STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-018

Asymptotische ontwikkeling van gehele functies, die door machtreeksen gedefinieerd zijn

"Actualiteiten"

J.H.B. Kemperman

1950

Voordracht door J.H.B. Kemperman in de serie
Actualiteiten op 25 November 1950.

Asymptotische ontwikkeling van gehele functies, die door machtreeksen gedefinieerd zijn.

Zij $\mathcal{G}$ een niet-begrensde deelverzameling van het complexe z-vlak. Beschouw een tweetal (reële of complexe) functies f(z) en g(z) gedefinieerd voor elke waarde z van $\mathcal{G}$. De notatie

$$f(z) = O\{g(z)\}$$

geeft dan aan, dat de van z onafhankelijke positieve constante K zodanig kan worden gevonden, dat de ongelijkheid

$$|f(z)| < K\,|g(z)|$$

geldt voor elke waarde z uit $\mathcal{G}$ met voldoend grote absolute waarde. Verder zullen we met de notatie

$$f(z) = o\{g(z)\}$$

de eigenschap aanduiden, dat de voor positieve waarden r gedefinieerde (niet-negatieve) functie $\varepsilon(r)$ zodanig kan worden gevonden, dat voldaan is aan

$$\lim_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$$

en

$$|f(z)| \leqslant \varepsilon(|z|)\,|g(z)|$$

voor elke waarde z uit $\mathcal{G}$ met voldoend grote absolute waarde.

We beschouwen nu de gehele functie

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1+\beta)} \tag{1}$$

waarin α en β complexe constanten voorstellen met $|\arg\alpha|<\frac{\pi}{2}$. Het is bekend (v.g.l. Wright (1940) blz. 437) dat voor $\mathcal{G}$ als het complexe z-vlak en voor elk natuurlijk getal N geldt

$$\psi(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_k{}' e^{Z_k} Z_k^{-\beta} - \sum_{n=1}^{N}\frac{z^{-n}}{\Gamma(-\alpha n+1+\beta)} + O\{z^{-N-1}\} \tag{2}$$

Hierin is $Z_k = z^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left(\frac{2\pi k i}{\alpha}\right)$ en wordt voor de eerste som in het rechterlid van (2) de sommatie uitgestrekt over de gehele waarden k met $|\arg Z_k| \leqslant \pi$. Formule (2) stelt ons in staat de waarde $\psi(z)$ nauwkeurig te berekenen voor het geval dat $|z|$ zeer groot is.

Opmerkende dat geldt $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)}$

stellen we ons nu de vraag in hoeverre het in het algemeen mogelijk is de functie

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(\alpha n+\beta)\, z^{n}$$

asymptotisch uit te drukken in de functie

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\, z^{n}$$

In dit verband noemen we de volgende door Wright (1940) bewezen generalisatie van een stelling van Watson (1913).

<u>Theorema 1.</u> We beschouwen in het $w = u+iv$ - vlak een rechterhalfvlak H, dat begrensd wordt door een verticale rechte L, die de bestaanbare as snijdt in de negatieve niet gehele waarde h. Zij $g(w)$ een in H eenwaardige en analytische functie met

$$(3) \qquad g(w) = O\left\{\frac{1}{\Gamma(w+b)}\right\}$$

waarin b een reële of complexe constante voorstelt. We stellen

$$(4) \qquad F(z) = \sum_{n>h} g(n)\, z^{n}$$

waarin de sommatie wordt uitgestrekt over de gehele waarden $n > h$. Zij verder $\alpha = Re^{i\theta}$ een complexe constant met $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ en stel

$$(5) \qquad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(\alpha n)\, z^{n}.$$

Wanneer p een geheel getal $\geqslant 0$ voorstelt, dan geldt voor

$$(6) \qquad |\arg z^{\frac{1}{\alpha}}| \leqslant \eta_p \pi$$

met

$$(7) \qquad \eta_p = \frac{1}{2} + \frac{\cos\theta}{\sigma} - \left|(2p+1)\frac{\cos\theta}{\sigma} - 1\right|$$

dat

$$(8) \qquad \mathcal{G}(z) = -\sum_{n=1}^{j} g(-\alpha n)\, z^{-n} + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-p}^{p} F(Z_k) + O\left\{|z^{\frac{1}{\alpha}}|^{h}\right\}$$

waarin

$$j = \left[\frac{-h}{\sigma\cos\theta}\right] \text{ en } Z_k = (ze^{2\pi ki})^{\frac{1}{\alpha}}$$

<u>Opmerking</u>. Voor elk geheel getal m geldt

$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}(ze^{2\pi mi})$ en $\arg(ze^{2\pi mi})^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\cos\theta}{\sigma}\, 2m\pi + \arg z^{\frac{1}{\alpha}}$. Onder de voorwaarden van theorema 1 geldt dus in de sector

$$|\arg z^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\cos\theta}{\sigma}\, 2\pi m| \leqslant \eta_p \pi$$

de formule

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{j} g(-\sigma n)\, z^{-n} + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-p+m}^{p+m} F(Z_k) + O\left\{|z^{\frac{1}{\alpha}}|^{h}\right\}.$$

De ongelijkheid (6) is dus alleen dan een beperking van de algemeenheid, wanneer geldt

$$\frac{\cos\theta}{\sigma} 2\pi > 2\eta_p\pi,$$

hetgeen wegens (7) aequivalent is met

$$\left|(2p+1)\frac{\cos\theta}{\sigma} - 1\right| > \frac{1}{2}.$$

Dit is het geval voor $\frac{\cos\theta}{\sigma} > \frac{3}{2}$, want dan hebben we (wegens $p \geqslant 0$)

$$(2p+1)\frac{\cos\theta}{\sigma} > (2p+1)\frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Het doel van dit rapport is de generalisatie van bovengenoemde stelling van Wright. Vooreerst zullen we het geval toelaten, dat de functie $g(w)$ analytisch is in H op eindig vele polen na. Verder zullen we de voorwaarden (3) en (6) door minder eisende voorwaarden vervangen. De bedoelde generalisatie luidt als volgt.

Theorema 2. We beschouwen in het $w = u + iv$ - vlak een rechterhalfvlak H, dat begrensd wordt door een verticale rechte L, die de bestaanbare as snijdt in de negatieve niet gehele waarde h. Zij C een in H gelegen Jordankromme, welke een op L gelegen beginpunt met het oneindige verbindt, zodanig dat voor elk punt w van C het deel van C tussen het beginpunt en w rectificeerbaar is. Verder nemen we aan, dat elke voldoend ver naar rechts gelegen verticaal de kromme C in precies in één punt snijdt en dat voor elk punt $w = u + iv$ op C geldt $|v| \leqslant p|u| + q$, waarin p en q geschikt gekozen positieve constanten voorstellen.

Zij $g(w)$ een in H eenwaardige en analytische functie op eindig vele polen na, die niet op L of C liggen. Voor de waarden $w = u + iv$, met $|w|$ voldoende groot, zij voldaan aan

(10) $|g(u+iv)| < K e^{l\pi|u| + m|v|}$

waarin K, l en m gegeven niet negatieve constanten zijn met

(11) $m < 1$.

Tenslotte veronderstellen we, dat de integraal

$$\int_C g(w) z^w \, dw,$$

welke voor de waarden $z \neq 0$ met $|z|$ voldoende klein convergeert en een analytische functie voorstelt, kan worden voortgezet tot een in de sector $|\arg z| \leqslant m\pi$ eenwaardige en analytische functie.

Bewering. Wanneer $\alpha = \sigma e^{i\theta}$ en $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ complexe getallen zijn met $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ en met $\lambda = \frac{h - \beta_1}{\sigma\cos\theta}$ als een niet geheel negatief getal dan stel machtreeks

(12) $\mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' g(\alpha n + \beta) z^n$

een gehele functie voor. Hierbij wordt aangenomen, dat in het rechterlid wordt gesommeerd over de gehele waarden $n \geqslant 0$ waarvoor $\alpha n + \beta$ geen pool is van $g(w)$. Zij verder k een even geheel getal $> \frac{m\sigma}{\cos\theta}$, zij ε een positief getal $< (k\frac{\cos\theta}{\sigma} - m)\pi$ en zij η een positief getal $< 2(1 - m)\pi$. Dan geldt voor alle waarden z met

(13) $$|\arg z^{\frac{1}{\alpha}}| \leq (k\frac{\cos\theta}{\sigma} - m)\pi - \varepsilon$$

dat

(14) $$G(z) = -\sum_{\lambda<n<0}{}' g(\alpha n+\beta)\, z^n + \frac{1}{\alpha}\sum_{\mu}{}_1 Z_\mu^{-\beta} F(Z_\mu) - \rho - \sum_{\mu}{}_1 \rho^{(1)}(Z_\mu) + \sum_{\mu}{}_2 \rho^{(2)}(Z_\mu) + O\{|z^{\frac{1}{\alpha}}|^{h-\beta}\}.$$

Hierin is

(15) $$Z_\mu = (z e^{2\pi i\mu})^{\frac{1}{\alpha}}$$

en verder

(16) $$F(z) = \sum_{n>h}{}' g(n) z^n$$

waarin de sommatie wordt uitgestrekt over de gehele waarden $n > h$, die niet samenvallen met een pool van $g(w)$. Analoog wordt in $\sum'_{\lambda<n<0}$ gesommeerd over de gehele waarden n met $\lambda < n < 0$, waarvoor $\alpha n + \beta$ geen pool van $g(w)$ is. Verder duidt $\sum_{\mu 1}$ resp $\sum_{\mu 2}$ de sommatie aan over de gehele waarden μ met $|\mu| \leq \frac{k-2}{2}$ waarvoor $|\arg Z_\mu| < m\pi + \eta$ resp. $|\arg Z_\mu| \geq m\pi + \eta$ geldt.

Vervolgens is ρ gelijk aan de som van de residuen van de functie

(17) $$\frac{\pi}{\alpha}\, g(w)\, \frac{e^{\pm(k-1)\pi i\frac{w-\beta}{\alpha}}}{\sin \pi\frac{w-\beta}{\alpha}}\, Z_0^{w-\beta}$$

(waarin het plus- of minteken genomen wordt al naar gelang w een boven of beneden C gelegen punt van H voorstelt) uitgestrekt over alle in H gelegen polen van $g(w)$.

De grootheid $\rho^{(1)}(Z)$ is gelijk aan de som van de residuen van de functie

(18) $$\frac{\pi}{\alpha}\, \frac{e^{\pm\pi i w}}{\sin \pi w}\, g(w)\, Z^{w-\beta}$$

(waarin het teken $\pm$ als boven is gekozen) uitgestrekt over de in H gelegen polen van $g(w)$.

Tenslotte is $\rho^{(2)}(Z)$ voor $\arg Z > 0$ (resp. $\arg Z < 0$) gelijk aan de som van de residuen van de functie $\frac{2\pi i}{\alpha}\, g(w)\, Z^{w-\beta}$ uitgestrekt over de boven (resp. beneden C) en in H gelegen polen van $g(w)$.

Gebruik makend van de formule van Stirling en van het volgende lemma, ziet men gemakkelijk in dat theorema 1 een byzonder geval is van theorema 2.

<u>Lemma</u>. Laten h en $\varepsilon > 0$ reële getallen zijn. Dan bestaat de van ε en h afhankelijke positieve constante K zodanig, dat de ongelijkheid

$$(19) \qquad \left|\frac{1}{\Gamma(u+iv)}\right| < K e^{(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)|v|}$$

geldt voor elk complex getal $w = u + iv$ met $u \geqslant h$.

<u>Bewijs</u> Zonder beperking der algemeenheid mogen we aannemen dat geldt $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Zij Λ de van beneden naar boven doorlopen weg in het complexe t - vlak, samengesteld uit de twee halfrechten $\arg(t - t_0) = \frac{\pm\pi}{2} + \varepsilon$. Hierin denken we het reele positieve getal t_0 zodanig groot gekozen, dat van elk punt t op Λ geldt $|t| \geqslant 1$. Verder merken we op dat voor t op Λ geldt $|\arg t| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Nu geldt de bekende formule

$$\frac{1}{\Gamma(w)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda e^t t^{-w}\,dt$$

waaruit volgt voor $u \geqslant h$

$$\left|\frac{1}{\Gamma(u+iv)}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Lambda \exp\left[v\arg t - u\log|t| + |t|\cos(\arg t)\right] d|t|$$

$$\leqslant \frac{e^{(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)|v|}}{2\pi}\int_\Lambda \exp\left[-h\log|t| + |t|\cos(\arg t)\right] d|t| .$$

Hieruit volgt de bewering, daar immers de laatstgenoemde integraal convergeert.

Voor het bewijs van theorema 2 maken we gebruik van een aantal hulpstellingen. Het bewijsschema is als volgt

$$\left.\begin{array}{r} \text{theorema 3} \rightarrow \text{theorema 4} \\ \text{theorema 5} \end{array}\right\} \text{theorema 2}$$

Vooreerst bewijzen we

<u>Theorema 3</u>. Zij S een in het w- vlak gelegen strook, begrensd door twee evenwijdige lijnen L en R, die een positieve hoek $\psi < \pi$ met de positieve tambare as maken en wier snijpunten met de bestaanbare as niet samenvallen met een geheel getal; hierbij ligt L links van R. Op de rand van en binnen S zij f(w) een eenwaardige en analytische functie afgezien van een eindig aantal polen, die geen van alle op de rand van S liggen. We veronderstellen, dat voor geschikt gekozen reele constanten $M > 0$ en m de ongelijkheid

$$(20) \qquad |f(u + iv)| < M e^{m\pi|v|}$$

geldt voor elke op de rand van en binnen S gelegen punt $w = u + iv$ met $|w|$ voldoende groot. Tenslotte wordt een punt op L met een punt op R verbonden door een geheel binnen S gelegen rectificeerbare Jordankromme Γ, die alle in S gelegen polen van f(w) vermijdt.

Onder deze voorwaarden heeft voor elk natuurlijk getal $k > m$ de som

$$\sum_n{}' (-1)^{kn} f(n),$$

uitgestrekt over de gehele in (het inwendige van) S gelegen, en niet met een pool van $f(w)$ samenvallende gehele getallen n, de waarde

$$(21) \quad \int_\Gamma \frac{\sin (k-1)\pi w}{\sin \pi w} f(w)dw - \sum_\varsigma r(s) + \int_R q(w)f(w)dw - $$
$$-\int_L q(w)f(w)dw.$$

Hierbij wordt de kromme Γ doorlopen van links naar rechts, de rechten R en L van beneden naar boven. Verder is

$$(22) \quad q(w) = \frac{1}{2i} \frac{\epsilon^{\pm (k-1)iw}}{\sin \pi w},$$

waarin het plus- of minteken genomen wordt al naar gelang w boven of beneden Γ ligt. Tenslotte wordt de som $\sum_\varsigma$ uitgestrekt over de in S gelegen polen ς van $f(w)$, waarbij $r(s)$ het residu van $2\pi i\, f(w)\, q(w)$ in voorstelt.

<u>Bewijs</u>. Wegens continuiteitsoverwegingen mag men zonder de algemeenheid te schaden aannemen, dat Γ geen gehele punten n bevat. De integrand in de eerste integraal van (21) is namelijk regulier in elk geheel punt n uit S, dat niet met een pool van $f(w)$ samenvalt.

Voor het bewijs brengen we in de strook S een horizontaal lijnstuk T aan, dat een punt van L met een punt van R verbindt, en dat hoger ligt dan elk punt w van Γ en ook hoger dan elke in S gelegen pool van $f(w)$. Beschouw de (positief omlopen) contour Λ, gevormd door Γ, T en de lijnstukken van L en R, die Γ en T verbinden. Volgens de residuenstelling is

$$\int_\Lambda q(w)\ f(w)\ dw$$

gelijk aan

$$\sum_n{}'_+ (-1)^{kn} f(n) + \sum_{\varsigma\,+} r(s),$$

in deze sommen komen alleen de boven Γ gelegen getallen n en ς in aanmerking en wordt $q(w)$ door (22) gedefinieerd. Wordt het horizontale lijnstuk T naar het oneindige verschoven, dan nadert zijn bijdrage tot nul, want op dat lijnstuk is voor zekere waarde $N > 0$

$$|q(u + iv)| \leq N e^{-k\pi|v|}$$

en dus wegens (20) en $k > m$

$$|q(w)\ f(w)| \leq MN e^{-(k-m)\pi|v|} \to 0 \text{ als } |v| \to \infty$$

Aldus vinden we dat

$$\frac{1}{2i}\int_\Gamma \frac{e^{(k-1)\pi i w}}{\sin \pi w} f(w)dw + \int_{R_+} q(w)\, f(w)\, dw - \int_{L_+} q(w)\, f(w)\, dw,$$

waarbij alleen over de boven Γ gelegen gedeelten van R en L geintegreerd wordt, gelijk is aan

$$\sum_{n+}' (-1)^{kn} f(n) + \sum_{s+} r(s)$$

Een analoge redenereing, toegepast op het beneden Γ gelegen gedeelte van de strook S, leert dat

$$-\frac{1}{2i}\int_{\Gamma} \frac{e^{-(k-1)\pi i w}}{\sin \pi w} f(w)\,dw + \int_{R-} q(w) f(w)\,dw - \int_{L-} q(w) f(w)\,dw$$

gelijk is aan

$$\sum_{n-}' (-1)^{kn} f(n) + \sum_{s-} r(s)\,;$$

optelling levert het gevraagde resultaat.
We bewijzen nu
Theorema 4. Zij H een in het $w = u + iv$ vlak gelegen rechterhalfvlak, begrensd door de rechte L, die de bestaanbare as in de negatieve niet gehele waarde h snijdt en met de positieve bestaanbare as een positieve hoek $\psi < \pi$ maakt.

Zij C een in H gelegen Jordankromme, die een op L gelegen beginpunt met het oneindige verbindt, zodanig dat voor elk punt w op C het deel tussen het beginpunt en w rectificeerbaar is. Verder veronderstellen we, dat iedere voldoend ver naar rechts gelegen met L evenwijdige lijn R de kromme C in precies één punt snijdt. Tenslotte nemen we aan dat elk op C gelegen punt $w = x + re^{i\psi}$ (x en r bestaanbaar) met w voldoende groot de verhouding $\frac{r}{x}$ begrensd is.

Op de rand van en binnen H zij g(w) analytisch, afgezien van een eindig aantal polen, die geen van alle op C of op de rand L van H liggen. Neem aan dat geldt voor de waarden $w = x + re^{i\psi}$ (x en r bestaanbaar; $x \geq h$) in H met voldoend grote absolute waarde

(23) $$|g(x + re^{i\psi})| \leq Ke^{l\pi x + m\pi|r|\sin\psi}$$

waarin K, l en m bestaanbare constanten voorstellen.

Tenslotte beschouwen we in het complexe z- vlak het gebied $\mathcal{G}$ bepaald door de ongelijkheid

(24) $$|(\cos\psi)\log|z| - (\sin\psi)\arg z| < (k-m)\pi\sin\psi - \varepsilon$$

waarin k een willekeurig geheel positief getal $> m$ voorstelt en waarin ε een willekeurig positief getal $< (k - m)\pi\sin\psi$ voorstelt (het punt z wordt niet tot $\mathcal{G}$ gerekend). Wij nemen aan, dat de integraal

(25) $$\mathcal{J}(z) = \int_C \frac{\sin (k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) z^w\, dw,$$

welke voor de waarden z uit $\mathcal{G}$ met $|z|$ voldoende klein convergeert en een analytische functie voorstelt, kan worden voortgezet tot een in $\mathcal{G}$ een-

waardige en analytische functie
$\mathcal{J}(z)$ (deze voorwaarde is voor $k = 1$ altijd vervuld).

Bewering. Uit (23) volgt onmiddellijk, dat de machtreeks

$$(26) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^{kn} g(n) z^n$$

(waarbij gesommeerd wordt over de gehele waarden $n \geqslant 0$, die niet met een pool van $g(w)$ samenvallen) voor $|z| < e^{-1\pi}$ convergeert. De bewering is vooreerst, dat de analytische functie $F(z)$, die door deze machtreeks wordt voorgesteld, overal in $\mathcal{G}$ eenwaardig en analytisch kan worden voortgezet.

Om het asymptotisch karakter van de funstie $F(z)$ in $\mathcal{G}$ van grote (z) te bepalen wij verder, dat $F(z)$ in $\mathcal{G}$ geschreven kan worden in de gedaante

$$(27) \quad \mathcal{J}(z) - \sum_{h<n<0}{}' (-1)^{kn} \; g(n) z^n - \sum_s r(s) + O(z^h).$$

De som $\sum_{h<n<0}'$ wordt uitgestrekt over de gehele waarden $>h$ en <0, die niet met een pool van $g(w)$ samenvallen. De som $\sum_s$ wordt uitgestrekt over de in H gelegen polen van $g(w)$, waarbij $r(s)$ het residu is in s van de functie $2\pi i \, g(w) q(w) z^w$; hierin is

$$(28) \quad q(w) = \frac{1}{2i} \; \frac{e^{\pm (k-1)\pi i w}}{\sin \pi w},$$

waarbij het plus- of minteken gebruikt wordt, al naar gelang w boven of beneden C ligt.

Bewijs Men heeft

$$\left| z^{x+re^{i\psi}} \right| = |z|^x \; \exp\left[r \left\{ (\cos\psi) \log|z| - (\sin\psi) \arg z \right\} \right] \leqslant$$
$$\leqslant |z|^x \exp\left[|r| \; \left\{ (k-m)\pi \sin\psi - \varepsilon \right\} \right]$$

voor elk punt z in het door (24) gedefinieerde gebied $\mathcal{G}$. De functie

$$f(w) = g(w) z^w$$

voldoet dus wegens (23) aan de ongelijkheid

$$(29) \quad |f(x+re^{i\psi})| \leqslant K|z|^x \quad e^{1\pi|x|} \quad \exp\left\{ |r| (k\pi \sin\psi - \varepsilon) \right\} \;;$$

hierin stelt z een willekeurig punt van $\mathcal{G}$ voor, terwijl $w = x + re^{i\psi}$ (waarin x en r reëel zijn) een punt is van het halfvlak H met voldoend grote absolute waarde. Door eventueel K door een grotere positieve constante te vervangen kunnen we beperken dat (29) ook geldt voor elk op L gelegen punt

$$w = h + re^{i\psi}$$

Zij N een positief geheel getal en zij R_N de met L evenwijdige lijn in het halfvlak H, die de bestaanbare as snijdt in het punt $N + \frac{1}{2}$.

Mits we N voldoende groot kiezen, zijn alle in het het halfvlak H gelegen polen van $g(w)$ gelegen in het binnengebied van de door L en R_N begrensde strook R_N, en snijdt R_N de kromme C in precies één punt. Het in S_N gelegen deel van C noemen we C_N. We passen nu theorema 3 toe met $S = S_N$, $\Gamma = C_N$ en $f(w) = g(w)z^w$, waarin z een punt van ϑ voorstelt. Voor de in S_N gelegen punten $w = x + re^{i\psi}$ is x begrensd. Wegens (29) hebben we dus voor elk punt $w = u + iv$ in S_N met voldoend grote absolute waarde

$$|f(u + iv)| < K_1 \exp\left\{(k\pi - \frac{\varepsilon}{\sin\psi})\,|v|\right\}$$

waarin K_1 een geschikt gekozen positief, van w onafhankelijk getal voorstelt. Aan de voorwaarden van theorema 3 is nu voldaan en uit de bewering van dit theorema volgt

$$(30)\quad \sum_{h<n<N+\frac{1}{2}}{}' (-1)^{kn} g(n)z^n = \int_{C_N} \frac{\sin (k-1)\pi w}{\sin\pi w} g(w)z^w\,dw - \sum_S r(s) + \int_{R_N} q(w)g(w)z^w dw - \int_L q(w)g(w)z^w dw.$$

Hierin wordt in het linkerlid gesommeerd over de gehele waarden $>h$ en $< N + \frac{1}{2}$ waarvoor $g(w)$ regulier is. Verder hebben $q(w)$ en $\sum_S r(s)$ de in de formulering van theorema 4 genoemde betekenis.

Zij δ een reeel getal met $0<\delta<\frac{1}{2}$ en zij H_δ het gebied, dat uit het halfvlak H ontstaat door de cirkelschijven $|w - n|<\delta$ weg te laten, waarin n de gehele getallen $\geq h$ doorloopt. Voor elk natuurlijk getal N is de rechte R_N bevat in H_δ. We denken bovendien δ zo klein gekozen, dat de rechte L in H_δ ligt (dit is altijd mogelijk omdat h niet geheel is). We gaan nu bewijzen, dat voor elk punt $w = re^{i} = u + iv$ in H

$$(31)\quad |q(w)| \leq K_2 e^{d\pi|x| - k\pi|v|}$$

geldt bij geschikt gekozen positieve constanten d en K_2.

Vooreerst merken we op, dat de positieve constante K_3 zodanig kan worden gevonden, dat voor elk punt $w = u + iv$ in H_δ voldaan is aan

$$(32)\quad \left|\frac{1}{\sin\pi(u + iv)}\right| < K_3 e^{-\pi|v|}$$

Omdat voor elk punt $w = x + re^{i\psi}$ op C met voldoend grote absolute waarde de verhouding $\frac{r}{x}$ begrensd is, bestaan de positieve getallen p en q met

$$|v| \leq p\,|x| + q$$

voor elk punt $w = u + iv = x + re^{i\psi}$ op C. Indien $w = u + iv = x + re^{i\psi}$ een punt van H_δ voorstelt met $|v| > p|x| + q$ dan ligt w boven C en boven de bestaanbare as of beneden C en beneden de bestaanbare as. Uit (32) en de definitie (28) van $q(w)$ volgt dan

$$|q(u + iv)| < \frac{1}{2} K_3 e^{-k\pi|v|}$$

Is daarentegen $w = u + iv = x + re^{i\psi}$ een punt van H_δ met $|v| \leqslant p|x| + q$ dan volgt wegens (28) en (32)

$$|q(w)| < K_3 e^{-\pi v} e^{(k-1)\pi|v|} = K_3 e^{-k\pi|v|} e^{2(k-1)\pi|v|} \leqslant$$

$$\leqslant K_3 e^{-k\pi|v|} e^{2(k-1)\pi(p|x| + q)}.$$

Hiermee is de bewering (31) bewezen voor de punten w van H_δ en in het byzonder dus ook voor de punten w van L en R_N.

Voor elk punt z van $\mathcal{G}$ volgt uit (29) en (31) door majorering van de integrand

$$(33) \quad \left| \int_{R_N} q(w)\, g(w) z^w dw \right| \leqslant KK_2 \left\{ |z| e^{(1 + d)\pi} \right\}^N + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon r} dr$$

en

$$(34) \quad \left| \int_L q(w) g(w) z^w dw \right| \leqslant |z|^h KK_2 \left\{ z\, e^{(1 + d)\pi} \right\}^h \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon r} dr .$$

Voor elke waarde z in $\mathcal{G}$ met $|z| < e^{-(1 + d)\pi}$ volgt uit (33)

$$\lim_{N \to \infty} \int_{R_N} q(w) z^w dw = 0,$$

Terwijl wegens (23) voor de zelfde waarden z de reeks

$$\sum_{n > h} (-1)^{kn} g(n) z^n$$

convergeert. Door in (30) de limietovergang $N \to \infty$ toe te passen volgt voor elke waarde z in $\mathcal{G}$ met $|z| < e^{-(1 + d)}$ dat de door (25) gedefinieerd integraal $\mathcal{J}(z)$ convergeert (en een analytische functie voorstelt) en verder dat

$$(35) \quad \sum_{n > h}{}' (-1)^{kn} g(n) z^n = \mathcal{J}(z) - \sum_{s} r(s) - R(z)$$

waarin

$$(36) \quad R(z) = \int_L q(w) g(w) z^w dw .$$

Wegens de majorering (34) is in $\mathcal{G}$ $R(z)$ een eenwaardige en analytische functie. Uit de voorwaarden van theorema 4 weten we dat de integraal $\mathcal{J}(z)$

kan worden voortgezet tot een in $\mathcal{G}$ eenwaardige en analytische functie. Het rechterlid van (35) levert dus een in $\mathcal{G}$ eenwaardige en reguliere voortzetting van de analytische functie die voor $0 < |z| < e^{-l\pi}$ wordt gegeven door

$$\sum_{n>\lambda}{}' (-1)^{kn} g(n) z^n = \sum_{\lambda<n<\upsilon}{}' (-1)^{kn} g(n) z^n + F(z)$$

Voor elke waarde z in $\mathcal{G}$ geldt dus

$$F(z) = - \sum_{\lambda<n<\upsilon}{}' (-1)^{kn} g(n) z^n + \mathcal{J}(z) - \sum_{s} r(s) - R(z)$$

Wegens (36) en (34) volgt nu de bewering van theorema 4.

Tenslotte bewijzen we ')

Theorema 5. Zij H een in het $w = u + iv$ - vlak gelegen rechterhalfvlak begrensd door de verticale rechte L. Zij C een in H gelegen Jordankromme welke een op L gelegen beginpunt α met het oneindige verbindt. Neem aan dat voor elk punt w van C het deel van C tussen α en w rectificeerbaar is, en dat elke voldoend ver naar rechts gelegen verticale rechte R de kromme C in precies één punt snijdt. Laat verder gelden voor elk punt $w = u + iv$ van C

$$|v| \leqslant p|u| + q,$$

waarin p en q geschikt gekozen positieve constanten voorstellen.

Op de rand van en binnen H zij g(w) een éénwaardige en analytische functie op eindig vele polen na, die niet op L of C liggen. Voor de waarden $w = u + iv$ in H met $|w|$ voldoende groot gelde de ongelijkheid

$$(37) \quad |g(u + iv)| < K\, e^{l\pi|u| + m\pi|v|}$$

waarin K, l en m gegeven niet negatieve constanten zijn.

Bewering. Voor de complexe waarden z met $|z|$ voldoende klein en $|\arg z| > m\pi$ convergeert de integraal

$$(38) \quad \mathcal{J}(z) = \int_C g(w) z^w dw$$

en stelt aldaar een eenwaardige en analytische functie voor. Deze functoe kan worden voortgezet tot een in de "sector" $|\arg z| > m\pi$ eenwaardige en analytische functie $\mathcal{J}(z)$. Voor elk paar positieve constanten ε en ω met $\omega > m\pi + \varepsilon$ geldt in het gebied $m\pi + \varepsilon < |\arg z| < \omega$

$$(39) \quad \mathcal{J}(z) = \sum_{s}{}' r(s) + O(z^h).$$

') Theorema 5 ontleen ik aan Prof. J.G. van der Corput zie "Toepassing van de theorie der complexe veranderlijken", Stelling 2 (Syllabus bij het college asymptotische ontwikkeling, Maart 1950)

Hierin stelt h het snijpunt voor van L met de reële as. Verder wordt voor arg z $\gg$ m (resp. arg z $\ll$ -m) de som $\sum r(s)$ uitgestrekt over de in H gelegen polen s van g(w) boven C (resp. beneden C), waarbij r (s) het residu is van de functie $2\pi i\, g(w)z^w$ in s.

Bewijs. Voor het bewijs beperken we ons tot het geval, waarin arg z > > mπ+ε , daar het bewijs voor arg z< - mπ-ε geheel analoog verloopt. Uit (37) volgt voor een willekeurige waarde z en voor elke waarde w = = u + iv met $|w|$ voldoende groot

(40) $\quad |g(u + iv)z^{u+iv}| < K|z|^u\, e^{l_1 \pi |u|}\, e^{m\pi|v| - v \arg z}$.

We zullen nu bewijzen, dat de (van z en w onafhankelijke) positieve constanten K_1 en l_1 bestaan met

(41) $\quad |g(u + iv)z^{u + iv}| < K_1 |z|^u\, e^{l_1 \pi u}\, e^{(m\pi - \arg z)|v|}$ voor elke waarde z met $|\arg z| < \omega$ en voor elke in H en boven C gelegen waarde w = u+iv met voldoend grote modulus.

Vooreerst volgt uit de gegevens van theorema 5, dat voor elk punt w= u + iv op C geldt $|v| \leqslant p|u| + q$. Elk boven C gelegen punt w=u+iv in H voldoet dus aan de ongelijkheid $v \geqslant -p|u| - q$. Indien dit punt bovendien beneden de bestaanbare as ligt (dus $v = -|v|$), dan hebben we voor $|\arg z| < \omega$

$$e^{-v \arg z} = e^{-|v| \arg z}\, e^{-2v \arg z}$$
$$\leqslant e^{-v \arg z}\, e^{2(p|u|+q)\omega}$$

Aan de andere kant geldt voor elk punt w = u + iv op of boven de bestaanbare as

$$e^{-v \arg z} = e^{-|v| \arg z}$$

en in verband met (40) volgt nu de bewering (41). Door eventueel K_1 door een grotere constante te vervangen, kan men zorgen dat de ongelijkheid (41) geldt voor elke waarde z met $|\arg z| < \omega$ en voor elk boven C en op L gelegen punt w = u + iv.

Zij R een voldoend ver naar rechts gelegen verticaal in H, zodanig dat alle in H gelegen polen van g(w) liggen in de door L en R begrensde strook S, dat verder de kromme C door R in precies één punt wordt gesneden en dat, tenslotte, de ongelijkheid (41) geldt voor elk punt w = u + iv op R. Beschouw nu een horizontaal interval T, dat L en R verbindt, en dat hoger ligt dan elk in S gelegen pool van g(w) en hoger dan elk in S gelegen punt w van C. Laat $\mathcal{O}$ het deelgebied van S voorstellen, dat begrensd wordt door een rand $\mathcal{L}$ bestaande uit het interval T, het in S gelegen deel van C en verder uit de aansluitende intervallen op L en R. Toepassing van de residuenstelling op $\mathcal{O}$ geeft

(42) $\int\limits_{\mathcal{L}} g(w)z^w dw = \sum\limits_{S}{}' r(s)$

waarin voor arg $z > m\pi$ het rechterlid juist de in de formulering van theorema 5 genoemde beteekenis heeft. Wordt nu het lijnstük T naar het oneindige verschoven, dan volgt voor arg $z > m\pi$ uit (40) dat zijn bijdrage tot het linkerlid van (42) naar nul gaat. Formule (42) gaat door deze limietovergang over in

(43) $$\int_{\alpha}^{\beta} g(w)z^w dw - \int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} g(w)z^w dw + \int_{\beta}^{\beta+i\infty} g(w)z^w dw = \sum_{S}{}' r(s),$$

waarin de eerste integraal van het linkerlid wordt uitgestrekt over het in S gelegen deel van C. Tevens blijkt uit (40), dat (voor arg $z > m\pi$) de beide overige integralen afzonderlijk convergent zijn.

Voor elke waarde z met $m\pi + \varepsilon < \arg z < \omega$ gelden wegens (41) de ongelijkheden

(44) $$\left| \int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} g(w)z^w dw \right| < K_1 |z|^a \, e^{l_1 \pi |a|} \int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} e^{-\varepsilon|v|} d|u+iv|$$

en

(45) $$\left| \int_{\beta}^{\beta+i\infty} g(w)z^w dw \right| < K_1 |z|^b \, e^{l_1 \pi |b|} \int_{\beta}^{\beta+i\infty} e^{-\varepsilon|v|} d|u + iv|$$

waarin a resp. b het reële deel van α resp. β voorstelt. Uit (45) volgt voor elke waarde z met $m\pi + \varepsilon < \arg z < \omega$ en $|z| < e^{-l_1 \pi}$

(46) $$\lim_{b \to \infty} \int_{\beta}^{\beta+i\infty} g(w)z^w dw = 0,$$

welke limietovergang zelfs gelijkmatig geldt als we bovendien eisen $|z| \leq \theta e^{-l_1 \pi}$ met θ als een positieve constante < 1. Door de limietovergang $b = \mathrm{Re}\,(\beta) \to \infty$ op (43) toe te passen volgt vooreerst dat de integraal

$$\mathcal{J}(z) = \int_{C} g(w)z^w dw$$

voor $m\pi + \varepsilon < \arg z < \omega$ en $|z| < e^{-l_1 \pi}$ convergeert en aldaar een eenwaardige en analytische functie voorstelt. Verder volgt voor de zelfde waarden z

(47) $$\mathcal{J}(z) = \sum_{S}{}' r(s) - \int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} g(w)z^w dw \, .$$

Wegens de majorering (44) is de integraal in het rechterlid van (47) in de sector $m\pi + \varepsilon < \arg z < \omega$ een eenwaardige en analytische functie. Het rechterlid van (47) levert dus een eenwaardige en analytische voortzetting van $\mathcal{J}(z)$ in de gehele sector $m\pi + \varepsilon < \arg z < \omega$

Uit (47) en (44) volgt de bewering (39). q.e.d.

Bewijs van theorema 2. Zij voldoen aan de voorwaarden van theorema 2. Zij H' het rechterhalfvlak gelegen in het $w' = u' + iv'$ - vlak, dat ontstaat uit het rechterhalfvlak H in het $w = u + iv$ - vlak door de transformatie

(48) $\quad w = \alpha w' + \beta \qquad$ ofwel $w' = \dfrac{w - \beta}{\alpha}$

Dan wordt H' aan de linker zijde begrensd door een rechte L', die met de positieve reële as een hoek $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ maakt (wegens $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ is $0 < \psi < \pi$) en de reële as snijdt in een zeker punt λ. Wegens

$$h = \mathrm{Re}\,(\alpha\lambda + \beta) = \alpha_1 \lambda + \beta_1$$

hebben we

$$\lambda = \frac{h - \beta_1}{\alpha_1}$$

(met $\alpha_1 = \sigma \cos\theta$) (we hebben verondersteld, dat λ een niet geheel negatief getal is).

Zij verder C' de in H' gelegen Jordankromme, die voor de transformatie (48) het beeld is van de gegeven in H gelegen Jordankromme C. De functie

(49) $\quad h(w') = g(\alpha w' + \beta) = g(w)$

is in H' een eenwaardige en analytische functie op eindig vele polen na die niet op L' of C' zijn gelegen.

De integraal

$$\mathcal{J}(z) = \int_C g(w) z^w dw$$

convergeert voor de waarden $z \neq 0$ met $|z|$ voldoende klein en stelt aldaar een analytische functie voor. Uit de voorwaarden van theorema 2 volgt, dat deze functie kan worden voortgezet tot een eenwaardige en analytische functie $\mathcal{J}(z)$ in de sector $|\arg z| \leq m\pi$. Door toepassing van theorema 5 volgt, dat dezelfde integraal kan worden voortgezet tot een eenwaardige en analytische functie in het gebied $|\arg z| > m\pi$. Samenvattend, vinden we dat de integraal $\mathcal{J}(z)$ kan worden voortgezet tot een voor elke waarde $z = |z| e^{i \arg z}$ (met $|z| \neq 0$) eenwaardige en analytische functie (eigenlijk moeten we spreken van een eenwaardige en analytische functie op het Riemann oppervlak van $\ln z$). Wegens de transformatie (48) volgt dat elk der integralen

$$\int_{C'} g(\alpha w' + \beta) z^{w'} dw' \quad \text{en} \quad \int_{C'} \frac{\sin (j-1)\pi w'}{\sin \pi w'} g(\alpha w' + \beta) dw'$$

(met j als een geheel getal), welke convergeert voor de waarden $z \neq 0$ met $|z|$ voldoende klein, kan worden voortgezet tot een voor elke waarde $z = |z| e^{i \arg z}$ (met $z \neq 0$) eenwaardige en analytische functie.

Tenslotte hebben we wegens (10) voor elke waarde

$w' = x' + r' e^{i\psi} = x' + r' e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$ (x' en r' reëel) in H' met voldoend grote absolute waarde

$$|h(x' + r'e^{i\psi})| = |g(\sigma e^{i\theta}(x' + r'e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}) + \beta| = g(\sigma e^{i\theta}x' + i\sigma r' + \beta) <$$
$$< K \exp\{l\pi|\sigma x'\cos\theta + \beta_1| + m\pi|x'\sigma\sin\theta + \sigma r' + \beta_2|\}$$

en dus

(50) $$|h(x' + r'e^{i\psi})| < K_1 e^{l_1\pi|x'| + m_1\pi|r'|\sin\psi}$$

met

$$K_1 = K e^{l\pi|\beta_1| + m\pi|\beta_2|}, \quad l_1 = \sigma(l\cos\theta + m|\sin\theta|) \text{ en } m_1 = \frac{m\sigma}{\cos\theta}$$

We passen nu theorema 4 toe voor het geval dat de in de formulering van theorema 4 voorkomende verzamelingen en grootheden $H, L, C, \psi, g(w), K, l$ en m in volgorde worden vervangen door $H', L', C', \frac{\pi}{2} - \theta$, K_1, l_1 en m_1 en waarbij verder k een willekeurig even geheel getal $> m_1 = \frac{m\sigma}{\cos\theta}$ voorstelt en $\sigma\varepsilon$ een positief getal $< (k - m_1)\pi\cos\theta$ voorstelt (dus $\varepsilon < (\frac{k\cos}{\sigma} - m)\pi$). Aan de hand van de gemaakte opmerkingen controlleert men nu gemakkelijk, dat aan alle voorwaarden van theorema 4 is voldaan. Zij $\mathcal{G}$ het gebied gedefinieerd door

$$|(\cos\psi)\log|z| - (\sin\psi)\arg z| < (k - m_1)\pi\sin\psi - \sigma\varepsilon.$$

Wegens $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ en $z = \sigma e^{i\theta}$ is deze ongelijkheid aequivalent met

(51) $$|\arg z^{\frac{1}{\alpha}}| < (k\frac{\cos\theta}{\sigma} - m)\pi - \varepsilon.$$

Uit de bewering van theorema 4 volgt nu vooreerst dat de door analytische functie $\mathcal{G}(z)$, die voor de waarden z uit $\mathcal{G}$ met $|z|$ voldoende klein wordt gedefinieerd door de machtreeks

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' g(\alpha n + \beta) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' h(n)z^n,$$

kan worden voortgezet tot een in het hele gebied $\mathcal{G}$ eenwaardige en analytische functie. Daar $\mathcal{G}(z)$ regulier is voor $z = 0$, en daar tenslotte het natuurlijk getal k willekeurig groot kan worden gekozen, volgt dat $\mathcal{G}(z)$ een gehele functie is. Uit de bewering van theorema 4 volgt verder voor elke waarde z in $\mathcal{G}$

(52) $$\mathcal{G}(z) = -\sum_{\lambda < n < 0}{}' g(\alpha n + \beta)z^n + \int_{C'} \frac{\sin(k-1)\pi w'}{\sin\pi w'} g(\alpha w' + \beta) z^{w'} dw'$$
$$- \rho - \mathcal{O}(|z|^{\lambda}).$$

Hierin is de grootheid ρ gelijk aan de som van de residuen van de functie

$$\frac{\pi e^{\pm(k-1)\pi i w'}}{\sin\pi w'} g(\alpha w' + \beta)$$

(met het plus- of minteken al naar gelang w' een punt van H' is boven of beneden C') uitgestrekt over de in H' gelegen polen van de functie $g(\alpha w' + \beta)$. Door toepassing van transformatie (48) volgt dat ρ juist de betekenis heeft genoemd in de formulering van theorema 5.

Wegens

$$|z| = |(z^{\frac{1}{\alpha}})^{\lambda}| = |z^{\frac{1}{\alpha}}|^{\sigma\cos\theta} \exp(-\sigma\sin\theta \arg z^{\frac{1}{\alpha}})$$

en $\lambda = \frac{h - \beta_1}{\sigma\cos\theta}$ volgt voor de waarden z uit het door (51) gedefinieerde gebied $\mathcal{G}$

(53) $$\mathcal{O}(|z|^{\lambda}) = \mathcal{O}(|z^{\frac{1}{\alpha}}|^{h-\beta_1}).$$

We beschouwen nu de in het rechterlid van (52) optredende integraal

(54) $$\mathcal{J}(z) = \int_{C'} \frac{\sin(k-1)\pi w'}{\sin\pi w'} g(\alpha w'+\beta) z^{w'} dw'$$

Daar k een even natuurlijk getal is hebben we

$$\frac{\sin(k-1)\pi w'}{\sin\pi w'} = \sum_{\mu=\frac{-k+2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} e^{2\pi i \mu w'}$$

en dus volgt uit (54)

(55) $$\mathcal{J}(z) = \sum_{\mu=-\frac{k-2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} \mathcal{J}_{\mu}(z)$$

met

$$\mathcal{J}_{\mu}(z) = \int_{C'} g(\alpha w'+\beta)(z\, e^{2\pi i \mu})^{w'} dw'$$

Passen we transformatie (48) toe, dan volgt

(56) $$\mathcal{J}_{\mu}(z) = \frac{1}{\alpha} Z_{\mu}^{-\beta} \int_{C} g(w) Z_{\mu}^{w} dw$$

waarin $Z_{\mu} = (z\, e^{2\pi\mu i})$ Zij $\mathcal{J}(z)$ de op het Riemannoppervlak van ln z eenwaardige en analytische functie, die voor $|z|$ voldoende klein wordt gedefinieerd door de integraal

(57) $$\mathcal{J}(z) = \int_{C} g(w) z^{w} dw$$

Dan volgt uit (55) en (56)

(58) $$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu=\frac{-k+2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} Z_{\mu}^{-\beta} \mathcal{J}(Z_{\mu}).$$

We bestuderen nu de integraal $\mathcal{J}(z)$. Zij η een willekeurig positief getal $< 2(1-m)\pi$ en zij ω een positief getal $> m\pi + \eta$. Door toepassing van theorema 5 volgt van het gebied $m\pi + \eta \leq |\arg z| \leq \omega$ dat

(59) $\mathcal{J}(z) = \alpha z^{\beta}\rho^{(2)}(z) + O(|z|^{h-\beta_1})$,
waarin $\rho^{(2)}(z)$ juist de betekenis heeft, genoemd in de formulering van theorema 2. We beschouwen vervolgens de waarden z met

(60) $|\arg z| < m\pi + \vartheta = (2-m)\pi - \tau$
met $\tau = 2(1-m)\pi - \vartheta$ als een positief getal.
Als we in de formulering van theorema 4 de grootheden ψ, k en ε in volgorde vervangen door $\frac{\pi}{2}$, 2 en τ dan is aan alle voorwaarden van theorema 4 voldaan. Uit de bewering van theorema 4 volgt voor het door (60) gedefinieerde gebied

(61) $\mathcal{J}(z) = F(z) - \alpha z^{\beta}\rho^{(1)}(z) + O(|z|^{h-\beta_1})$
waarin F(z) en $\rho^{(1)}(z)$ de in de formulering van theorema 2 genoemde betekenis hebben.

Opmerkende dat voor de waarden z uit het door (51) gedefinieerde gebied $\mathcal{G}$ geldt

$$|Z_\mu| = |(z\, e^{2\pi i\mu})^{\frac{1}{\alpha}}| = |z^{\frac{1}{\alpha}}| \exp(2\pi\mu\frac{\sin\theta}{\sigma}) = O(|z^{\frac{1}{\alpha}}|)$$

volgt uit (52), (53), (54), (58), (59) en (61) de bewering (14) van theorema 2 voor de waarden z uit het door (51) gedefinieerde gebied $\mathcal{G}$.

Literatuur: **Watson**, G.N. (1913). A class of integral functions defined by Taylor's series. Trans. Camb. Phil. Soc. **22**, 15-37.

Wright, E. M. (1940) The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. Phil. Trans. Roy. Soc. London A **238**, 423-451.