STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Avondcursus wiskunde 1950-1951;

Projectieve meetkunde, 1.

C.G. Lekkerkerker.

1951
~~1952~~

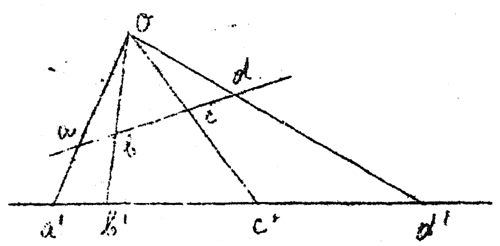
Avondcursus 1950/1951.

Projectieve Meetkunde

door
C.G.Lekkerkerker

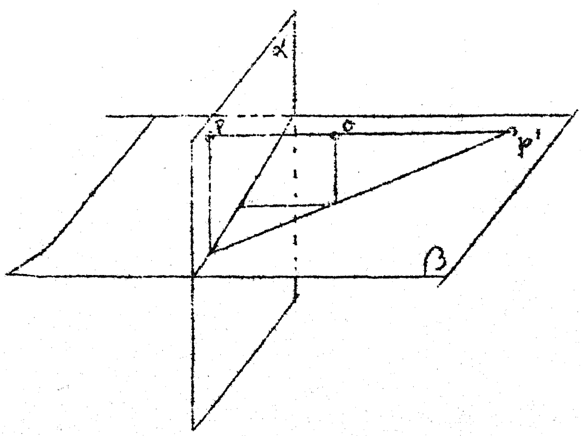
I. Inleiding.

In de gewone meetkunde van de ruimte treden begrippen op als punt, rechte, vlak, lengte, hoek, congruentie, enz. En we bestuderen eigenschappen daarvan en betrekkingen daartussen. Sommige eigenschappen en betrekkingen in een vlakke figuur blijven geldig bij projectie, b.v. vanuit een vast punt O buiten het vlak α van de figuur, op een ander vlak β. Voor andere is dit niet het geval. Dat deel nu van de meetkunde, waarin de bij projectie invariante eigenschappen worden behandeld, heet projectieve meetkunde. Zo is de eigenschap van een punt, op een bepaalde lijn te liggen, invariant. De eigenschap van een punt, het midden van een zeker lijnstuk te zijn, blijft in het algemeen niet behouden; algemener is voor drie punten a,b,c de uitdrukking afst.(a,b):afst.(a,c) niet invariant. Daarentegen is er, zoals we veel later zullen zien, in het geval van vier punten a,b,c,d op een rechte een uitdrukking in de onderlinge afstanden dier punten, die invariant is, en wel is:



$$\frac{\text{afst.}(a,c)}{\text{afst.}(a,d)} : \frac{\text{afst.}(b,c)}{\text{afst.}(b,d)} = \frac{\text{afst.}(a',c')}{\text{afst.}(a',d')} : \frac{\text{afst.}(b',c')}{\text{afst.}(b',d')} .$$

Congruentie van twee driehoeken gaat in het algemeen verloren, maar de eigenschap van een figuur een kegelsnede te zijn, blijft behouden, zoals zal blijken.



Beschouwen we eens die centrale projectie; in de tekening zijn gemakshalve voor α en β een verticaal en een horizontaal vlak genomen, en verder O vòòr α en boven β. Aan een punt p van α wordt op eenduidige wijze een punt p' van β toegevoegd. En omgekeerd is er bij een punt p' van β een punt p van α, waar het de projectie van is. Maar er zijn uitzonderingspunten: voor een zekere rechte S in α lope de projecterende lijnen <u>evenwijdig</u> aan β, zodat die rechte geen projectie heeft; om een dergelijke reden treedt een zekere rechte T in β niet als projectie op (ga dit alles na). De projectie vanuit O geeft dus wel, in het algemeen gesproken, een omkeerbaar eenduidige toevoeging tussen de punten van α en de punten van β, maar toch mankeert er iets aan.

Voor de behoeften van de projectieve meetkunde is het gewenst deze schoonheidsfout weg te werken. Dit kan door de nu volgende invoering van elementen in het oneindige. Evenwijdige rechten hebben dezelfde richting, evenwijdige vlakken dezelfde stelling. We beschouwen nu de richting van een rechte P als een nieuw punt, zeg p, van die rechte en de stelling van een vlak α als een nieuwe rechte, zeg A, in dat vlak. De nieuwe punten en rechten noemen we punten en rechten in het oneindige. Evenwijdige rechten gaan dan door hetzelfde punt in het oneindige, evenwijdige vlakken door dezelfde rechte in het oneindige. Is P evenwijdig aan of bevat in α, dan zeggen we dat p op A ligt. Van alle punten in het oneindige zullen we zeggen dat ze tezamen het oneindig verre vlak vormen, dat ook alle rechten in het oneindige bevat.

We gebruiken t.a.v. punten, rechten en vlakken de ene, uniforme term <u>incident</u> zijn (met) voor: liggen op, liggen in, bevat zijn in, gaan door. Dan kunnen we op de volgende manier zes stellingen formuleren, die in de met oneindig verre elementen aangevulde ruimte zonder uitzondering geldig zijn:

1) Twee verschillende punten zijn incident met één rechte

2) Een punt en een rechte, die niet incident zijn, bezitten één verbindingsvlak

3) Twee snijdende rechten liggen in één vlak

4) Twee verschillende in één vlak gelegen rechten snijden elkaar

5) Een rechte en een vlak, die niet incident zijn, hebben één snijpunt

6) Twee verschillende vlakken hebben één snijlijn.

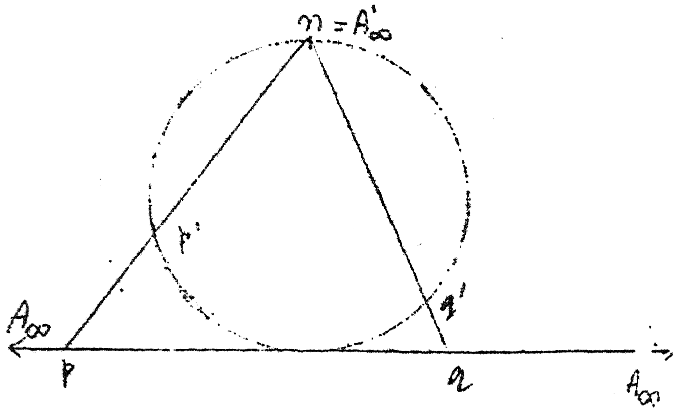
Ik geef het bewijs van 1) en 2); de rest doe men zelf.

Bewijs van 1). Voor eindige punten a en b is er niets te bewijzen. Is a eindig en b oneindig, dan is er een eindige rechte B, waarvan b het oneindig verre punt is. En de rechte door a evenwijdig aan B voldoet aan de vraag. Is zowel a als b oneindig, dan zijn er twee rechten A en B door a resp. b, die eindig zijn en verschillende richting hebben (omdat a en b verschillend zijn). Neem nu een vlak, evenwijdig aan A en B, en daarvan de rechte in 't oneindige. Die rechte is eenduidig bepaald.

Bewijs van 2). Zij a het punt, B de rechte. Het geval van eindige a en B is duidelijk. Is a oneindig en B eindig, dan is er een rechte A die eindig is en door a gaat; en deze rechte is niet evenwijdig aan B, want anders zou a op B liggen. Dus is er een eenduidig bepaald vlak door B evenwijdig aan A, en dat vlak voldoet aan de vraag. Is a eindig en B oneindig, dan is er een eindig vlak β, waarvan B de rechte in oneindige is; het vlak door a evenwijdig aan β moeten we hebben. Voor a en B oneindig krijgen we het oneindig verre vlak.

Om nu op onze centrale projectie terug te komen, we zien dat die een ondubbelzinnig omkeerbare toevoeging geeft tussen de punten van α en die van β . Er valt nog meer op te merken. We noemen de verzameling punten op een rechte een <u>puntenreeks</u>, en de verzameling rechten, die in een vlak liggen en door een punt gaan, een <u>stralenwaaier</u>. De centrale projectie vanuit O voert een rechte in α over in een rechte in β , en omgekeerd. Juist doordat we nu over oneindig verre elementen beschikken, gaat een puntenreeks over in een puntenreeks en omgekeerd; in 't algemeen zal een eindig punt van de ene puntenreeks corresponderen met het oneindig verre punt van de andere puntenreeks. Evenzo is er een omkeerbaar eenduidig verband tussen de stralenwaaiers in α en die in β . Eventueel is de z.g. drager van de ene puntenreeks, of de top van de ene stralenwaaier een element in 't oneindige.

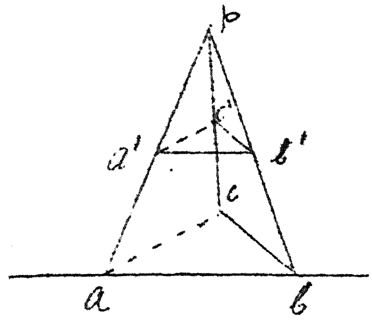
Voorlopig zullen we ons alleen met vlakke meetkunde bezighouden. Het met oneindig verre elementen - oneindig verre punten, die op de ene, oneindig verre rechte liggen - aangevulde platte vlak heet het <u>projectieve</u> vlak. Op één eigenaardigheid daarvan wijzen we nog. Een rechte heeft de structuur van een gesloten figuur. Men kan dit b.v. inzien door de puntenreeks op A te projecteren op een cirkel vanuit een punt n op de cirkelomtrek, zoals in de tekening aangegeven: rechte A horizontaal, n = hoogste punt. Met elk punt van de rechte correspondeert in één punt van de cirkelomtrek en omgekeerd; het oneindig verre punt van A vindt zijn beeld in n. Bij deze afbeelding blijft de afstand van twee punten niet hetzelfde; maar de opeenvolging van de punten op A wordt niet verstoord. En dit laatste wil zeggen dat de rechte, wat de onderlinge rangschikking van haar punten betreft, te vergelijken is met een cirkelomtrek, d.i. een gesloten figuur. Dit geldt niet voor de rechte zonder oneindig ver punt, omdat dan het punt n niet als beeld optreedt en de afbeelding dus niet gesloten is.



Als slot van deze inleiding bewijzen we de volgende, van Desargues afkomstige, stelling met het hulpmiddel van de centrale projectie.
<u>Stelling</u>. Zijn gegeven twee driehoeken a b c en a' b' c', en gaan de rechten a a', b b', c c' door één punt, dan liggen de snijpunten van

overeenkomstige zijden dier beide driehoeken op een rechte.

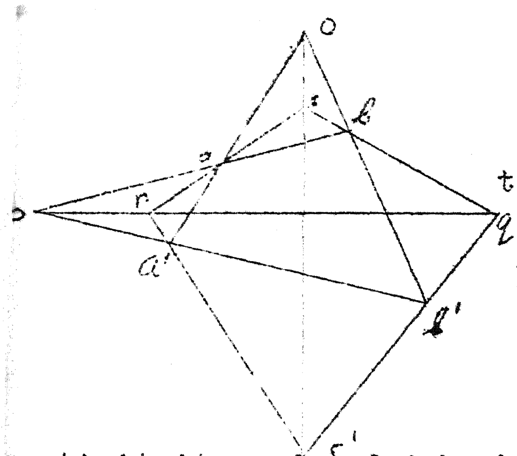
1e bewijs. We voeren een centrale projectie uit, zodanig dat twee der genoemde snijpunten in het oneindige komen te liggen. Kunnen we



bewijzen dat dan ook het derde oneindig is, dan zijn we klaar. Maar dit volgt direct (zie tekening), als men opmerkt dat b.v. het paar rechten a b, a' b' evenwijdig is en evenzo het paar b c, b' c', dat dus de drie paren lijnstukken p a, p a'; p b, p b'; p c, p'c' een evenredigheid vertonen, en dat dientengevolge ook de rechten a c, a' c' evenwijdig zijn.

2e bewijs. Kies in de ruimte een punt buiten het vlak der beide driehoeken en projecteer vanuit dat punt de punten p,c,c', op een rechte pc* c'* door p. Huiselijk gezegd: zie de figuur ruimtelijk. Dan zijn de vlakken a b c* en a' b' c'* verschillende vlakken, die dus één snijlijn bezitten. De snijpunten van de drie paren rechten a b en a'b'; a c* en a'c'* ; b c* en b'c'* liggen in beide genoemde vlakken, dus op hun snijlijn, d.w.z. op een rechte. En bij terugprojecteren blijft dit laatste gelden.

We noemen twee driehoeken, waarbij de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan, puntperspectief. Twee driehoeken, waarbij de snijpunten van overeenkomstige zijden op één rechte liggen, heten lijnperspectief. In deze terminologie kunnen we de stelling van Desargues aldus kort formuleren: Twee puntperspectieve driehoeken zijn ook lijnperspectief.



Beschouwen we de bij de zojuist bewezen stelling optredende figuur nog eens nader. We merken op, dat daarin 10 punten en 10 rechten voorkomen. En wel gaan door elk dier punten 3 rechten en liggen op elk dier rechten 3 punten. De figuur vertoont dus een grote symmetrie. En we hadden bewezen: gaan de drie rechten a a',b b', c c' door één punt O, het z.g. perspectiviteits centrum van de beide driehoeken, dan liggen de drie punten p,q,r op één rechte, de z.g. perspectiviteitsas der driehoeken.

Met behulp van deze figuur kunnen we onmiddellijk inzien, dat ook het omgekeerde van de stelling van Desargues geldt. We hoeven slechts de figuur op een andere manier te "lezen". Het gegevene, dat de driehoeken a b c en a'b'c' puntperspectief zijn, zo te interpreteren, dat de drie lijnenparen qa,rb; qa',rb',aa' , bb' drie snijpunten c,c',o hebben, die op een rechte gelegen zijn, m.a.w. dat de beide driehoeken a q a', brb' lijnperspectief zijn. En dat p,q,r op een rechte liggen, wil zeggen dat de rechten a b, q r, a'b' door één punt gaan, d.w.z. dat de beide laatstgenoemde driehoeken ook puntperspectief zijn.

We merken nog op, dat de eigenschap van twee driehoeken punt - of lijnperspectief te zijn invariant is voor centrale projectie. We gebruikten dit reeds in het 1e bewijs.

Opgaven. 1. Bewijs de stellingen 3) t/m 6).

2. Schrijf de 10 incidenties van een rechte met drie punten in de figuur van Desargues op. De stelling van Desargues en ook zijn ongekeerde spreken uit dat uit 9 van deze incidenties de 10de volgt.

3. Ga na, of de volgende stellingen uit de gewone meetkunde ook tot de projectieve meetkunde behoren:

a) De diagonalen van een parallelogram delen elkaar middendoor.

b) Vier rechten in algemene ligging (d.w.z. niet drie gaan door één punt) hebben zes snijpunten.

II De voornaamste axioma's en begrippen van de projectieve meetkunde.

We vergeten nu wat in de inleiding gezegd is, en gaan weer van voren af aan beginnen. We willen n.l. een strenge opbouw van de projectieve meetkunde geven. Daarbij diende de inleiding allereerst om U een vaag idee te verschaffen van wat projectieve meetkunde is en om bij U een gevoel van vertrouwdheid aan te kweken met de dingen die nu gaan gebeuren.

In de meetkunde bewijst men uitspraken omtrent figuren. Bewijzen is hierbij altijd terugvoeren op andere uitspraken van eenvoudiger aard d.m.v. logische redenering. Dit is een reductie, waaraan uiteraard ergens een eind moet komen, wil men niet tot in 't oneindige door blijven gaan. Men neemt zekere uitspraken als basis, en dat zijn de z.g. axioma's. Die zijn dus waar bij wijze van afspraak, en de overige uitspraken zijn waar krachtens hun logische afhankelijkheid van die axioma's. Door deze wijze van werken bereiken we dat onze uitspraken in een hecht gebouw verenigd worden. Hetzelfde radicale standpunt als t.a.v. de stellingen der meetkunde nemen we in t.a.v. de begrippen, die in deze stellingen voorkomen, zoals punt, rechte, liggen op enz. Een aantal van die begrippen komt in de axioma's voor; deze zijn uitsluitend gedefinieerd door het feit dat ze aan de axioma's voldoen, zoals in het schaakspel de figuren door hun bewegingswetten, de spelregels, gedefinieerd zijn en de werkelijke vorm der figuren er niet toe doet (een paard kan nog wel zonder paardekop fungeren). Andere begrippen worden d.m.v. expliciete definitie op die eerste begrippen teruggevoerd. Die eerste begrippen worden niet aangewezen, maar impliciet gedefinieerd, d.w.z. gedefinieerd door het feit, dat ze aan de axioma's voldoen.

Of de punten en rechten van de aanschouwelijke meetkunde aan de axioma's voldoen is een andere vraag. Deze vraag hoort niet thuis in de strenge opbouw, maar is wel van belang. Immers we hebben graag, dat onze meetkunde niet een zinledig manoevreren is met grondbegrippen en spelregels, maar dat er ook een systeem van dingen is dat er op van toepassing is: onze meetkunde moet vatbaar zijn voor één (of meerdere!) interpretaties. In elk geval moeten de axioma's zo gekozen zijn, dat ze niet tot strijdige conclusies voeren, en ook zo dat de aanschouwelijke uitspraken van de meetkunde daarin als uitspraken voorkomen. Verder zullen met name de axioma's zelf zo gekozen worden, dat ze zo veel mogelijk aanschouwelijk evident zijn. We zullen dus figuren tekenen, maar deze dienen in de eerste plaats ter ondersteuning van de logische redeneringen. U ziet dat zo aan de aanschouwing toch recht wordt gedaan en tevens dat onze opbouw verschilt van die der analytische meetkunde, waar uiteindelijk de fundamentale begrippen en relaties door stelsels van getallen en vergelijkingen worden gedefinieerd. We merken nog op, dat de strenge opbouw en de axioma's van de projectieve meetkunde, die we nu g gaan behandelen, anders, algemener, en daardoor simpeler zijn dan die van de gewone meetkunde.

Later zullen we in de analyse een systeem van dingen vinden dat aan het axiomastelsel voldoet. Dit houdt in dat onze meetkunde consistent is, als we tenminste uitgaan van de consistentie van de analyse.

Axioma's van incidentie.

A. Door twee verschillende punten gaat één rechte.

A'. Twee verschillende rechten bezitten minstens één snijpunt.

B. Op elke rechte liggen minstens drie verschillende punten.

B'. Er bestaan een punt en een rechte die niet door dat punt gaat.

C. Puntperspectieve driehoeken zijn ook lijnperspectief (Desargues).

Eerste gevolgtrekkingen. Hadden twee verschillende rechten U,V meer dan één snijpunt, dus o.a. a en b, dan gingen door a,b twee verschillende rechten, in strijd met A. Dus volgt uit A + A':

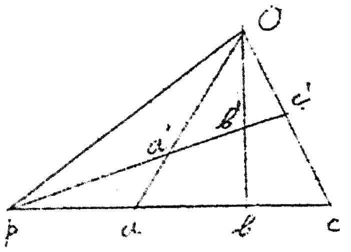
A''. Twee verschillende rechten bezitten één snijpunt.

Beschouwen we een punt a. Er zijn twee punten b,c zodanig dat a niet op de rechte bc ligt, anders kwamen we in strijd met B'. Op de rechte bc ligt wegens B nog een derde punt d. Onder de rechten ab,ac,ad komen geen samenvallende voor (ga na). Dus hebben we:

B''. Door elk punt gaan minstens drie verschillende rechten.

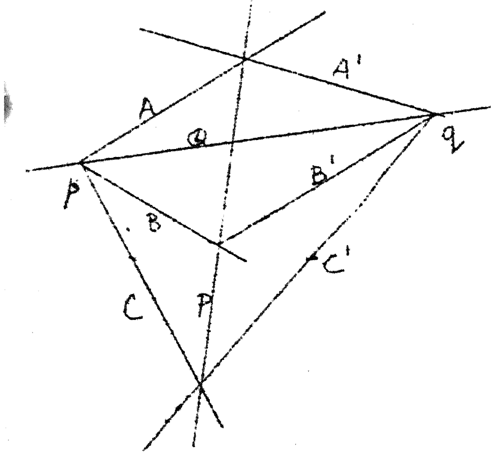
Van C geldt ook het omgekeerde C' (in te zien op dezelfde manier als in de inleiding).

Perspectiviteit. We gebruiken de termen incident zijn, puntenreeks, stralenwaaier, als vroeger. Stel we hebben twee puntenreeksen, waarvan de dragers verschillend zijn. Het snijpunt dier dragers hete p. Deze puntenreeksen, zeg $\{p,a,b,c,\ldots\}$ en $\{p,a',b',c',\ldots\}$ heten perspectief van-



het centrum o, als er een eeneenduidige toevoeging bestaat tussen de punten van de ene en die van de andere puntenreeks en daarbij toegevoegde punten op een rechte door o liggen. Dat wil zeggen, dat de volgende incidenties bestaan. oaa', obb', occ', enz. Kort gezegd: de ene puntenreeks ontstaat door projectie uit de andere (zie figuur). Dat die projectie een eeneenduidige toevoeging oplevert, volgt uit de axioma's! Het punt p, snijpunt der beide dragers, is kennelijk aan zichzelf toegevoegd.

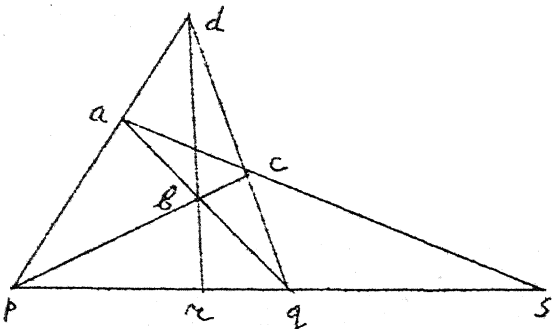
Op een dergelijke manier kunnen we perspectiviteit van stralenwaaiers definieren. De beide stralenwaaiers $\{Q,A,B,C,\dots\}$ en $\{Q,A',B',C',\dots\}$



met toppen resp. p en q heten perspectief t.o.v. de rechte P, als er een eeneenduidige toevoeging bestaat tussen de stralen van de ene en die van de andere waaier en daarbij toegevoegde stralen door hetzelfde punt van P gaan; de rechte Q door p en q is aan zichzelf toegevoegd. De beide stralen waaiers ontstaan dus door eenzelfde puntenreeks uit twee punten p en q te projecteren.

<u>Volledige vierhoek en vierzijde</u>. Hieronder verstaan we de figuur, gevormd door vier punten, resp. rechten in algemene ligging, mèt hun zes verbindingsrechten resp. snijpunten. Met algemene ligging van punten of rechten bedoelen we dat niet drie punten op een rechte liggen, resp. drie rechten door een punt gaan. We beschouwen niet de figuur bestaande uit vier punten a,b,c,d met de vier lijnstukken ab, bc, cd, da, maar we nemen de zes rechten ab,ac,ad,bc,bd,cd. En dan moet men van zelf ook het begrip volledige vierzijde invoeren. Het is duidelijk dat we drie paren overstaande zijden (hoekpunten) kunnen aanwijzen.

<u>Harmonische ligging</u>. We zeggen dat vier punten p, q, r, s op een rechte harmonisch liggen, als er een volledige vierhoek a b c d bestaat, zodanig dat p het snijpunt is van twee overstaande zijden dier vierhoek,



q het snijpunt van twee overstaande zijden, terwijl van de beide overige zijden elk door één van de punten r en s gaat. We geven de harmonische ligging symbolisch aan door H(pq,rs). De volledige vierhoek heet wel construerende vierhoek van het viertal punten p,q,r,s. Van <u>welke</u> overstaande zijden p het snijpunt is, enz., doet er niet toe. Want houdt H(pq,rs) de incidenties adp, bcp, abq, cdq, bdr, acs in, waarbij men op de volgorde van de punten let, dan blijken H(qp, rs), H(qp,sr), H(pq,sr) hetzelfde in te houden, als men achtereenvolgens cbad, bcda, badc als construerende vierhoeken beschouwt.

<u>Opgaven</u>. 1. Kan men als axioma C ook nemen: lijnperspectieve driehoeken zijn ook puntperspectief?

2. Beschouw drie rechten P,Q,R en projecteer de puntenreeks op P vanuit een of ander centrum op Q en op dezelfde manier de puntenreeks op Q vanuit een ander centrum op R. Bewijs dat hierdoor een eeneenduidige relatie tussen de puntenreeksen op P en R wordt teweeggebracht en ga na of evenals bij de perspectiviteit het snijpunt van P en R aan zichzelf is toegevoegd.

3. Definieer met behulp van een volledige vierzijde harmonische ligging van vierrechten in een stralenwaaier.

III <u>Collineaties; nog enige axioma's.</u>

Een collineatie of directe projectiviteit van het vlak is een eeneenduidige afbeelding van het vlak op zichzelf, waarbij punten in punten, rechten in rechten overgaan, en waarbij de incidentie van een punt en een rechte bewaard blijft.

Gaat dus bij een collineatie het puntenpaar a,b over in het punten paar a',b', dan gaat ook de rechte ab over in de rechte a'b'. Blijft bij een collineatie een rechte vast, dan gaan de punten van die rechte weer in de punten van de rechte over, en dit op eeneenduidige wijze. Deze door de collineatie op de rechte geinduceerde afbeelding heet projectiviteit van de puntenreeks op die rechte.

Algemeen heten twee puntenreeksen projectief, als daartussen een eeneenduidige relatie bestaat en er een collineatie van het platte vlak is, die de ene in de andere overvoert. Evenzo kan men projectiviteit tussen stralenwaaiers definieren.

De collineatie, waarbij de punten en rechten van het vlak vast blijven, heet de identieke collineatie. Bij elke collineatie π bestaat een inverse, aangeduid door π^{-1}, die steeds aan het beeld zijn origineel toevoegt. Achter elkaar uitvoeren van π en π^{-1} geeft de identieke afbeelding.

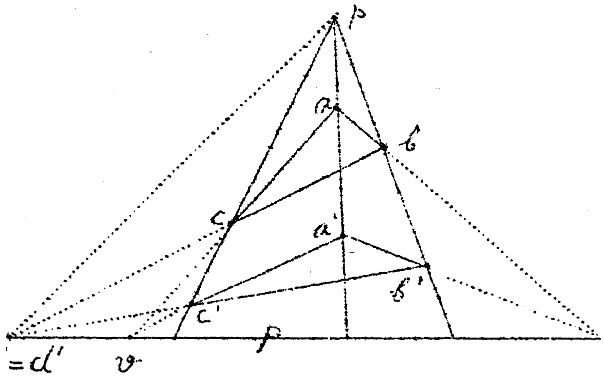
We zijn nu in staat om nog twee axioma's te formuleren:

D. Zijn p, q, r, s vier punten, waarvoor geldt H(pq,rs), en zijn p,q,r verschillend, dan verschilt ook s daarvan.

E. Laat een projectiviteit op een rechte drie punten vast, dan laat ze alle punten van die rechte vast. Gevolg van axioma E: een projectiviteit op een rechte, die niet de identiteit is, bezit ten hoogste twee invariante punten.

Een collineatie voert een volledige vierhoek in een volledige vierhoek over. Liggen de punten p,q,r,s harmonisch op een rechte, dan ook de beelden p',q',r',s'. Immers het beeld van een construerende vierhoek van het eerste viertal is een construerende vierhoek van het tweede viertal. Zijn dus twee puntenreeksen projectief, dan blijft harmonische ligging bij die afbeelding bewaard: harmonische ligging is een projectief invariante eigenschap.

We willen nu een byzonder soort collineatie gaan bestuderen, waaruit tevens zal blijken dat er collineaties bestaan. We beschouwen de figuur van twee driehoeken, die perspectief zijn vanuit een punt p, en dus volgens C ook perspectief vanuit de rechte P. We laten nu een van de hoekpunten van de driehoek, b.v. c, en tegelijk het toegevoegde

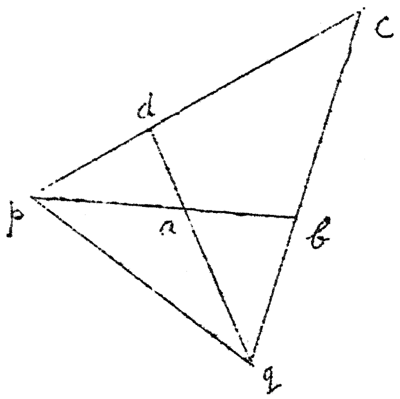


hoekpunt c' zodanig bewegen, dat de beide driehoeken perspectief blijven, en wel steeds met hetzelfde centrum p en dezelfde as P. Dat wil dus zeggen, dat we c variëren en daarbij telkens c' zodanig bepalen, dat de rechte cc' door het snijpunt p van aa' en bb' blijft gaan en dat de rechten ac en a'c' elkaar op de rechte P blijven snijden (merk op dat van de toegevoegde hoekpunten van de beide driehoeken twee paren vast blijven en van de toegevoegde zijden één paar). Vanzelf blijft dan het snijpunt van bc en b'c' op P. In plaats van c kunnen we ook a laten variëren. Dit is nodig om het bewegende punt elke positie in het vlak te kunnen doen innemen, zonder dat we met ontaarde driehoeken te maken krijgen. Het is duidelijk, dat verandering van a en dus ook a' geen invloed heeft op c en c'. We kunnen een hoekpunt op de as P terecht laten komen, b.v. c in d; dan moeten d,d', p op een rechte liggen en d'b' moet P in hetzelfde punt snijden als db, d.w.z. in d; hieruit volgt d = d'.

Resumerend vinden wij, dat bij gegeven perspectiviteitscentrum en - as aan elk punt x van het vlak eenduidig een punt x' is toegevoegd. Deze toevoeging is krachtens haar aard omkeerbaar. We vinden x' door x b.v. met a te verbinden en te letten op de incidenties pxx', axu, a'x'u (u het snijpunt van ax met P). Punten van de as P blijven bij deze toevoeging vast.

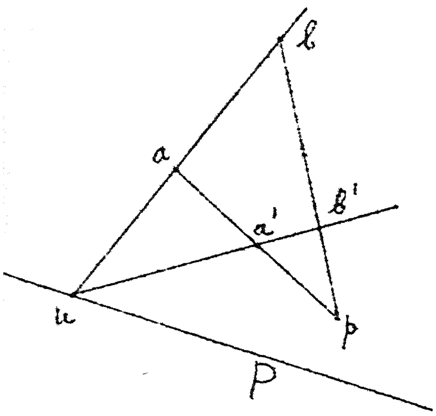
Wat gebeurt er nu bij deze toevoeging met een rechte? Onderstel eens dat die rechte niet door p gaat. Plaatsen we onze driehoek abc zo, dat ac die rechte is, dan gelden de incidenties pxx', acxv, a'c'x'v. M.a.w. ligt x op ac, dan ligt x' op a'c'. Gaat de rechte door p, dan blijft een punt van die rechte daarop. Steeds worden dus de punten van een rechte in de punten van een rechte afgebeeld. Dit levert tevens een toevoeging van de rechten; daarmee wordt de besproken toevoeging een collineatie. We noemen deze collineatie een quasi - perspectiviteit uit de punten van een rechte ontstaan i.h.a. de toegevoegde punten op de beeldrechte door projectie vanuit het centrum, zodat er een perspectieve relatie is tussen de puntenreeksen op rechte en beeldrechte. We herhalen, dat we van x het beeld x' krijgen door te eisen, x' ligt op de rechte px; ax en a'x' snijden elkaar op P.

We willen nu m.b.v. axioma E bewijzen, dat een collineatie die vier punten in algemene ligging vastlaat, de identiteit is. Laten a,b,c,d



die vier punten zijn. De rechte door a,b gaat over in de rechte door a,b en blijft dus vast. Evenzo de rechten cd, ad, bc. De punten p en q als snijpunten van ab en cd, resp. van ad en bc blijven dan ook vast. Op de rechte ab liggen drie invariante punten, dus zijn alle punten van de rechte ab invariant. Ook alle punten van cd zijn invariant. Nemen we tenslotte een willekeurige rechte door q, dan liggen daarop drie invariante punten, n.l. q en de beide snijpunten met ab en cd. Ook die rechte blijft dus puntsgewijs invariant. M.a.w. alle punten van het vlak zijn invariant.

Vervolgens tonen we aan, dat er een collineatie is, die vier gegeven punten in algemene ligging in vier andere gegeven punten in algemene ligging overvoert. Laten a,b,c,d en a',b',c',d' die twee viertallen punten zijn. Allereerst bestaat er een quasi - perspectiviteit die b.v.

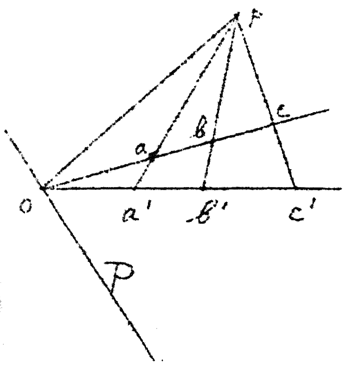


a,b overvoert in a',b'; het is voldoende als centrum te nemen het snijpunt p van de rechten aa',bb' en als as een willekeurige rechte door het snijpunt u van de rechten ab, a'b'. Men construere zelf van nog een paar punten de beelden. Laten c,d als beelden c_1,d_1 hebben. We gaan nu de quasi - perspectiviteit beschouwen, die a'b' als as heeft, c_1 in c' overvoert en een willekeurig ander punt tot centrum heeft. Laat hierbij d_2 het beeld van d_1 zijn. Tenslotte nemen we de quasi - perspectiviteit, die a'b' tot as en c' tot centrum heeft, terwijl d_2 als beeld d' heeft. Nu is een quasi - perspectiviteit een collineatie, en de afbeelding, die we krijgen door achtereenvolgens elk dezer (byzondere) collineaties uit te voeren, heeft alle eigenschappen van een collineatie. En hierbij gaat kennelijk het viertal a,b,c,d in het viertal a',b',c',d' over.

Uit de laatste twee alinea's volgen twee belangrijke consequenties:

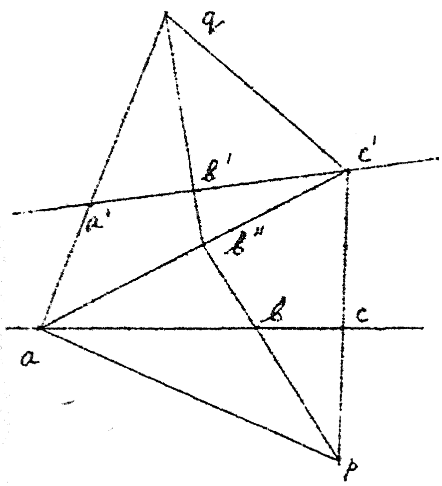
1.Er is één en slechts één collineatie die een gegeven viertal punten in algemene ligging in een ander zodanig viertal overvoert. Dat er een is, hebben we zojuist gezien; waren er meer, b.v. π_1 en π_2 , dan liet de collineatie $\pi_1 \pi_2^{-1}$, die onstaat door eerst π_2^{-1} en daarna π_1 uit te voeren, het tweede viertal invariant en was dus de identiteit, m.a.w. $\pi_1 = \pi_2$

2. Een collineatie kan opgevat worden als het product van ten hoogste drie quasi - perspectiviteiten. Dit volgt uit 1. en de alinea daarvoor.



Zijn twee puntenreeksen $\{o,a,b,c, \ldots\}$ en $\{o,a',b',c', \ldots\}$ perspectief vanuit een punt p, dan is er ook een quasi - perspectiviteit van het vlak, waarbij de ene puntenreeks in de ander overgaat, n.l. de quasi - perspectiviteit met p als centrum en een willekeurige rechte P door o als as, die a in a' overvoert. Aangezien een quasi - perspectiviteit een collineatie is, zijn de beide puntenreeksen ook projectief.

Zijn omgekeerd twee puntenreeksen projectief, dan kan de ene in de andere overgevoerd worden door aaneenschakeling van enige perspectiviteiten. Men kan dit inzien aan de hand van geschikt gekozen quasi - perspectiviteiten. Of als volgt: Laten a,b,c drie punten in de ene en



a',b',c' hun beelden in de andere puntenreeks zijn. Beschouw de rechte ac'. Er is een perspectiviteit die de eerste puntenreeks overvoert in een puntenreeks op de rechte ac', zodat dus a vast blijft en c overgaat in c' (neem maar een perspectiviteit vanuit een punt p op cc'). Laat b'' hierbij het beeld van b zijn. Er is verder een perspectiviteit, die de puntenreeks $\{a,b'',c', \ldots\}$ overvoert in $\{a',b',c', \ldots\}$, zodat $a \rightarrow a'$, $b'' \rightarrow b'$, $c' \rightarrow c'$; deze perspectiviteit moet het snijpunt q van aa' en b''b' als centrum hebben. Aaneenschakeling van de beide perspectiviteiten levert een projectieve relatie op tussen de beide puntenreeksen, waarbij a in a',b in b',c in c' overgaat. En dit is de gewenste projectiviteit. Immers, als we even de gevonden projectiviteit door π_1 en de gewenste door π_2 voorstellen, dan is $\pi_1 \pi_2^{-1}$ een projectiviteit op een rechte, die drie punten a',b',c' vastlaat, dus de identiteit,dus $\pi_1 = \pi_2$.

We komen dus met twee perspectiviteiten uit. Ingeval de dragers der puntenreeksen samenvallen, hebben we drie perspectiviteiten nodig (zie opgave).

In het bovenstaande ligt tevens het bewijs opgesloten van de z.g. fundamentaalstelling van de projectieve meetkunde, die als volgt luidt:

Gegeven een drietal punten op een rechte, en nog een drietal punten, ook op een rechte. Er is precies één projectiviteit, die het eerste drietal in het tweede drietal overvoert.

We weten dat een harmonisch viertal punten bij een projectiviteit weer in een harmonisch viertal overgaat. Omgekeerd kunnen we nu bewijzen, dat, gegeven twee harmonische viertallen, er een projectiviteit is, die het ene in het andere overvoert. Bij elk viertal hoort n.l. een construerende vierhoek; er is een collineatie die de ene vierhoek in de andere overvoert, en daarbij gaat ook het ene viertal punten in het andere over.

Opgaven. 1. Bewijs de bewering in de tekst, dat een projectiviteit op een rechte verkregen kan worden door samenstelling van drie perspectiviteiten.

2. Een projectiviteit tussen twee rechten, waarbij het snijpunt aan zichzelf is toegevoegd, is een perspectiviteit.

3. Bij drie punten p,q,r op een rechte is er slechts één punt s, zodat H(pq,rs).

4. Bewijs, door te letten op de construerende vierhoek, dat in de gewone meetkunde het vierde harmonische punt bij drie punten p,q,r, waarbij r het midden is van pq, het oneindig verre punt van de rechte pq is.

5. Bewijs dat in een driehoek abc binnen-en buitenbisectrice bij c de overstaande zijde harmonisch delen (trek een rechte evenwijdig aan een bisectrice).

6. Bewijs de bewering, dat bij een quasi-perspectiviteit het centrum op zijn plaats blijft.

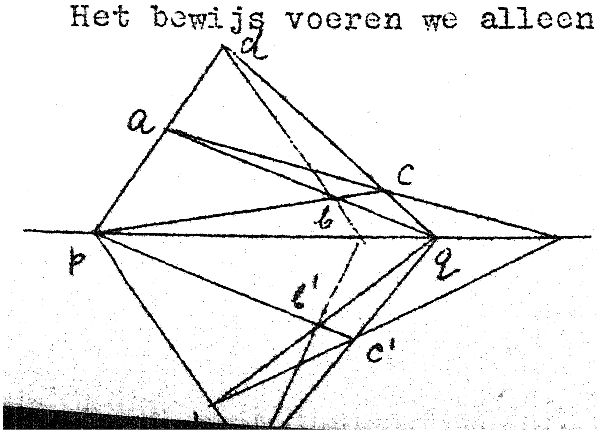
7. Bij een quasi-perspectiviteit kan het beeld c' van c zowel met behulp van het paar aa' als m b.v. het paar bb' geconstrueerd worden. Het resultaat is in beide gevallen hetzelfde.

IV. Een eigenschap van harmonische ligging. Toelichting op het axioma E.

De hoofdstukken III en IV zijn onafhankelijk van elkaar. Hoofddoel van IV is het vreemde axioma E te bewijzen voor het geval van de gewone meetkunde. Eerst bewijzen we een eigenschap over een harmonisch puntenviertal, die we hierbij nodig hebben, maar die ook op zichzelf van belang is.

Door drie punten p,q,r op een rechte is eenduidig een punt s bepaald, zodat geldt H(pq,rs).

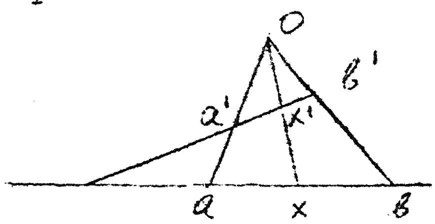
Het bewijs voeren we alleen op grond van de axioma's A-C. We laten zien, dat als we twee volledige vierhoeken abcd, a'b'c'd' hebben, zodanig dat p op de rechten ad,bc,a'd',b'c' ligt en q op de rechten ab,cd,a'b',c'd' en r op de rechten bd,b'd', daaruit noodzakelijk volgt dat de rechten ac en a'c' elkaar op de rechte door p,q,r in eenzelfde punt snijden. Dat punt is dan met recht het

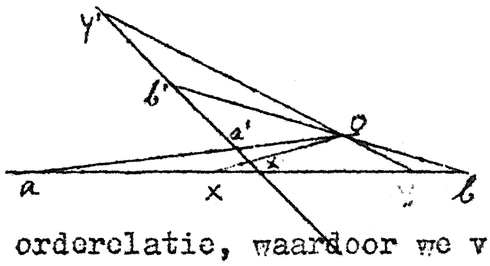


het vierde harmonische s en het is eenduidig bepaald.

Letten we op beide driehoeken abd en a'b'd', dan merken we op dat corresponderende zijden elkaar resp. snijden in q,r,p, dus in punten die op een rechte liggen. Maar dan zijn die driehoeken lijnperspectief en dus volgens axioma C ook puntperspectief. Dus de rechten aa',bb',cc' snijden elkaar in één punt. Om dezelfde reden zijn de driehoeken bcd, b'c'd' lijn- en dus puntperspectief. D.w.z. de rechten bb',cc',dd' snijden elkaar in één punt. Kort gezegd: de rechten aa',bb',dd' gaan door één punt. Dat houdt o.a. in dat de driehoeken abc,a'b'c' puntperspectief zijn. En dus lijnperspectief. Dit laatste betekent dat p,q en het snijpunt van ac en a'c' op een rechte liggen.

Beschouwen we nu in de gewone meetkunde een perspectiviteit tussen twee puntenreeksen. In de gewone meetkunde bestaat





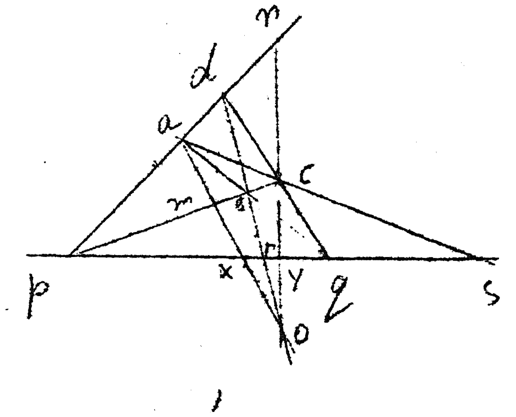
voor de punten van een rechte een orderelatie, waardoor we van elk tweetal punten kunnen zeggen welk van de twee "links" van het andere ligt; deze relatie is transitief. Bij onze abstracte opbouw hebben we dit begrip nog niet. Laten a en b tot de eerste puntenreeks behoren met b.v. a links van b en a',b' de beelden van a,b zijn. Op het begrip orderelatie berust aldus het begrip tussen: in het geval a links van b bedoelen we met de punten tussen a en b de punten die rechts van a en links van b liggen; in het geval a rechts van b zijn het de punten rechts van b en links van a.

Laten we voorts de verzameling der punten tussen a en b het interval ab noemen. Een bekende eigenschap, waar we nu niet nader op in kunnen gaan, is dat bij de perspectiviteit òf de punten van het interval ab op de punten van het interval a'b' afgebeeld worden (zie linkse tekening), òf de punten van het interval ab op de punten buiten het interval a'b' afgebeeld worden worden (zie rechtse tekening).

We zullen nu enige eigenschappen bewijzen die allen hierop terug te voeren zijn en zullen culmineren in de stelling dat een projectiviteit, die drie punten op een rechte invariant laat, alle punten van die rechte invariant laat. Dit betekent nog niet dat we bij onze opbouw axioma E kunnen laten vallen en daarvoor de orde relatie met de in de vorige alinea genoemde eigenschap in de plaats stellen, want we zullen in de nu volgende beschouwingen nog een andere eigenschap van de gewone meetkunde nodig hebben, die van veel ingrijpender aard is dan de axioma's A-E en die we daarom liever overboord gooien.

We tonen nu allereerst aan:

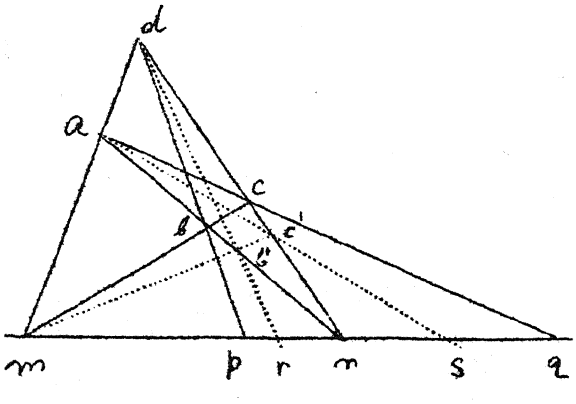
Liggen vier verschillende punten p,q,r,s op een rechte harmonisch, dan behoort steeds één der punten r en s tot het interval pq en de andere niet, wat we wel zo uitdrukken: de paren pq en rs scheiden elkaar.



Bewijs: We gaan uit van de vier punten p,q,r,s en een construerende vierhoek abcd. We kiezen een punt m op de rechte bc, zodat de paren pb en m c elkaar scheiden. We construeren vervolgens x en o als snijpunt van am met resp. pq en dr, y en n als snijpunt van oc met resp. pq en pd. Projecteren we nu het viertal punten pbmc uit o op de rechte pd en daarna uit c op de rechte pq. We krijgen eerst het viertal pdan, daarna het viertal pqsy. Omdat bij projecteren scheidende paren in scheidende paren overgaan, scheiden de paren pq en sy elkaar. Bij projectie van het viertal pbmc uit a of uit o blijkt evenzo: de paren pq en xs scheiden elkaar; de paren pr en xy scheiden elkaar. Onderstellen we nu dat s buiten het interval pq ligt (het geval s tussen p en q wordt evenzo behandeld). Dan ligt y tussen p en q en evenzo x. Dat betekent datpbuiten het interval xy ligt; dus r ligt in dat interval. Op grond van de transiviteit van de orderelatie ligt r dan ook in het interval pq.

Vervolgens bewijzen we: Liggen op een rechte zes verschillende punten m,n,p,q,r,s en ligt zowel het paar pq als het paar rs harmonisch met het paar mn, dan scheiden de paren pq en rs elkaar niet.

Bewijs: Laat abcd construerende vierhoek voor het viertal mnpq zijn. Is



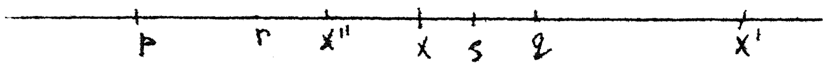
c' het snijpunt van de rechten as en dn, b' het snijpunt van de rechten c'm en an, dan snijdt db' de rechte mn in r. Want het snijpunt van db' en mn vormt met m,n,s een harmonisch gelegen viertal met ab'c'd als construerende vierhoek; omdat het vierde harmonische punt eenduidig bepaald is, moet dit snijpunt r zijn. We gaan nu een aantal perspectiviteiten uitvoeren. En wel projecteren we de rechte mn vanuit a op dn, daarna vanuit m op an, en tenslotte vanuit d weer op mn. Daarbij gaat het viertal mnqs achtereenvolgens over in dncc', anbb', mnpr.

We weten dat van de beide punten p en q één, zeg p, tot het interval mn behoort; laat evenzo r tot het interval mn behoren. Laat verder van

van de beide punten p,r van het interval mn het punt r het meest rechtse zijn, d.w.z. laten de paren mr en pn elkaar scheiden. Maar dan scheiden ook de paren ms en qn elkaar. Gemakkelijk laat men zien dat nu òf r en s beide tot het interval pq behoren, òf pq beide tot het interval rs behoren.

Van deze eigenschap geldt ook een omkering: liggen op een rechte vier verschillende punten p,q,r,s en scheiden de paren pq, rs elkaar niet, dan bestaan er twee punten m,n op die rechte zodat geldt: H(mn,pq), H(mn,rs).

<u>Bewijs</u>: Laten r en s tot het interval pq behoren; geven we de intervallen pq en rs door I_1 resp. I_2 aan, dan is dus $I_2 \subset I_1$. Zij x een willekeurig punt van I_1. Dan bestaat er één punt x', zodat het viertal pqxx' harmonisch is en één punt x", zodat het viertal rsx'x" harmonisch is. Laat x_1 een andere positie zijn van x in I_1 en wel zodanig dat de

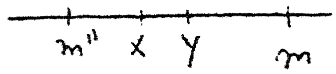


paren px_1 en qx elkaar scheiden. Evenals in het bewijs van de vorige eigenschap ter sprake kwam, scheiden dan ook de paren px_1' en qx' elkaar. Hierbij liggen de punten x' en x_1' buiten I_1. Dus ook de paren rx_1' en sx' scheiden elkaar. En dan ook de paren rx_1'' , sx". Anders gezegd: ligt x_1 rechts van x, dan ligt ook x_1'' rechts van x".

We beschouwen nu de overgang $x \rightarrow x''$. Hierbij ligt x in I_1, x" in I_2. Het punt r heeft de eigenschap dat voor x tussen p en r het beeld x" steeds rechts van r, en dus ook rechts van x ligt. Voor een punt y van I_1 treedt steeds één van de beide volgende gevallen op: voor elk punt x uit het interval py ligt het beeld x" rechts van x, òf er is een punt x in dat interval zodat x" samenvalt met x of links van x ligt. Het eerste geval treedt op voor y = r, het tweede voor y tussen s en q. Daarmee is het interval I_1 in twee klassen verdeeld, die geen van beide leeg zijn, disjunct zijn en samen I_1 vormen. Behoort y tot de eerste klasse, dan krachtens de construrtie elk punt van I_1 links van y; behoort y tot de tweede klasse, dan ook elk punt van I_1 rechts van y. Voegt men nog aan de eerste klasse p en de punten links van p toe en aan de tweede klasse q en de punten rechts van q, dan heeft men dus een snede van Dedekind (zie analyse, p.33). Nu bepaalt in de gewone meetkunde een snede van Dedekind een punt, dat òf het meest rechtse van de eerste òf het meest linkse van de tweede klasse is (bij axiomatische opbouw wordt deze eigenschap gepostuleerd; ze houdt in dat bij invoering van een cördinaat op de rechte aan elk reeel getal een punt is toegevoegd).

We maken de opmerking dat b.v. tussen p en y steeds een punt x te vinden, b.v. het vierde harmonische bij p,y,q.

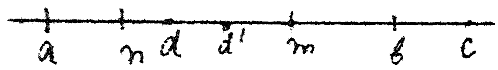
Laat m het punt zijn, bepaald door die snede van Dedekind. Dan is m" = m. Stel eens dat m" links van m lag, en dat y een punt tussen m" en m was, en evenzo x een punt tussen m" en y. Dan behoort y tot de eerste klasse. Maar omdat x links van m ligt, ligt x" links van m" en dus links van x. Dit is in strijd met het feit dat y tot de eerste klasse behoort. Evenzo weerlegt men de onderstelling: m" rechts van m.



Zij verder n = m'. Dan liggen n en m harmonisch met p en q, en ook met r en s. Dit moest bewezen worden. Tevens heeft het geconstrueerde punt m de eigenschap, dat voor een punt x tussen p en m het beeld x" steeds rechts van x ligt. D.w.z. het punt m is het meest linkse punt met de genoemde eigenschap. Op dezelfde manier kan men aantonen dat er een meest rechtse punt in I is, dat kan fungeren als punt m.

Uit het laatste kunnen we nu gemakkelijk halen, dat bij een projectiviteit zoals gedefinieerd aan het begin van III, scheidende paren punten in scheidende paren overgaan (en dus ook omgekeerd). Stel eens, met begrijpelijke notatie, dat de paren pq,rs elkaar scheiden en de paren p'q', r's' niet. Dan zijn er punten m',n' zodat geldt: H(m'n',p'q') en H(m'n', r's'). Omdat een collineatie construerende vierhoeken in construerende vierhoeken overvoert en dus harmonische ligging invariant laat, geldt voor de originelen m en n: H(mn,pq), H(mnrs). Maar dit is in strijd met het feit dat de paren pq en rs elkaar scheiden.

Laat nu een projectiviteit met drie invariante punten a,b,c gegeven zijn en een punt d verschillen van zijn beeld d'. Laat de orderelatie van de punten a,b,c,d zijn, zoals in de figuur aangegeven. Wegens het bovenstaande ligt met d ook d' in het interval ab.



Het is geen beperking aan te nemen dat van de punten d en d' het tweede het meest rechtse is. We weten tevens dat door de projectiviteit het interval db op het interval d'b wordt afgebeeld. Evenals in het bewijs op p.16 kunnen we inzien dat er een meest linkse punt van het interval db is, zeg m, dat met zijn beeld samenvalt (evt. zou in deze redenering m ook nog het punt b kunnen zijn). Verder wordt door de inverse projectiviteit het interval ad' op het interval ad afgebeeld; daarbij is een meest rechtse invariant punt, zeg n, dat óf a is óf in het interval ad ligt. De punten n en m vallen niet samen; n ligt links van m; beide punten zijn invariant, maar géén punt van het interval nm is invariant. Verder is c een zeker van n en m verschillend, invariant punt, en wel buiten het interval nm. Maar dan is ook het vierde harmonische bij n,m,c invariant. En dat ligt in het interval nm. Tegenspraak.

Hiermee is bewezen, dat in de gewone meetkunde axioma E vervuld is.

<u>Opgaven.1.</u> Uit bovenstaande beschouwingen blijkt dat ook aan axioma D voldaan is.

2. Leid zonder axioma E, orderelaties, of een snede van Dedekind, af dat een projectiviteit met drie invariante punten ook zeker nog een vierde punt invariant laat, n.l. een vierde harmonische.

Leid, door op verschillende manieren een vierde harmonische te nemen, af dat de projectiviteit in opgave 2 zelfs oneindig veel invariante punten heeft (dat wil nog niet zeggen alle!).

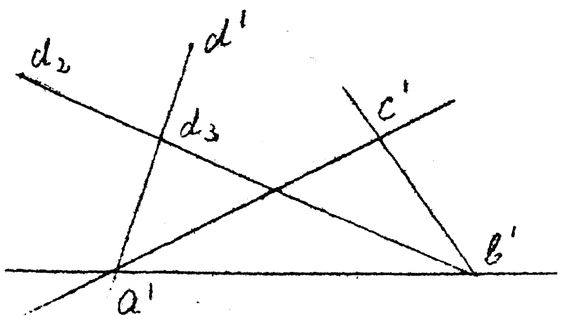
4. Definieer orderelatie in een stralenwaaier door te snijden met een rechte en te letten op de orderelatie op die rechte.

5. Geldt op een rechte H(mx,nx'),H(my,ny'), dan scheiden de paren xx',yy' elkaar.

Behandel in de laatste stelling het geval dat d niet tot een der intervallen ab,bc,ac behoort.

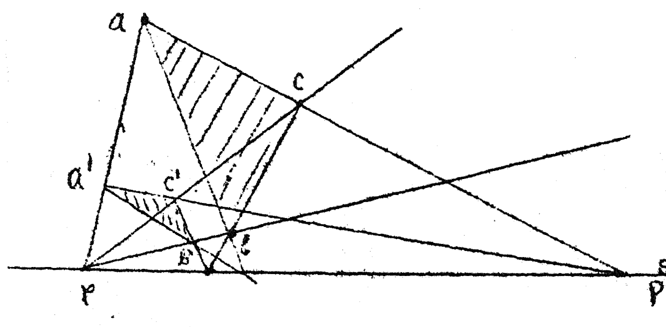
V. <u>Invoering van coordinaten.</u> <u>Stelling van Pappus.</u>

Allereerst moge een kleine wijziging aangebracht worden op blz. 10. Men leze i.p.v. regel 10 v.o. het volgende: Tenslotte voeren we nog twee quasiperspectiviteiten uit, die ten doel hebben d_2 op de plaats van het punt d' te brengen, terwijl a',b',c' op hun plaats blijven. We voeren n.l. een quasi-perspectiviteit uit die a'c' tot as en b' als centrum heeft, terwijl d_2 op de rechte a'd' komt te liggen (merk op dat het beeld van d_2, zeg d_3, met d_2 en b' op een rechte liggen; dat dus d_3 het snijpunt is van a'd' en d_2b'). En daarna kunnen we door een quasi-perspectiviteit met b'c' als as en a' tot centrum d_3 in d' brengen.



We willen nu zekere meetkundige operaties door symbolen weergeven, waarvoor we algebraische operaties met prettige eigenschappen kunnen definiëren, en zo tot een invoering van coördinaten geraken. Voor we hiertoe overgaan, maken we nog twee opmerkingen, die voor het vervolg van belang zijn.

In de eerste plaats wijzen we er op, dat er geen enkel bezwaar bestaat tegen het beschouwen van quasi-perspectiviteiten, waarbij het centrum <u>op</u> de as ligt. Zie de tekening, alwaar de gearceerde driehoeken abc en a'b'c' puntperspectief vanuit p en lijnperspectief vanuit P zijn. Het is duidelijk, dat evenals in het algemene geval, de quasi-perspectiviteit in zijn geheel bepaald is door as, centrum en één toegevoegd paar. Van een vierhoek, waarvan de vier hoekpunten uit twee paren toe-



gevoegde punten bestaan, b.v. aba'b', hebben nu twee paren overstaande zijden hun snijpunt op de as.

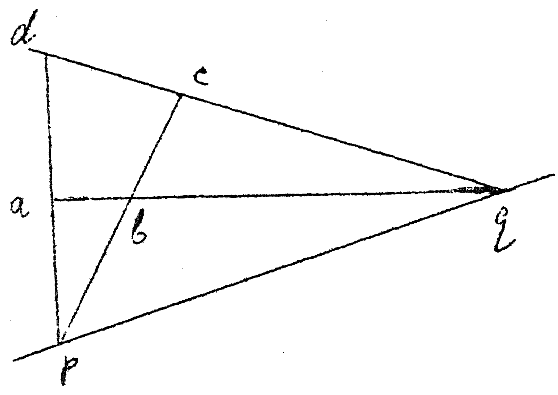
De tweede opmerking geldt axioma E. In hfdst. III voerden we het begrip collineatie in. Uit E volgde dat een willekeurige collineatie verkregen kan worden als product van een eindig aantal quasi-perspectiviteiten. Aangezien nu bij een qausi-perspectiviteit het verband tussen de puntenreeksen op rechte en beeldrechte zonder uitzondering (ga na!) een perspectiviteit is, kunnen we volgende stelling, E^*, uitspreken als consequentie van axioma E: E^*. Gaat een puntenreeks op een rechte, door enige perspectiviteiten na elkaar uit te voeren, over in een andere ook op die rechte gelegen puntenreeks; en hebben voorts die beide puntenreeksen drie punten gemeen, dan hebben ze alle punten gemeen.

Het is niet duidelijk, hoe men E als consequentie van E^* zou moeten afleiden; wij zullen ons met deze kwestie, althans voorlopig, niet bezighouden. Toch is E^* wel te gebruiken als axioma i.p.v. E, omdat alle verdere consequenties in III (en ook latere), afgeleid uit E, ook reeds getrokken kunnen worden op grond van E^*, mits men maar onder collineatie verstaat het product van eindig veel quasi-perspectiviteiten. Want dan is er weer één en slechts één collineatie die een viertal punten in algemene ligging in een viertal in algemene ligging overvoert; zijn perspectieve puntenreeksen ook projectief, blijft harmonische ligging bewaard, geldt de fundamentaalstelling, is een projectiviteit door twee drietallen bepaald, en mogen daarbij die drietallen willekeurig voorgeschreven worden (zie blz 10-12). We merken nog op, dat aan het sterkere axioma E voldaan is in het geval van de gewone meetkunde, zie hfdst. IV.

Een punt van een verschil tussen een projectieve en een coördinaten meetkunde is, dat in de laatste geen oneindig verre elementen voorkomen, en in de eerste wel, en dan tevens, in onze abstracte opzet, geen bijzondere plaats innemen tussen de andere elementen. Dit maakt verklaarbaar, dat we bij onze pogingen om aan zekere meetkundige operaties algebraische symbolen toe te kennen beginnen met de benoeming van een vaste, doch willekeurig gekozen, rechte van het projectieve vlak tot oneigenlijke rechte. De punten op de oneigenlijke rechte heten oneigenlijke punten. De andere punten en rechten heten eigenlijk. Als we voortaan zonder meer van punten en rechten spreken, bedoelen we eigenlijke elementen. Rechten met oneigenlijk snijpunt heten evenwijdig.

In deze terminologie kunnen we b.v. uit axioma C afleiden: zijn van twee puntperspectieve driehoeken twee paar zijden evenwijdig, dan ook het derde paar. Vgl. hierbij de figuur op blz 4; als men aanneemt dat pq de oneigenlijke rechte is, d.w.z. dat ab en a'b', en evenzo bc en b'c' evenwijdig zijn, dan zijn ook ac en a'c' evenwijdig.

Onder een parallelogram verstaan we een vierhoek abcd met ab//cd en ad//bc. We zullen aantonen dat de diagonalen ac en bd elkaar in een eigenlijk punt snijden. Laten in de figuur ac en bd als oneigenlijke punten r en s hebben. Dan is abcd construerende vierhoek voor het viertal punten p,q,r,s. Die vier punten liggen dus harmonisch. Als nu de vier punten a,b,c,d algemene ligging hebben, dan verschilt r van p en q. Maar volgens axioma D verschilt dan s van de punten p,q,r. Speciaal verschillen r en s van elkaar en snijden dus de rechten ac en bd elkaar niet op de oneigenlijke rechte.

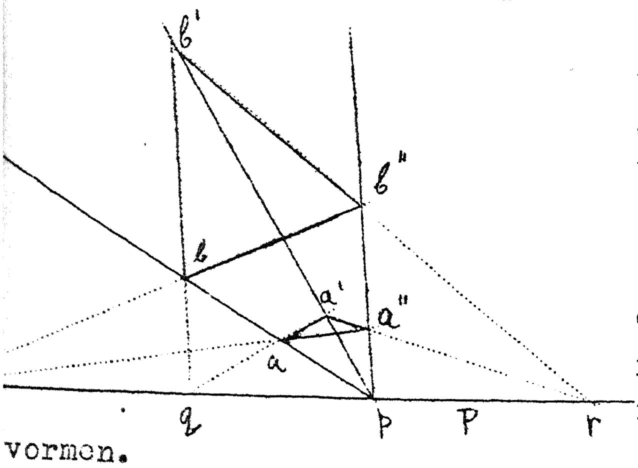


We beschouwen nu twee soorten quasi-perspectiviteiten met de oneigenlijke rechte tot as. En allereerst zulke, waarbij ook het centrum oneigenlijk is. Gaat bij zo een a,b in a',b' over, dan is aa'b'b een parallelogram. De constructie van het beeld x' van een willekeurig punt x is zo te beschrijven: voltooi het parallelogram op a,a',x (als toevallig x op de rechte aa' ligt, dan beschouwe men b,b',x). Het ligt in de lijn van bovenstaande terminologie om zo'n quasi-perspectiviteit een translatie te noemen; daar hij vastgelegd is door één paar a,a', mogen we hem aanduiden door $T_{aa'}$. We schrijven $T_{aa'}(x) = x'$. Ligt x op aa', dan ook x'; ligt x niet op aa', dan is aa'x'x een parallelogram.

We bewijzen nu dat het product van twee translaties weer een translatie is. Laten we achtereenvolgens uitvoeren de translaties $T_{aa'}$ en $T_{a'a''}$, die een punt b eerst in b' en dan in b'' overvoeren. Dan geldt dus:

$T_{a'a''}T_{aa'}(a) = a''$; $T_{a'a''}T_{aa'}(b)=b''$.

Zal $T_{a'a''}T_{aa'}$ een translatie zijn, dan is nodig (en voldoende), dat algemeen de punten a,a'',b,b'' ó op een rechte liggen of een parallelogram vormen.

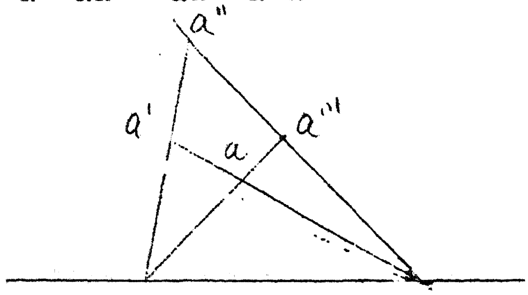


We moeten verschillende gevallen onderscheiden. Laten allereerst de punten a,a',a'' niet op een rechte gelegen zijn. Indien nu in de figuur geen samenvallende lijnen optreden, zijn de driehoeken aa'a'',bb'b'' perspectief op grond van de gegevens, die men kan neerschrijven in de vorm van de incidenties: qaa',qbb',ra' a'',rb'b'',pab, pa'b', pa''b''. En wel met p en P als centrum en as; dus snijden aa'',bb'' elkaar ook op P en vormen a,a'',b''b een parallelogram. Deze redenering kan spaak lopen, als er in de figuur lijnen samenvallen; liggen b.v. de punten b',a',a" op een rechte, dan is het punt r niet bepaald en volgt nog niet dat de oneigenlijke rechte P de perspectiviteitsas is. Men moet in dit geval een geschikte driehoek cc'c" tussenschakelen en kan dan afleiden $cc'' \parallel aa''$, $cc'' \parallel bb''$, dus $bb'' \parallel aa''$ (ga dit na!).

Liggen a,a',a" op een rechte, dan ligt b" op de rechte bb' en is vanzelf $bb'' \parallel aa''$. Hiermee zijn alle gevallen afgehandeld.

Een translatie bezit ook een inverse: $T_{aa'}^{-1} = T_{a'a}$; hierbij treedt de identieke transformatie, die alle punten op hun plaats laat, op als 1. De associativiteit van de beschouwde productvorming behoeft geen betoog: die geldt algemeen voor transformaties. Iets langer moeten we stilstaan bij het bewijs van de commutativiteit.

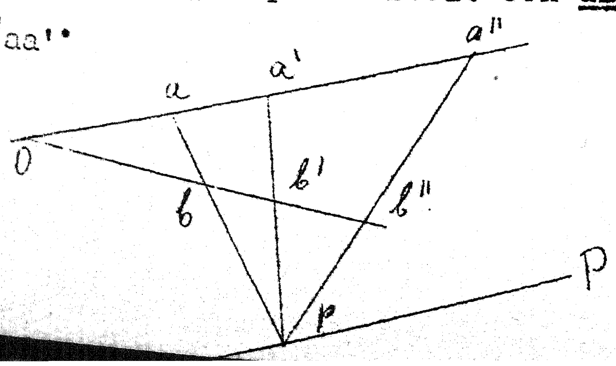
Beschouwen we twee translaties $T_{aa'}$ en $T_{a'a''}$. Laat hierbij $T_{a'a''}(a) = a'''$ zijn. Uit het gegevene volgt $T_{a'a''}(a) = T_{a'a''}(a') = a''$; we willen bewijzen $T_{aa'}T_{a'a''}(a) = a'''$. Dit laatste houdt immers in, dat de translaties $T_{a'a''}T_{aa'}$, $T_{aa'}T_{a'a''}$ dezelfde zijn. Beschouwen we eerst het geval, dat



a" niet op de rechte aa' ligt. Omdat a" en a''' de beelden zijn van a' resp a bij de translatie $T_{a'a''}$, vormen dan de punten a,a',a",a''' een parallelogram. Nu is $T_{a'a''}$ hetzelfde als $T_{aa'''}$ en $T_{aa'}$ hetzelfde als $T_{a'''a''}$. Dus $T_{aa'}T_{a'a''}(a) = T_{a'''a''}T_{aa'''}(a) = a''$, wat we moesten hebben. Rest ons nog het geval, dat a" op de rechte aa' ligt. We doen dit af door tussenschakeling van een punt b, niet op die rechte gelegen, onder gebruikmaking van de associativiteit en het zojuist bewezene: $T_{a'a''}T_{aa'} = (T_{ba''}T_{a'b})T_{aa'} = T_{ba''}(T_{a'b}T_{aa'}) = T_{ba''}(T_{aa'}T_{a'b}) = (T_{ba''}T_{aa'})T_{a'b} = (T_{aa'}T_{ba''})T_{a'b} = T_{aa'}(T_{ba''}T_{a'b}) = T_{aa'}T_{a'a''}$.

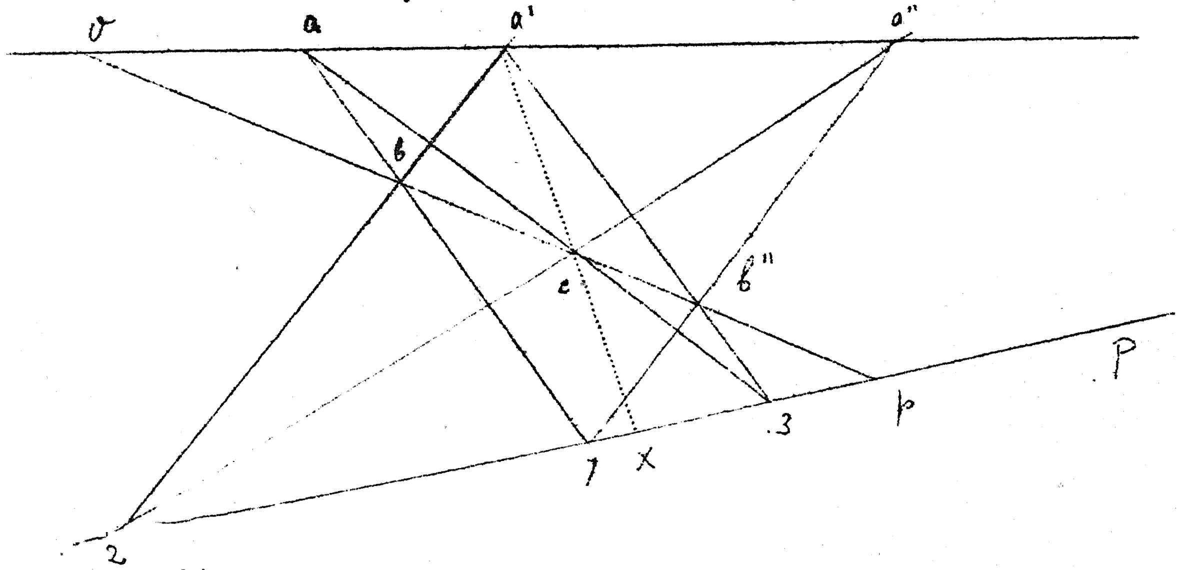
Al met al hebben we bewezen, dat de translaties een commutatieve groep vormen, met als groepoperatie de productvorming zoals die bij transformaties gebruikelijk is.

De tweede soort quasi-perspectiviteit met oneigenlijke as, die we hier wensen te beschouwen, heeft een vast, eigenlijk punt o tot centrum. Zulk een quasi-perspectiviteit is weer bepaald door een toegevoegd paar a,a'. Steeds liggen a,a' met o op een rechte; een rechte ab gaat in een daarmee evenwijdige rechte a'b' over, omdat het snijpunt op de perspectiviteitsas ligt en dus een oneigenlijk punt is. Het ligt voor de hand zo'n quasi-perspectiviteit een dilatatie te noemen, aan te duiden door $D_{aa'}$.



Gemakkelijk is in te zien, dat de dilataties een groep vormen. Zijn b.v. $D_{aa'}, D_{a'a''}$ dilataties, dan is ook $D_{a'a''}D_{aa'}$ een dilatatie. Want a',a" liggen op de rechte oa; evenzo b'b" op de rechte ob; verder snijden de twee rechten ab,a'b' en ook de twee rechten a'b',a"b" elkaar op P; dan ook de twee rechten ab,a"b".

Een belangrijke eigenschap is, dat ook deze groep der dilataties commutatief is. Deze eigenschap ligt dieper dan de vorige die besproken werden, omdat we bij het bewijs gebruik maken moeten van het axioma E (of E^*), wat bij de vorige eigenschappen niet het geval was. Later zullen we zien, dat voor de genoemde eigenschap E^* niet gemist kan worden; dit houdt onder meer in, dat E^* onafhankelijk is van A-D.



We gaan uit van twee dilataties $D_{aa'}, D_{a'a''}$. Daarvoor geldt dus: $D_{a'a''}D_{aa'}(a) = a''$, terwijl o,a,a',a" op een rechte liggen. We kiezen een punt b, niet op die rechte. Dan kunnen we $b'' = D_{a'a''}D_{aa'}(b) = D_{aa''}(b)$ bepalen: o,b,b" liggen op een rechte en ab,a"b" snijden elkaar op P, zeg in het punt 1. De vraag is nu, of ook geldt $D_{aa'}D_{a'a''}(b) = b''$.

We beginnen daartoe met $D_{aa'}D_{a'a''}(b)$ te construeren. Eerst bepalen we het punt $c = D_{a'a''}(b)$; het ligt op ob en de rechten a'b,a"c snijden elkaar op P, zeg in het punt 2. En vervolgens bepalen we $c' = D_{aa'}(c)$ op oc met behulp van het punt 3. Het gaat er nu om, of geldt: c' = b". Het punt c' als snijpunt van oc met a'3 is niet in de figuur getekend.

Zij nog x het oneigenlijke punt van a'c, en y het oneigenlijke punt van a"b. We beschouwen nu een aantal perspectieve relaties tussen puntenreeksen:

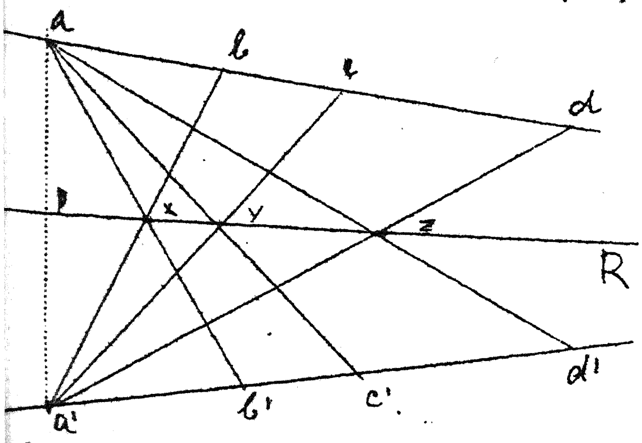
o,a,a',a" is perspectief vanuit c met p,3,x,2
p,3,x,2 is perspectief vanuit a' met p,c',c,b
o,a,a',a" is perspectief vanuit b met p,1,2,y
p,1,2,y is perspectief vanuit a" met p,b",c,b.

Door vergelijking ziet men dat de beide puntviertallen p,c'c,b en p,b",c,b op de rechte oc projectief zijn. Aangezien ze drie punten gemeen hebben, hebben ze ook het vierde punt gemeen. Dus c' = b", wat te bewijzen was.

We knopen aan het voorgaande bewijs nog een opmerking vast. We hebbe laten zien dat de rechte a'3 de rechte bc in b" snijdt. Maar hetzelfde bewijs is van kracht voor de bewering dat de rechten ac en a'b" elkaar op P, d.i. de verbindingsrechte van 1 en 2 snijden. We merken op dat de keuze van de rechte P willekeurig was, evenzo die van O. Dit houdt in, dat we de beide drietallen a,a',a";b",c,b van te voren willekeurig op twee rechten kunnen voorschrijven. Zo krijgen we een stelling die geheel los staat van de beschouwingen over dilataties. Noemen we terwille van de symmetrie, de beide drietallen resp. a_1,a_2,a_3 en b_1,b_2,b_3, dan luidt deze van Pappus afkomstige stelling:

Liggen op twee verschillende rechten twee drietallen punten a_1,a_2,a_3; b_1,b_2,b_3, dan liggen de drie snijpunten van de drie paren rechten $a_1\ b_2,a_2b_1$; a_1b_3,a_3b_1; a_2b_3,a_3b_2 op een rechte.

Korte formulering van dit laatste: de drie snijpunten van de kruisverbindingen liggen op een rechte. Laten we eens op twee verschillende rechten twee projectieve puntenreeksen $\{a,b,c,d,\ldots\}$ en $\{a',b',c',d',\ldots\}$ nemen. We verbinden a met b',c',d',... en a' met b,c,d,... . Dan snijden corresponderende verbindingen elkaar op een rechte R. Immers, beschouw de rechte door twee snijpunten x,y en snijd die met de rechte aa' in p. Dan is, ongeacht welk punt d men kiest, het viertal a,b,c,d perspectief met p,x,y,z^* en dat weer met a',b',c',d^* met z^* = snijpunt van a'd met R en d^* = = snijpunt van az^* met a'b'. Door beide perspectiviteiten wordt aan het viertal a,b,c,d projectief toegevoegd het viertal a',b',c',d^* . Het laatste is dus ook projectief met a',b',c',d'; er zijn drie gemeenschappelijke punten, en dus $d^* = d'$, $z^* = z$. Een gevolg van de stelling van Pappus is nu, dat b.v. ook de rechten cd',c'd elkaar op R snijden. En hetzelfde geldt voor de kruisverbindingen van een willekeurig tweetal paren toegevoegde punten, b.v. d,d',e,e'. Zodoende hebben we de stelling:



Bij een projectiviteit tussen twee puntenreeksen op verschillende dragers snijden alle kruisverbindingen elkaar op een vaste rechte, de z.g.n. <u>Pappus rechte</u>.

Dit houdt nog een andere methode in ter constructie van toegevoegde punten, dan op blz. 11 gegeven werd.

We keren terug tot onze translaties en dilataties en introduceren algebraische symbolen. We herinneren er aan, dat de oneigenlijke rechte P en een punt o gekozen zijn; we kiezen nog een rechte door o en daarop een punt $\neq$ o dat we 1 noemen. De punten van de rechte o1 duiden we aan met Griekse letters; α, β,... is dus o of 1 of een ander punt van deze rechte.

De translatie van o naar a, d.i. T_{oa}, schrijven we als a, en de groepoperatie als optelling; en wel bedoelen we met a+b naar believen het product van de twee translaties T_{oa}, T_{ob} of het beeld van b bij translatie T_{oa}. Blijkbaar stelt 0 de identiteit voor. De dilatatie van 1 naar $\alpha \neq 0$ duiden we aan met α; we gebruiken nu de multiplicatieve schrijfwijze, en wel geven we met $\alpha\beta$ en αX aan het product van twee dilataties, resp. het beeld van een punt X. We gebruiken ook nog de transformatie die aan elk punt o toevoegt, aangeduid door 0, met multiplicatieve schrijfwijze.

Op deze wijze is onder meer het volgende bereikt: elk (eigenlijk) ~~punt van~~ de rechte o1 is weergegeven door een symbool en er bestaan twee compositieregels, geschreven als optelling en vermenigvuldiging, die op ondubbelzinnige wijze aan twee zulke symbolen een nieuw symbool toevoegen. De som $\alpha + \beta$ van twee punten $\alpha + \beta$ n.l. is bepaald als $T_{o\alpha}(\beta)$ en het product $\alpha\beta$ als $D_{o\alpha}(\beta)$. We willen nu o.a. aantonen, dat op deze wijze een commutatief lichaam ontstaan is.

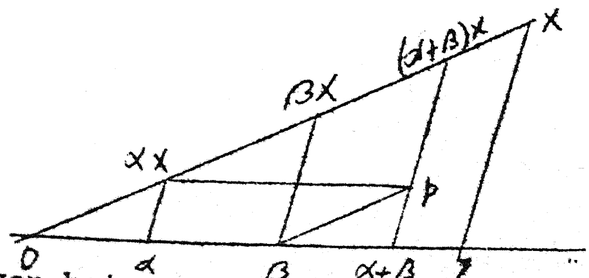
Allereerst is a+0 = 0+a = a, 0.x = 0, 1.x = x, $\alpha . 1 = \alpha$. Merk op, dat de letters nu eens een punt, dan weer een transformatie voorstellen, en dat Griekse letters punten van 01 voorstellen, maar Latijnse letters willekeurige punten mogen aangeven. De uitdrukking x.1 mogen we niet opschrijven, want het zou betekenen het beeld van 1 bij de dilatatie van 1 naar x, en zo'n dilatatie is er alleen als x op 01 ligt. Dat de symbolen α zowel t.a.v. de optelling als t.a.v. de vermenigvuldiging, exclusief 0, een commutatieve groep vormen, volgt gemakkelijk uit het op blz. 20, 21 bewezene, als we bedenken, dat a+b, $\alpha \cdot \beta$ hetzelfde betekenen als het beeld van o bij de opvolgend uitgevoerde translaties T_{ob}, T_{oa} resp. het beeld van 1 bij de opvolgend uitgevoerde dilataties $D_{1\beta}, D_{1\alpha}$.

In de tweede plaats tonen we aan, dat de distributieve wetten gelden voor de symbolen α. We bewijzen zelfs:

(1) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$

(2) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

Ad (1). Voor $\alpha = 0$ of $\beta = 0$ is er niets te bewijzen. Behandelen we nu het geval $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, X niet op 01. We construeren opvolgend $\alpha + \beta$, αX, βX, $(\alpha + \beta)X$; in de figuur zijn evenwijdige lijnen ook evenwijdig getekend.



$\alpha + \beta = \alpha X + (\alpha - \alpha X) + \beta =$

$= T_{o,\alpha X} \cdot T_{\alpha X, \alpha}(\beta)$;

$\alpha X = D_{1\alpha}(X)$, $\beta X = D_{1\beta}(X)$,

$(\alpha + \beta)X = D_{1, \alpha+\beta}(X)$.

In woorden: is p het vierde hoekpunt van het parallelogram, opgebouwd op 0, β, αX, dan ligt $\alpha + \beta$ op 01, zodanig dat de rechte door p en $\alpha + \beta$ evenwijdig is aan de rechte

α en $\alpha\chi$, die weer evenwijdig is aan de rechte door 1 en χ en aan die door β en $\beta\chi$; $(\alpha+\beta)\chi$ ligt dus op de rechte door p en $\alpha+\beta$. Blijkbaar wordt $\alpha\chi+\beta\chi = (\beta\chi-\beta)+\alpha\chi$ op dezelfde manier gevonden als $(\alpha+\beta)\chi$.

Ligt $\chi \neq 0$ wel op 01, dan schakelen we een punt y in, dat niet op 01 ligt, bewijzen eerst $(\alpha+\beta)y = \alpha y + \beta y$ en daaruit $(\alpha+\beta)\chi = \alpha\chi+\beta\chi$ (zie de figuur; laat 1 de rol van y vervullen).

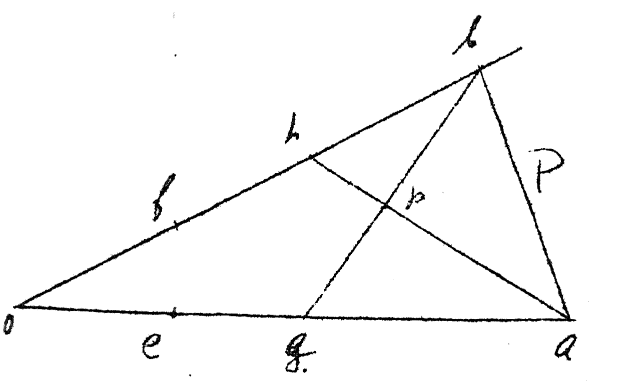
Ad (2). Laten eerst x en y niet op een rechte gelegen zijn. Beschouw het parallelogram met hoekpunten 0,x,y,x+y. Het wordt door de vermenigvuldiging $D_{1\alpha}$ weer in een parallelogram overgevoerd, en wel met hoekpunten 0, α x, α y, α (x+y). Dus geldt $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$. Liggen x en y wel op een rechte, dan splitsen we op een geschikte manier y in y_1+y_2.

We tonen nog een andere relatie aan:

(3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

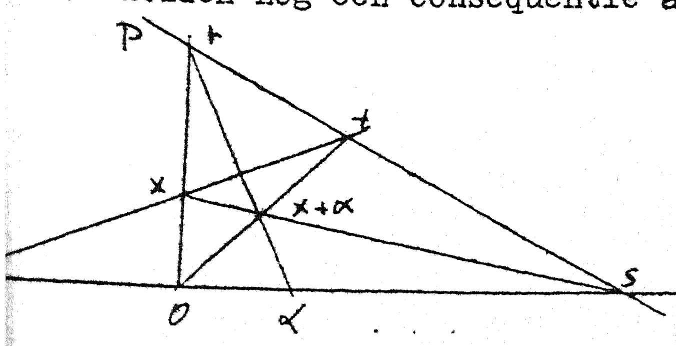
Dit houdt meer in dan de reeds bewezen associativieve wet: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. (3) volgt uit het feit, dat beide leden het beeld van χ bij een vermenigvuldiging voorstellen en dat beide leden voor x=1 gelijk zijn aan $\alpha\beta$.

Om coördinaten in te voeren, moeten we behalve 0 en 1 nog een ander punt kiezen. Terwille van de symmetrie noemen we 1 nu liever e en kiezen een punt f buiten de rechte 01. Zij p een willekeurig punt. We



trekken de rechten door p evenwijdig aan 0e en 0f, d.w.z. door de snijpunten a resp. b van 0e resp. 0f met P. Dan is (zie tekening) p = g+h, waarbij g en h eenduidig op 0e en 0f bepaald zijn. Verder kunnen we g uit e en h uit f krijgen door een vermenigvuldiging; zij g = αe, h = βf. We zien dus dat p eenduidig te schrijven is als $\alpha e+\beta f$. Natuurlijk is ook elke uitdrukking van de gedaante $\alpha e+\beta f$ een punt van het vlak (rechten ha en gb snijden elkaar altijd in een buiten P gelegen punt. We noemen α en β de coördinaten van p.

We leiden nog een consequentie af uit axioma D, dat zegt dat bij



drie verschillende punten een vierde harmonische punt van ieder daarvan verschilt. We gaan bij een punt $\alpha \neq 0$ op 01 het punt $-\alpha = T_{\alpha 0}(0)$ construeren. We doen dit door tussenkomst van een punt x; we construeren x+α m.b.v. oneigenlijke punten r en s, en daaruit $-\alpha$ m.b.v. het parallelogram op 0,x+α,x en oneigenlijke punten s en t. Maar we krijgen zo precies de figuur voor de constructie van het vierde harmonische punt bij 0,s,α; construerende vierhoek is

$x, x+\alpha$,t,r. En dus $-\alpha \neq \alpha$, of anders gezegd $2\alpha \neq o$. Lettende op het begrip karakteristiek van een lichaam, gedefinieerd in §6 van de cursus moderne algebra, kunnen we dus zeggen: het lichaam gevormd door de punten van de rechte o1, heeft de karakteristiek $\neq 2$.

De verkregen resultaten kunnen samengevat worden in deze ene bewering: het is mogelijk in het projectieve vlak operaties te introduceren, zodanig dat de eigenlijke punten een lineaire ruimte van dimensie twee over een commutatief lichaam L van karakteristiek $\neq 2$ vormen.

Zie voor het algemene begrip lineaire ruimte over een ring de cursus moderne algebra, blz. 12. Controleer de vijf daar opgesomde definiërende eigenschappen. Deze rij eigenschappen kan nog iets vereenvoudigd worden op grond van de commutativiteit van het grondlichaam.

In de gewone meetkunde is L het lichaam der reele getallen.

VI. Coördinaten. Rechten. Projectieve transformaties. Dubbelverhoudingen.

In dit hoofdstuk wordt van de commutativiteit der vermenigvuldiging in L zo weinig mogelijk gebruik gemaakt. Zij A de rechte door o en een punt $k \neq o$ met coördinaten k_1, k_2. D.w.z. k_1, k_2 L. We schrijven kort $k = (k_1, k_2)$. De (eigenlijke) punten van A zijn de punten van de gedaante τk, $\tau \in L$. Immers τk ontstaat uit k door de vermenigvuldiging van 1 naar τ, en omgekeerd. De coördinaten van τk zijn τk_1, τk_2, want $\tau k = \tau(k_1 e + k_2 f) = \tau(k_1 e) + \tau(k_2 f) = (\tau k_1)e + (\tau k_2)f$.

Een rechte B door $g = (\gamma_1, \gamma_2)$ gaat bij de translatie $-g$ over in een rechte door o; een punt x van die rechte heeft bijgevolg tot coördinaten

(1) $\xi_1 = \gamma_1 + \tau k_1$, $\xi_2 = \gamma_2 + \tau k_2$ (met (k_1, k_2) zeker een punt $\neq o$ van die tweede rechte). In de betrekking (1) worden de verschillende punten van B geleverd door τ te laten varieren in L; ze vormen een parametervoorstelling van B. We kunnen hieruit τ elimineren en zo geraken tot één enkele betrekking tussen ξ_1 en ξ_2, waarin zekere constanten optreden, en die aangemerkt kan worden als de vergelijking van de rechte B. Bedenke daartoe dat L een lichaam is, dat we dus van elk element $\neq o$ de inverse kunnen nemen. Van k_1 en k_2 is zeker één $\neq o$, zeg k_2. Dan herleiden we:

$$\xi_2 k_2^{-1} = \gamma_2 k_2^{-1} + \tau, \text{ dus } \xi_1 = \gamma_1 + (\xi_2 k_2^{-1} - \gamma_2 k_2^{-1})k_1,$$

(2) of $\xi_1 + \xi_2(-k_2^{-1}k_1) + (\gamma_2 k_2^{-1} k_1 - \gamma_1) = o$.

We vinden dus voor B de lineaire vergelijking (2), ingeval $k_2 \neq o$ is. Uitgaande van $k_1 \neq o$ vinden we iets dergelijks. We kunnen in ieder geval zeggen, dat de coördinaten van een punt van B voldoen aan een betrekking

(3) $\lambda_0 + \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = o$ met $\lambda_1, \lambda_2 \neq o, o$.

Het mooie is, dat omgekeerd de punten van het vlak, wier coördinaten voldoen aan een vergelijking van de gedaante (3), altijd juist de (eigenlijke) punten zijn van een rechte. Want is b.v. $\lambda_1 \neq o$ en stelt men $\xi_2 = \tau$, dan krijgt men $\xi_1 = -\lambda_0 \lambda_1^{-1} - \tau \lambda_2 \lambda_1^{-1}$ en heeft men (1). Met recht heet (3) de vergelijking van een rechte.

Een rechte is volkomen bepaald door de drie coördinaten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ van zijn vergelijking (3). We merken op, dat het geval $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ uitgesloten is en dat de vergelijking niet verandert bij rechtsvermenigvuldiging met een element $\rho \neq o$. We gaan bewijzen, dat, als een rechte aan twee vergelijkingen van de gedaante (3) voldoet, zeg

(4) $\lambda_0 + \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = o, \quad \mu_0 + \xi_1 \mu_1 + \xi_2 \mu_2 = o,$

de beide drietallen $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, (μ_0, μ_1, μ_2) rechtsevenredig zijn, d.w.z. door rechtsvermenigvuldiging wel met een element $\neq o$ in elkaar overgaan.

Zij daartoe $\lambda_2 \neq o$. Dan volgt:

$\lambda_0 \lambda_2^{-1} + \xi_1 \lambda_1 \lambda_2^{-1} + \xi_2 = o$, dus $\xi_2 = -\lambda_0 \lambda_2^{-1} - \xi_1 \lambda_1 \lambda_2^{-1}$,

waaruit volgt

$$\mu_0 + \xi_1 \mu_1 - (\lambda_0 \lambda_2^{-1} + \xi_1 \lambda_1 \lambda_2^{-1}) \mu_2 = o,$$

of $\mu_0 - \lambda_0 \lambda_2^{-1} \mu_2 + \xi_1 (\mu_1 - \lambda_1 \lambda_2^{-1} \mu_2) = o.$

(5) Neem nu twee verschillende punten van de rechte. Zijn de eerste coordinaten van die punten gelijk, dan ook de tweede, op grond van $\lambda_2 \neq o$ en de eerste vergelijking van (4). Dus zijn die eerste coördinaten verschillend. Maar dan volgt uit (5) door aftrekking $\mu_1 - \lambda_1 \lambda_2^{-1} \mu_2 = o$, en dus $\mu_0 - \lambda_0 \lambda_2^{-1} \mu_2 = o$. Vanzelf geldt $\mu_2 - \lambda_2 \lambda_2^{-1} \mu_2 = o$. Anders gezegd:

$$\mu_0 = \lambda_0 \cdot \lambda_2^{-1} \mu_2, \quad \mu_1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2^{-1} \mu_2, \quad \mu_2 = \lambda_2 \cdot \lambda_2^{-1} \mu_2.$$

Dit houdt in dat de drietallen rechtsevenredig zijn.

We noemen de coefficienten in (3) de coördinaten van de door (3) voorgestelde rechte, en spreken van lijncoördinaten.

We hebben thans deze situatie. Bij elke rechte hoort een stel van onderling rechtsevenredige drietallen $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$; het geval $\lambda_1 = \lambda_2 = o$ komt niet voor. Dit alles met uitzondering van de oneigenlijke punten en de oneigenlijke rechte. We gaan nu deze situatie verfraaien door, zoals in de Analytische meetkunde gebruikelijk is, homogene coördinaten in te voeren.

Met een punt laten we n.l. corresponderen een stel van linksevenredige drietallen, en wel met (η_1, η_2) het stel (ξ_0, ξ_1, ξ_2) met $\xi_0 \neq o$, $\xi_0^{-1} \xi_1 = \eta_1$, $\xi_0^{-1} \xi_2 = \eta_2$. Aan de oneigenlijke rechte voegen we toe het stel (λ_0, o, o); aan een oneigenlijk punt, en wel b.v. het oneigenlijke punt van de rechte door o en (k_1, k_2)

het drietal (o,k_1,k_2) en de daarmee linksevenredige drietallen.

Hiermee is bereikt: aan alle punten en rechten van het vlak, eigenlijke, zowel als oneigenlijke, is een stel links- en resp. rechtsevenredige drietallen toegevoegd. Alle stellen treden op, en wel steeds eenmaal- uitgezonderd het stel (o,o,o). We bewijzen nu, dat onvoorwaardelijk geldt: een punt en een rechte zijn incident, als bijbehorende drietallen (ξ_0, ξ_1, ξ_2) en $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ voldoen aan de relatie

(6) $\xi_0 \lambda_0 + \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = o.$

Voor eigenlijke punten en rechten volgt het uit (3) en de invoering van lijn- en puntcoördinaten. Zijn een eigenlijke rechte en een oneigenlijk punt (o,k_1,k_2) incident, dan wil dat zeggen, dat de rechte evenwijdig is aan de rechte door o en (k_1,k_2), en dus wegens (2) b.v. als coördinaten heeft: $\gamma_2 k_2^{-1}k_1 - \gamma_1$, 1, $-k_2^{-1}k_1$; maar dan is voor dat punt en die rechte aan (6) voldaan wegens:

$$\gamma_2 k_2^{-1}k_1 . o + k_1 . 1 + k_2 . -k_2^{-1}k_1 = k_1 - k_1 = o.$$

Is de rechte oneigenlijk- en dus het punt ook, dan geldt (6) op grond van $\lambda_0 . o + o . k_1 + o . k_2 = o.$

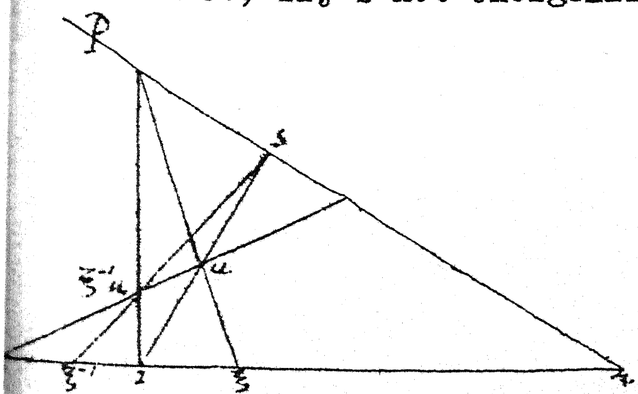
Thans wensen we collineaties en projectiviteiten uit te drukken met behulp van het gevonden analytische model. Allereerst onderzoeken we de projectiviteiten van de rechte o1 in zichzelf.

De translatie $T_{o\alpha}$ en de dilatatie $D_{1\rho}$, $\rho \neq o$ zijn quasi-perspectiviteiten van het vlak. Op de rechte o1 induceren zij projectiviteiten, welke met onze ingevoerde notaties geschreven kunnen worden als

(7) $\xi' = \xi + \alpha$, $\xi' = \rho\xi$ $(\rho \neq o)$.

In beide gevallen blijft het oneigenlijke punt van o1, zeg r, op zijn plaats.

De overgang van ξ op ξ^{-1} is ook een projectiviteit van de rechte o1 in zichzelf. Construeren we ξ^{-1}. We kiezen daartoe een punt u buiten o1; zij s het oneigenlijke punt daarvan. We bepalen $\xi^{-1}u$ uit u door de dilatatie van ξ naar 1; door diezelfde dilatatie gaat 1 in ξ^{-1} over. Vergelijk de constructie van $\xi^{-1}u$ uit u,1,ξ met die van $u - \xi$ uit u,o,ξ. Merk op, dat r,u,s vast zijn, maar ξ varieert. Het blijkt nu, dat de overgang van ξ op ξ^{-1} aldus verkregen kan worden door aaneenschakeling van drie perspectiviteiten: projecteer uit u op de oneigenlijke rechte P, dan uit 1 op ou en tenslotte uit s weer op o1. Dus is



de transformatie

(8) $\xi' = \xi^{-1}$

een projectiviteit. Men leest in de figuur af, dat o in r en r in o overgaat.

We willen nu onder gebruikmaking van axioma E laten zien, dat elke transformatie

(9) $\xi' = \dfrac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$ met $\alpha\delta - \beta\gamma \neq o$

een projectiviteit is van de rechte o1 in zichzelf, en dat omgekeerd elke zodanige projectiviteit geschreven kan worden als een transformatie van de gedaante (9).

Bewijs: Allereerst bedenke men, dat het lichaam L op grond van E commutatief is, dat dus het quotient van twee elementen η, ζ met $\zeta \neq o$ zowel door $\zeta^{-1}\eta$ als door $\eta\zeta^{-1}$, en dus zonder gevaar door $\frac{\eta}{\zeta}$ aangegeven kan worden. De uitdrukking in (9) heeft dus een eenduidig bepaalde betekenis. Zelfs mag de noemer van het rechterlid o zijn; we bedoelen dan met ξ' het oneigenlijke punt r van de rechte o1. We geven r wel aan door het symbool ∞. Voor ∞ gelden dan op grond van de bij (7) en (8) gemaakte opmerkingen de rekenregels:

$\infty + \alpha = \infty$, $\rho . \infty = \infty$ $(\rho \neq o)$, $\infty^{-1} = o$.

We schrijven nu:

$$\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta} = \frac{\alpha\gamma^{-1}(\gamma\xi+\gamma\alpha^{-1}\beta)}{\gamma\xi+\delta} = \alpha\gamma^{-1}\,\frac{\gamma\xi+\delta+(\gamma\alpha^{-1}\beta-\delta)}{\gamma\xi+\delta}$$

$$= \alpha\gamma^{-1} + \alpha\gamma^{-1}\,\frac{\gamma\alpha^{-1}\beta-\delta}{\gamma\xi+\delta} = \alpha\gamma^{-1} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\xi+\gamma\delta}$$

en kunnen dan (9) oplossen in enige transformaties van het type (7) of (8). We kunnen n.l. gemakkelijk een aantal van die transformaties aanwijzen, die, achter elkaar uitgevoerd, de transformatie (9) opleveren. We onderscheiden hierbij de gevallen $\gamma \neq o$ en $\gamma = o$. In het eerste geval leiden

$$\xi^{(1)} = \gamma^2\xi, \quad \xi^{(2)} = \xi^{(1)} + \gamma\delta$$

$$\xi^{(3)} = \left\{\xi^{(2)}\right\}^{-1}, \quad \xi^{(4)} = (\beta\gamma - \alpha\delta)\,\xi^{(3)}$$

$$\xi' = \xi^{(4)} + \alpha\gamma^{-1},$$

waarbij speciaal de vierde transformatie van het type (7) is op grond van de voorwaarde $\beta\gamma - \alpha\delta \neq o$, tot (9). In het tweede geval is $\xi' = \delta^{-1}(\alpha\xi+\beta) = \delta^{-1}\alpha\xi + \delta^{-1}\alpha\beta$ onmiddellijk te verkrijgen door combinatie van twee transformaties (7); $\delta^{-1}\alpha = o$, d.w.z. $\alpha = o$ is nu niet mogelijk wegens $\gamma = o$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq o$.

Laat omgekeerd een projectiviteit π gegeven zijn. Laten φ, ψ, ω de punten zijn, die overgaan in o,1,∞. Dus $\pi(\varphi) = o$, $\pi(\psi) = 1$, $\pi(\omega) = \infty$. We beschouwen nu de transformatie

(10) $\xi' = \dfrac{\xi-\varphi}{\xi-\omega} : \dfrac{\psi-\varphi}{\psi-\omega}$;

in de gevallen $\varphi = \infty$, of $\psi = \infty$ of $\omega = \infty$ moet (10) vervangen worden door resp.

11) $\xi' = \frac{\psi - \omega}{\xi - \omega}, \quad \xi' = \frac{\xi - \varphi}{\xi - \psi}, \quad \xi' = \frac{\xi - \varphi}{\xi - \psi}.$

Omdat π een projectiviteit is, d.w.z. een eeneenduidige transformatie van de rechte o1 in zichzelf, zijn φ, ψ, ω altijd verschillend. Dan is altijd (10)(resp. (11) begrepen in het type (9). Dus is (10) een projectiviteit. Verder voert (10) de punten φ, ψ, ω opvolgend over in o,1,∞, stemt dus met π in drie punten overeen, is dus hetzelfde als π.

Door gebruikmaking van de reeds ingevoerde homogene coördinaten kunnen we een onbevredigend element in de voorgaande ontwikkeling, n.l. het gebruik van het symbool ∞, elimineren. Een punt ξ op de rechte o1 heeft als homogene coördinaten (ξ_0, ξ_1,o), waarbij $\xi_0^{-1}\xi_1 = \xi$ is; voor $\xi \neq \infty$ is hierbij $\xi_0 \neq 0$ te nemen en voor $\xi = \infty$ nemen we $\xi_0 = 0$, $\xi_1 \neq 0$. Nu wordt (9):

$$\xi_0'^{-1}\xi_1' = \frac{\alpha\,\xi_0^{-1}\xi_1 + \beta}{\gamma\,\xi_0^{-1}\xi_1 + \delta};$$

ofwel

$$12)\quad \begin{cases} \xi_1' = \alpha\,\xi_1 + \beta\,\xi_0 \\ \xi_0' = \gamma\,\xi_1 + \delta\,\xi_0 \end{cases} \quad \text{met} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dit moet dan zo gelezen worden: bij elk punt (ξ_0, ξ_1,o) wordt ~~één exemplaar~~ van het stel evenredige drietallen (ξ_0', ξ_1',o), dat bij het beeld behoort, gegeven door (12). De meest algemene projectiviteit van de rechte o1 in zichzelf wordt in symbolentaal weergegeven door formule (12), en omgekeerd. Formule (12) heeft het karakter van een lineaire transformatie.

De projectiviteit, die ξ_1, ξ_2, ξ_3 overvoert in resp. ξ_1', ξ_2', ξ_3', kan worden geschreven in de vorm

$$13)\quad \frac{\xi - \xi_2}{\xi - \xi_1} : \frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1} = \frac{\xi' - \xi_2'}{\xi' - \xi_1'} : \frac{\xi_3' - \xi_2'}{\xi_3' - \xi_1'},$$

want enerzijds krijgt men $\xi' = \xi_i'$ bij invulling van $\xi = \xi_i$(i= = 1,2,3), en anderzijds wordt ξ' na oplossen een uitdrukking van de gedaante (9) in ξ. Bij dit alles zijn inhomogene coördinaten gebruikt. Ingeval een der getallen ξ_i of ξ'_i gelijk aan ∞ is, moet men eenzelfde wijziging aanbrengen als in (10).

Door invoering van een nieuw begrip kunnen we (13) nog anders lezen. Als ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 vier punten van de rechte o1 zijn, dan noemen we de uitdrukking

$$14)\quad \frac{\xi_4 - \xi_2}{\xi_4 - \xi_1} : \frac{\xi_3 - \xi_2}{\xi_3 - \xi_1}$$

de <u>dubbelverhouding</u> van de vier punten ξ_i, geschreven :

DV(ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4). Bij een projectiviteit zijn voor vier punten en hun beelden de uitdrukkingen (14) aan elkaar gelijk wegens (13), anders gezegd: de dubbelverhouding is invariant. Leggen we omgekeerd aan een eeneenduidige transformatie van de rechte o1 alleen maar de eis op, dat daarbij de dubbelverhouding van drie vaste punten en een vierde veranderlijk punt invariant is, dan is die transformatie een projectiviteit, omdat die eis een andere manier van uitdrukken van (13) is. Dus: projectieve transformaties zijn gekenmerkt door het feit dat ze DV invariant laten; voorts zijn ze identiek met de transformaties van het type (9).

Kiezen we in (13) $\xi_1' = \infty$, $\xi_2' = o$, $\xi_3' = 1$, dan wordt het rechterlid ξ'. De dubbelverhouding van vier punten is dus de coördinaat, die het vierde punt krijgt wanneer men door een projectieve transformatie de eerste drie punten overvoert in ∞, o, 1. Men noemt DV(ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ) de projectieve coördinaat van ξ t.o.v. de punten ξ_1, ξ_2, ξ_3. We kunnen met bovenstaande redenering gemakkelijk een multiplicatieve eigenschap van de dubbelverhouding bewijzen. We hebben:

$$\mathrm{DV}(\infty, o, 1, \xi) = \xi, \quad \mathrm{DV}(\infty, o, \xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}, \quad \mathrm{DV}(\infty, o, 1, \eta) = \eta$$

Omdat nu de dubbelverhouding een projectieve invariant is, geldt:

5) $\mathrm{DV}(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \,.\, \mathrm{DV}(\alpha, \beta, \xi, \eta) = \mathrm{DV}(\alpha, \beta, \gamma, \eta)$.

Projectieve coördinaten ontstaan uit elkaar door een gebroken lineaire transformatie.

Met homogene coördinaten krijgen we het volgende: de DV van vier punten op o1 is gelijk aan λ, als we die punten door een transformatie (12) over kunnen voeren in (1,o,o),(o,1,o),(1,1 ,o),(1,λ,o). Toepassing van (12) leert ons dan: onder de stellen evenredige drietallen voor de vier punten kunnen we zulke keuzen doen, dat er komt (δ, γ, o), (β, α, o), $(\delta + \beta, \gamma + \alpha, o)$, $(\delta + \lambda\beta, \gamma + \lambda\alpha, o)$. En omgekeerd is de DV van zulke vier punten altijd gelijk aan λ.

De DV van vier punten op een willekeurige rechte, een andere rechte dan o1 dus, definieren we als de DV van vier punten op o1, waar dat eerste viertal door een collineatie in over te voeren is. Deze definitie is geoorloofd, omdat die DV op o1 bestand is tegen een projectiviteit en dus niet afhangt van de in de definitie genoemde collineatie. Speciaal is de DV invariant voor projectie van het viertal uit een punt op een andere rechte.

We merken op grond van (1) op, dat, in de taal der homogene coördinaten, wanneer x = (ξ_0, ξ_1, ξ_2) en y = (η_0, η_1, η_2) twee verschillende punten van een rechte zijn, de punten van die rechte juist gepresenteerd worden door de drietallen van de gedaante λ x+ μ y. Want we kunnen (1) zo uitdrukken: de niet- homogene coördinaten van een punt van de rechte door de beide punten met

met homogene coördinaten $(1,\gamma_1,\gamma_2)$ en $(0,k_1,k_2)$ zijn te schrijven in de gedaante:

$$\xi_1=\gamma_1+\tau k_1=\gamma_1+k_1+(\tau-1)k_1\ ,\ \xi_2=\gamma_2+\tau k_2=\gamma_2+k_2+(\tau-1)k_2\ ;$$

homogeen worden ze dus gegeven door $p+(\tau-1)q$, als we nemen $p=(1,\gamma_1+k_1,\gamma_2+k_2)$, $q=(0,k_1,k_2)$, wat beide punten van de rechte zijn. Door linksvermenigvuldiging met een factor $\neq 0$ krijgt men de punten in de gedaante $\lambda p+\mu q$; daar is tevens het punt q in bevat door de keuze $\lambda=0$, $\mu=1$. En we zijn in deze voorstelling niet gebonden aan de punten p en q; b.v. vervanging van q door $r=\lambda_1 p+\mu_1 q$, verschillend van p, dus met $\mu_1\neq 0$, gaat zo: $q=\mu_1^{-1}r-\mu_1^{-1}\lambda_1 p$, $\lambda p+\mu q=(\lambda-\mu\mu_1^{-1}\lambda_1)p+\mu\mu_1^{-1}r$. Men kan het resultaat van deze alinea ook verkrijgen door discussie van de schaar oplossingen van de vergelijking (6) bij vaste λ.

We willen nu laten zien dat algemeen vier punten van een rechte met DV=λ voor te stellen zijn door drietallen

$$x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2),\ y=(\eta_0,\eta_1,\eta_2),\ x+y=(\xi_0+\eta_0,\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)$$

$$x+\lambda y=(\xi_0+\lambda\eta_0,\xi_1+\lambda\eta_1,\xi_2+\lambda\eta_2).$$

We beschouwen eerst het geval dat de rechte niet door (0,0,1), het oneigenlijke punt van de rechte 01, gaat. Dan zijn van een punt van die rechte nooit de eerste twee coördinaten tegelijk 0. Door projectie uit (0,0,1) op 01 gaat een punt (ξ_0,ξ_1,ξ_2) over in het punt $(\xi_0,\xi_1,0)$. Laten de vier genoemde punten met DV=λ bij die projectie overgaan in x',y',z',u', allen met laatste coördinaat 0. Omdat ook de geprojecteerde punten DV=λ hebben, is blijkens een hierboven uit (12) afgeleide bewering een keuze voor de drietallen te doen, zodat $z'=x'+y'$, $u'=x'+\lambda y'$. Zijn nu x',y',z',u' ontstaan uit x,y,z,u , dan voldoen die aan de vraag. We kunnen de rechte waarvan we uitgingen, ook nog b.v. vanuit (1,0,0) projecteren op een andere rechte; de redenering is daarvoor te herhalen en we hebben zo ook het geval, dat de rechte wel door (0,0,1) gaat, afgehandeld.

In het bovenstaande zit opgesloten, dat we voor drie verschillende punten op een rechte als drietallen kunnen uitzoeken (ξ_0,ξ_1,ξ_2), (η_0,η_1,η_2), $(\xi_0+\eta_0,\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2)$. Dit volgt ook uit de voorlaatste alinea.

We zagen: zijn $r=\alpha_1 p+\alpha_2 q$, $s=\beta_1 p+\beta_2 q$ twee verschillende punten van de rechte door p en q, dan kan een willekeurig punt $\gamma_1 p+\gamma_2 q$ van de rechte ook geschreven worden als $\rho r+\sigma s$. D.w.z. zijn de paren α_1,α_2 en β_1,β_2 niet links-evenredig, dan bestaan er elementen ρ, σ, zodat $\gamma_1=\rho\alpha_1+\sigma\beta_1$, $\gamma_2=\rho\alpha_2+\sigma\beta_2$ is. We bewijzen dit nu rechtstreeks voor willekeurige γ_1,γ_2.

Uit het gegeven volgt dat er geen elementen $\lambda_1,\lambda_2\neq 0,0$ zijn waarvoor $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1=0$, $\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2=0$ is; dit houdt tevens in dat $\alpha_1=\alpha_2=0$ uitgesloten is. Zij $\alpha_1\neq 0$. Allereerst merken we op dat er ook geen $\mu_1,\mu_2\neq 0,0$ zijn, zodat $\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2=0$, $\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2=0$ is; waren er wel zulke μ_1,μ_2 en kozen we $\lambda_1,\lambda_2\neq 0,0$ met $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1=0$, dan was voor <u>die</u> λ_1,λ_2 tevens

$$0=\lambda_1(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)+\lambda_2(\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2)=(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\beta_1)\mu_1+(\lambda_1\alpha_2+\lambda_2\beta_2)$$

$= (\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2)\mu_2$ en dus $\lambda_1\gamma_2 + \lambda_2\beta_2 = 0$, want $\alpha_1 \neq 0$ brengt noodzakelijk $\mu_2 \neq 0$ met zich mee.

We kiezen nu getallen μ_1 en μ_2, en wel $\mu_2 = 1$, $\mu_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2$. Dan is $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 = 0$, $\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_2 \neq 0$ en volgt uit de oorspronkelijke vergelijkingen

$$\gamma_1\mu_1 + \gamma_2 = \rho(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2) + \sigma(\beta_1\mu_1 + \beta_2) = \sigma(\beta_1\mu_1 + \beta_2).$$

Hieruit is σ op te lossen, daarna is wegens $\alpha_1 \neq 0$ ook ρ te vinden. We merken nog op dat er ook maar één oplossing voor ρ, σ is; immers het stel $0 = \rho\alpha_1 + \sigma\beta_1$, $0 = \rho\alpha_2 + \sigma\beta_2$ heeft slechts één oplossing: de triviale.

We tonen ook nog aan: bezit van de twee vergelijkingsstelsels in drie variabelen ρ, σ, τ:

$$\begin{cases} \rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0 = 0 \\ \rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 + \tau\gamma_1 = 0 \\ \rho\alpha_2 + \sigma\beta_2 + \tau\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0 = \delta_0 \\ \rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 + \tau\gamma_1 = \delta_1 \\ \rho\alpha_2 + \sigma\beta_2 + \tau\gamma_2 = \delta_2 \end{cases}$$

het eerste alleen de triviale oplossing $\rho = \sigma = \tau = 0$, dan bezit het tweede voor elke keuze van δ_0, δ_1, δ_2 een oplossing, en wel eenduidig bepaald.

<u>Bewijs</u>: Het geval $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ kan niet voorkomen: men kan dan gemakkelijk een niet triviale oplossing van het eerste stelsel aangeven. Zonder beperking der algemeenheid mogen we veronderstellen: $\alpha_0 \neq 0$. Er zijn elementen λ_1, λ_2, zodat $\alpha_1 + \alpha_0\lambda_1 = 0$, $\alpha_2 + \alpha_0\lambda_2 = 0$ is. Dan volgt:

$$\rho(\alpha_1 + \alpha_0\lambda_1) + \sigma(\beta_1 + \beta_0\lambda_1) + \tau(\gamma_1 + \gamma_0\lambda_1) = \delta_1 + \delta_0\lambda_1$$
$$\rho(\alpha_2 + \alpha_0\lambda_2) + \sigma(\beta_2 + \beta_0\lambda_2) + \tau(\gamma_2 + \gamma_0\lambda_2) = \delta_2 + \delta_0\lambda_2,$$

wat we kunnen noteren als $\sigma\beta_1' + \tau\gamma_1' = \delta_1'$, $\sigma\beta_2' + \tau\gamma_2' = \delta_2'$.

Een oplossing in σ, τ van de vergelijkingen $\sigma\beta_1' + \tau\gamma_1' = 0$, $\sigma\beta_2' + \tau\gamma_2' = 0$ is noodzakelijk de triviale, krachtens de volgende redenering. Stel, dat er zo 'n oplossing $\sigma, \tau \neq 0,0$ was. We kunnen wegens $\alpha_0 \neq 0$ zodanig ρ bepalen, dat $\rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0 = 0$; voor de zo gevonden ρ, σ, τ is dan ook $\rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 + \tau\gamma_1 = 0$ wegens $\rho\alpha_1 + \sigma\beta_1 + \tau\gamma_1 = \sigma\beta_1' + \tau\gamma_1' - (\rho\alpha_0 + \sigma\beta_0 + \tau\gamma_0)\lambda_1$, en evenzo $\rho\alpha_2 + \sigma\beta_2 + \tau\gamma_2 = 0$. Dit is in strijd met de onderstelling, dat ρ, σ, τ met die eigenschappen noodzakelijk het stel 0,0,0 moeten zijn.

Volgens het vorige is nu $\sigma\beta_1' + \tau\gamma_1' = \delta_1'$, $\sigma\beta_2' + \tau\gamma_2' = \delta_2'$ eenduidig oplosbaar. Tenslotte is bij σ, τ nog ρ te bepalen uit de eerste vergelijking van het tweede stel, wegens $\alpha_0 \neq 0$. De zo gevonden ρ, σ, τ voldoen aan het tweede stel vergelijkingen.

We beschouwen nu een collineatie, die de punten (1,0,0), (0,0,1), (1,1,1) resp. overvoert in $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$, $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, $(\delta_0, \delta_1, \delta_2)$. De punten hebben kennelijk algemene ligging en de collineatie is door deze gegevens bepaald. We mogen het bovenstaande toepassen en hebben dus elementen ρ, σ, τ zodat $\rho.(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) + \sigma.(\beta_0, \beta_1, \beta_2) + \tau.(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ is. Wegens de algemene ligging zijn tevens ρ, σ, τ allen van 0 verschillend. En we kunnen de eerste drie genoemde drietallen van te voren door zulke linksevenredige drietallen vervangen denken, dat $\rho=\sigma=\tau=1$ uitvalt. We noemen de vier drietallen onder deze omstandigheden opvolgend x,y,z,u en hebben dus u=x+y+z.

We vragen nu naar het beeld van het punt (λ,μ,ν) bij de collineatie. Het antwoord zal heel simpel zijn en aanleiding geven tot een analytische formule voor de collineatie. Het beeld van (1,1,0) moet liggen op de rechte door x en y, en ook wegens (1,1,0)=(1,1,1)-(0,0,1) op de rechte door x+y+z en z. Dat beeld moet dus x+y zijn. Evenzo zijn de beelden van (1,0,1) en (0,1,1) resp. x+z en y+z. Verder gaan de punten (1,1,0), (0,0,1), (1,1,1) over in resp. x+y,z,x+y+z; het punt ($1,1,\nu$) gaat dus over in $x+y+\nu z$; beide viertallen hebben DV=ν. Evenzo betoogt men dat ($1,0,\nu$) en ($0,1,\nu$) overgaan in $x+\nu z$ resp. $y+\nu z$. Maar dan is op dezelfde manier $\lambda x+\mu y+\nu z$ het beeld van (λ,μ,ν). Noemen we ξ,η,ζ de coördinaten van $\lambda x+\mu y+\nu z$, dan krijgen we de volgende beschrijving van de collineatie.

$$
(16) \qquad \begin{cases} \xi = \lambda\alpha_0+\mu\beta_0+\nu\gamma_0 \\ \eta = \lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1 \\ \zeta = \lambda\alpha_2+\mu\beta_2+\nu\gamma_2 \end{cases} ,
$$

wat we een lineaire transformatie noemen. Uit de beschouwingen volgt nog, dat elke lineaire transformatie van het type (16), waarbij de coefficientenkolommen niet lineair afhankelijk zijn, een collineatie weergeeft. Men ziet duidelijk, dat (16) een uitbreiding is van (12). De formule moet weer zo gelezen worden dat bij een punt met drietal homogene coördinaten λ,μ,ν formule (16) een exemplaar van het stel linksevenredige drietallen levert, dat bij het beeld hoort.

Er is nog een andere opvatting van transformatie, die niet onvermeld blijve. We hadden tot nog toe steeds transformaties van het vlak of een rechte en de punten daarvan, d.w.z. een eeneenduidige toevoeging van die punten aan andere punten. Maar we kunnen ook, wat in de analytische meetkunde gebeurt, een transformatie van coördinaten ondernemen. D.w.z. we kiezen een andere rechte als oneigenlijke rechte en andere punten als 0,e,f en definieren met behulp daarvan onze coördinaten. We kunnen het zo zien, dat b.v. de punten 0,e,f,e+f ons "coördinatenstelsel" vastleggen. De genoemde vier punten hebben algemene ligging. Hebben we nu twee"coördinatenstelsels", dan wordt daardoor de volgende eeneenduidige afbeelding $x \leftrightarrow x'$ van het vlak geinduceerd: de collineatie die het oude viertal in het nieuwe viertal overvoert. Blijkbaar worden bij deze afbeelding sommen en producten van lichaamselementen in elkaar afgebeeld, want alles is gedefinieerd met behulp van zekere figuren, die bij de afbeelding meegaan. En het is geen bezwaar aan x dezelfde coördinaten t.o.v. het oude viertal als aan x' t.o.v. het nieuwe viertal toe te kennen.

De nieuwe coördinaten van x' zijn gelijk aan de oude van x en ontstaan dus uit de nieuwe coördinaten van x' door dezelfde lineaire transformatie van het type (16), als die de collineatie $x \to x'$ beschrijft. Men kan ook de projectieve coördinaat van een punt op een rechte t.a.v. drie andere, verschillende punten op die rechte in dit licht zien. De dubbelverhouding is invariant voor een transformatie van coördinaten.

Opgaven:

1. Ga na, waarom we voor de rechte lijn een lineaire vergelijking vonden.
2. $DV(\alpha, \beta, \gamma, \delta).DV(\alpha, \beta, \delta, \gamma)=1$
3. In een lichaam heeft de vergelijking $\eta^2=1$ hoogstens twee oplossingen.
4. Leid uit 2., 3. en axioma D af: zijn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ een harmonisch viertal, dan is $DV(\alpha, \beta, \gamma, \delta)= -1$.
5. Zij α een punt van 01. Hoe construeert men m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{m}{n\alpha}$ (m en n natuurlijke getallen).
6. Wat is het snijpunt van een rechte (1,1,1) met de rechte door twee der drie punten (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).
7. Wat is de dubbelverhouding in de gewone meetkunde. Bereken de DV van de vier punten op afstanden -1, 1, r, , van 0 op de rechte 01.
8. Voer het bewijs van de stelling op blz. 31 als de voorwaarde vervangen wordt door een analoge betreffende het stelsel

$$\lambda\alpha_0+\mu\alpha_1+\nu\alpha_1=\lambda\beta_0+\mu\beta_1+\nu\beta_2=\lambda\gamma_0+\mu\gamma_1+\nu\gamma_2=0$$

9. Als er drie stellen (ξ_0, ξ_1, ξ_2) zijn, die aan de vergelijking (6) met vaste λ_i voldoen, wat kunt U daar dan van zeggen?
10. Uit de theorie weten we, dat de gebroken lineaire transformaties van van het type (9) een groep vormen. Bewijs dit direct.

Aequivalentie van projectieve en Analytische Meetkunde!

In het voorgaande hebben we bewezen: hebben we een projectieve meetkunde, waarin de axioma's A,A',B,B',C,D,E^1 gelden, dan bestaat er een commutatief lichaam L van karakteristiek $\neq 2$ met de volgende eigenschappen: er is een eeneenduidige toevoeging mogelijk tussen de punten en de stellen evenredige drietallen $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0,0,0)$ enerzijds en tussen de rechten en anderzijds de stellen evenredige drietallen $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0,0)$ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in L)$, zodat incidentie van een punt en een rechte zich weerspiegelt in de relatie (6), blz 27.

We gaan nu omgekeerd uit van een willekeurig commutatief lichaam L van karakteristiek $\neq 2$. We voeren aan de hand van dit lichaam zekere grootheden in, die we punten en rechten noemen, en definieren het begrip incidentie. En wel is een punt een stel evenredige elementdrietallen $\neq (0,0,0)$; een rechte wordt ook door zo'n stel gerepresenteerd; het punt (ξ_0, ξ_1, ξ_2) en de rechte $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ heten incident

dan en slechts dan, als voldaan is aan $\xi_0\lambda_0+\xi_1\lambda_1+\xi_2\lambda_2=0$.
We zijn nu in staat te bewijzen dat de genoemde grootheden voldoen aan de axioma's A,A',B,B',C,D,E*. Dus hebben we een projectieve Meetkunde.
We hebben dan bereikt:

1°. De projectieve meetkunde, zoals door ons opgezet, is vatbaar voor een interpretatie(zie bladz. 6).

2°. De projectieve meetkunde en de analytische meetkunde (hier geformuleerd met homogene coördinaten voor de punten, wat niet essentieel is) lopen parallel.

3°. De in de projectieve meetkunde afgeleide eigenschappen, b.v. betreffende dubbelverhoudingen, gelden voor elke (vlakke) analytische meetkunde, opgebouwd m b.v. een commutatief lichaam van karakteristiek $\neq 2$, worden alleen vask gemakkelijker ingezien en bewezen aan de hand van de begrippen van de projectieve meetkunde, die aansluiten aan onze meetkundige intuitie.

Axioma A. Zijn $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ en $y=(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$ twee verschillende punten, dan is precies één stel evenredige drietallen $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$, zodat geldt:

(1) $\xi_0\lambda_0+\xi_1\lambda_1+\xi_2\lambda_2=0,\quad \eta_0\lambda_0+\eta_1\lambda_1+\eta_2\lambda_2=0.$

__Bewijs__. Zij b.v. $\xi_2\neq 0$. Zij $\lambda=-\xi_2^{-1}\eta_2$. Voor het drietal $(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2)=(\lambda\xi_0+\eta_0,\ \lambda\xi_1+\eta_1,\ \lambda\xi_2+\eta_2)$, ook ook geschreven als $\lambda x+y$, is dan $\zeta_2=0$. In plaats van (1) kunnen we evengoed oplossen

(2) $\xi_0\lambda_0+\xi_1\lambda_1+\xi_2\lambda_2=0,\quad \zeta_0\lambda_0+\zeta_1\lambda_1=0.$

Want voldoet een drietal $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ aan (1), dan ook aan (2); en omgekeerd. Omdat nu x en y verschillende punten zijn, zijn ζ_0 en ζ_1 niet beide gelijk aan 0. De tweede vergelijking van (2) kunnen we, eenduidig op een evenredigheidsfactor na, oplossen. B.v. als $\zeta_1\neq 0$, voldoet $\lambda_0=1$, $\lambda_1=-\zeta_1^{-1}\zeta_0$. Uit de eerste vergelijking van (2) volgt dan ook λ_2.

Axioma A' wordt precies zo geverifieerd.

__Stelling__. Elk punt van de door twee verschillende punten x en y bepaald rechte is te schrijven in de gedaante $\lambda x+\mu y$ ($\lambda,\mu\neq 0,0$).

__Bewijs__. Het omgekeerde is onmiddellijk duidelijk als we de beide vergelijkingen van (1) met λ resp. μ vermenigvuldigen en optellen. Nu redeneren we als volgt. Zij $x=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$, dan zijn die drietallen niet evenredig en dus b.v. de paren ξ_0,ξ_1 en η_0,η_1 niet evenredig. Laat $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ de rechte zijn en $z=(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2)$ een willekeurig punt daarvan. Er zijn elementen $\lambda,\mu\neq 0,0$ zodat geldt $\lambda\xi_0+\mu\eta_0=\zeta_0$, $\lambda\xi_1+\mu\eta_1=\zeta_1$; maar er zijn geen elementen λ_0,λ_1 waarvoor geldt $\xi_0\lambda_0+\xi_1\lambda_1=\eta_0\lambda_0+\eta_1\lambda_1=0$. Voor die rechte is dan $\lambda_2=0$ onmogelijk.
Uit $(\lambda\xi_0+\mu\eta_0)\lambda_0+(\lambda\xi_1+\mu\eta_1)\lambda_1$

$+ (\lambda \xi_2 + \mu \eta_2) \lambda_2 = 0$ en $\zeta_0 \lambda_0 + \zeta_1 \lambda_1 + \zeta_2 \lambda_2 = 0$ volgt dan $\lambda \xi_2 + \mu \eta_2 = \zeta_2$. Dus $z = \lambda x + \mu y$.

Axioma's B en B'. Het lichaam L bevat in elk geval de elementen 0,1. Het punt (1,0,0) en de rechte (1,0,0) zijn niet incident. Dus geldt B'. Verder wordt een willekeurige rechte door de rechten (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) zeker in twee versdhillende punten x en y gesneden. Met x en y ligt ook $x + y \neq x,y$ op de rechte. Dus geldt B.

Axioma C. Laten x,y,z en u,v,w twee driehoeken zijn, perspectief vanuit een punt t. Dan zijn de punten x,y,t incident met een rechte, evenzo y,v,t en z,w,t. Dus zijn er tweetallen λ_1, μ_1 ; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3, allen $\neq 0,0$, met de eigenschap: $t = \lambda_1 x + \mu_1 u$, $t = \lambda_2 y + \mu_2 v$, $t = \lambda_3 z + \mu_3 w$.

Hieruit volgt: $\lambda_1 x - \lambda_2 y = \mu_2 v - \mu_1 u$, $\lambda_2 y - \lambda_3 z = \mu_3 w - \mu_2 v$, $\lambda_3 z - \lambda_1 x = \mu_1 u - \mu_3 w$.

Stellen we de drie punten, die hier staan, achtereenvolgens voor door p,q,r, dan is blijkbaar p het snijpunt van de rechten xy en uv, q het snijpunt van de rechten yz en vw, r het snijpunt van de rechten zx en wu. Verder geldt ten duidelijkste $p+q+r = 0$, of $r = -p-q$ en liggen p,q,r dus op een rechte. De driehoeken x,y,z en u,v,w zijn dus ook lijnperspectief.

Axioma D. Laten x_1, x_2, x_3, x_4 de hoekpunten van een volledige vierhoek zijn. Zij p het snijpunt van x_1x_4 en x_2x_3, q het snijpunt van x_1x_2 en x_3x_4. Het is voldoende om aan te tonen dat het snijpunt r van x_1x_3 en x_2x_4 niet op de rechte pq ligt.

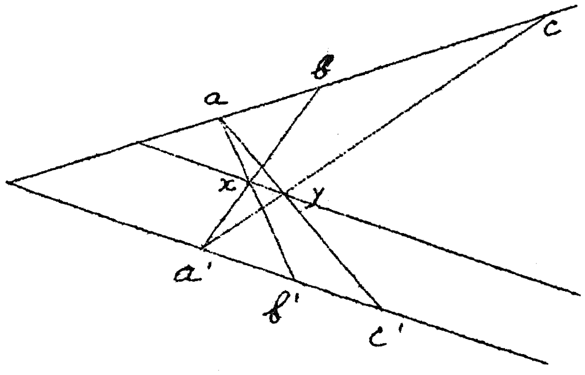
Bewijs. Laten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ elementen zijn zodat $p = \lambda_1 x_1 + \lambda_4 x_4 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$. Krachtens definitie hebben de hoekpunten van een volledige vierhoek algemene ligging, is dus $p \neq x_1, x_2, x_3, x_4$. Dan zijn alle λ's $\neq 0$. Verder is $\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 - \lambda_4 x_4$ het snijpunt q en $\lambda_1 x_1 - \lambda_3 x_3 = \lambda_2 x_2 - \lambda_4 x_4$ het snijpunt r. Gold nu $r = \rho p + \sigma q$ voor zekere elementen $\rho, \sigma \neq 0,0$, dan was $\lambda_1 x_1 - \lambda_3 x_3 = \rho(\lambda_1 x_1 + \lambda_4 x_4) + \sigma(\lambda_3 x_3 - \lambda_4 x_4)$, of $(\rho \lambda_1 - \lambda_1) x_1 + (\sigma \lambda_3 + \lambda_3) x_3 + (-\sigma \lambda_4 + \rho \lambda_4) x_4 = 0$.

Omdat x_1, x_3, x_4 niet op een rechte liggen, volgt hieruit $\rho \lambda_1 - \lambda_1 = \sigma \lambda_3 + \lambda_3 = -\sigma \lambda_4 + \rho \lambda_4 = 0$, dus $\rho = 1$, $\sigma = -1$, $\sigma = \rho$, w.u.v. $2 = 0$. Dit laatste kan niet, omdat L de karakteristiek $\neq 2$ heeft. Dus ligt r buiten de rechte pq.

De verificatie van E' eist meer moeite. We verifieren eerst de stelling van Pappus. We tonen dus aan: Liggen op twee verschillende rechten twee drietallen verschillende punten a,b,c en a',b',c', dan liggen de snijpunten x,y,z van de kruisverbindingen ab',a'b; ac',ca'; bc',b'c op een rechte.

<u>Bewijs</u>. We mogen veronderstellen dat onder drie paren rechten geen

samenvallend paar voorkomt, omdat anders een der punten x,y,z niet bepaald is en vanzelf aan de stelling voldaan is. Verder zijn dan x,y,z verschillend van de punten a,b,c,a',b',c' en van elkaar, want b.v. x=y zou tengevolge hebben b' = c' of x=y=a=b. Evenmin ligt b.v. y op de rechte ax of op de rechte a'x of op aa'. Zij p het snijpunt van xy met aa'. We kunnen y schrijven als combinatie van p en x, en p als combinatie van a en a'. Dus is te schrijven:



(3) $y = \rho x + \sigma a + \tau a'$

Voor b en b' kunnen we zulke drietallen uitkiezen dat geldt:

(4) $b = \rho x + \lambda \tau a'$, $b' = \rho x + \mu \sigma a$;

immers b en b' liggen op de rechte a'x resp. ax en de elementen ρ, σ, τ in (3) zijn $\neq 0$. We kunnen dan verder voor c en c' als snijpunten van a'y en ab resp. ay en a'b' i.v.m. (3) en (4) schrijven:

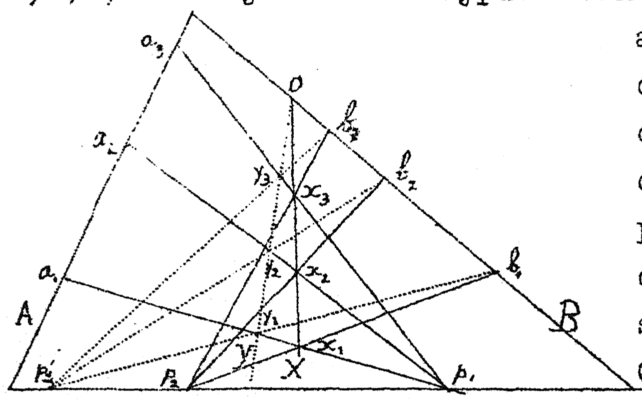
(5) $c = \rho x + \sigma a + \lambda \tau a'$, $c' = \rho x + \mu \sigma a + \tau a'$.

Beschouwen we nu het punt $(\lambda + \mu - 1) \rho x + \lambda \mu \sigma a + \mu \lambda \tau a'$. Het kan enerzijds geschreven worden als $(\lambda - 1)\{\rho x + \mu \sigma a\} + \mu \{\rho x + \sigma a + \lambda \tau a'\} = (\lambda - 1) b' + \mu c$, anderzijds als $(\mu - 1) . \{\rho x + \lambda \tau a'\} + \lambda \{\rho x + \mu \sigma a + \tau a'\} = (\mu - 1) b + \lambda c'$. Het is dus het punt z. Omdat nu het lichaam L commutatief is, geldt $\lambda \mu = \mu \lambda$ en dus

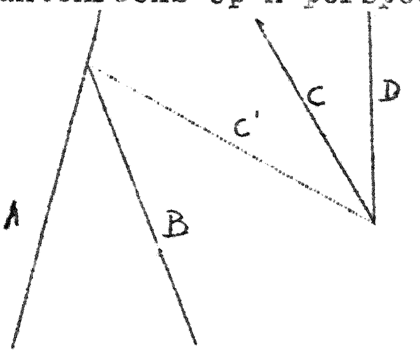
$$z = (\lambda + \mu - 1) \rho x + \lambda \mu \{\sigma a + \tau a'\} = (\lambda + \mu - 1 - \lambda \mu) \rho x + \lambda \mu \{\rho x + \sigma a + \tau a'\}.$$

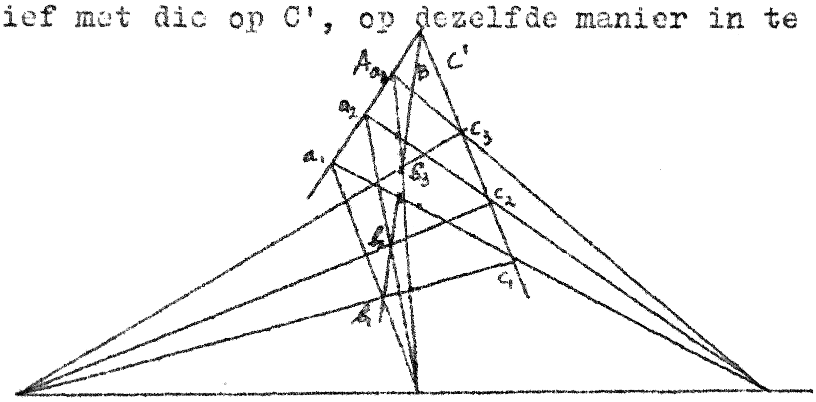
Dus ligt z op de rechte door x en y.

We gaan nu het op blz. 18 geformuleerde axioma E^* afleiden. Daartoe eerst het volgende. Laten twee verschillende puntenreeksen, $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ en $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ beiden perspectief zijn met een puntenreeks $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Laten die puntenreeksen liggen op de rechten A,B,X, en zij o het snijpunt van B en X. We kiezen een willekeurige andere rechte Y door o, snijden Y met de stralen $p_1a_1, p_1a_2, p_1a_3, \ldots$, zodat de punten y_1, y_2, y_3 ontstaan. Dan snijden de rechten b_1y_1, b_2y_2, b_3y_3 elkaar in een punt p_2' van de rechte p_1p_2. Want de driehoeken $b_1x_1y_1$, $b_2x_2y_2$ zijn puntperspectief vanuit o en dus volgens axioma C, waarvan we de geldigheid reeds ingezien hebben, ook lijnperspectief; de rechten b_1x_1, b_2x_2 snijden elkaar in p_2 en de rechten x_1y_1, x_2y_2 elkaar in p_1; dus snijden b_1y_1, b_2y_2 elkaar op de rechte p_1p_2; evenzo b_1y_1, $b_3\ _3$ en ook b_2y_2, b_3y_3.



Tussen A en B kunnen we dus i.p.v. X ook Y tussenschakelen. Is een projectiviteit tussen twee rechten A en D tot stand te brengen door drie perspectiviteiten $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$, waarbij geen twee opvolgende rechten samenvallen, dan kunnen we op grond van het bovenstaande de schakels via C vervangen door schakels via een rechte C', gaande door het snijpunt van C met D en tevens gaande door het snijpunt van A en B. Nu is de puntenreeks op A perspectief met die op C', op dezelfde manier in te

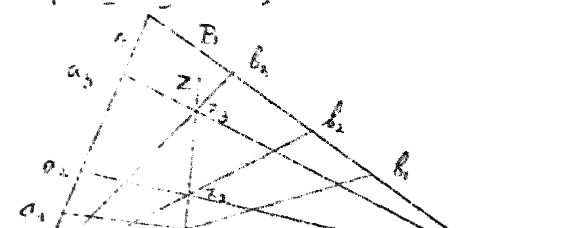




zien als hierboven de perspectiviteit tussen de puntenreeksen op Y en B op grond van perspectiviteiten tussen de puntenreeksen op X en Y en tussen die op X en B. We krijgen dus de overgang van A op D door eerst A te projecteren op C' en daarna C' op D.

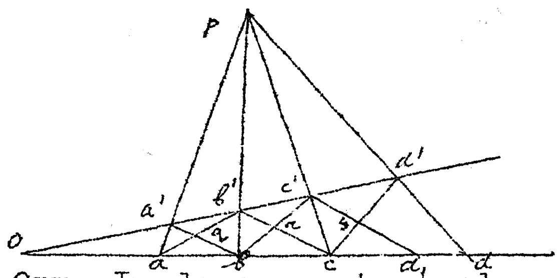
Algemeen zien we zo in: een projectiviteit tussen de puntenreeksen op twee verschillende rechten kan altijd verkregen worden door aaneenschakeling van slechts twee perspectiviteiten.

In het bovenstaande kan de rechte Y zodanig gekozen worden door o, dat het perspectiviteitscentrum p_2' op A komt te liggen. We kunnen daarna Y zo draaien om zijn snijpunt met A, dat bij de nieuwe rechte, zeg Z, i.p.v. p_1 een perspectiviteitscentrum p_1' op B behoort. Bij p_2' in de puntenreeks $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ hoort blijkbaar p_1' in de puntenreeks $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$. Volgens de stelling van Pappus liggen nu op een rechte:



z_1, z_2, het snijpunt van a_1b_2 en a_2b_1;
z_2, z_3, het snijpunt van a_2b_3 en a_3b_2;
enz. Dus bij alle kruisverbindingen liggen de snijpunten op een en dezelfde rechte. We noemden die rechte op blz. 28 al de Pappus-rechte.

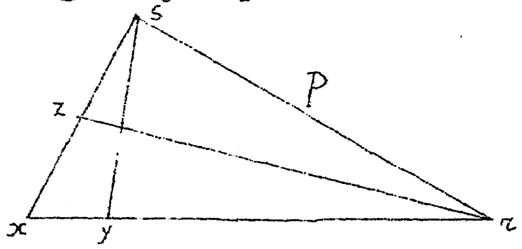
Laat nu π een projectiviteit zijn van een rechte in zichzelf met drie vaste punten a,b,c. Zij d een vierde verschillend punt en $\pi d = d_1$. Projecteren we de puntenreeks $\{a, b, c, d, \ldots\}$ op een andere rechte, zodat we krijgen $\{a', b', c', d', \ldots\}$, dan zijn de puntenreeksen $\{a', b', c', d', \ldots\}$ en $\{a, b, c, d_1, \ldots\}$ projectief. En bij de projectiviteit hoort volgens het bovenstaande een Pappus-rechte, waar o.a. de punten q,r,s, op liggen. Omdat de driehoeken aa'q, cc'r perspectief zijn vanuit de rechte pb'b, gaan de rechten oa,oa',qr door één punt. Dus ligt o op de Pappus-rechte. Speciaal gaat rs door o; dan zijn de driehoeken bb'r, d_1d's



perspectief vanuit het punt s. Dus liggen c,c' en het snijpunt van bb' en d_1d' op een rechte. D.w.z. $d_1=d$. Hiermee is bewezen dat π de identiteit is.

Opm. In de geconstrueerde meetkunde kan men met name, zoals in V gebeurde, translaties en dilataties beschouwen. We kunnen aantonen, dat het lichaam dat bij deze meetkunde behoort, in de zin van V, in wezen het lichaam L is, waar we in VII bij de opbouw van de meetkunde van uitgingen. Krachtens de opmerking van blz. 33-34 is het voldoende dit te laten zien voor het geval we een bepaalde keuze doen voor o,e,f en de oneigenlijke P, en wel: $o = (1,0,0)$, $e = (1,1,0)$, $f = (1,0,1)$, $P= = (1,0,0)$.

Laten nu drie eigenlijke punten $x = (1, \xi_1, \xi_2)$, $y = (1, \eta_1, \eta_2)$, $z = (1, \zeta_1, \zeta_2)$ gegeven zijn, niet op een rechte gelegen. Bepalen we het vierde hoekpunt van het parallelogram op x,y,z. Het oneigenlijke punt s van de rechte xy is $y-x = (0,\eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2)$; evenzo is het oneigenlijke punt s van de rechte xz het drietal $(0, \zeta_1 - \xi_1, \zeta_2 - \xi_2)$

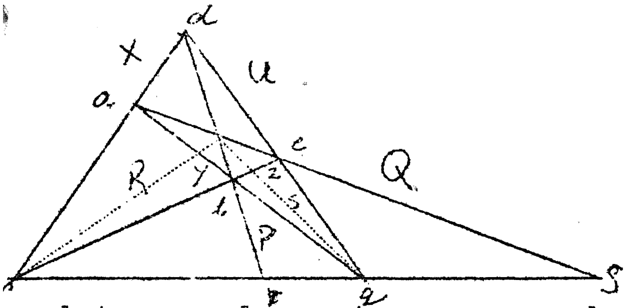


Het punt $z + (y-x) = y + (z-x) = = (1, \zeta_1 + \eta_1 - \xi_1 , \zeta_2 + \eta_2 - \xi_2)$ ligt op de rechte zr, omdat het te schrijven is als $(1, \zeta_1, \zeta_2) + + (0, \eta_1 - \xi_1, \eta_2 - \xi_2)$; evenzo ligt het op de rechte ys. Dus is het juist, wat we vroeger noemden $T_{xy}(z) = = T_{xz}(y)$. De conclusie: $T_{xy}(z) = z+y-x$, als we x, y, z met inhomogene coördinaten schrijven, blijft ook gelden in het geval dat x,y,z op een rechte liggen. Dus geldt in het byzonder $T_{0\alpha}(\beta) = \alpha + \beta$.

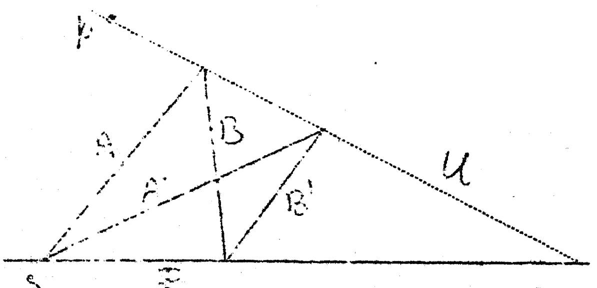
Evenzo tonen we, wat betreft de dilataties, aan: is $x = (1, \xi_1, \xi_2)$ een punt buiten 01 , d.w.z. $\xi_2 \neq 0$, en is $\alpha \neq 0$, dan hebben de rechte 1x en de rechte door α en $(1, \alpha\xi_1, \alpha\xi_2)$ hetzelfde oneigenlijke punt n.l. $(0, \xi_1 -1, \xi_2) = (0,\alpha(\xi_1 -1), \alpha\xi_2)$. En hiermee kan men afleiden: $D_{1\alpha}(\beta) = \alpha\beta$.

Dualiteit. Het zal in het vorige opgevallen zijn, dat er een merkwaardige gelijkenis bestaat tussen de punten en rechten. Elk stel evenredige elementdrietallen representeert een punt, maar ook een rechte; in de incidentievoorwaarde treden punt en rechte symmetrisch op. Bijgevolg is bij verwisseling van de woorden punt en rechte ook aan de axioma's voldaan, en gelden ook alle daaruit afgeleide stellingen. Of anders gezegd: hebben we een stelling van de projectieve meetkunde en verwisselen we daarin de woorden punt en rechte en vervangen we elk er in optredend begrip door het corresponderende begrip, waarbij de rol van punt en rechte verwisseld zijn, dan ontstaat weer een stelling. Deze eigenschap van de meetkunde heet dualiteit; bij elk begrip en bij elke stelling hoort een duaal begrip en een duale stelling. Het bovenstaande geldt voor elke projectieve meetkunde, vanwege de aequivalentie met de analytische meetkunde. Maar het is ook direct in te zien, doordat uit de axioma's de duale uitspraken af te leiden zijn.

Duaal met axioma A is A", met B is B" duaal, B' is duaal met zichzelf, de duale uitspraak van A' zit opgesloten in A. Axioma C is duaal met zijn omgekeerde C', dat een gevolg is van C (zie blz. 6). Wat betreft de dualisering van axioma D gaan we aldus te werk.
Met puntenreeks en volledige vierhoek corresponderen duaal stralenwaaier en volledige vierzijde. Vier rechten P,Q,R,S in een stralenwaaier vertonen harmonische ligging, als er een volledige vierzijde XYZU bestaat (II, opg. 3), zodat P de rechte is door de punten XU en YZ, Q de rechte door XY en ZU, terwijl XZ op R en YU op S ligt. Maar dan worden op de rechte door XZ en YU vier punten p,q,r,s uitgesneden, die harmonisch liggen met abcd als construerende vierhoek. Verschilt nu R van P en Q, dan verschilt ook S van P,Q,R, omdat voor de punten p,q,r,s het analoge geldt. En dus geldt de duale uitspraak D' van D. We merken nog op, dat blijkbaar door een harmonisch stralenviertal een harmonisch puntenviertal wordt uitgesneden.



Om E', duaal met E* (of E), af te leiden, laten we eerst zien, dat het begrip quasi-perspectiviteit duaal is met zichzelf. Op blz. 9 zagen we: een quasi-perspectiviteit is een eeneenduidige afbeelding van het vlak op zichzelf, bepaald door het centrum p, de as P en een toegevoegd puntenpaar a,a' (p,a,a' op een rechte); p en de punten van P blijven vast bij de afbeelding en het beeld b' van b niet op pa wordt gevonden uit de incidenties pbb',abu, a'b'u (u een punt van P). Beschouwen we nu een afbeelding, door p,P en een paar rechten A,A', die met P door één punt s gaan, op de volgende wijze bepaald: P en elke rechte door p blijven vast; een rechte B, niet door s of p gaande, gaat over in B', bepaald door de incidenties PBB',ABU, A'B'U (U een rechte door p). Deze afbeelding stemt nu blijkbaar overeen met de quasi-perspectiviteit die het punt AB in A'B' overvoert.



Zij nu $X' = \pi(X)$ een projectiviteit van een waaier in zichzelf met drie vaste stralen. Op een rechte R buiten de waaier wordt een projectiviteit uitgesneden, die drie vaste punten heeft en dus de identiteit is (de projectiviteit is uit te breiden tot een collineatie van het vlak, die R vast laat). Dan is π de identiteit.

<u>Opmerkingen over de axioma's.</u>

1. Men kan i.p.v. E^* de stelling van Pappus als axioma nemen. Want E^* volgt uit de stelling van Pappus. Deze stelling is aequivalent met de commutativiteit van het grondlichaam (zie blz. 21 en blz. 38).
2. Axioma C (de stelling van Desargues) kan uit E^* afgeleid worden. Toch hebben we C als apart axioma opgenomen, omdat veel stellingen (doch niet alle, wegens de onafhankelijkheid van E^* van de andere axioma's) afgeleid kunnen worden zonder van E^* gebruik te maken.

Zie de figuur op blz. 4. We willen aantonen, dat p,q,r op een rechte liggen. Stel dat het niet het geval was. Dan gaat een der rechten pq,qr,rp, stel pq, niet door o. Laat pq de rechten aa', bb', cc' opvolgend in x,y,z snijden. Dan bestaat een keten van perspectiviteiten tussen de volgende puntviertallen: oaxa', obyb', oczc'. Bij projectie van het laatste viertal vanuit r op de rechte oaa' gaat o in o, c in a, c' in a' over. En dus z in x wegens E^*. Dan ligt r op de rechte zx, d.i. de rechte pq. Dus liggen p,q,r toch op een rechte.

Opgaven 1. Leid voor de gewone meetkunde af: zijn voor vier punten op een willekeurige rechte a,b,c,d de van teken voorziene afstanden tot een punt van die rechte, dan is de dubbelverhouding dier vier punten gelijk aan $\frac{d-b}{c-b} : \frac{d-a}{c-a}$ (zie blz. 1). Schrijf hiertoe de punten als drietallen
(ξ_0, ξ_1, ξ_2), (η_0, η_1, η_2), $(\xi_0+\eta_0, \xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2)$
$(\lambda\xi_0+\eta_0, \lambda\xi_1+\eta_1, \lambda\xi_2+\eta_2)$.
2. Leid in de gedachtegang van dit hoofdstuk de parametervoorstelling van een rechte af.
3. In een lineaire ruimte van dimensie 3 over een lichaam L is een transformatie van het type VI (16) vastgelegd door van drie drietallen b.v. (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) het beeld vast te leggen. Toch is een collineatie pas door de beelden van vier punten vastgelegd.
4. Een transformatie van lijncoördinaten is ook een collineatie. En omgekeerd.
5. Axioma D is aequivalent met: Vertonen de vier punten a,b,c,d algemene ligging en zijn u,v,w punten die de incidentierelaties abu, cdu, acv, bdv, adw, bcw bevredigen, dan geldt de incidentierelatie uvw niet.
6. De stelling van Pappus is duaal met zichzelf. Merk hierbij op, dat de bij deze stelling behorende figuur 9 rechten en 9 punten bevat, waarbij op elke rechte 3 punten liggen en door elk punt 3 rechten gaan (zie ook st. van Desargues, blz 4.).
7. Dualiseer de constructie van een vierde toegevoegd puntenpaar in een projectiviteit.
8. Zij in de figuur op blz. 7 onderaan, t het snijpunt van ac en bd. Dan geldt: H(ac,ts), H(bd, rt).
9. Snijden van twee volledige vierhoeken vijf paren overeenkomstige zijden elkaar op één rechte, dan doet het zesde paar dat ook (stelling

van de volledige vierhoeken).

10. De dubbelverhouding van vier punten op een rechte heeft, afhankelijk van de gekozen volgorde dier punten, ten hoogste zes verschillende waarden.

11. Zijn $l_0, l_1, \ldots, l_k$ k+1 door één punt gaande rechten en is π_i een perspectieve afbeelding van l_{i-1} op l_i $(i=1,\ldots,k)$, dan is ook $\pi = \pi_k \pi_{k-1} \ldots \pi_1$ een perspectieve afbeelding, en wel van de rechte l_0 op de rechte l_k. Evenzo is $\pi_{i+1} \ldots \pi_j$ $(i < j)$ een perspectieve afbeelding. Kunt U onder de centra van al deze perspectiviteiten drietallen vormen, die op een rechte gelegen zijn?

12. Zij abc een driehoek en s een punt buiten de zijden. Laten d,e,f de projecties van s uit a,b,c op de overstaande zijden van de driehoek zijn. Dan is def lijnperspectief met abc (projecteer ab op bc vanuit het snijpunt van ac en df).

13. Dualiseer de vorige stelling.

14. Laat bij een quasi-perspectiviteit met as P en centrum p niet op P een punt a als beeld $a' \neq a$ hebben. Laat algemeen x het beeld x' en x' het beeld x" hebben. Als a" = a is, dan is ook x" = x.

15. Laten A_1, A_2, A_3 drie niet door één punt gaande rechten zijn en p_1, p_2, p_3 drie niet op één rechte liggende punten, die allen buiten de drie rechten A_i liggen. Zij π_3 (π_1, π_2) de perspectiviteit van A_1 op A_2 met centrum p_3 (van A_2 op A_3 met centrum p_1, resp. van A_3 op A_1 met centrum p_2). Bewijs: nodig en voldoende opdat $\pi_2 \pi_1 \pi_3$ de identieke afbeelding van A_1 op zichzelf is, is de voorwaarde dat $p_1p_2a_3, p_2p_3a_1, p_3p_1a_2$ collineaire drietallen zijn (a_1 = snijpunt van A_2 en A_3, enz.).