STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 023

Voordracht in de serie Actualiteiten

C.G. Lekkerkerker

24 november 1951

Stapeling van bollen

1951

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m (O).

Rapport ZW 1951 - 023

Voordracht door C.G.Lekkerkerker in de serie
Actualiteiten op 24 November 1951.

Stapeling van bollen.

1. Zij in R_n een rechthoekig assenstelsel gegeven. Laat K(w) een of andere kubus zijn, waarvan de ribben evenwijdig lopen aan de coördinaatassen en lengte w hebben.
Zij voorlopig $w > 2$. Wanneer we in het vervolg over bollen spreken, zonder nadere aanduiding, dan bedoelen we daarmee n-dimensionale hyperspheren in R_n met straal 1. De inhoud van een bol geven we aan met ω_n.

Een verzameling bollen, die twee aan twee geen inwendig punt gemeen hebben, terwijl elke bol geheel in K(w) bevat is, heet een K(w)-bolstapeling. Het maximale aantal bollen in een K(w)-bolstapeling is een functie van w alleen, voor te stellen door A(w). We voeren nu in de grootheid

$$t(w) = w^{-n} A(w)\omega_n,$$

aangevende welk gedeelte van K(w) maximaal bedekt is door bollen uit een K(w)-bolstapeling. Uiteraard geldt: $0 \leqslant t(w) < 1$.
We bewijzen nu allereerst, dat t(w) een limiet heeft voor $w \to \infty$.

Bewijs

1) Zij k een natuurlijk getal.
Een kubus met ribbe kw is samen te stellen uit k^n kubussen met ribbe w; in ieder daarvan kunnen we A(w) bollen stapelen; in de eerstgenoemde kubus kunnen we dus zeker $k^n A(w)$ bollen stapelen. Anders gezegd:

$$A(kw) \geqslant k^n A(w), \text{ ofwel } t(kw) \geqslant t(w).$$

2) Beschouwen we nu een stapeling van A(kw) bollen in een kubus met ribbe kw; verdelen we de kubus weer in k^n kubussen K_i met ribbe w.
We beschouwen de bollen in de stapeling, die met een bepaalde kubus K_i althans een punt gemeen hebben. Ze zijn bevat in de met K_i concentrische kubus met ribbe w+4. Zij hun aantal A_i.

Het aantal A_i^1 van de bollen, die geheel in K_i bevat zijn, is hoogstens gelijk aan A(w). De bollen, die een randpunt van K_i bevatten, $A_i - A_i^1$ in aantal, zijn bevat in een gebied met inhoud

$$(w+4)^n - (w-4)^n < n.8(w+4)^{n-1}. \text{ Dus is:}$$

$$\{A_i - A(w)\}\, \omega_n \leqslant (A_i - A_i^1)\omega_n < 8n(w+4)^{n-1}.$$

Er is dus ook een constante c_1, zodat geldt:

$$\{A_i - A(w)\}\omega_n < c_1 w^{n-1},$$

$$\sum A_i \omega_n < \frac{c_1}{w}(kw)^n + k^n A(w)\omega_n,$$

$$t(kw) = (kw)^{-n}\sum A_i \omega_n < \frac{c_1}{w} + t(w).$$

3) Met de methode, onder 2) uiteengezet, kunnen we ook bewijzen: er is een constante c_2, zodat geldt:

$$0 < t(w+\vartheta) - t(w) < \frac{c_2}{w} \quad \text{voor } 0 \leq \vartheta < 1.$$

4) Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Bepaal w_0, zodat geldt:

$$\frac{c_1}{w}, \frac{c_2}{w} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ voor } w > w_0.$$

We beschouwen nu twee willekeurige getallen w_1, w_2, beiden groter dan w_0. Zij k_1 (k_2) het kleinste gehele getal, dat minstens gelijk is aan w_1 (w_2). Dan hebben we:

$$|t(w_1) - t(k_1)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(w_2) - t(k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$|t(k_1) - t(k_1k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(k_2) - t(k_1k_2)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

dus $$|t(w_1) - t(w_2)| < \varepsilon .$$

D.w.z. lim t(w) bestaat.
We noemen die limiet de bedekkingsgraad ρ_n. Uit

$$t(w) \leq t(kw) \quad \text{volgt nog: } t(w) \leq \rho_n.$$

2. We willen ρ_n naar boven schatten. Triviaal is: $\rho_n \leq 1$.
We beschouwen een K(w)-bolstapeling, bestaande uit bollen $B_1, \ldots\ldots, B_s$. Elke bol B_i daaruit vervangen we door een concentrische bol P_i^*, aan elk punt P waarvan we een gewicht $\sigma(r_i)$ toekennen, alleen afhangend van de afstand $r_i = PP_i$ van P tot het middelpunt P_i ($j=1,\ldots,s$). De functie $\sigma(r)$ wordt zo gekozen, dat voor elk punt P van de kubus K(w) geldt: $\sum_{i=1}^{s}\sigma(r_i) \leq 1$.

<u>Hulpstelling 1.</u>
Laten $P_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots\ldots, x_{jn})$ de middelpunten van enige bollen uit een bolstapeling zijn ($j = 1,\ldots,m$). Zij P een willekeurig punt van R_n en r_j de afstand van P_j tot P ($j = 1,\ldots,m$). Dan geldt:

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^2 \geq 2(m-1).$$

<u>Bewijs:</u>
Omdat afstanden invariant zijn voor translatie, mogen we onderstellen dat P de oorsprong is. Nu is voor $j \neq k$ de afstand van de punten P_j en P_k tenminste 2.

Dus: $\sum_{i=1}^{n} (x_{ji} - x_{ki})^2 \geqslant 4. \quad (j \neq k,\ 1 \leqslant j \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant m).$

Voor j = k is het linkerlid van de laatste ongelijkheid 0. We sommeren nu over alle j en k, en krijgen dan:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ji}^2 + x_{ki}^2) - 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}x_{ki} \geqslant 4m(m-1),$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}(r_j^2 + r_k^2) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} x_{ji}x_{ki} \geqslant 4m(m-1),$$

$$2m\sum_{j=1}^{m} r_j^2 \geqslant 4m(m-1),$$

waaruit de hulpstelling volgt.

We kiezen nu de functie $\sigma(r)$ als volgt:

$$\sigma(r) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}r^2 & r \leqslant \sqrt{2} \\ 0 \quad \text{voor} & r \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

Beschouw een punt P van K(w). Laten $B_1, \ldots, B_m$ de bollen zijn, met de eigenschap dat de bijbehorende functiewaarden $\sigma(r_i)$ in het punt P positief zijn. Dan is:

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma(r_i) = \sum_{i=1}^{m}(1-\tfrac{1}{2}r_i^2) = m-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} r_i^2 \leqslant m-(m-1) = 1.$$

Elke bol B_i^* heeft straal $\sqrt{2}$. De bollen B_i^* zijn dus bevat in een kubus met ribbe $w+2(\sqrt{2}-1)$. Voor één bol is

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r)\,dx_1 \ldots dx_n = \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r)\ d(\omega_n r^n) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (1-\tfrac{1}{2}r^2)\ d(\omega_n r^n) = \omega_n \left\{ 2^{\frac{n}{2}} - \tfrac{1}{2}\,\frac{n}{n+2}\ 2^{\frac{n+2}{2}} \right\} = \frac{2\omega_n}{n+2}\, 2^{\frac{n}{2}}.$$

Er geldt derhalve:

$$(w+1)^n > \int_{K(w)} \sum \sigma(r_i)\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= A(w)\int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r)\,dx_1 \ldots dx_n = A(w)\ \omega_n \cdot \frac{2}{n+2}\ 2^{n/2}.$$

Hieruit volgt: $t(w) = w^{-n} A(w)\,\omega_n < (1+\frac{1}{w})^n\ \frac{n+2}{2}\ 2^{-n/2}$,

dus $\rho_n = \lim t(w) \leqslant \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}$, en ook $t(w) \leqslant \frac{n+2}{2}\ 2^{-n/2}$.

3. Zij x een willekeurig punt van R_n. Liggen ν punten van R_n niet in een $\nu-1$ -dimensionaal hypervlak door de oorsprong, dan noemen we ze vrij gelegen (ν een der getallen 1,...,n). Een verzameling punten van R_n heet een <u>rooster</u>, als er een punt x en n vrij gelegen punten $a_1, \ldots, a_n$ zijn, zodat de verzameling bestaat uit de punten z, die te schrijven zijn als $z = u_1a_1 + \ldots + u_na_n + x$ ($u_1, \ldots, u_n$ gehele getallen). We stellen het rooster voor door Γ_x of $\Gamma_x[a_1, \ldots, a_n]$; de punten $a_1, \ldots, a_n$ heten een basis te vormen van het rooster Γ_0.

We beschouwen voortaan een speciaal soort K(w)-bolstapelingen, nl. zulke, die bestaan uit alle bollen waarvan de middelpunten tot een of ander rooster Γ_x behoren, terwijl de bollen gestapeld zijn in een kubus K(w). We spreken van een Γ_x - K(w)-bolstapeling en noemen deze maximaal, als het aantal er toe behorende bollen maximaal is. Dit maximale aantal is weer een functie die alleen van w afhangt; we stellen het voor door $A^*(w)$. We voeren nog in de grootheid

$$t^*(w) = w^{-n} A^*(w)\omega_n.$$

Triviale schattingen voor $t^*(w)$ zijn $(w > 2)$:

$$t^*(w) \leqslant t(w) \leqslant 1, \text{ en}$$

$$t^*(w) \geqslant w^{-n} \left[\frac{w}{2}\right]^n \omega_n > w^{-n} \left(\frac{w}{4}\right)^n \omega_n = 4^{-n}\omega_n.$$

De eerste volgt uit het feit, dat elke Γ_x- K(w)-bolstapeling ook een K(w)-bolstapeling is, zodat $A^*(w) \leqslant A(w)$ is. De tweede volgt, als we voor a_i het punt nemen, waarvan de i^{de} coördinaat 2 is en de overige coördinaten 0 $(i= 1,\ldots,n)$, en daarmee het rooster opbouwen; bij geschikte keuze van x bevat dan de bijbehorende Γ_x- K(w)-bolstapeling $\left[\frac{w}{2}\right]^n$ exemplaren.

Zij w groter dan een nader te bepalen constante c_3, K(w) een kubus met ribbe w. We beschouwen een maximale Γ_x - K(w)-bolstapeling. Het rooster Γ_0 bevat onder meer het punt $0 = (0,0,\ldots,0)$; twee verschillende punten uit dit rooster hebben afstand $\geqslant 2$. De afstand van ee een punt z tot 0 geven we aan met $|z|$. Zij nu $b_1 \neq 0$ een punt van Γ_0, waarvoor $|b_1|$ minimaal is, en zij R_1 de door 0 en b_1 voortgebrachte deelruimte van R_n. Zij b_2 een punt van Γ_0, zodat $b_2 \notin R_1$ en $|b_2|$ minimaal is, en zij R_2 de door $0,b_1,b_2$ voortgebrachte deelruimte. We definieren vervolgens $b_3,R_3,\ldots,b_n,R_n$. Voor $\nu = 1,\ldots,n-1$ geldt dan: van de punten van Γ_0 buiten R_ν heeft $b_{\nu+1}$ de kleinste afstand tot 0; is $y \in \Gamma_0$ en $y \in R_\nu$, dan is $|b_{\nu+1}-y| \geqslant |b_{\nu+1}|$ omdat ook $b_{\nu+1}-y$ tot Γ_0 en niet tot R_ν behoort.

Zij verder Π_ν het parallelotoop, voortgebracht in R_ν door $0,b_1,\ldots,b_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$. De punten $b_1,\ldots,b_\nu$ brengen een deelrooster Γ_0^ν van Γ_0 in R_ν voort, en we zien in, dat er bij een willekeurig punt y van R_ν een punt z te vinden is, zodat geldt:

$$z \in \Gamma_0^\nu \quad , \quad y - z \in \Pi_\nu$$

Willen we een basis van Γ_0 hebben, dan mogen we er niet van uitgaan dat $b_1,\ldots,b_n$ een basis vormen (!). We kiezen allereerst a_ν in R_ν, en wel $a_1 = b_1$. Zijn $a_1,\ldots,a_\nu$ gekozen, dan moet voor $a_{\nu+1}$ in elk geval gelden, dat $b_{\nu+1}$ te verkrijgen is als een geheeltallige lineaire combinatie van $a_1,\ldots,a_{\nu+1}$. Dus kan de afstand van $a_{\nu+1}$ tot R_ν niet groter zijn dan die van $b_{\nu+1}$ tot R_ν. Daar vervanging van $a_{\nu+1}$ door $-a_{\nu+1}$ geen verandering in het voortgebrachte rooster geeft, mogen we $a_{\nu+1}$ aan dezelfde kant van R_ν nemen als $b_{\nu+1}$.

Evenzo is het geoorloofd bij $a_{\nu+1}$ een punt uit Γ_0^{ν} op te tellen. Krachtens het bovenstaande is het dus in elk geval mogelijk $a_{\nu+1}$ in het parallelotoop $\Pi_{\nu+1}$ te kiezen. Anders gezegd: er zijn getallen $\alpha_{i\nu}$, zodat $1 \leq i \leq \nu \leq n$ en $0 \leq \alpha_{i\nu} \leq 1$ is, terwijl de punten

$$a_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \quad (\nu = 1,\dots,n)$$

een basis van Γ_0 vormen.

Na deze voorbereidingen beschouwen we weer de kubus $K(w)$. Zij alvast $c_3 > 12$. Indien de concentrische kubus $K(w-8)$ geen bol uit de stapeling bevat, geldt:

$$A^*(w)\omega_n < w^n - (w-12)^n < 12nw^{n-1},$$

$$\text{derhalve } t^*(w) < \frac{12n}{w}.$$

Wegens $t^*(w) > 4^{-n}\omega_n$ is dit onmogelijk, als c_3 geschikt gekozen is. Dus bevat $K(w-8)$ een bol.

Stel eens, dat $|b_n| = |-b_n| > 4$ is. Zij l een natuurlijk getal, zodat voor het punt $l^{-1}b_n$, dat is het punt op het lijnstuk Ob_n met afstand $l^{-1}|b_n|$ tot O, geldt: $2 \leq |l^{-1}b_n| \leq 4$. We vormen nu uit Γ_0 het rooster Γ_0', door daarin het basispunt a_n te vervangen door $l^{-1}a_n$. Dan omvat Γ_0' het oorspronkelijke rooster Γ_0, terwijl b.v. $l^{-1}b_n$ in Γ_0' voorkomt. Het is duidelijk, dat we de gegeven bolstapeling kunnen uitbreiden tot een andere Γ_x - $K(w)$-bolstapeling, die meer bollen in $K(w)$ heeft.

Conclusie: $|b_\nu| \leq 4$ voor $\nu = 1,\dots,n$. En dan ook: $|a_\nu| \leq 4\nu$. Het rooster Γ_0 bezit dus een begrensde basis.

Stelling.

Het resultaat van no.1 geldt ook voor Γ_x - $K(w)$-bolstapelingen.

Bewijs.

Zij $K_0 = K(8n)$ de kubus met ribbe $8n$ en O tot middelpunt, zij $w > c_3$, en k een natuurlijk getal. Ons eerste doel is $A^*(w)$ en $A^*(kw)$ te vergelijken. Daartoe verdelen we $K(kw)$ in k^n kubussen $K(w)$ en nemen een maximale Γ_x - $K(w)$-bolstapeling bij een van die kubussen. Is y een willekeurig punt van R_n, dan kunnen we Γ_y uit Γ_x verkrijgen, door verschuiven over een vector, gelegen in K_0. Daaruit volgt, dat elke kubus $K(w)$ uit die verdeling tenminste $A^*(w-8n)$ bollen bevat, waarvan het middelpunt tot Γ_x behoort. Dus $A^*(kw) \geq k^n A^*(w-8n)$.

Op dezelfde wijze als in no. 1 zien we in:

$$A^*(kw) \leq k^n A^*(w+4).$$

Met dezelfde redenering als eerst, alleen met andere constanten dan c_1 en c_2, volgt: ook $t^*(w)$ heeft een limiet voor $w \to \infty$.
Deze limiet stellen we voor door ρ_n^*. Er geldt blijkbaar: $\rho_n^* \leq \rho_n$.

Opmerking 1. Het probleem, of hier het gelijkteken of het ongelijkteken staat. is voor $n > 2$ nog onopgelost.

Opmerking 2. Een voorbeeld van een rooster, waarbij de hierboven gevormde "minimumvectoren" $b_1,\dots,b_n$ geen basis van het rooster vormen, heeft men ($n \geqslant 5$) in het rooster, voortgebracht door de punten $(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots(0,\dots,0,1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$. Het laatste heeft afstand $\sqrt{\frac{n}{4}} > 1$ tot O, terwijl er n vrij gelegen punten zijn met afstand 1 tot O, n.l. de eerste n-1 van de opgeschreven punten en nog $(0,0,\dots,1)$.

4. Verband met diophantische approximaties. Zij gegeven een positief definiete reële kwadratische vorm in n variabelen:

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

We interesseren ons voor de onderste grens M van deze vorm voor gehele waarden der variabelen, niet allen nul. Zij $x = (x_1,\dots,x_n)$.

Eerst tonen we aan, dat de onderste grens M aangenomen wordt. We merken daartoe op dat $Q(x)$ continu is en $\neq 0$ voor $x \neq 0$. Dan neemt Q op de eenheidsbol $\sum x_i^2 = |x|^2 = 1$ een minimum q en een maximum p aan, waarbij $p \geqslant q > 0$ is. Het lichaam $Q(x) \leqslant q$ is bevat in de bol $|x|^2 \leqslant 1$, dus $Q(x) \leqslant M+1$ in $|x|^2 \leqslant \frac{M+1}{q}$. Slechts eindig veel punten x met gehele coördinaten voldoen aan $|x|^2 \leqslant \frac{M+1}{q}$. Daaronder is een punt x met $Q(x) = M$.

Onder de determinant $d(\Gamma)$ van een rooster Γ_x verstaan we de absolute waarde van de determinant van de coördinaten van n punten, die een basis van Γ_0 vormen. Die determinant is onafhankelijk van de gekozen basis, omdat twee bases van eenzelfde rooster Γ_0 door een geheeltallige unimodulaire transformatie in elkaar over te voeren zijn. Er geldt: $d(\Gamma) > 0$.

We laten nu zien, dat bij een Γ_x - K(w)-bolstapeling de grootheid $d(\Gamma)$ tenminste gelijk is aan $\omega_n(\rho_n^*)^{-1}$. Zij $\omega_n^{-1}d(\Gamma) = \alpha$, Γ_0 een rooster, dat bij een bolstapeling behoort en K(w) een kubus. Beschouw een basis van Γ; die is bevat in een kubus K_1: $|x| \leqslant c_4$ met O tot middelpunt. Zij Π het parallelotoop, opgebouwd op die basis. We kunnen de ruimte R_n opvullen met parallelotopen, die uit Π ontstaan door verschuiven over roostervectoren. We beschouwen nog de kubussen $K(w-2)$, $K(w-2-4c_4)$, $K(w-2+4c_4)$, concentrisch met K(w); we onderstellen hierbij $w > 2+4c_4$. De parallelotopen, die een punt met K(w-2) gemeen hebben, zijn bevat in $K(w-2+4c_4)$; bevatten ze een randpunt van K(w-2), dan liggen ze buiten $K(w-2-4c_4)$. Merken we op, dat de inhoud van Π gelijk is aan $d(\Gamma)$, dan volgt, dat het aantal punten van Γ_0, dat tot K(w-2) behoort, en dus het aantal bollen uit de Γ_0- K(w)-bolstapeling te schrijven is als: $w^n\{d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1})\}$.

Dan is $A^*(w) \geqslant w^n\{d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1})\}$, $t^*(w) \geqslant \omega_n\{d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1})\} = \alpha^{-1} + O(w^{-1})$. Dus $\rho_n^* = \lim t^*(w) \geqslant \alpha^{-1}$; $d(\Gamma) \geqslant \omega_n(\rho_n^*)^{-1}$.

Vervolgens laten we zien, dat er een rooster is met determinant $\omega_n(\rho_n^*)^{-1}$, dat bij een bolstapeling behoort. Laat w een rij positieve getallen w_μ doorlopen met limiet ∞. Bij elk getal w_μ kiezen we een kubus $K(w_\mu)$ en daarbij een maximale bolstapeling, zeg een Γ_x^μ -$K(w_\mu)$-bolstapeling. Elk rooster Γ_0^μ heeft een basis, bevat in de kubus $K_0 = K(8n)$ met O tot middelpunt. Dan is er een rooster Γ, waartoe zich de roosters Γ_0^μ verdichten (men kan de verzameling van de roosters met zo'n basis bij geschikte metriek opvatten als een <u>compacte</u> metrische ruimte). Het is duidelijk, dat Γ bij een bolstapeling behoort: twee verschillende punten van Γ hebben afstand $\geqslant 2$.
Verder is $t^*(w_\nu) = \omega_n\, d(\Gamma^\nu)^{-1} + O(w^{-1})$, dus

$$\rho^*_n = \lim t^*(w_\nu) = \omega_n \{ d(\Gamma) \}^{-1}.$$

Keren we weer terug tot onze kwadratische vorm. Zij d de absolute waarde van de coëfficiëntenmatrix. Door een substitutie $x = Ay$ gaat Q over in $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ en de punten met gehele coördinaten in de punten van een rooster met determinant $\frac{1}{a}$ als a de absolute waarde van determinant A is. Er geldt: $a^{-2} = d$, $a > 0$. We voeren nog de substitutie $y_i = \frac{1}{2}\sqrt{M}\, z_i$ uit. Dan worden we gevoerd op een rooster Γ met determinant $\frac{1}{a}(\frac{2}{\sqrt{M}})^n$ en voor een punt $z = (z_1,\dots,z_n) \neq 0$, dat tot Γ behoort, is

$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \geqslant 4$. Dientengevolge behoort Γ bij een bolstapeling. Er geldt dus: $d(\Gamma) = \frac{1}{a}\,(\frac{2}{\sqrt{M}})^n \geqslant \omega_n(\rho_n^*)^{-1}$. Anderzijds volgt uit de vorige alinea, dat er kwadratische vormen bestaan, zodat in de laatste formule het gelijkteken staat.
<u>Conclusie</u>: $a\,M^{n/2} \leqslant \omega_n^{-1}\, 2^n \rho_n^*$, ofwel

$$d^{-1/n} M \leqslant (\omega_n^{-1} 2^n \rho_n^*)^{2/n};$$ de grootheid $d^{1/n} M$, genomen

over alle kwadratische vormen, heeft een bovenste grens, die aangenomen wordt. We noemen die bovenste grens γ_n. Dan is $\gamma_n = \max M(Q) d^{-1/n}$ en ons uiteindelijk resultaat is:
er bestaat een wereldconstante γ_n met de volgende eigenschap:
bij elke positief definiete kwadratische vorm Q in n variabelen bestaat er een stel gehele getallen $x_1,\dots,x_n$, niet allen nul, zodat $Q(x_1,\dots,x_n) \leqslant \gamma_n\, d^{1/n}$ is, terwijl er geen kleinere constante met die eigenschap bestaat; de constante γ_n is met ρ_n^* verbonden door de betrekking: $\gamma_n = 4(\omega_n^{-1}\ \rho_n^*)^{2/n}$.

Een schatting van ρ_n^* brengt een schatting van γ_n met zich mee, en omgekeerd. We weten nu uit no. 2, dat geldt:

$$\gamma_n \leqslant 4(\omega_n^{-1}\ \frac{n+2}{2}\ 2^{-n/2})^{2/n} = 2\,\omega_n^{-2/n}\ (\frac{n+2}{2})^{2/n}.$$

Uit $\omega_n = 2\pi^{n/2}\left\{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\right\}^{-1}$ volgt $\omega_n^{-2/n} \simeq \frac{1}{\pi}\ \frac{n}{2e}$, zodat de voor γ_n gevonden bovengrens zich voor $n \to \infty$ gedraagt als $\frac{n}{\pi e}$.

5. Het is van belang ook een benedengrens voor γ_n, en dus ook voor ρ_n^* te hebben. We zullen die niet opsporen, maar vermelden alleen, langs welke wegen dit kan gebeuren. Laat E een bol zijn in R_n met 0 tot middelpunt en volume <1. Zij $\rho(x)$ de bijbehorende karakteristieke functie, d.w.z. $\rho(x) = 1$ of 0, al naar gelang x een punt van de bol is, of er buiten ligt. Zij Γ een rooster, waartoe 0 behoort. We kunnen nu enerzijds, als f(x) een tot op zekere hoogte willekeurige functie in R_n is, de integraal $I = \int_{R_n} f(x)dx_1 \dots dx_n$, anderzijds de som $S(\Gamma) = \sum f(g)$, uitgestrekt over de punten $g \neq 0$, die tot Γ behoren, bekijken.

Volgens een stelling van Minkowski-Hlawka-Siegel bestaat er nu een rooster Γ_0 met determinant 1, zodat geldt: $S(\Gamma) \leq I$. We passen dit toe op $f(x) = \rho(x)$. Dan is $I < 1$ en $f(g) = 1$ of 0. Dus behoren er geen roosterpunten $\neq 0$ uit Γ_0 tot E.

Zij nu E de bol met straal 2 en 0 tot middelpunt, dus volume $2^n \omega_n$. Uit het bovenstaande volgt dan: er is een rooster Γ^* met determinant $2^n \omega_n$, zodat behalve 0 geen enkel punt van Γ^* binnen E ligt. Uit de beschouwingen in 4. volgt dan: $\omega_n(\rho_n^*)^{-1} \leq 2^n \omega_n$.

Dus $\rho_n^* \geq 2^{-n}$. Verder volgt dan:

$$\rho_n \geq 2^{-n}, \quad \gamma_n \geq 4(2^n \omega_n)^{-2/n} = \omega_n^{-2/n} \sim \frac{n}{2\pi e}.$$

Men is er in geslaagd de voor ρ_n^* gevonden grenzen iets dichter bij elkaar te brengen, maar niet noemenswaard. Vooralsnog bestaat er een behoorlijke kloof tussen die grenzen.

Literatuur:

R.A. Rankin, On the closest packing of spheres in n dimensions, Annals of Math. 48, 1062-81.

E. Hlawka, Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatshefte für Math. 53, 81-131.