STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 16.

Cursus intuitionistische wiskunde.

Eindhoven 1950/51.

incompl.

A. Heyting.

1951

2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam/O.

Cursus Intuitionistische Wiskunde

~~1949~~/1950 /1951

door

Prof. Dr A. Heyting.

Hoofdstuk I. REKENKUNDE

1. Een natuurlijk getal bouwen wij in gedachten op uit eenheden. Het wordt eerst dan als gedefinieerd beschouwd, wanneer die opbouw, afgezien van practische moeilijkheden, inderdaad mogelijk is.

"a is het grootste getal met de eigenschap, dat a en a-2 beide priemgetallen zijn, of, indien een zodanig grootste getal niet bestaat, is a = 2", is dus niet de definitie van een natuurlijk getal.

2. De theorie van het rekenen met natuurlijke getallen, gehele getallen en meetbare getallen geeft geen moeilijkheden.

3. De definitie van Dedekind voor een reëel getal α eist herziening, omdat toegelaten moet worden, dat voor een bepaald meetbaar getal m niet bekend is, of $m = \alpha$, $m < \alpha$, dan wel $m > \alpha$.

4. De volgende theorie van het reële getal loopt parallel met die van Cantor.

Onder een <u>interval</u> a wordt hier verstaan een interval met rationale eindpunten (a_1, a_2); $a_1 \leq a_2$. De intervallen a en b liggen <u>buiten elkaár</u>, als het zij $a_2 < b_1$, hetzij $b_2 < a_1$; anders <u>raken</u> zij elkaar.

Het <u>sominterval</u> a + b is $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Is van de vier producten $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_2 b_1$, $a_2 b_2$ het kleinste c_1, het grootste c_2, dan is $c = (c_1, c_2)$ het <u>productinterval</u> a x b.
Het <u>tegengestelde</u> interval van a is $-a = (-a_2, -a_1)$. Ligt 0 buiten a, dan is het <u>inverse</u> interval van a $a^{-1} = (a_2^{-1}, a_1^{-1})$.

<u>Stelling 1.</u> Zijn p en q meetbare getallen, waarvan p tot het interval a en q tot het interval b behoort, dan behoort p+q tot het interval a+b en pxq tot het interval axb.

<u>Stelling 2.</u> Behoort het meetbare getal p tot het interval a, dan behoort -p tot -a. Behoort bovendien 0 niet tot a, dan behoort p^{-1} tot a^{-1}.

7141

5. Door op enige gegeven intervallen a,b,c,.. een eindig aantal malen de vier bewerkingen uit no 4 toe te passen, ontstaat een rationale functie f(a,b,c,..).

Stelling 3. Zij f(a,b,c,..) een rationale functie van de intervallen a,b,c,... Kiest men in elk van deze intervallen een meetbaar getal: p in a, q in b, r in c,..., dan ligt het getal f(p,q,r,..) in het interval f(a,b,c,..), mits dit laatste bestaat.

Stelling 4. Laat $f(x_1,\dots,x_m,\ y_1,\dots,y_n)$ een rationale functie zijn, zodat $f(p_1,\dots,p_m,\ y_1,\dots,y_n) = 0$, waarin $p_1 \dots p_m$ gegeven meetbare getallen zijn en $y_1 \dots y_n$ willekeurige meetbare getallen, waarvoor f bestaat. Laat verder $a_1 \dots a_m$ intervallen zijn, zodat p_i in a_i ligt $(i = 1,\dots,m)$ en $b_1 \dots b_n$ willekeurige intervallen. Dan zal het interval $f(a_1,\dots,a_m,\ b_1,\dots,b_n)$ het getal 0 bevatten (mits het bestaat).

6. Een intervalrij $\{\alpha_n\} = \{(\alpha_{n1},\alpha_{n2})\} = \alpha$ heet inkrimpend, als α_{n+1} een deel is van α_n voor iedere n.
De inkrimpende intervalrij α heet convergent, als men bij ieder natuurlijk getal k een natuurlijk getal n kan vinden, zodat $\alpha_{n2} - \alpha_{n1} < 2^{-k}$.
Een convergente inkrimpende interval heet een reëel getal.

7. De reële getallen α en β zijn gelijk $(\alpha = \beta)$, als α_n en β_n elkaar raken voor iedere n.

Stelling 5. De betrekking = tussen reële getallen is reflexief, symmetrisch en transitief.

Stelling 6. Wanneer twee reële getallen niet ongelijk kunnen zijn, dan zijn zij gelijk.

Opmerking. Deze stelling spreekt niet vanzelf. Als een bewering onmogelijk onjuist kan zijn, is zij daarom nog niet juist. Men kan gemakkelijk een reëel getal definiëren, dat onmogelijk irrationaal kan zijn, zonder dat het rationaal (d.w.z. gelijk aan een bepaald meetbaar getal) is.

8. De reële getallen α en β zijn van elkaar verwijderd, $\alpha \# \beta$, als α_i en β_i voor zekere i buiten elkaar liggen.

Stelling 7. Uit $\alpha \# \beta$, volgt $\alpha \neq \beta$.
Het omgekeerde mogen wij niet beweren.

Stelling 8. Kan α niet van β verwijderd zijn, dan geldt $\alpha = \beta$.

Stelling 9. Is $\alpha \# \beta$, dan geldt voor ieder reëel getal γ hetzij $\alpha \# \gamma$, hetzij $\beta \# \gamma$.

Stelling 10. Uit $\alpha \# \beta$, $\beta = \gamma$ volgt $\alpha \# \gamma$.

9. Zijn α en β reële getallen, dan is $\alpha + \beta = \{\alpha_n + \beta_n\}$, $\alpha \times \beta = \{\alpha_n \times \beta_n\}$.
Is α een reëel getal, dan is $-\alpha = \{-\alpha_n\}$.
Is α een reëel getal en ligt 0 buiten α_i, maar niet buiten α_k $(k = 1,\dots,i-1)$, dan is $\alpha^{-1} = \{\beta_n\}$, waarbij $\beta_n = \alpha_n^{-1}$ voor $n \geq i$, $\beta_n = \alpha_i^{-1}$ voor $n < i$.
Stelling 11. $\alpha + \beta$, $\alpha \times \beta$, $-\alpha$ en α^{-1} als hierboven bepaald zijn weer reële getallen.

10. De reële getallen $\{(r, r)\}$ (r meetbaar) vormen een getallenstelsel, dat met dat der meetbare getallen isomorf is. In deze zin vormt het stelsel der reële getallen een uitbreiding van dat der meetbare getallen.

11. Stelling 12. Is $f(x,y,z,\dots)$ een rationale functie en zijn $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha', \beta', \gamma', \dots$ reële getallen, zodat $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, ..., dan is $f(\alpha, \beta, \gamma, \dots) = f(\alpha', \beta', \gamma', \dots)$.
Dit volgt gemakkelijk uit stelling 3.
Stelling 13. Laat $f(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$ een rationale functie zijn, zodat $f(p_1,\dots,p_m,y_1,\dots,y_n) = 0$, waarin $p_1,\dots,p_m$ gegeven meetbare getallen zijn en $y_1,\dots,y_n$ willekeurige meetbare getallen, waarvoor f bestaat. Dan is ook $f(p_1,\dots,p_m, \xi_1,\dots,\xi_n) = 0$, waarin $p_1,\dots,p_m$ de gegeven meetbare getallen zijn, nu als reële getallen beschouwd (§ 10) en $\xi_1,\dots,\xi_n$ willekeurige reële getallen.
Kort gezegd: Iedere identiteit, die voor meetbare getallen geldt, geldt ook voor reële getallen. Hieruit volgen de gewone rekenregels voor reële getallen.

Wij vullen ze aan met de volgende eigenschappen:
Stelling 14. Uit $\alpha \# \beta$ volgt $\alpha + \gamma \# \beta + \gamma$.
Stelling 15. Uit $\alpha \# \beta$ en $\gamma \# 0$ volgt $\alpha\gamma \# \beta\gamma$.
Stelling 16. Als $\alpha \# 0$ bestaat α^{-1}; dan is $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

12. Men mag niet beweren: als $\alpha\beta = 0$ is of $\alpha = 0$, of $\beta = 0$. Het kan namelijk voorkomen, dat men niet weet, welke van de beide factoren 0 is. Wel gelden de volgende eigenschappen:
Stelling 17 I. Uit $\alpha \# 0$ en $\beta \# 0$ volgt $\alpha\beta \# 0$.
II. Uit $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$ volgt $\alpha\beta \neq 0$.
Stelling 18 I. Uit $\alpha\beta \# 0$ volgt $\alpha \# 0$ en $\beta \# 0$.
II. Uit $\alpha\beta \neq 0$ volgt $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$.
Om het verschil te doen uitkomen, bewijzen wij stelling 18 I en II.
Bewijs van II. Stel dat $\alpha = 0$, dan is $\alpha\beta = 0$ in strijd met het gegeven, dus $\alpha \neq 0$. Evenzo $\beta \neq 0$.
Bewijs van I. Stel $\alpha\beta = \gamma$. Men kan γ_n bepalen zodat 0 buiten γ_n ligt. γ_n bevat $\alpha_{n1}\beta_{n1}$, $\alpha_{n1}\beta_{n2}$, $\alpha_{n2}\beta_{n1}$ en $\alpha_{n2}\beta_{n2}$; deze getallen

hebben dus hetzelfde teken. In het bijzonder hebben α_{n_1} en α_{n_2} hetzelfde teken, dus 0 ligt buiten α_n, dus $\alpha \# 0$. Evenzo $\beta \# 0$.

13. Bepaling. α is aanwijsbaar kleiner dan β ($\alpha <\!\!\circ\, \beta$), wanneer α_n buiten en links van β_n ligt voor zekere n.

Stelling 19. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ volgt $\alpha \# \beta$.
Uit $\alpha \# \beta$ volgt, dat hetzij $\alpha <\!\!\circ\, \beta$, hetzij $\beta <\!\!\circ\, \alpha$.

Stelling 20. I. $\alpha = \beta$, $\alpha <\!\!\circ\, \beta$, $\beta <\!\!\circ\, \alpha$ sluiten elkaar uit.
II. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ volgt $\gamma <\!\!\circ\, \delta$.
III. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$, $\beta <\!\!\circ\, \gamma$ volgt $\alpha <\!\!\circ\, \gamma$.
IV. Is zowel $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ als $\beta <\!\!\circ\, \alpha$ ongerijmd, dan geldt $\alpha = \beta$.
V. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ volgt, dat voor ieder reëel getal γ hetzij $\alpha <\!\!\circ\, \gamma$, hetzij $\gamma <\!\!\circ\, \beta$.

<u>Bepaling</u>. Een relatie, die aan de 5 voorwaarden uit stelling 20 voldoet, noemen wij een pseudoördening.

14. Bepaling. α is <u>virtueel kleiner</u> dan β, ($\alpha <^{\times} \beta$), wanneer zowel $\beta <\!\!\circ\, \alpha$ als $\beta = \alpha$ ongerijmd is.

Stelling 21. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ volgt $\alpha <^{\times} \beta$.

Stelling 22. De uitspraken: "Het is onmogelijk dat $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ " en "Het is onmogelijk dat $\alpha <^{\times} \beta$ " zijn aequivalent.

Stelling 23. Voor de virtuele ordening gelden de eerste vier eigenschappen uit stelling 20 en bovendien:

VI. Wanneer zowel $\alpha = \beta$ als $\beta <^{\times} \alpha$ ongerijmd is, geldt $\alpha <^{\times} \beta$.

Dit volgt onmiddellijk uit de definitie en stelling 21.

15. Stelling 24. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ volgt $\alpha + \gamma <\!\!\circ\, \beta + \gamma$. Uit $\alpha <\!\!\circ\, \beta$ en $0 <\!\!\circ\, \gamma$ volgt $\alpha \times \gamma <\!\!\circ\, \beta \times \gamma$.

Stelling 25. Uit $\alpha <^{\times} \beta$ volgt $\alpha + \gamma <^{\times} \beta + \gamma$.
Uit $\alpha <^{\times} \beta$ en $0 <^{\times} \gamma$ volgt $\alpha \times \gamma <^{\times} \beta \times \gamma$.

Bewijs van het laatste. Stel $\alpha\gamma = \beta\gamma$, dus $(\alpha - \beta)\gamma = 0$. Daar $\alpha - \beta \neq 0$, leert stelling 17 II ons, dat $\gamma = 0$, in strijd met het gegeven. Dus $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Stel $\beta\gamma <\!\!\circ\, \alpha\gamma$, dus $(\alpha - \beta)\gamma \mathrel{\circ\!\!>} 0$. Volgens stelling 18 I is dan $\alpha - \beta \# 0$, dus, daar $\alpha \mathrel{\circ\!\!>} \beta$ niet mogelijk is, $\alpha <\!\!\circ\, \beta$; dan is $\gamma <\!\!\circ\, 0$ in strijd met het gegevene. Ook $\beta\gamma <\!\!\circ\, \alpha\gamma$ is dus onmogelijk. Dan is $\alpha\gamma <^{\times} \beta\gamma$.

16. Niet ieder reëel getal kan in een decimale breuk ontwikkeld worden. Voorbeeld: $a = \lim a_n$. $a_n = 1 + (-2)^{-n}$, als onder de eerste n decimalen van π geen 3 opeenvolgende zevens voorkomen. $a_n = 1 + (-2)^{-k}$, als dat wel zo is en k het rangnummer van de laatste zeven uit het eerste drietal is.
Men kan bewijzen, dat alle algebraische getallen en ook e en π in decimale breuken te ontwikkelen zijn. Voor de constante van Euler is het niet bewezen.

Cursus Intuitionistische Wiskunde
1949/1950

Hoofdstuk II. ALGEBRA.

17. Een stelsel van n vergelijkingen van de eerste graad met n onbekenden:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

kan met de regel van Cramer opgelost worden, mits $\det(a_{ik}) \# 0$. Voor de zo verkregen oplossing $(c_1,\ldots,c_n)$ geldt: Heeft men n getallen $(d_1,\ldots,d_n)$, zodat voor minstens één waarde van i, $d_i \# c_i$, dan is voor minstens één waarde van i,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_k \# 0.$$

(verscherpte eenduidigheid der oplossing).

18. De rang van een matrix is r, als minstens een onderdeterminant met r rijen van 0 verwijderd is, terwijl alle onderdeterminanten met r+1 rijen 0 zijn.
Laat een stelsel van p vergelijkingen met n onbekenden gegeven zijn.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = b_i \qquad (i=1,\ldots,p),$$

waarin de matrix (a_{ik}) de rang r heeft. Zijn nu de karakteristieke determinanten $d_1,\ldots,d_{p-r}$ alle 0, dan heeft het stelsel een oplossing, waarin n-r onbekenden willekeurig blijven. Deze oplossing is verscherpt volledig.
Is een $d_s \# 0$, dan hoort bij ieder stel waarden van $x_1,\ldots,x_n$ minstens een index i zodat

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k \# b_i.$$

Is de rang van (a_{ik}) niet bekend, dan kan men in het algemeen niets over de oplossingen zeggen.

19. Een stelsel homogene vergelijkingen heeft een van de nuloplossing verwijderderde oplossing, zodra $r < n$. Weet men alleen, dat alle onderdeterminanten met n rijen 0 zijn, dan is het onmogelijk, dat er geen van de nuloplossing verwijderde oplossing is.

Over het vermenigvuldigen van veeltermen.
20. Uit de betrekking

$$(b_p x^p + \ldots + b_0)(c_q x^q + \ldots + c_0) = a_n x^n + \ldots + a_0,$$

$p+q > n$, volgt niet, dat $b_p = 0$ of $c_q = 0$.

Stelling. Is $b_r \neq 0$ en $c_s \neq 0$, dan is een $a_h \neq 0$ met $h \geq r+s$.

Stelling. Is $a_{n-t} \neq 0$ en $p+q > n+t$, dan is $b_p = 0$ of $c_q = 0$.

21. De deling door een veelterm gaat alleen, als de begincoefficient van 0 verwijderd is. Om te onderzoeken, of $f \equiv a_n x^n + \ldots + a_o$ deelbaar is door $g \equiv b_p x^p + \ldots b_o$ stellen wij $f = gh$ of

$$(a_n x^n + \ldots + a_o) = (b_p x^p + \ldots + b_o)(c_q x^q + \ldots + c_o)$$

dit voert tot een stelsel lineaire vergelijkingen in $c_o \ldots c_q$, waarvan de coefficientenmatrix is

$$\begin{pmatrix} b_o & & \\ \vdots & \ddots & \\ b_r & & b_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_p & & b_r \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_p \end{pmatrix}$$

;de bekende termen zijn:

$$\begin{matrix} a_o \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

Laat nu gegeven zijn $b_r \neq 0$; de determinant d_r met b_r in de hoofddiagonaal is $\neq 0$ of een $b_s \neq 0$ met $s < r$. Wij vinden zo zeker een determinant $d_j \neq 0$. Zijn nu alle karakteristieke determinanten $= 0$, dan is f deelbaar door g. Is een karakteristieke determinant $\neq 0$, dan is f verwijderd van ieder veelvoud van g; $f \neq 0(g)$.

22. Over de discriminant $d = ac - b^2$ van de vierkantsvergelijking $f(x) \equiv ax^2 + 2bx + c = 0$.

Stelling 1. Is $d < 0$, dan neemt $f(x)$ de waarde 0 en zowel positieve als negatieve waarden aan.

Bewijs. Uit $d < 0$ volgt $b \neq 0$ of $ac < 0$.

Neem eerst aan $b \neq 0$; dan is $b + \sqrt{-d} \neq 0$ of $b - \sqrt{-d} \neq 0$; $f\left(\frac{-c}{b \pm \sqrt{-d}}\right) = 0$.

$f(1) = a + 2b + c \quad f(-1) = a - 2b + c$.

Deze uitkomsten hebben tegengestelde tekens, of $a + c = 0$.

Neem nu aan, dat $a \neq 0$. De bewering volgt nu uit

$$f\left(\frac{b + \lambda\sqrt{-d}}{-a}\right) = ad(1 - \lambda^2).$$

Is $c \neq 0$, dan volgt zij uit

$$f\left(\frac{-c}{b + \lambda\sqrt{-d}}\right) = \frac{cd(1 - \lambda^2)}{(b + \lambda\sqrt{-d})^2}.$$

Stelling 2. Neemt $f(x)$ zowel positieve als negatieve waarden aan, dan is $d < 0$.

Bewijs. Neem aan, dat $a \neq 0$. $f(x) = \frac{1}{a}\left\{(ax+b)^2 + d\right\}$.

De vorm tussen accoladen wordt negatief, dus $d < 0$. Neem nu aan, dat $c \neq 0$. $f(x) = \frac{1}{c}\left\{(bx+c)^2 + dx^2\right\}$.

Uit b = 0 volgt $d < 0$ of $ac \neq 0$.
Stelling 3. Als $d > 0$ zijn alle waarden van $f(x)$ verwijderd van 0 en hebben zij hetzelfde teken.
Bewijs. Uit $d > 0$ volgt $ac > 0$, dus $a \# 0$. De stelling volgt nu uit de eerste regel van het vorige bewijs.
Stelling 4. Zijn alle waarden van $f(x)$ verwijderd van 0, en is $f(x_1) \# f(x_2)$, dan is $d > 0$.
Bewijs. Uit $f(x_1) - f(x_2) \# 0$ volgt $a \# 0$ of $b \# 0$. Stel $b \# 0$.

$f(-\frac{c}{b}) = \frac{cd}{b^2}$, dus $d \# 0$.

Stel $a \# 0$. $f(-\frac{b}{a}) = \frac{d}{a}$, dus $d \# 0$.

Daar $d < 0$ onmogelijk is (st.1) is $d > 0$.

Hoofdstuk III. REEKSEN.

23. Voorbeeld van een reeks met positieve termen, die beperkt blijft, zonder convergent te zijn.
Vb.1. $a_n = 2^{-n}$, behalve als n het rangnummer van de 9 uit de eerste sequens uit de decimale ontwikkeling van π is(verkort: seq (n)); dan is $a_n = 1$.
Uit dit voorbeeld blijkt tevens, dat de stelling van de bovenste grens niet geldt.

24.Bepaling. Een reeks $\{a_n\}$ heet positief convergent met de som s, als bij ieder natuurlijk getal p een natuurlijk getal q te vinden is, zodat voor ieder natuurlijk getal m geldt

$$|s - s_{q+m}| < 2^{-p} \quad (s_r = \sum_{k=1}^{n} a_k) \qquad (1)$$

Stelling. Nodig en voldoende voor de positieve convergentie is, dat bij ieder natuurlijk getal p een natuurlijk getal q te vinden is, zodat voor elk paar natuurlijke getallen m en n $(n < m)$ geldt

$$\left| \sum_{k=q+n}^{q+m} a_k \right| < 2^{-p}. \qquad (2)$$

(Kenmerk van Cauchy).

25. Bepalingen. Een reeks $\{a_n\}$ heet negatief convergent met de som s, als het voor ieder natuurlijk getal p onmogelijk is, dat er geen natuurlijk getal q bestaat met de eigenschap, dat §24(1) voor ieder natuurlijk getal geldt.

De reeks heet non-oscillerend, als het voor ieder natuurlijk getal p onmogelijk is, dat er geen natuurlijk getal q bestaat met de eigenschap

dat §24(2) geldt voor ieder paar natuurlijke getallen m en n ($n<m$).
Stelling. Iedere negatief convergente rij is non-oscillerend.
Bewijs. Stel, dat p gevonden was, zodat er geen q bestaat, waarvoor steeds $|s_{q+m} - s_{q+n}| < 2^{-p}$. Dan bestaat er ook geen q, waarvoor steeds $|s - s_{q+m}| + |s-s_{q+n}| < 2^{-p}$, dus geen q, waarvoor steeds $|s - s_{q+h}| < 2^{-p-1}$
Dit is in strijd met de negatieve convergentie. Daarentegen behoeft een non-oscillerende reeks niet negatief convergent te zijn (Vb.1).
Vb.2. $a_n = 2^{-n}$, behalve als seq(n) of seq(n-1).
Als seq(n) is $a_n = n + 2^{-n}$.
Als seq(n-1), is $a_n = -n+2^{-n}$.
Deze reeks is negatief convergent, niet zeker positief convergent.

26. Stelling. Zijn de reeksen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ negatief convergent met som s, resp. t, dan is $\{a_n+b_n\}$ negatief convergent met som s+t.
Bewijs. Uit het gegeven volgt, dat het voor ieder natuurlijk getal p onmogelijk is, dat er geen natuurlijk getal q bestaat, zodat steeds

$$|s_{q+n} - s| + |t_{q+n} - t| < 2^{-p-1} ;$$

dus is het eveneens onmogelijk, dat er geen q bestaat, zodat steeds

$$|(s+t) - (s_{q+n} + t_{q+n})| < 2^{-p-1}.$$

27. Stelling. Is de reeks $\{a_n\}$ negatief convergent met de som s en tegelijk negatief convergent met de som t, dan is s=t.
Bewijs. $\{-a_n\}$ is neg.con. met som -t, dus $\{a_n - a_n\}$ is neg.convergent m som s-t.
Maar $\{0\}$ convergeert positief tot 0, dus s-t = 0.
Bepaling. De reeks $\{a_n\}$ heet meervoudig negatief convergent tot de getallen s_1, s_2, s_3,..., als het onmogelijk is dat zij niet negatief convergeert tot één der getallen s_k.
De reeks uit vb.1 is meervoudig neg.conv. tot de getallen $1,2-2^{-k}$ ($k=1,\dots$).
Stelling. Iedere meervoudig negatief convergente reeks is non-oscillerend.
Bewijs. Bestond er geen q, waarvoor §24(2) steeds zou gelden, dan kon de reeks tot geen enkele som negatief convergeren.

29. Stelling. Een absoluut convergente reeks is onvoorwaardelijk convergent.
Stelling. Is de reeks $\{a_n\}$ positief convergent, terwijl de reeks $\{|a_n|\}$ positief naar ∞ divergeert, dan kan men de termen van de eerste reeks zo verschikken, dat de som een willekeurig gegeven getal wordt..

30. Bepalingen. De reeks $\{a_n\}$ heet convergent (A +), als de reeks $\{|a_n|\}$ positief convergeert.

Zij heet convergent (A -), als zowel $\{a_n\}$ als $\{|a_n|\}$ negatief convergeert.

Zij heet convergent (B +), resp. (B -), als $\{a_n\}$ positief, resp. negatief, convergeert en $\{|a_n|\}$ beperkte deelsommen heeft.

Opmerkingen. Uit de positieve convergentie van $\{|a_n|\}$ volgt die van $\{a_n\}$

Dit geldt niet voor negatieve convergentie.

Voor de onvoorwaardelijke convergentie is convergentie (B +) niet voldoende.