(\forall u)(\forall v)(u \in \alpha \wedge uRv \rightarrow v \in \alpha)$. b is een R-<u>nakomeling</u> van a of $aR^{*}b$ als

$$(\forall \alpha)(a \in \alpha \wedge (\forall u)(\forall v)(u \in \alpha \wedge uRv \rightarrow v \in \alpha) \rightarrow b \in \alpha).$$

De klasse der R-nakomelingen van a heet de R-<u>nakomelingschap</u> van a.

§25. Wij veronderstellen dat R een-eenduidig is, en dat er een element e bestaat, zodat $(\forall x)\neg(xRe)$. Dan is er een een-eenduidige afbeelding van de R-nakomelingschap van e op de natuurlijke getallen mogelijk. (Beth blz.77-80)

§26. m Vg n betekent:

$$(\exists \alpha)(\exists x)(Kg'\alpha = n \wedge x \in \alpha \wedge Kg'(\alpha - \{x\}) = m)$$

[$Kg'\alpha$ is het kardinaalgetal van α; zie §3. $\alpha - \{x\}$ is de klasse der elementen van α, die verschillend zijn van x.]

De relatie Vg voldoet aan de voorwaarden uit §25, als men 0 voor e neemt. Men kan dus definieren: Een natuurlijk getal is een Vg-nakomeling van 0 (Beth blz.193).

x x x

GRONDSLAGEN DER WISKUNDE .

Prof. Dr A. Heyting

V. Bewijstheorie.

27. Niet-tegenstrijdigheid van het stelsel axioma's:

1. $x = y \rightarrow (f(x) \rightarrow f(y))$.
2. $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$.
3. $x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x$.
4. $x \nless x!$
5. $x < y \rightarrow \neg(y < x')$.
6. $\neg(x < 0)$.
7. $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(y' = x)$.

Te bewijzen: Uit de relatierekening en axioma's 1 - 7 is de formule $0 \neq 0$ niet afleidbaar.

Eerst onderstellen wij, dat in de afleiding geen gebonden veranderlijken optreden.

(α) Normalisering der afleiding. Als in de afleiding de formule B uit de formule A door een substitutie afgeleid wordt, dan voeren wij die substitutie ook in A uit en in alle formules die in de afleiding aan A voorafgaat. Blijven in de afleiding nu nog veranderlijken staan, dan worden deze door constanten vervangen.

(β). Een cijfer is 0 of 0 met een aantal streepjes. Zijn φ en ψ cijfers, dan heet $\varphi = \psi$ waar, (w) als φ en ψ dezelfde tekenrij zijn; $\varphi < \psi$ heet waar (w), als φ een deel is van ψ . Een formule, die niet waar is, heet vals (v). Een formule, die uit priemformules $\varphi = \psi$ en $\varphi < \psi$ met behulp van de tekens der uitsprakenrekening is samengesteld, heet een numerieke formule. Volgens § 13 en 14 is elke numerieke formule w of v (w staat voor 0, v voor 1 van § 13).

(γ). Iedere formule uit de genormaliseerde afleiding is w. Bewijs. Dit geldt voor elke formule, die door substitutie uit een der uitgangsformules ontstaat. Geldt het voor A en $A \rightarrow B$, dan ook voor B. $0 \neq 0$ is v, dus niet afleidbaar.

(δ). Algemeen geval. De afleiding wordt genormaliseerd, waarbij nu vrije en gebonden dingveranderlijken kunnen blijven staan. Verder wordt overal $(\forall x)A(x)$ vervangen door $\neg(\exists x)A(x)$.

(ε). Eerste reductiestap. Beschouw een bouwsteen $(\exists x)\ A(x)$, waarin A(x) geen existentieteken bevat. Breng A(x) op de disjunctieve normaalvorm $A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_n$. Iedere A_k is een conjunctie van formules $P = Q$, $P < Q$, $\neg(P = Q)$, $\neg(P < Q)$; P is een cijfer of een dingveranderlijke of een dingveranderlijke met streepjes; evenzo Q.

Vervang $\neg(P = Q)$ door $P < Q \vee Q < P$.

Vervang $\neg(P < Q)$ door $P = Q \vee Q \quad P$.

Breng de formule weer op de disjunctieve normaalvorm.

(ζ). Tweede reductiestap. Vervang $x^{(k)} = x^{(l)}$ door $0^{(k)} = 0^{(l)}$ en $x^{(k)} < x^{(l)}$ door $0^{(k)} < 0^{(l)}$.

(η). Derde reductiestap. Zij k het grootste aantal streepjes, dat bij x voorkomt. Komt in P $x^{(l)}$ voor, waarin l kleiner dan k is, dan voegen wij in beide leden van P(k-l) streepjes toe.

(θ). Vierde reductiestap. A(x) heeft nu de vorm

$$C_1(x^{(k)}) \vee \ldots \vee C_m(x^{(k)}) \vee C_{m+1} \quad \vee \ldots \vee C_n.$$

Vervang $(\exists x)\,A(x)$ door

$$(\exists x)C_1 \vee \ldots \vee (\exists x)C_m \vee C_{m+1} \vee \ldots \vee C_n.$$

(ι). Vijfde reductiestap.

1^e geval $C_\ell(x^{(k)})$ is $x^{(k)} = R \wedge C_\ell^x\ (x^{(k)})$.

Vervang $(\exists x)C_\ell$ door $(0^{(k)} = R \vee 0^{(k)} < R) \wedge C_\ell^x\ (R)$.

2^e geval. $C_\ell(x^k)$ is van de vorm

$$R_1 < x^{(h)} \wedge \ldots\ldots \wedge R_\ell < x^{(h)} \wedge x^{(h)} < S_1 \wedge \ldots\ldots \wedge x^{(h)} < S_h$$

Vervang $(\exists x)C_\ell$ door

$$\begin{array}{l} 0^{(k)} < S_1 \wedge \ldots\ldots \wedge 0^{(k)} < S_h \\ \wedge\ R'_1 < S_1 \wedge \ldots\ldots \wedge R'_1 < S_h \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - -} \\ \wedge\ R'_\ell < S_1 \wedge \ldots\ldots \wedge R'_\ell < S_h \, . \end{array}$$

(κ). Zesde reductiestap. Komt in A(x) een veranderlijke y voor, die door de reductie verdwenen is, dan voegen wij een conjunctieterm $y = y$ toe.

(λ). Voer de zes reductiestappen achtereenvolgens voor alle existentietekens uit. Dan ontstaat een <u>gereduceerde</u> van de formule.

§ 28. <u>Bepaling</u>. 1. Een numerieke formule heet <u>verificeerbaar</u> (vb) als zij w is. 2. Een formule, die alleen vrije dingveranderlijken bevat, heet vb, als zij bij invullen van willekeurige cijfers voor die veranderlijken waar wordt. 3. Een formule met vrije en gebonden dingveranderlijken heet vb, als haar gereduceerde vb is.

<u>Stelling 1</u>. Gegeven: (I) y is de enige veranderlijke in A(y) en R is een gereduceerde van $(\exists x)A(x)$. (II) Voor het cijfer ξ is $A(\xi)$ waar. Bewering: R is waar.

<u>Stelling 2</u>. Gegeven: (I) als boven. (II) R is waar. Bewering: Men kan een cijfer ξ vinden, zodat $A(\xi)$ waar is.

Bewijs. 1^e geval (zie θ) C_ℓ is waar; l groter dan m. Neem $\xi = 0$.

2^e geval $(0^{(k)} = R \vee 0^{(k)} < R) \wedge C_\ell^x$ (R) is waar. R is dan een cijfer van de vorm $S^{(k)}$. Neem $\xi = S$.

3^e geval. Bij de vijfde reductiestap, 2^e geval, ontstaat een ware formule. Zoek het kleinste der cijfers $S_1 \ldots S_h$; dit heeft de vorm $T^{(k+1)}$; neem $\xi = T$.

Stelling 3. Zijn C en D gereduceerden van A en vervangt men de vrije veranderlijken in C en D op dezelfde wijze door cijfers, dan worden beide w of beide v.

Stelling 4. Gegeven: D(y) is een gereduceerde van A(y). F is een gereduceerde van $(\exists x)A(x)$. D'(y) en F ontstaan uit D(y) en F, door voor de in beide voorkomende vrije veranderlijken cijfers in te vullen.
Beweringen: Is D'(ξ) waar, dan is F' waar. Is F' waar, dan kan men een cijfer ξ vinden, zo dat D'(ξ) waar is.

29. Iedere uitgangsformule is verificeerbaar.

De verificeerbaarheid blijft bestaan bij het toepassen van de regels van de relatierekening. Hieruit volgt, dat iedere afleidbare formule verificeerbaar is. $0 \neq 0$ is niet vb, dus niet afleidbaar. Hiermee is de niet-tegenstrijdigheid van de axioma's uit § 27 bewezen.

30. Het axioma der volledige inductie luidt:

8. $f(0) \wedge (\forall x)\ (f(x) \rightarrow f(x')) \rightarrow f(y)$.

In plaats hiervan kan men ook een nieuwe regel invoeren:

R 9. $$\frac{A(0) \qquad A(x) \rightarrow A(x')}{A(x)}$$

Een formule zonder relatie- of uitspraakveranderlijken, die door toepassing van 8 of R 9 afgeleid is, kan ook zonder 8 of R 9 afgeleid worden. Na toevoeging van 8 of R 9 blijft het stelsel niet-tegenstrijdig.

31. Uit het verkregen stelsel volgen de axioma's van Peano voor de natuurlijke getallen. Ook deze zijn dus niet-tegenstrijdig. (Beth blz. 129).

VI. Recursieve functies.

32. Recursieschema voor een primitief recursieve functie f(x,u).

$f(0,u) = \varphi(u)$.

$f(x',u) = \psi(x,u,f(x,u))$.

Voorbeelden. $f(x,u) = u + x$. $\varphi(u) = u$.

$\psi(x,u,z) = z'$.

$f(x,u) = u.\ x.\ \varphi(u) = 0. \quad (x,u,z) = z + u.$
$f(x) = \delta(x). \quad \delta(0) = 0. \quad \delta(x') = x.$
$f(x,u) = u \dot{-} x.\ \varphi(u) = u.\ \psi(x,u,z) = \delta(z)$
$f(u,x) = \sum_{y<x} g(u,y). \quad \varphi(u) = 0.\ \psi(x,u,z) = g(u,x') + z.$
Analoog voor het product

$|a - b| = (a \dot{-} b) + (b \dot{-} a).$
$\overline{sg}\ x = 1 \dot{-} x. \quad sg\ x = \overline{sg}\ \overline{sg}\ x.$

33. De representerende functie van een relatie $R(x_1,\ldots,x_n)$ is gedefinieerd door:

$$\begin{cases} \varphi(x_1,\ldots,x_n) = 0 \text{ als } R \text{ juist is.} \\ \varphi(x_1,\ldots,x_m) = 1, \text{ als } R \text{ onjuist is.} \end{cases}$$

Notatie: φ repr. R.
Voorbeeld: $sg|x - y|$ repr. $x = y$.

Een relatie heet primitief recursief, als haar representerende functue primitief recursief is.
Stel $\rho(x,y)$ repr. $R(x,y)$.
Dan $1 \dot{-} (x,y)$ repr. $\neg R(x,y)$.

$\prod_{y<z} \rho(x,y)$ repr. $(\exists y)\ (y < z \wedge R(x,y))$.

$sg(\sum_{y<z} \rho(x,y))$ repr. $(\forall y)\ (y < z \rightarrow R(x,y))$. $\sum_{t<z} \prod_{s<t} \rho(x,s) = \mu y(y < z \wedge R(x,y))$

Deze functie betekent: het kleinste getal y, zodat $y < z \wedge R(x,y)$ juist is; is er zo'n getal niet, dan 0. Laat de elkaar uitsluitende praedicates $Q_1(x),\ldots, Q_m(x)$ tot representerende functies hebben $\varphi_1(x),\ldots, \varphi_m(x)$.
$\varphi(x) = (\overline{sg}\ \psi_1)\varphi_1 + \ldots + (\overline{sg}\,\psi_m)\varphi_m + sg\ (\psi_1 + \ldots + \psi_m)\varphi_{m+1}$ heeft de eigenschap

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ als } Q_1(x) \text{ juist is.} \\ \vdots \\ \varphi_m(x), \text{ als } Q_m(x) \text{ juist is.} \\ \varphi_{m+1}(x) \text{ in het overblijvende geval.} \end{cases}$$

Deze functie is dus recursief, als $Q_1,\ldots, Q_m$ het zijn.

34. $a < b$ is $(\exists c)\ (c < b \wedge a + c' = b)$.
$a \mid b$ is $(\exists c)(\ c < b' \wedge ac = b)$
$Pr\ (a)$ is $a > 1 \wedge \neg(\exists c)(1 \leq c < a \wedge c \mid a)$.

Dit betekent: a is een priemgetal.
Het $(i+1)^e$ priemgetal p_i is een recursieve functie van i. $p_0 = 2$.
$p_i = \mu x(p_i < x \leq p_i! + 1 \wedge Pr\ (x))$.

De ontbinding van a in priemfactoren schrijven wij:

$$a = p_0^{(a)_0} \; p_1^{(a)_1} \ldots\ldots \; p_\ell^{(a)_\ell}$$

$$(a)_i = \mu x(x \leq a \wedge p_i^{x} \mid a \wedge \neg p_i^{x'} \mid a).$$

$\lambda(a)$ is het aantal verschillende priemgetallen, waardoor a deelbaar is. Wij definieren eerst $\lambda(a,n)$:

$$\lambda(a,0)= 0 \qquad \lambda(a,n')= \begin{cases} \lambda(a,n)+ 1 \text{ als } p_n \mid a \\ \lambda(a,n) \text{ anders.} \end{cases}$$

$$\lambda(a)= \lambda(a,a).$$

35. Wij definieren $g(x,n)$ door

$$\begin{cases} g(x,0)= x! \\ g(0,n')= g(1,n). \\ g(x',n')= g(g(x,n'),n) \end{cases}$$

Deze functie is niet primitief recursief.

36. In de calculus van de elementaire rekenkunde (§ 27) moeten de recursieformules voor een nieuw ingevoerde functie als nieuwe axioma's beschouwd worden. Het bewijs van niet-tegenstrijdigheid moet daarvoor opnieuw geleverd worden. De methode uit hoofdstuk V gaat nog, als de optelling ingevoerd is, maar niet meer na de invoering van de vermenigvuldiging.

GRONDSLAGEN DER WISKUNDE

Prof.Dr A. Heyting.

VII. Arithmetisering der metamathematica.

37. De methode der arithmetisering bestaat hierin, dat aan iedere tekenrij een nummer wordt toegewezen, zodat ieder metamathematisch probleem tot een rekenkundig probleem wordt teruggebracht. Als voorbeeld nemen wij een calculus C met de volgende tekens; onder ieder teken is het daaraan toegevoegde nummer gezet.

$\vee$, $\neg$, $\exists$, =, 0, ',
11, 13, 17, 19, 23, 29,

dingveranderlijken x_1, x_2, x_3, ...
5 , 5^2, 5^3, ...

uitspraakveranderlijken a_1, a_2, a_3, ...
7 , 7^2, 7^4, ...

relatieveranderlijken
met 1 lege plaats f_1^1, f_2^1, f_3^1, ...
7^3, 7^9, 7^{15}, ...

met 2 lege plaatsen f_1^2, f_2^2, f_3^2, ...
5^5, 7^{25}, 7^{35}, ... enz.

Tekens voor in te voeren arithmetische functies
φ_1^1, φ_2^1, φ_3^1, ...
11^2, 11^2, 11^4, ...
φ_1, φ_2^2, φ_3^2, ...
11^3, 11^9, 11^{15}, ... enz.

Zijn aan de tekenrijen P en Q de getallen p en q toegevoegd, dan is aan $P \vee Q$ het getal $2^{11}\,3^p\,5^q$, aan $\neg P$ het getal $2^{13}\,3^p$, aan $(\exists x_\lambda)P$ het getal $2^{17\cdot 5^{2(\lambda-1)}}3^p$, aan $P = Q$ het getal $2^{19}\,3^p\,5^q$, aan P' het getal $2^{29}\,3^p$ toegevoegd. Is verder aan de relatieveranderlijke f_λ^2 het getal r toegevoegd, dan is aan $f_\lambda^2(P,Q)$ het getal $2^r\,3^p\,5^q$ toegevoegd; analoog voor de andere relatieveranderlijken en voor de tekens voor arithmetische functies.

Voorbeeld. Aan de formule $x_2 = 0 \vee x_2 = x_3'$ is toegevoegd het getal

$$2^{11}\,3^{2^{19}3^{5^2}5^{23}}\,5^{2^{19}3^{5^2}5^{2^{29}3^{5^3}}}$$

Aan een reeks van tekenrijen P, Q, R,..., waaraan de getallen p,q,r,... zijn toegevoegd, wordt het getal $3^p\ 5^q\ 7^r$ ... toegevoegd.

Belangrijke opmerking. Is een getal gegeven, dan kan omgekeerd de tekenrij of de reeks tekenrijen, waaraan het eventueel is toegevoegd, daar weer uit teruggevonden worden.

38. Verdere beschrijving van de calculus.

Term. 0 is een term.

Iedere dingveranderlijke is een term. Een term, gevolgd door ' is een term. Een teken φ_k^ℓ, gevolgd door ℓ termen, is een term.

Formule.

1. Een uitspraakveranderlijke is een formule.
1a. Zijn P en Q termen, dan is P = Q een formule.
2. Een relatieveranderlijke, waarbij voor alle argumenten termen zijn ingevuld, is een formule.
3, 4 en 5 als in de relatierekening (blz. 6).

Axioma's. I. Alle axioma's van de relatierekening.

II. $x_1 = x_1$

$x_1 = x_2 \rightarrow (f_1(x_1) \rightarrow f_1(x_2))$

$x_1' = 0.$

$x_1' = x_2' \rightarrow x_1 = x_2.$

$[A \rightarrow B$ afkorting voor $\neg A \vee B].$

Het axioma van volledige inductie (blz. 12(8)).

Regels. I. Alle regels voor de relatierekening.

II. Aanvulling van regel Ia (blz. 6):

Een vrije dingveranderlijke mag overal waar zij voorkomt door dezelfde term vervangen worden, mits deze geen dingveranderlijke bevat, die elders gebonden voorkomt.

39. De volgende metamathematische begrippen gaan door de arithmetisatie in primitief recursieve functies over.

I. y is het nummer van een term P.

Voor het bewijs schrijven wij de termen, die bij de opbouw van P achtereenvolgens ontstaan, achter elkaar en vormen het nummer z van die reeks tekenrijen. De ontbinding in factoren van z moet nu de volgende eigenschappen hebben:

De laatste exponent is y.

Iedere exponent $(z)_i$ verkeert in één der gevallen: a/ $(z)_i = 23$. b/ $(z)_i$ is van de vorm 5^u. c/ Er is een vroegere exponent $(z)_j$, zodat $(z)_i = 2^{29}\ 3^{(z)_j}$. d/ Er zijn vroegere exponenten $(z)_j, (z)_k, \ldots$, zodat

$(z)_i = 2^v\, 3^{(z)_j}\, 5^{(z)_k} \ldots$, waarin v het nummer is van een φ-teken met het juiste aantal argumenten. Ieder van deze gevallen is gemakkelijk als recursieve relatie te herkennen.

II. y is het nummer van een formule.

Het bewijs gaat analoog.

III. y is het nummer van een axioma.

IVa. y is het nummer van de formule, die uit formule nummer z ontstaat, door dingveranderlijke nummer u te vervangen door term nummer v. $\left[\mathfrak{Sb}_1(y,z,u,v)\right]$.

Bewijs. Schrijf de termen en formules, die bij de opbouw van formule nummer z voorkomen, achter elkaar op; bepaal het nummer t van deze reeks tekenrijen. Vervang in elk van die tekenrijen dingveranderlijke nummer u door term nummer v; de nieuwe reeks tekenrijen heeft nummer s. Ontbind s en t in factoren; komt onder de exponenten in t, u voor, dan correspondeert daar mee v in s; overigens bestaan tussen de exponenten in s dezelfde betrekkingen als tussen die in t. Al deze eigenschappen worden door recursieve relaties gegeven.

IV. b,c. Analoge beschouwingen voor de regel I b,c.

V. y is het nummer van een afleiding voor formule nummer z.

Bewijs. Ontbind y in factoren. De laatste exponent moet z zijn. Voor de overige exponenten geldt:

of b) voor zeker $j<i$, u en v geldt $\mathfrak{Sb}_1((y)_i, (y)_j, u,v)$ of analoog met $\mathfrak{Sb}_2, \mathfrak{Sb}_3$.

of c) voor j, $k<i$ geldt $(y)_j = 2^{11}\, 3^{2^{13} 3^{(y)_k} 5^{(y)_i}}$

of d) $(y)_j = 2^{11}\, 3^{2^{13} 3^a 5^b}$ voor $j<i$, terwijl

$$(y)_i = 2^{11}\, 3^{2^{13} 3^{2^{17\cdot 5^c} 3^a} 5^b};$$

hier mag veranderlijke nummer 5^c niet in formule nummer b voorkomen. Dit alles geeft aanleiding tot recursieve relaties. Deze relatie stellen we voor door $R(y,z)$.

40. In $\mathfrak{Sb}_1(y,z,5,v)$, waarin v het nummer van het getal ξ is, is $y = \sigma(z,\xi)$ een recursieve functie van z en ξ.

Beschouw nu de formule $\neg R(y, \sigma(x_1,x_1))$; laat deze nummer α hebben.

Stel $G = \neg R(y, \sigma(\alpha,\alpha))$. G ontstaat uit formule nummer α, door daarin de veranderlijke nummer 5 door α te vervangen, dus G heeft het nummer $\sigma(\alpha,\alpha) = \beta$.

Stel nu, dat $\neg R(y,\beta)$ afleidbaar is; dan is G afleidbaar; is γ is het nummer van de afleiding, dan is $R(\gamma,\beta)$ juist, dus afleidbaar, in tegenspraak met $\neg R(y,\beta)$. Dus:

I. Is C contradictievrij, dan is $\neg R(y,\beta)$ niet afleidbaar.

Stel nu, dat $R(\delta,\beta)$ voor zeker getal δ afleidbaar was; dan was formule nummer β, dat is G, afleidbaar, dus ook $\neg R(y,\beta)$, wat een contradictie geeft. Dan:

II. Is C contradictievrij, dan is $R(\delta,\beta)$ voor geen getal afleidbaar; $\neg R(\delta,\beta)$ is voor iedere δ juist, dus afleidbaar.

Wij onderstellen nu, dat C ω-contradictievrij is, d.w.z. het is onmogelijk, dat tegelijk de formules $\neg(\forall x)\,A(x)$ en $A(\xi)$ voor ieder getal ξ afleidbaar zijn.

III. Is C ω-contradictievrij, dan is noch $(\forall y)\neg R(y,\beta)$, noch $\neg(\forall y)\neg R(y,\beta)$ afleidbaar.
(Stelling van Gödel).

41. Opmerkingen. 1. Rosser heeft een iets ingewikkelder formule $S(y)$ aangegeven, waarvoor geldt:

Is C ontradictievrij, dan is noch $(\forall y)S(y)$, noch $\neg(\forall y)S(y)$ afleidbaar.

2. De formule $\neg R(y,\beta)$ betekent bij interpretatie, dat formule nummer β, dat is diezelfde formule, niet afleidbaar is. De redenering van Gödel is dus een verscherping van de paradox van de leugenaar.

3. De door de formule $(\forall y)\neg R(y,\beta)$ geformaliseerde stelling is juist. Daar de redenering van Gödel geldig blijft bij uitbreiding van de calculus (mits $R(y,x)$ een recursieve functie blijft), zien wij, dat het niet mogelijk is, de gehele elementaire rekenkunde in een calculus samen te vatten.

42. Hulpstelling 1. Is formule nummer η afleidbaar uit formule nummer ξ, dan is ook de formule

$$(\exists x)\,R(x,\xi) \rightarrow (\exists x)\,R(x,\eta) \text{ afleidbaar.}$$

Bewijs. De formulereeks, die uit de reeksen nummer y en nummer z ontstaat door ze achter elkaar te zetten, heeft het nummer $\tau(y,z)$, waarin τ een recursieve functie is. Is y het nummer voor een afleiding van P en z dat voor een afleiding van Q uit P, dan is $\tau(y,z)$ het nummer voor een afleiding van Q.

"z is het nummer voor een afleiding van formule nummer q uit formule nummer p" is een recursieve relatie $S(z,p,q)$. (Bewijs analoog met § 39 V). De formule

$$R(y,p) \wedge S(z,p,q) \longrightarrow R(\tau(y,z),q)$$

is afleidbaar, dus ook

$$(\exists x)\ R(x,\xi) \wedge S(\zeta,\xi,\eta) \rightarrow (\exists x)\ R(x,q).$$

Maar als ζ het nummer is voor een afleiding van formule nummer η uit formule nummer ξ, dan is $S(\zeta,\xi,\eta)$ juist, dus afleidbaar.

43. Hulpstelling 2. De formule

$(\exists x)\ R(x, 2^{13}\ 3^{y}) \longrightarrow (\exists x)\ R(x, 2^{13}\ 3^{\sigma(y,z)})$ is afleidbaar.

Bewijs. Is $P(x_1)$ de formule nummer y, dan betekent het linkerlid: "$\neg P(x_1)$ is afleidbaar". Laat u het nummer van een afleiding voor $\neg P(x_1)$ zijn, dan is er een recursieve functie $\rho(u)$, zodat $\rho(u)$ het nummer is voor een afleiding van $P(\xi)$; "$P(\xi)$ is afleidbaar" is de betekenis van het rechterlid. Nu is

$$R(u, 2^{13}\ 3^{y}) \rightarrow R(\rho(u), 2^{13}\ 3^{\sigma(y,z)})$$

afleidbaar, dus ook de af te leiden formule.

44. Hulpstelling 3. Is $\varphi(x)$ een recursieve functie, dan is de formule

$$\varphi(z) = 0 \rightarrow (\exists y)\ R(y, \sigma(\xi, z))$$

afleidbaar; ξ is het nummer van $\varphi(x) = 0$.

Het bewijs hiervan geven wij niet.

45. Stelling van Gödel. Is C contradictievrij, dan is de formule $(\exists z)\ R(z,u) \longrightarrow \neg(\exists z) R(z, 2^{13} 3^{u})$, (1), die de contradictievrijheid van C uitdrukt, in C niet afleidbaar.

Bewijs. Stel dat formule (1) afleidbaar was. Laat γ het nummer zijn van $R(x_1,\beta)$ en $\delta = 2^{13}\ 3^{\gamma}$ dat van $\neg R(x_1,\beta)$. [β zie § 40].

Volgens hulpstelling 1 is nu

$$(\exists z)\ R(z,\beta) \rightarrow (\exists z)\ R(z,\delta)$$

afleidbaar, dus ook (hulpst. 2)

$$R(y,\beta) \rightarrow (\exists z)\ R(z, 2^{13}\ 3^{\sigma(\gamma,y)})$$

dus $\neg(\exists z)\ R(z, 2^{13}\ 3^{\sigma(\gamma,y)}) \longrightarrow \neg R(y,\beta)$ (2)

Verder is afleidbaar volgens hulpst. 3:

$$R(y,\beta) \rightarrow (\exists z)\ R(z, \sigma(\gamma,y))$$

en volgens de ondersteldе afleidbaarheid van (1)

$$R(y,\beta) \rightarrow \neg(\exists z)\ R(z, 2^{13}\ 3^{\sigma(\gamma,y)}) \qquad (3)$$

Uit (3) en (2) krijgt men $R(y,\beta) \rightarrow \neg R(y,\beta)$, dus $\neg R(y,\beta)$, in strijd met § 40 I.