STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 007

Voordracht in de serie Actualiteiten

J. Berghuis

28 april 1951

Berekening van de coefficienten van de asymptotische ontwikkeling van de functie $\Omega(z) = \sum_{0}^{\infty} n \dfrac{z^n}{\prod_{1}^{\mu} \Gamma(\alpha_i n+\beta_i)}$

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Rapport Z.W. 1951 - 007.
MR 6.

Voordracht door J. Berghuis in de serie
Actualiteiten op 28 April 1951.

Berekening van de coefficienten van de asymptotische ontwikkeling van de functie $\Omega(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\prod_1^\mu \Gamma(\alpha_i n+\beta_i)}$.

Inleiding.

Het doel van dit rapport is de asymptotische ontwikkeling van de gehele functie

$$(0,0)\quad \Omega(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\prod_1^\mu \Gamma(\alpha_i n+\beta_i)} \qquad \mu>0,\quad \mathrm{Re}(\alpha_i)>0 \quad (i=1,\dots,m)$$

af te leiden en wel speciaal de coefficienten dezer ontwikkeling.

Daartoe begin ik met de functie

$$(0,1)\quad \psi(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)} \qquad \mathrm{Re}(\alpha_1)>0$$

asymptotisch voor te stellen met behulp van de residuenrekening en probeer dan hetzelfde te doen met de functie

$$(0,2)\quad \chi(z)=\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)\Gamma(\alpha_2 n+\beta_2)} \qquad \mathrm{Re}(\alpha_i)>0$$

hetwelk lukt, dank zij het door Wright gepubliceerde artikel "The asymptotic expansion of the generalized Besselfunction", Proceedings of the London Mathematical Society, Ser 2, 38 (257-270).

De coefficienten zijn te berekenen, zelfs is dit in principe nog mogelijk voor de functie $\Omega(z)$, maar practisch is het ondoenlijk.

Het bezwaar dezer methode is dat zij niet symmetrisch is in de α_i's of de β_i's, terwijl het duidelijk is dat dit met de coefficienten wel het geval moet zijn. De symmetrische weg geef ik dan tenslotte aan; deze bestaat uit toepassing van de bekende ontwikkeling van Stirling voor $\Gamma(x)$, $|x|$ voldoende groot en het korte tijd geleden verschenen rapport van J.H.B. Kemperman "Asymptotische ontwikkeling van gehele functies, die door machtreeksen gedefinieerd zijn". De stellingen uit dit rapport maken het mogelijk, aangezien zij functies van aanmerkelijk hogere orde toelaten dan de oorspronkelijke van W.B.Ford afkomstige stellingen (zie "The asymptotic Developments of Functions defined by MacLaurin-series).

1. De functie $\psi(z)$.

Stelling 1. Voor waarden van z met $|z|$ groot genoeg is de gehele functie $\psi(z)$ gelijk aan

$$(1,1)\qquad \sum_k{}' \frac{1}{\alpha_1} e^{Z_k} Z_k^{1-\beta_1} - \sum_1^N \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1 n)} + \xi(z)$$

waarbij

(1,2)
1e $Z_k = (ze^{2\pi ki})^{1/\alpha_1}$

2e de sommatie $\sum_k{}'$ slechts genomen wordt over die gehele waarden van k waarvoor $|\arg Z_k| \leq \pi$

en 3e $\xi(z)$ een functie is welke gelijk is $O(z^{-N})$.

(Zie E.M. Wright, 1940. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. Phil.Trans.Royal Society, London A 238 (423-451).

Bewijs: In het volgende stel ik $\alpha_1 = \alpha_1' + i\alpha_1''$ en is C een contour, beginnend en eindigend in $-\infty$, het nulpunt positief omlopend. Verder is de negatieve reële as een snede.

Gebruikmakend van de integraalvoorstelling

$$(1,3)\qquad \frac{1}{\Gamma(w)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^u u^{-w} du ,$$

gaat $\psi(z)$ over in

$$(1,4)\qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty z^n \int_C e^u u^{-\alpha_1 n-\beta_1} du .$$

Men mag in (1,4) sommatie en integratie verwisselen, indien voldaan is aan

$$|z| \leq \theta\ |u^{\alpha_1}| = \theta |u|^{\alpha_1'} e^{-\alpha_1'' \arg u} \qquad (0 < \theta < 1)$$

voor elk punt u op C. Vervorm nu C zodanig dat de cirkel

$$|u| = \left[\theta^{-1} |z|\ e^{\pi\alpha_1''}\right]^{\frac{1}{\alpha_1'}}$$

geheel binnen C ligt en men vindt

$$(1,5)\qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^u \frac{u^{-\beta_1+\alpha_1}}{u^{\alpha_1}-z} du$$

De integrand is analytisch met uitzondering van u=0 en de punten u waarvoor geldt $u^{\alpha_1} = z$. Deze laatste liggen allen binnen C. Aangezien de negatief reële as een snede is, komen slechts die polen in aanmerking, waarbij

(1,6) $\quad \left|\arg\left(z^{1/\alpha_1} e^{k\frac{2\pi i}{\alpha_1}}\right)\right| \leq \pi \qquad$ k geheel

of

(1,7) $\quad \frac{1}{|\alpha_1|^2}\left|\alpha_1'(\arg z + k\,2\pi) - \alpha_1''\log|z|\right| \leq \pi$

Trek ik nu C op de negatief reële as samen, dan gaan de spiralen in het z-vlak:

(1,8) $\quad \alpha_1'\arg z - \alpha_1''|\log z| = \pi|\alpha_1| - \alpha' k\,2\pi$

en $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ k geheel

(1,9) $\quad \alpha_1'\arg z - \alpha_1''|\log z| = -\pi|\alpha_1| - \alpha' k\,2\pi$

een bijzondere rol spelen. Beperk z tot een spiraalvormig gebied S, ingesloten door een lijn van het type (10) en een van het type (11), gekenmerkt resp. door k en k', zodanig dat er geen andere spiralen in het binnengebied bevat zijn. De rand wordt meegerekend. Ligt z precies op de rand, dan breng ik de snede iets om de pool op de negatief bestaanbare as heen, en wel, indien z ligt op een spiraal van het type (10) er onder langs, anders er boven.

Na deze voorbereidingen trek ik C samen op een nieuwe weg D lopend op infinitesimale afstand van de snede en vind:

(1,10) $\quad \psi(z) = \frac{1}{\alpha_1}\sum_k{}' e^{z_k} z_k^{1-\beta_1} + \frac{1}{2\pi i}\int_D e^u \frac{u^{-\beta_1+\alpha_1}}{u^{\alpha_1}-z}\,du.$

Verder gebruikend:

$$\frac{1}{u^{\alpha_1}-z} = -\sum_1^N \frac{u^{(n-1)\alpha_1}}{z^n} - \frac{u^{N\alpha_1}}{z^N}\,\frac{1}{z-u^{\alpha_1}}$$

gaat de integraal in (1,10) over in

(1,11) $\quad -\sum_1^N \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1 n)} - \frac{z^{-N}}{2\pi i}\int_D e^u \frac{u^{-\beta_1+(N+1)\alpha_1}}{u^{\alpha_1}-z}\,du\,.$

De stelling is dus bewezen, zodra aangetoond is, dat voor $z \in S$ en $|z| \to \infty$ de integraal in (1,11) gelijkmatig tot nul nadert.

Ik voer daartoe in

(1,12) $\quad \operatorname{Arg} z = \frac{1}{|\alpha_1|^2}\left[\alpha_1'\arg z - \alpha_1''\log|z|\right]$

en het gebied S kan dan aangegeven worden als volgt

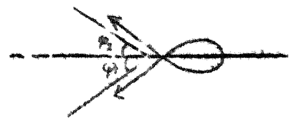
(1,13) $\quad -\pi . - \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2}.k.2\pi \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi - \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2}k'\,2\pi.$

Verder geldt voor alle waarden welke voldoen aan $u = z^{1/\alpha_1}$

(1,14) $$\arg z^{1/\alpha_1} = \mathrm{Arg}\, z - \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2} \,.\, 2\pi m \qquad (m \text{ geheel})$$

Zij tevens een ε gekozen: $0 < \varepsilon \leq \mathrm{Min}(\frac{\pi}{4}, \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2}\pi)$.

Dan kan ik voor elke waarde van Arg z uit S de weg D omvormen tot D', lopende als aangegeven in de figuur op het Riemannse oppervlak van de integrand, zodanig dat D' asymptotisch raakt aan 2 lijnen, wier hoeken met de negatief bestaanbare as φ_1 en φ_2 voldoen aan de betrekkingen



$$\left.\begin{array}{l} |\varphi_i| < \pi/4 \\ \left|\varphi_i - \mathrm{Arg}\, z + \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2} 2\pi m\right| \geq \varepsilon \end{array}\right\} \quad i = 1,2 .$$

Wegens $\mathrm{Arg}\, u^{\alpha_1} = \arg u$, correspondeert nu met $\arg u = \text{const}$ een spiraal $\mathrm{Arg}\, u^{\alpha_1} = \text{const}$. De voerstralen, welke overgaan in een zelfde spiraal hebben dus een argument gelijk aan $\arg u + \frac{\alpha_1'}{|\alpha_1|^2} 2\pi m$ met m geheel. Voor u op D' en Arg z constant liggen u^{α_1} en z op spiralen met een verschil in Arg $\geq \varepsilon$ of voor $|z| > R$ geldt, dat $|u^{\alpha_1} - z| > R'$ met R' en R positief, zodanig, dat R' onbegrensd aangroeit met R. Dus voor $z \in S$ nadert de integraal in (1,11) gelijkmatig tot nul en is de stelling bewezen.

<u>Opmerking</u>: Deze ontwikkeling is een speciaal geval van theorema 1 van Kemperman.

Kies nl. $g(w) = \frac{1}{\Gamma(w+\beta_1)}$

dan is

$$F(z) = \sum_{n>h} g(n) z^n = e^z z^{1-\beta_1} + O\{|z|^h\}$$

Voor Re $(\alpha_1) > 0$ en een p geheel ≥ 0 is er een η_p zodanig dat voor $|\arg z^{1/\alpha_1}| < \eta_p \pi$ de functie

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(\alpha_1 n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)} \quad \text{gelijk is aan}$$

$$\frac{1}{\alpha_1} \sum_{k=-p}^{p} F(Z_k) - \sum_{n=1}^{j} g(-\alpha_1 n) z^{-n} + O\{|z^{1/\alpha_1}|^h\} ,$$

waarin $j = \left[\frac{-h}{\sigma\cos\theta}\right]$.

Ik krijg dus weer de ontwikkeling (1,1).

. De functie $\chi(z)$.

Met behulp van de zadelpuntsmethode bewees Wright in zijn in de inleiding vermelde publicatie:

Voor $\lambda > 0$ kan

$$(2,1) \qquad G(\lambda,\mu,z)= \sum_{0}^{\infty} {}^{n} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\lambda n+\mu)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C u^{-\mu} \exp(u+ \frac{z}{u^\lambda})du$$

asymptotisch voorgesteld worden door

$$(2,2) \qquad \sum_m{}' e^{Z_m} Z_m^{-\mu+\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{0}^{N} {}^{k} c_k(\lambda,\mu) Z_m^{-k} + \mathcal{O}(\frac{1}{|z|^{M+1}}) + \mathcal{O}(z^{-n}) \right. ,$$

waarin $Z_m = (\sigma z\, e^{2\pi m i})^{\frac{1}{\lambda+1}}$,

$$\sigma = \frac{(\lambda+1)^{\lambda+1}}{\lambda^\lambda} ,$$

en de sommatie $\sum_m{}'$ geschiedt over alle gehele m, welke voldoen aan de eis $|\arg \quad Z_m| \leq \pi/2$.

De coefficienten $c_k(\lambda,\mu)$ zijn als volgt te berekenen: Zij d_k de coefficient van v^{2k} in de ontwikkeling naar opklimmende machten van van de functie

$$(2,3) \qquad \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\pi\sqrt{2}} \; \frac{1}{(1-v)^\mu \left\{ 1+\frac{\lambda+2}{3}v+\frac{(\lambda+2)(\lambda+3)}{3.4}v^2+\ldots \right\}^{k+\frac{1}{2}}} ,$$

dan is

$$(2,4) \qquad c_k(\lambda,\mu)= \frac{(-1)^k}{\sqrt{\lambda+1}} \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^{\mu-\frac{1}{2}+k} \left(\frac{2}{\lambda+1}\right)^k d_k .$$

Nu is het mogelijk het volgende aan te tonen:

<u>Theorema</u>: De gehele functie $\chi(z)$ is voor waarden van z met $|z|$ voldoende groot te schrijven als

$$(2,5) \qquad \frac{\tau^{\beta_1 - 1/\alpha_1}}{\alpha_1} \sum_m{}' \; e^{Z_m} Z_m^{\frac{3}{2}-\beta_1-\sigma_1} \left\{ \sum_{0}^{N-1} {}^{k} c_k Z_m^{-k} + \mathcal{O}(Z_m^{-N}) \right\} -$$

$$- \sum_{1}^{N-1} {}^{n} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1 n)\Gamma(\beta_2-\alpha_2 n)} + \mathcal{O}(z^{-N}) ,$$

waarin

$$(2,6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Z_m = \left\{ \dfrac{(\alpha_1+\alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}\;\alpha_2^{\alpha_2}} \; z\; e^{2\pi m i} \right\}^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} , \\[2ex] c_k = c_k(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \beta_2 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}[1-\beta_1]) , \qquad \text{en } \tau = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}\;\alpha_2^{\alpha_2}} . \end{array} \right.$$

Bewijs: Evenals in de vorige paragraaf kan ik schrijven:

$$(2,7)\qquad \chi(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{z^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_C e^u\, u^{-\alpha_2 n-\beta_2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^u\, u^{-\beta_2}\,\psi\left(\frac{z}{u^{\alpha_2}}\right) du$$

en wel omdat $\frac{z}{u^{\alpha_2}}$ begrensd is op C, dus $\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(z/u^{\alpha_2})^n}{\Gamma(\alpha_1 n+\beta_1)}$ gelijkmatig convergent en verwisseling van integratie en sommatie geoorloofd is.

De asymptotische ontwikkeling van $\psi(\mathfrak{z})$ is bekend:

$$(2,8)\qquad \psi(\mathfrak{z}) = \frac{1}{\alpha_1}\sum_k{}' \; e^{\mathfrak{z}_k}\, \mathfrak{z}_k^{1-\beta_1} - \sum_{1}^{N}{}_n \frac{\mathfrak{z}^{-n}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1 n)} + O(\mathfrak{z}^{-N-1}),$$

met

$$\mathfrak{z}_k = (\mathfrak{z}\, e^{2\pi k i})^{1/\alpha_1} .$$

Zij voorlopig $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ en $\alpha_2 < \alpha_1$. (Dit laatste is geen beperking). Kies 3 positieve getallen ε_1, ε_2 en ε_3, zodanig, dat

$$(2,9)\qquad \begin{aligned} &\alpha_2\varepsilon_2 < (\alpha_1+\alpha_2)\varepsilon_3 ,\\ &\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + (\alpha_1+\alpha_2)\varepsilon_3 < \pi(\alpha_1-\alpha_2). \end{aligned}$$

Nu verbuig ik de contour C zodanig, dat hij asymptotisch raakt aan twee lijnen, waarvan de een een hoek $\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2$ en de ander een hoek $-(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2)$ met de positief reele as maakt. Verder is op C aan $|\arg u| \leq \frac{\pi}{2}+\varepsilon_2$ voldaan.

(2,8) blijft gelden als gesommeerd wordt over de gehele waarden van k welke voldoen aan

$$(2,10)\qquad |\arg \mathfrak{z}_k| < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon_1 .$$

Ik beweer, dat bij substitutie van (2,8) in (2,7) de sommatie uitgestrekt mag worden over alle gehele waarden van k, welke voldoen aan

$$(2,11)\qquad \left|\frac{\arg z + 2\pi k}{\alpha_1+\alpha_2}\right| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon_3 .$$

Want zoals hieronder aangetoond zal worden, volgt uit (2,11) (2,10) en voor $\delta > 0$ en $|\arg \mathfrak{z}_k| \leq \frac{\pi}{2}+\delta$ is voldaan aan (2,11), zodat het asymptotisch gedrag van (2,8) bij substitutie in (2,7) niet gestoord zal worden.

Voor $\mathfrak{z} = \frac{z}{u^{\alpha_2}}$ geldt:

$$|\arg \mathfrak{z}_k| = \left| \frac{\arg \mathfrak{z} + 2\pi k}{\alpha_1} \right| = \left| \frac{\arg z - \alpha_2 \arg u + 2\pi k}{\alpha_1} \right| \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_3\right) +$$

$$+ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right) = \frac{1}{\alpha_1} \left[(\alpha_1 + 2\alpha_2) \frac{\pi}{2} + \alpha_2 \varepsilon_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\varepsilon_3 \right] < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon_1$$

volgens (2,9).

Is nu $\delta > 0$ en $|\arg \mathfrak{z}_k| \leq \frac{\pi}{2} + \delta$ dan schrijf ik,

$$\left| \frac{\arg z + 2\pi k}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| = \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| \cdot \left| \arg \mathfrak{z}_k + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \arg u \right|$$

$$\leq \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \left[\frac{\pi}{2} + \delta + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\right) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_1 + \delta + \alpha_2 \varepsilon_2)$$

$$\leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon_3,$$

vooropgezet, dat ik δ zo kan kiezen, dat

$$\alpha_1 \delta + \alpha_2 \varepsilon_2 \leq (\alpha_1 + \alpha_2)\, \varepsilon_3 ,$$

hetwelk in verband met (2,9) mogelijk moet zijn.

Stel nu

$$(2,12) \quad H_k = \frac{1}{2\pi i \alpha_1} (z\, e^{2\pi k i})^{\frac{1-\beta_1}{\alpha_1}} \int_C u^{-\beta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-\beta_1)} \exp\left\{ u + \frac{(z e^{2\pi k i})}{u^{\alpha_2/\alpha_1}} \right\} du$$

en

$$(2,13) \quad R = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^u\, u^{-\alpha_2}\, O\left(\frac{z^{-N}}{u^{-\alpha_2 N}} \right) du$$

dan vindt men door middel van (2,7) en (2,8):

$$(2,14) \qquad \chi(z) = \sum_k{}' H_k - \sum_{1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta_1 - \alpha_1 n)\Gamma(\beta_2 - \alpha_2 n)} + R ,$$

waarbij de sommatie $\sum_k{}'$ slechts genomen dient te worden over die gehele waarde van k waarvoor voldaan is aan

$$(2,15) \qquad \left| \frac{\arg z + 2\pi k}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon_3 .$$

Het is direct duidelijk dat de restterm R hoogstens van de orde z^{-N} is.

Om het asymptotische gedrag van (2,12) te bepalen, gebruik ik het boven aangehaalde (2,2).

Hierbij wordt gesommeerd over die gehele waarden van m, waarvoor de grootheid

$$\left[\tau\,(z\,e^{2\pi ki})^{1/\alpha_1}\;e^{2\pi mi}\right]^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

een argument in absolute waarde $\leq \pi/2$ heeft. Dit argument is gelijk aan

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left[\frac{\arg z+2\pi k}{\alpha_1}+2\pi m\right]=\frac{\arg z+2\pi k}{\alpha_1+\alpha_2}+2\pi m\,\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\;.$$

Wegens (2,15) en $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} > \frac{1}{2}$ komt alleen n = 0 in aanmerking.

Volgens Wright is dus

$$(2,16)\qquad H_k=\frac{1}{\alpha_1}\,(z\,e^{2\pi ki})^{\frac{1-\beta_1}{\alpha_1}}\quad G\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\beta_2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-\beta_1),(z\,e^{2\pi ki})^{1/\alpha_1}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha_1}(z\,e^{2\pi ki})^{\frac{1-\beta_1}{\alpha_1}}\left\{\exp Z_k\right\}\,Z_k^{\frac{1}{2}-\beta_2-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-\beta_1)}\left\{\sum_0^{N-1} c_n Z_K^{-n}+\mathcal{O}(Z_k^{-n})\right\},$$

waarin gesteld is

$$(2,17)\qquad Z_k=\left\{\tau\,z\,e^{2\pi ki}\right\}^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

(2,16) is gemakkelijk om te werken tot:

$$H_k=\frac{\tau^{\frac{\beta_1-1}{\alpha_1}}}{\alpha_1}\;e^{Z_k}\;Z_k^{\frac{3}{2}-\beta_1-\beta_2}\left\{\sum_0^{N-1} c_n\,Z_k^{-n}+\mathcal{O}(Z_k^{-n})\right\}$$

De coefficienten c_n worden gevonden door in (2,3) en (2,4) $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ en $\mu=\beta_2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1-\beta_1)$ te nemen.

Hiermede is het theorema bewezen voor α_1 en α_2 reeel groter dan nul. Merken wij op, dat de coefficienten c_k analytische functies zijn voor alle α_i-waarden, waarvoor geldt $\mathrm{Re}(\alpha_i)>0$, dan kunnen we dus de coefficienten $c_k(\lambda,\mu)$ analytisch voortzetten, zodanig dat de formules blijven gelden voor $\mathrm{Re}(\alpha_i)>0$.

Enige opmerkingen.

Schrijf ik de ontwikkeling (2,5) in de volgende vorm

$$(3,1)\qquad \chi(z)=\sum_0^{\infty} a_k\,e^{Z_m}\,Z_m^{\frac{3}{2}-\beta_1-\beta_2-k}-\sum_1^{N-1}\frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta_1-\alpha_1 n)\Gamma(\beta_2-\alpha_2 n)}+\mathcal{E}(z),$$

dan vind ik

$$(3,2)\qquad a_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(\alpha_1+\alpha_2)^{\beta_1+\beta_2-2}\,\alpha_1^{\frac{1}{2}-\beta_1}\,\alpha_2^{\frac{1}{2}-\beta_2},$$

$$a_1=-\frac{12\left[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_2\right]\left[\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1-\alpha_1\right]+(\alpha_2+2\alpha_1)(\alpha_1+2\alpha_2)}{24\sqrt{2\pi}}\,.\,(\alpha_1+\alpha_2)^{\beta_1+\beta_2-2}\,\alpha_1^{-\beta_1-\frac{1}{2}}\,\alpha_2^{-\beta_2-\frac{1}{2}}$$

welke coefficienten symmetrisch zijn in α_1 en α_2, β_1 en β_2.

Hierbij kan opgemerkt worden dat men gemakkelijk kan laten zien dat de a_k voor $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 1$, $\beta_2 = \mu + 1$ de coefficienten worden van de bekende asymptotische ontwikkeling van $I_\mu(2\sqrt{z}).(\sqrt{z})^{-\mu}$.

Men ziet echter dat de functie, waaruit zij gevormd worden, in het geheel niet symmetrisch is. Wel is waar is men in staat uit (2,5) numeriek meer ontwikkelingscoefficienten te berekenen, maar een groot nadeel is, dat om tot de asymptotische ontwikkeling van $\Omega(z)$ te komen, mem (m-1) maal een proces moet uitvoeren als in § 2 gedaan is en krijgt men (m-2) producten te maken van reeksen om de coefficienten te bepalen.

Dit is al gauw onhandelbaar. Daarom volg ik in het volgende hoofdstuk een weg mogelijk gemaakt door theorema 4 van het in de inleiding aangehaalde artikel van Kemperman.

De functie $\Omega(z)$.

Ten einde de functie $\Omega(z)$ te ontwikkelen, stel ik in theorema 4

$$\psi = \frac{\pi}{2}$$

C een rechte, beginnende in het punt $(-\beta-N)$ (N een natuurlijk getal) en een hoek $-\arg\alpha$ makend met de positief bestaanbare as en

$$g(w) = \frac{1}{\prod_1^\mu \Gamma(\alpha_i w + \beta_i)}$$

Uit het theorema volgt nu als k een even natuurlijk getal is:

$$(4,1) \qquad \sum_0^\infty \frac{z^n}{\prod_1^\mu \Gamma(\alpha_i n + \beta_i)} = \int_C \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) z^w dw - $$
$$- \sum_0^N \frac{z^{-n}}{\prod_1^\mu \Gamma(\beta_i - n\alpha_i)} + O(z^{-N}).$$

Behandel nu

$$(4,2) \qquad I(z) = \int_C \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) z^w\, dw$$

met behulp van

$$(4,3) \qquad \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w} = \sum_{j=-\frac{k-2}{2}}^{\frac{k-2}{2}} e^{2j\pi i w}$$

en

$$(4,4) \qquad \frac{1}{\prod_1^\mu \Gamma(\alpha_i w + \beta_i)} = A^w \left\{ \sum_0^s \frac{c_h}{\Gamma(\alpha w + \beta + h)} + \frac{\varepsilon(w,s)}{\Gamma(\alpha w + \beta + s + 1)} \right\}$$

waarin $|\delta(w,s)| < k$, k constante > 0. (Zie voor het laatste bijv. K.Hughes).

Dus:

$$(4,5)\qquad I(z)=\sum_{-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}{}_{j}\left\{\sum_{0}^{s}{}_{h}\; c_h \int_C \frac{(zAe^{2j\pi i})^w}{\Gamma(\alpha w+\beta+h)}\,dw + R_s(z)\right\},$$

waarin

$$(4,6)\qquad R_s(z)= \int_C \frac{(zAe^{2j\pi i})^w}{\Gamma(\alpha w+\beta+s+1)}\,dw.$$

Stel ik nu verder

$$(4,7)\qquad \alpha w+\beta+h=w'$$

$$(4,8)\qquad (z\,A\,e^{2j\pi i})^{1/k}=Z_j,$$

dan vind ik

$$\int_C \frac{(zAe^{2j\pi i})^w}{\Gamma(\alpha w+\beta+h)}\,dw = \int_{-N}^{\infty}\frac{Z_j^{w'-\beta-h}}{\Gamma(w')}\,dw' = e^{Z_j}\, Z_j^{1-\beta-h},$$

$$\text{en}\qquad R_s(z)=\int_{-N}^{\infty}\frac{Z_j^{w'-\beta-s-1}}{\Gamma(w')}\,\delta\!\left(\frac{w'-\beta-s-1}{\alpha},\,s\right)dw' \leqslant k\, e^{Z_j}\, Z_j^{-s-\beta}.$$

Er is dus bewezen:

$$(4,9)\qquad \Omega(z)=\sum{}_j'\left\{\sum_{0}^{s}{}_h\; c_h\, e^{Z_j}\, Z_j^{1-\beta-h}+R_s(z)\right\} - \sum_{0}^{N}{}_n \frac{z^{-n}}{\prod_{i}^{\mu}\Gamma(\beta_i-\alpha_i n)} + \mathcal{O}(z^{-N}),$$

$$(4,10)\qquad \text{waarbij}\quad R_s(z)=\mathcal{O}(e^{Z_j}\, Z_j^{-s-\beta}),$$

en de $\sum_j{}'$ slechts over die waarden van j genomen dient te worden, waarvoor $|\arg Z_j| < \pi$.

Rest nu nog de coefficienten c_h en de A, α en β te bepalen:

Neem aan beide zijden van het gelijkteken in (4,4) de logarithme en ontwikkel volgens Stirling. De termen van de orde w^{-3} nog meenemende, vind ik

$$(4,11)\qquad -\Big(\sum_{1}^{\mu}{}_i\,\alpha_i\Big)\, w\log w - w\Big\{\log\Big(\prod_{1}^{\mu}\alpha_i^{\alpha_i}\Big)-\sum_{1}^{\mu}{}_i\,\alpha_i\Big\} - \sum_{1}^{\mu}{}_i\,(\beta_i-\tfrac{1}{2})\log w$$
$$-\Big\{\frac{\mu}{2}\log 2\pi+\log\prod_{1}^{\mu}\alpha_i^{\beta_i-\frac{1}{2}}\Big\} - \frac{1}{w}\Big\{\sum_{1}^{\mu}{}_i\,\frac{6\beta_i(\beta_i-1)+1}{12\alpha_i}\Big\}$$
$$+\frac{1}{w^2}\Big\{\sum_{1}^{\mu}{}_i\,\frac{\beta_i^2(2\beta_i-3)+\beta_i}{12\alpha_i^2}\Big\} - \frac{1}{w^3}\Big\{\sum_{1}^{\mu}{}_i\,\frac{30\beta_i^3(\beta_i-2)+30\beta_i^2-1}{360\,\alpha_i^3}\Big\} + \ldots$$

$$= -\alpha w \log w - w\{\alpha \log\alpha - \log A - \alpha\} - \log w\{\beta - \tfrac{1}{2}\}$$

$$- \{\tfrac{1}{2} \log 2\pi - \log c_o + (\beta - \tfrac{1}{2})\log\alpha\} - \frac{1}{w}\left\{\frac{6\beta(\beta-1)+1}{12} + \frac{c_1/c_0}{\alpha}\right\}$$

$$+ \frac{1}{w^2}\left\{\frac{\beta^2(2\beta-3)+\beta}{12\alpha^2} - \frac{\beta c_1/c_o}{\alpha^2} - \frac{c_1^2/c_o^2}{2\alpha^2} + \frac{c_2/c}{\alpha^2}\right\}$$

$$- \frac{1}{w^3}\left\{\frac{30\beta^3(\beta-2)+30\beta^2-1}{360\alpha^3} - \frac{3\beta^2 c_1/c_o + 3\beta c_1^2/c_o^2 - 3c_1c_2/c_o^2 - c_1^3/c_o^3}{3\alpha^3} - \frac{c_3/c_o}{\alpha^3}\right\} + \ldots$$

De resultaten van gelijkstelling van de coefficienten van gelijke orde links en rechts zijn achtereenvolgens

(4,12) $$\alpha = \sum_1^{\mu} \alpha_i$$

(4,13) $$A = \frac{\alpha^{\alpha}}{\prod_1^{\mu} \alpha_i^{\alpha_i}} .$$

(4,14) $$\beta = \sum_1^{\mu} \beta_i - \frac{\mu-1}{2} .$$

(4,15) $$c_o = \frac{\alpha^{\beta-1/2} \prod_1^{\mu} \alpha_i^{1/2-\beta_i}}{(\sqrt{2\pi})^{\mu-1}} .$$

(4,16) $$\frac{c_1}{c_o} = \frac{6\beta(\beta-1)+1}{12} - \alpha \sum_1^{\mu} \frac{6\beta_i(\beta_i-1)+1}{12} .$$

(4,17) $$\frac{c_2}{c_o} = \alpha^2 \sum_1^{\mu} \frac{\beta_i^2(2\beta_i-3)+\beta_i}{12\alpha_i^2} - \frac{\beta^2(2\beta-3)+\beta}{12} + \beta\frac{c_1}{c_o} + \frac{c_1^2}{2c_o^2}$$

(4,18) $$\frac{c_3}{c_o} = \frac{30\beta^3(\beta-2)+30\beta^2-1}{360} - \alpha^3 \sum_1^{\mu} \frac{30\beta_i^3(\beta_i-2)+30\beta_i^2-1}{360\alpha_i^3} - \beta^2\frac{c_1}{c_o} +$$
$$+ (2\beta+1)\frac{c_2}{c_o} - \beta\frac{c_1^2}{c_o^2} - \frac{c_1^3}{3c_o^3} + \frac{c_1c_2}{c_o^2} .$$

Analytisch valt nog op te merken dat men voor $\mu = 2$ met behulp van (4,15) en (4,16) weer de waarden (3,2) terugkrijgt.

Numeriek zijn nu de eerste vier coefficienten gemakkelijk te berekenen. Heeft men meer nodig, dan behoeft men slechts van de reeksontwikkelingen meer termen mede te nemen om een relatie te krijgen, waarbij de h^e coefficient uitgedrukt wordt in de $(h-1)$ voorafgaande en de bekende coefficienten α_i, β_i, α en β.

Literatuur:

1. E.M. Wright, The asymptotic expansion of the generalized Bessel-function, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser 2, 38 (257-270).

2. W.B. Ford, The asymptotic Developments of Functions defined by MacLaurin-Series.

3. J.H.B. Kemperman, Asymptotische ontwikkeling van gehele functies, die door machtreeksen gedefinieerd zijn.

4. E.M. Wright, The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor-Series, Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London, no. 804, Vol. 239, p. 217-232, 1941.

5. H.K. Hughes, On a theorem of Newsom, Bulletin of the American Mathematical Soc. vol. 49, no. 4, p. 288-292, 1943.

6. H.K. Hughes, On the asymptotic expansions of entire functions defined by MacLaurin-Series, Bulletin of the Mathematical Soc., vol. 50, no. 6, p. 425-430, 1944.

7. H.K. Hughes, The asymptotic developments of a class of entire functions, Bulletin of the American Soc., vol. 51, no. 6, p. 456-461, 1945.