STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-007

Kromming

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J. Haantjes

1950

Voordracht door Prof. Dr J. Haantjes in de serie
<u>Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.</u>

K R O M M I N G .

In de wiskunde ziet men telkens weer, dat men van bekende systemen bepaalde grondeigenschappen abstraheert en dan nagaat welke eigenschappen er in het zo verkregen nieuwe systeem overblijven. Op deze wijze kan men uit de euclidische ruimte, de ruimte, die het meest aansluit bij onze ruimtevoorstelling, door afstand te doen van bepaalde begrippen komen tot andere ruimten.

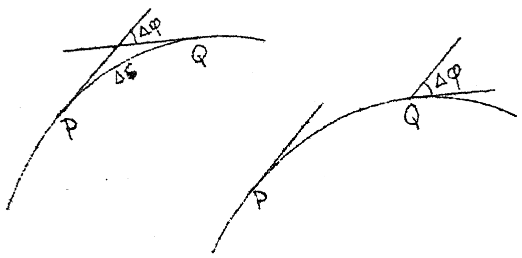
Steeds doet zich dan hier bij de vraag voor in hoeverre bepaalde begrippen blijven bestaan. Voor zover ze blijven is het dikwijls nodig de definities een weinig te veranderen. Blijft een bepaald begrip niet bestaan, dan zoekt men veelal naar een nieuw begrip dat enigszins in staat is in de theorie de rol van het eerste over te nemen.

In 't volgende zullen we dit nader illustreren met het begrip kromming, dat in de differentiaalmeetkunde zo'n grote rol speelt.

I. Kromming van een kromme.

A. Euclidische ruimte.

De kromming ρ van een kromme in het punt P.



Definitie 1[a]. $\rho = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$.
$\Delta\varphi$ is de hoek tussen de raaklijn in $P(s)$ en $Q(s+\Delta s)$.
1[b]. Trek door Q een lijn // raaklijn in P. Men vindt dan bij Q ook weer de hoek $\Delta\varphi$.

De kromming is dus in zekere zin te beschouwen als een maat voor de afwijking van de kromme in P van een rechte (karakteristieke eigenschap van de rechte: kromme met een constante richting). $\rho = 0 \leftrightarrow$ rechte.

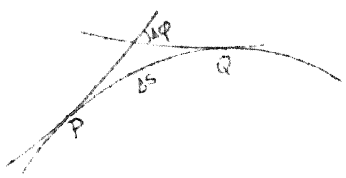
2. ρ is de kromming = (straal)$^{-1}$ van de cirkel, die in P raakt aan de kromme en daar de "beste aansluiting" geeft met de kromme. Wat onder de beste aansluiting wordt verstaan definieert men dan analytisch.

B. 1[e] uitbreiding. Kromme op een oppervlak in R_3.

Het oppervlak willen we zien als een zelfstandige ruimte. Hiermede is het volgende bedoeld. Door de ligging in R_3 bestaat op het oppervlak het lengte-begrip en het hoekbegrip. Na de vaststelling van dit begrip ziet men nu verder uitdrukkelijk af van de verdere eigenschappen, die men uit de ligging in de R_3 zou kunnen afleiden. We aanvaarden dan ook alleen begrippen, die gebaseerd zijn op dit lengte- en hoekbegrip.

Het euclidische vlak is van deze oppervlakken een bijzonder geval.

De geodeten (= krommen van minimale afstand) nemen de rol over van de rechten. Voor kromming van een kromme ligt de volgende definitie voor de hand.



1^a. De hoek tussen de rakende geodeten in P en Q zij $\Delta\varphi$.

$$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

1^b. Een richting in P kan men naar Q overbrengen door af te spreken, dat deze in Q dezelfde hoek zal maken met de geodeet PQ . Is de hoek tussen de overgebrachte richting en de kromme $\Delta\psi$, dan is $\rho = \lim \frac{\Delta\psi}{\Delta s}$.

2. Geen definitie van de vorm 2. $\rho = 0 \leftrightarrow$ geodeet.

Voor ruimte~~x~~ van Riemann van hogere dimensie wordt een definitie gekozen, die aansluit bij 1^b.

C. 2^e uitbreiding. Metrische ruimten.

Uit de gegeven definities is duidelijk, dat het afstandsbegrip een belangrijke rol speelt. Laten we daarom eens een ruimte bekijken waarin men uitsluitend van een afstandsbegrip uitgaat; de z.g. metrische ruimten.

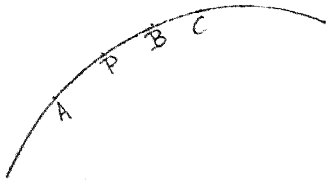
Een verzameling van elementen (punten) heet metrische ruimte indien aan elk paar p, q een getal $pq = qp \geq 0$ (notatie ook d_{pq}) is toegevoegd waarbij: a) $pq = 0 \leftrightarrow p = q$

b) $pq + qr \geq pr$

limietbegrip $p_i \to p$ indien $p_i p \to 0$.

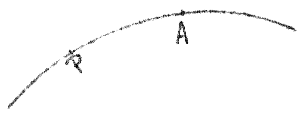
Ook een ruimte van Riemann is een metrische ruimte (bijzonder geval).

Voor het begrip kromming is een nieuwe definitie nodig, daar geen der definities bruikbaar is. Hier volgen 2 definities



3 . P, A, B, C punten van de kromme d_{AB} , d_{AC} , d_{BC} zijn 3 afstanden, die wegens b) in het eucl. vlak een driehoek bepalen. Laat ρ_{ABC} de kromming van de omgeschreven cirkel zijn. Kromming in P :

$$\rho = \lim \rho_{ABC} \text{ (voor A, B en C} \to \text{P)}$$



4 . (alleen voor rectificeerbare krommen).

$$\rho = \lim_{A \to P} \sqrt{4! \, \frac{s - d_{PA}}{s^3}} \qquad s = \text{bg}\ AP$$

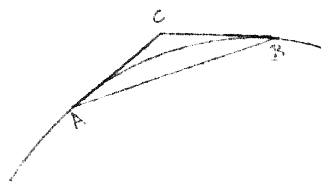
D. <u>Een uitbreiding van een ander soort affiene ruimte.</u>

Deze ontstaat uit de euclidische ruimte door af te zien van bepaalde begrippen, zoals afstand en hoekbegrip. Wat blijft is b.v.: "evenwijdigheid", midden van een segment, enz. We beschouwen affiene ruimten met handhaving van het begrip volume. Analytisch: de meetkunde van de groep van de lineaire transformaties met de det. + 1.

Deze uitbreiding is van een ander karakter dan de vorige (het plat vlak is een bijzondere Riemann-ruimte).

Als we hier weer zoeken naar een begrip kromming, dan behoeven we niet de eis te stellen, dat de definitie het begrip kromming in de euclidische ruimte als bijzonder geval bevat.

We zoeken weer naar een "maat" voor de afwijking van een rechte. Geen der reeds genoemde definities is bruikbaar, daar in allen van het begrip afstand wordt gebruik gemaakt. Beschouw eens een kromme



met de raaklijnen in 2 punten A en B. Laat f_{AB} de oppervlakte zijn van Δ ABC.

<u>Kromming van $\mathcal{K}$ t.o.v. een vast punt O .</u>

<u>Definitie:</u>

$$k = \lim_{B \to A} \frac{\sqrt[3]{f_{AB}}}{\text{opp}\ ABO}$$

Deze kromming geeft weer in zekere zin een maat voor de afwijking van een rechte, die echter afhankelijk is van de keuze van het punt O . Pas dan vindt men een invariant van de kromme alleen indien men op affien invariante wijze bij het punt A een punt O weet te bepalen. Men kan dit doen door gebruik te maken van de affiennormaal. Voor het punt O neemt men nu de limiet van het snijpunt van de normaal in A met die in B, als B → A. De bovenstaande formule voert dan tot een affiene invariant van de kromme, die men gewoonlijk <u>de kromming</u> van K in het punt A noemt.

Betekenis van k = 0. We kunnen niet meer hopen, dat k = 0 betekent dat de kromme een rechte is, daar het bovengenoemde proces voor een rechte onuitvoerbaar is (geen affiennormaal). Het nul zijn wordt nl. niet veroorzaakt door het sterker nul worden van de teller, maar het minder sterk nul worden van de noemer. k = 0 $\longleftrightarrow$ een parabool.

II. Kromming van een oppervlak.

Beschouw eerst een oppervlak in R_3 . Het blijkt dat de krommingen van vlakke doorsneden door de normaal een maximum en een minimum hebben. Het product van deze beide krommingen in P noemt men de totale kromming k in P van het oppervlak. Het blijkt verder dat voor k een uitdrukking gevonden kan worden in grootheden, die bepaald zijn door het lengtebegrip op oppervlak, d.w.z. k is grootheid van het oppervlak als zelfstandige ruimte opgevat in de zin onder I B bedoeld. Het moet dan echter ook mogelijk zijn een definitie te geven die slechts gebruik maakt van elementen, die alleen gebaseerd zijn op het lengtebegrip op het oppervlak.

Een mogelijke definitie is de volgende.

Beschouw de kromme, die de m.p. is van de punten die een geodetische afstand r hebben tot P . Laat de lengte van deze kromme $2\pi \mathcal{L}$ zijn. Dan is

$$k = \lim_{r \to 0} 3! \frac{r - \mathcal{L}}{r^3}$$

een vorm die veel overeenkomst vertoont met de definitie 4 onder I C.

Een definitie in de vorm overeenkomende met def. 3 onder I C is de volgende.

Beschouw 4 punten A B C D in een omgeving van P .De zes afstanden $d_{AB}, \dots, d_{CD}$ bepalen in een 2-dim ruimte van geschikt gekozen constante totale kromming ρ een tetraëder. Er bestaat steeds zo'n ρ en hoogstens twee. Noem ze k_{ABCD} . De totale kromming in P is nu k , indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een omgeving van P te vinden is, zodat voor elk viertal in die omgeving geldt, dat voor minstens één der waarden k_{ABCD} geldt

$$|k - k_{ABCD}| < \varepsilon$$

Deze beide definities zou men ook voor metrische ruimten kunnen gebruiken.

Voor hogere dimensies vindt men in de literatuur slechts analytische definities.