STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 51

# Elementaire algebraische topologie.

Serie voordrachten Eindhoven 1960-1961.
incompl.

W.T. van Est.

1961

Serie voordrachten over "Elementaire algebraïsche topologie"
door
Prof.dr. W.T. van Est
Eindhoven 1960-1961

## Homologietheorie

### Hfst.I. Algemene grondbegrippen van de homologietheorie

§ 1. Def.: Een k+1-tal punten $a_o,\ldots,a_k$ in de $R^n$ heet een stelsel in algemene ligging als $a_o,\ldots,a_k$ niet liggen in een (k-1)-dimensionaal hypervlak.

Ieder deelstelsel van een stelsel in algemene ligging is weer in algemene ligging.

Def.: Een deelverzameling $S \subset R^n$ heet k-dimensionaal simplex met hoekpunten $a_o,\ldots,a_k$ als
(i) $a_o,\ldots,a_k$ een stelsel in algemene ligging is
(ii) $x \in S \Longleftrightarrow x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1.$

Het k-dimensionale simplex met de hoekpunten $a_o,\ldots,a_k$ geven we aan met $(a_o,\ldots,a_k)$.

Een randsimplex van $(a_o,\ldots,a_k)$ is ieder simplex $(a_{i_o},\ldots,a_{i_s})$, waarbij $\{i_o,\ldots,i_s\}$ een deelverzameling is van $\{a,\ldots,k\}$. In het bijzonder is $(a_o,\ldots,a_k)$ een randsimplex van zichzelf.

Def.: Een simpliciaal complex $\Gamma$ (in de $R^n$) is een eindige collectie simplices zodat
(i) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ is randsimplex van $\sigma_1$ èn van $\sigma_2$.
(ii) $\sigma \in \Gamma \Rightarrow$ ieder randsimplex van $\sigma$ is in $\Gamma$.

2. Def.: Een oriëntatie van het k-dim. simplex $(a_o,\ldots,a_k)$ is een klasse van volgorden $a_{i_o},\ldots,a_{i_k}$ van de hoekpunten $a_o$ t/m $a_k$, waarbij twee volgorden tot dezelfde klasse gerekend worden als ze uit elkaar ontstaan door een even permutatie van de hoekpunten.

De klasse van de hoekpuntsvolgorde $a_{i_o},\ldots,a_{i_k}$ geven we aan door $[a_{i_o},\ldots,a_{i_k}]$, en i.p.v. "oriëntatie" zeggen we voortaan ook wel "georiënteerd simplex". Ieder simplex van dimensie $\geq 1$ bezit precies 2 oriëntaties, een nuldimensionaal simplex heeft slechts 1 oriëntatie, i.p.v. $[a_o]$ schrijven we ook wel $a_o$.

Zij nu $\Gamma$ een simpliciaal complex. Een keten van dimensie k op $\Gamma$ is een (eindige) formele lineaire combinatie $\lambda_1[a_0^1,\dots,a_k^1]+\dots+\lambda_s[a_0^s,\dots,a_k^s]$, $\lambda_i$ geheel, en $(a_0^i,\dots,a_k^i)$ een k-dimensionaal simplex uit $\Gamma$. Een keten blijft dus onveranderd als men tegelijkertijd invoegt $\lambda[a_0,\dots,a_k]$ en $-\lambda[a_0,\dots,a_k]$. Als $[\sigma]$ en $[\sigma]^*$ de twee oriëntaties voorstellen van een simplex $\sigma$ (van dimensie $\geq 1$), zullen we voorts $[\sigma]^* = -[\sigma]$ stellen. Dit betekent dus dat, wanneer in de formele som $[\sigma]$ voorkomt met de coëfficiënt $\lambda$ en $[\sigma]^*$ met de coëfficiënt $\mu$, men deze twee termen mag vervangen naar believen door $(\lambda-\mu)[\sigma]$ of wel $(\mu-\lambda)[\sigma]^*$.

Optelling van 2 ketens wordt op voor de hand liggende manier gedefinieerd. Zodoende is de verzameling $C_k(\Gamma)$ van k-(dimensionale) ketens op $\Gamma$ een abelse groep geworden.

Voor een georiënteerd simplex $[a_0,\dots,a_k]$ $(k \geq 1)$ wordt de rand $\partial[a_0,\dots,a_k]$ gedefinieerd als een (k-1)-(dimensionale) keten door de formule

$$\partial[a_0,\dots,a_k] = \sum_{i=0}^{k} (-)^i [a_0,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_k] \qquad (*) .$$

De rechterkant van (*) is onafhankelijk van de hoekpuntsvolgorde die $[a_0,\dots,a_k]$ representeert. Er geldt nl. volgens (*)

$$\partial[a_0,\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_k] = -\partial[a_0,\dots,a_j,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_k] .$$

Dus de rechterkant van (*) krijgt bij een permutatie van de hoekpunten het teken + of - naar gelang de permutatie even of oneven is. Dus (*) definieert de rand van een georiënteerd simplex op ondubbelzinnige wijze, en voorts is $\partial[a_0,a_1,a_2,\dots,a_k] = -\partial[a_1,a_0,a_2,\dots,a_k]$.

Voor een keten $\gamma = \sum \lambda_\nu[\sigma^\nu]$, $[\sigma^\nu]$ georiënteerd k-(dim)simplex, $k \geq 1$, definieren we $\partial\gamma = \sum \lambda_\nu \partial[\sigma^\nu]$.

$\partial$ is daarmee geworden een homomorfisme $C_k(\Gamma) \to C_{k-1}(\Gamma)$, $k \geq 1$.

Er geldt

$$\partial\partial = 0 \qquad (**)$$

(te verifiëren voor een georiënteerd simplex en daarmee tevens voor een keten).

k-(dim)cykel is een k-keten met rand 0. De cykels vormen een ondergroep $Z_k(\Gamma)$ van $C_k(\Gamma)$, nl. de kern van het randhomomorfisme.

k-dim rand is een k-keten $\partial\gamma$, $\gamma$ een k+1-keten. De randen vormen een ondergroep $B_k(\Gamma) = \partial C_{k+1}(\Gamma)$.

Wegens ( * *) is $B_k(\Gamma) \subset Z_k(\Gamma)$. Twee cykels heten onderling homoloog als hun verschil een rand is. Het "homoloog zijn" is een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie. Deze relatie induceert dus een indeling van de cykels in homologieklassen. In de verzameling homologieklassen definieert men een optelling door "representantsgewijze optelling". De aldus verkregen groep $H_k(\Gamma) = Z_k(\Gamma)/B_k(\Gamma)$ heet de k-dimensionale homologiegroep van $\Gamma$. Voor k=0 stelt men formeel $Z_o(\Gamma) = C_o(\Gamma)$ en $H_o(\Gamma) = Z_o(\Gamma)/B_o(\Gamma)$.

§ 3. $H_o(\Gamma)$ voor samenhangende $\Gamma$. Een simpliciaal complex $\Gamma$ heet samenhangend als ieder paar hoekpunten $x_o, x_1$ van $\Gamma$ verbonden kunnen worden, d.w.z. als bij ieder paar hoekpunten $x_o$ en $x_1$ van $\Gamma$ een rij van 1-simplices uit $\Gamma$ bestaat, $(a_o,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots,(a_{n-1},a_n)$ met $a_o=x_o$, $a_n=x_1$.

Blijkbaar is $\partial\{[a_o,a_1] + [a_1,a_2] +\ldots+ [a_{n-1},a_n]\} = a_n-a_o=x_1-x_o$. Ieder tweetal hoekpunten van $\Gamma$ (opgevat als georiënteerde simplices) is dus homoloog. Zij x nu een vast punt van $\Gamma$ dan is dus iedere 0-keten $\sum \lambda_i a_i$ homoloog met $(\sum \lambda_i)x$.

Voorts is in de rand $\partial[a_o,a_1] = a_1-a_o$ van een georiënteerd 1-simplex $[a_o,a_1]$ de coëfficiëntensom nul, dus is in de rand van een 1-keten de coëfficiëntensom ook 0. D.w.z. homologe 0-ketens corresponderen met hetzelfde veelvoud van x. Iedere homologieklasse van 0-ketens bevat precies één veelvoud van x. Omgekeerd bepaalt ieder veelvoud van x ondubbelzinnig een homologieklasse. $H_o(\Gamma)$ is dus isomorf met de groep van de veelvouden van x dus met de optelgroep J der gehele getallen.

§ 4. De homologie van een kegel. Een simpliciaal complex $\Gamma$ heet kegel met top in t als ieder simplex $\sigma \in \Gamma$ randsimplex is van een simplex $\sigma' \in \Gamma$ dat o.a. t als hoekpunt heeft. Met $t\sigma$ geven we dan het kleinste zodanige simplex $\sigma'$ aan.

Een kegel is samenhangend want ieder hoekpunt kan door een 1-simplex met de top verbonden worden, dus ieder tweetal hoekpunten kan via de top verbonden worden.

Zij $[\sigma] = [a_o,\ldots,a_k]$ een georiënteerd simplex in de kegel K. Onder $t[\sigma]$, t=top van K, verstaan we $[t,a_o,\ldots,a_k]$ als t niet voorkomt onder de $a_o,\ldots,a_k$, en 0 in het andere geval. De definitie van $t[\sigma]$ is onafhankelijk van de voor $\sigma$ gebruikte hoekpuntsvolgorde. Voor een k-keten $\gamma = \sum \lambda_\nu [\sigma_\nu]$ definiëren we $t\gamma = \sum \lambda_\nu t[\sigma_\nu]$.

Homologietheorie

# Hoofdst.II. Topologische invariantie van de homologiegroepen

## §1. Ketenhomomorfismen en acyclische correspondenties

Laten $\Gamma$ en $\Gamma'$ simpliciale complexen zijn. Een rij homomorfismen $\varphi_k: C_k(\Gamma) \to C_k(\Gamma')$, $k=0,1,2,\dots$, heet een ketenhomomorfisme van $\Gamma$ in $\Gamma'$ als $\varphi_{k-1}\partial = \partial\varphi_k$, en als verder voor iedere 0-keten $\gamma$, $\varphi_0\gamma$ en $\gamma$ dezelfde coëfficiëntensom bezitten.

We laten de index k bij de homomorfismen $\varphi_k$ meestal weg.

Een ketenhomomorfisme $\varphi$ voegt cykels aan cykels toe, randen aan randen, en homologe cykelparen aan homologe cykelparen. Dus $\varphi$ induceert een homomorfisme $\varphi_* : H_k(\Gamma) \to H_k(\Gamma')$, $k=0,1,2,\dots$ .

Een correspondentie C van $\Gamma$ in $\Gamma'$ is een afbeelding die aan ieder simplex $\sigma$ van $\Gamma$ toevoegt een subcomplex $C(\sigma)$ van $\Gamma'$ zodat $\sigma \subset \tau \Rightarrow C(\sigma) \subset C(\tau)$.

Een correspondentie C heeft acyclisch als voor iedere $\sigma \in \Gamma$ $C(\sigma)$ een acyclisch complex is.

Een correspondentie C heet drager van een ketenhomomorfisme $\varphi$ als, voor ieder simplex $\sigma$, $\varphi([\sigma])$ een keten op $C(\sigma)$ is, waarbij $[\sigma]$ een oriëntatie van $\sigma$ is.
("Een keten $\gamma$ op $\Gamma'$ ligt op $C(\sigma)$" betekent: "de in $\gamma$ optredende georiënteerde simplexen met coëfficiënt $\neq 0$ zijn oriëntaties van simplexen van $C(\sigma)$".)

Stelling (Lefschetz). Zij C een acyclische correspondentie van $\Gamma$ in $\Gamma'$. Dan is er een ketenhomomorfisme $\varphi$ waarvan C de drager is. Zij $\psi$ nog een ketenhomomorfisme met drager C, dan is $\psi_* = \varphi_*$.

Bewijs: Existentie $\varphi$. Kies voor ieder hoekpunt $a \in \Gamma$, $\varphi(a)$ als een hoekpunt van $C(a)$. Definieer, voor iedere 0-keten $\gamma = \sum \lambda_\nu a_\nu$, $\varphi(\gamma) = \sum \lambda_\nu \varphi(a_\nu)$.

Vervolgens gaan we $\varphi$ definiëren voor de georiënteerde 1-simplexen $[a_0,a_1]$. $\varphi(a_0)$ en $\varphi(a_1)$ zijn hoekpunten van $C(a_0)$ en $C(a_1)$, en wegens $C(a_0), C(a_1) \subset C((a_0,a_1))$, dus ook hoekpunten van $C((a_0,a_1))$. $C((a_0,a_1))$ is als acyclische complex samenhangend, dus een 0-keten op $C((a_0,a_1))$ met coëfficiëntensom nul is een rand (Hfdst.I, § 3 en opgave in § 4). Er is dus in het bijzonder een 1-keten $\gamma_{(a_0,a_1)}$ zodat $\varphi(\partial[a_0,a_1]) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_0) = \partial\gamma_{(a_0,a_1)}$.

Stel nu $\varphi([a_0,a_1]) = \gamma_{(a_0,a_1)}$

en $\varphi([a_1,a_0]) = -\gamma_{(a_0,a_1)}$.

Definieer voor een 1-keten

$\gamma = \sum \lambda_\nu [\sigma_\nu]$, ($[\sigma_\nu]$ - georiënteerde simplexen)

$\varphi(\gamma) = \sum \lambda_\nu \varphi([\sigma_\nu])$.

Voor zover $\varphi$ gedefinieerd is geldt nu reeds $\varphi \partial = \partial \varphi$ (*)

We gaan nu $\varphi$ definiëren voor de 2-ketens en daartoe allereerst voor de georiënteerde 2-simplexen.

Kies daartoe bij ieder 2-simplex $\sigma = (a_0, a_1, a_2)$ een vaste oriëntatie bijv. $[\sigma]$.

Nu is $\varphi(\partial[\sigma])$ een 1-keten op $C((a_0,a_1)) \cup C((a_1,a_2)) \cup C((a_0,a_2))$ dus een 1-keten op $C(\sigma)$. Voorts is wegens (*) $\partial\varphi(\partial[\sigma]) = \varphi(\partial\partial[\sigma]) = \varphi(0)=0$. Dus $\varphi(\partial[\sigma])$ is een cykel op $C(\sigma)$. $C(\sigma)$ is een acyclisch complex, dus iedere cykel hierop (in dimensie $s \geqslant 1$) is een rand. Er is dus een 2-keten $\gamma_\sigma$ op $C(\sigma)$ met $\partial\gamma_\sigma = \varphi(\partial[\sigma])$.

Stel $\varphi([\sigma]) = \gamma_\sigma$.

Voor een 2-keten $\sum \lambda_\nu[\sigma_\nu]$ waarbij $[\sigma_\nu]$ georiënteerde 2-simplexen zijn waarvoor $\varphi$ gedefiniëerd is, stellen we $\varphi(\sum \lambda_\nu [\sigma_\nu]) = \sum \lambda_\nu \varphi[\sigma_\nu]$.

Voor zover $\varphi$ gedefinieerd is geldt nu $\varphi\partial = \partial\varphi$.

Zo definiëren we stapsgewijs $\varphi$ voor alle dimensies.

<u>Eenduidigheid van $\varphi_*$</u>. Zij $\psi$ nog een ketenhomomorfisme met C als drager.

Voor ieder hoekpunt a zijn $\varphi(a)$ en $\psi(a)$ 0-ketens op $C(a)$ met coëfficiëntensom 1. Dus $\varphi(a) - \psi(a)$ is een 0-keten met coëfficiëntensom nul. Wegens acycliciteit van $C(a)$ is er een 1-keten $\Delta(a)$ op $C(a)$ met $\partial\Delta(a) = \varphi(a) - \psi(a)$.

Definieer voor een nulketen $\gamma = \sum \lambda_\nu a_\nu$ $\Delta = \sum \lambda_\nu \Delta(a_\nu)$. Blijkbaar geldt dan $\partial\Delta(\gamma) = \varphi(\gamma) - \psi(\gamma)$ (*).

Voor ieder georiënteerd 1-simplex $[\sigma]$ is $\varphi([\sigma]) - \psi([\sigma]) - \Delta(\partial[\sigma])$ wegens (*) een 1-cykel op $C(\sigma)$. Wegens acycliciteit van $C(\sigma)$ is er dan een 2-keten $\Delta(\sigma)$ op $C(\sigma)$ met

$$\partial\Delta(\sigma) = \varphi([\sigma]) - \psi([\sigma]) - \Delta(\partial[\sigma]).$$

Definieer voor een 1-keten $\gamma = \sum \lambda_\nu[\sigma_\nu]$ weer $\Delta(\gamma) = \sum \lambda_\nu \Delta([\sigma_\nu])$.

Dan geldt weer

$$\partial\Delta(\gamma) = \varphi([\gamma]) - \psi([\gamma]) - \Delta(\partial[\gamma]).$$

Zo definiëren we stapsgewijs in dimensie s voor iedere keten $\gamma$, $\Delta(\gamma)$ als een (s+1)-keten op $\Gamma'$ met

$$\partial\Delta(\gamma) + \Delta(\partial[\gamma]) = \varphi([\gamma]) - \psi([\gamma]) \quad (\dagger).$$

Uit ($\dagger$) volgt dat $\varphi([\gamma])$ en $\psi([\gamma])$ homoloog zijn als $\gamma$ een cykel is. Dus $\varphi_*$ en $\psi_*$ beelden een homologieklasse van cykels op $\Gamma$ in dezelfde homologieklasse van cykels op $\Gamma'$ af.

De ketenafbeeldingen die door een gegeven acyclische correspondentie C worden gedragen induceren voor de homologie een homomorfisme dat blijkens de stelling van Lefschetz slechts van C afhangt. Dit homomorfisme van $H_k(\Gamma) \to H_k(\Gamma')$ geven we met $C_*$ aan.

Uit de stelling van Lefschetz trekken we nog enige conclusies.

Zijn C en D correspondenties van $\Gamma$ in $\Gamma'$ dan schrijven we $C \subset D$ als voor iedere $\sigma \in \Gamma$ geldt $C(\sigma) \subset D(\sigma)$.

Conclusie 1. Als C en D acyclische correspondenties zijn van $\Gamma$ in $\Gamma'$ en $C \subset D$, dan is $C_* = D_*$.

Als C een correspondentie van $\Gamma$ in $\Gamma'$ is en D een correspondentie van $\Gamma'$ in $\Gamma''$ dan definiëren we de correspondentie DC van $\Gamma$ in $\Gamma''$ door $DC(\sigma) = \bigcup_{\tau \in C(\sigma)} D(\tau)$. Veronderstel nu bovendien dat D en C acyclisch zijn en dat E een acyclische correspondentie van $\Gamma$ in $\Gamma''$ is met $DC \subset E$.

Conclusie 2. $\qquad E_* = D_* \; C_*$ .

Tenslotte zij C een correspondentie van $\Gamma$ in zichzelf met $\sigma \in C(\sigma)$ voor iedere $\sigma \in \Gamma$.

Conclusie 3. $\qquad C_* =$ identiteit.

## § 2. Barycentrische onderverdeling

Zij a een 0-simplex. Onder de barycentrische onderverdeling $\beta(a)$ van a verstaan we a zelf. Zij $\sigma = (a_0, a_1)$ een 1-simplex en $z_\sigma$ het midden van $\sigma$. De barycentrische onderverdeling $\beta(\sigma)$ van $\sigma$ is de collectie $\{(a_0, z_\sigma), (z_\sigma, a_1)\}$.

Voor een collectie $\Sigma$ van 1-simplexen verstaan we onder $\beta\Sigma$ de collectie $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \beta(\sigma)$.

Zij nu $\sigma$ een 2-simplex, $\dot{\sigma}$ de collectie van zijn 1-dimensionale randsimplexen, $z_\sigma$ het zwaartepunt van $\sigma$. We definiëren $\beta(\sigma)$ als de collectie van 2-simplexen $z_\sigma\tau$, $\tau \in \beta(\dot{\sigma})$, waarbij $z_\sigma\tau$ het door $z_\sigma$ en $\tau$ bepaalde 2-simplex is. Voor een collectie $\Sigma$ van 2-simplexen definiëren we $\beta\Sigma$ als $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \beta(\sigma)$.

"Zo voortgaande" definiëren we voor ieder simplex $\sigma$ de barycentrische onderverdeling $\beta(\sigma)$ en voor iedere collectie $\Sigma$ van simplexen $\sigma$, $\beta\Sigma$ als $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \beta(\sigma)$.

We geven voortaan voor ieder simplex $\sigma$ het complex van alle randsimplexen (inclusief $\sigma$) van $\sigma$ aan door $\{\sigma\}$.

Uit de constructie van de barycentrische onderverdeling volgt nu:

(1) de simplexen van $\beta(\sigma)$ zijn $\subset \sigma$.

(2) $\beta\{\sigma\}$ is een kegel met top $z_\sigma$.

(3) Als $\sigma$ randsimplex is van $\tau$ dan is $\beta\{\sigma\}\subset\beta\{\tau\}$.

(4) Als $\Gamma$ een complex is, dan is $\beta\Gamma$ eveneens een complex.

(5) De diameter van de simplexen van $\beta\sigma$, $\sigma$ een n-dimensionaal simplex, is hoogstens $\frac{n}{n+1}$ x de diameter van $\sigma$.

Zij $\Gamma$ een complex. Uit (2) en (3) volgt dat de correspondentie B van $\Gamma$ in $\beta\Gamma$ gedefinieerd door

$$B(\sigma) = \beta\{\sigma\}, \quad \sigma\in\Gamma$$

een acyclische correspondentie is.

Omgekeerd definiëren we een correspondentie van $\beta\Gamma$ in $\Gamma$ door

$$D(\tau) = \{\text{ drager van } \tau\} \ .$$

Volgens (1) is ieder simplex $\tau$ van $\beta\Gamma$ in tenminste één simplex van $\Gamma$ bevat; wegens voorwaarde (i) uit de definitie van simpliciaal complex (Hfdst. I, § 1) is de doorsnede van de simplexen uit $\Gamma$ die $\tau$ bevatten zelf weer een simplex uit $\Gamma$. De definitie van $D(\tau)$ is dus zinvol. Blijkbaar is D een acyclische correspondentie (Hfdst.I, blz.[1] toepassing 1.)

Voorts blijkt gemakkelijk dat

$$D\ B(\sigma) = \{\sigma\}$$

d.w.z. D B is weer een acyclische correspondentie van $\Gamma$ in $\Gamma$ en volgens § 1 conclusies 2 en 3 is:

$$\text{identiteit} = (D\ B)_* = D_*\ B_*\ .$$

Evenzo is $B\ D(\tau)$ = kegel met top in $z_{D(\tau)}$,

d.w.z. B D is acyclisch en $\tau \in B\ D(\tau)$.

Dus: identiteit $= (B\ D)_* = B_*\ D_*$ .

M.a.w. $H(\Gamma) \xrightarrow{B_*} H(\beta\Gamma)$ en $H(\beta\Gamma) \xrightarrow{D_*} H(\Gamma)$ zijn inverse isomorfismen op $*$.

Zijn nu $\beta^k\Gamma$ en $\beta^m\Gamma$, $0\leq k\leq m$, de k-resp. m-voudig geitereerde barycentrische onderverdeling (we stellen $\Gamma = \beta^0\Gamma$). We definiëren nu een correspondentie $D_{km}$ van $\beta^m\Gamma$ in $\beta^k\Gamma$ door

$$D_{km}(\sigma) = \{\text{drager van } \sigma \text{ in } \beta^k\Gamma\}\ .$$

$D_{km}$ is weer een acyclische correspondentie. Er geldt voor $0 \leq k \leq m \leq s$:

$$D_{km}\, D_{ms} = D_{ks}.$$

Bewijs: Zij $r \geq 0$. Een n-dimensionaal simplex $\sigma \in \beta^r \Gamma$ is blijkens de definitie van barycentrische onderverdeling ontstaan uit tenminste één n-dimensionaal simplex $\sigma' \in \Gamma$, d.w.z. $\sigma \in \beta^r \sigma'$. En dus $\sigma \subset \sigma'$. Zou er nog een n-dimensionaal simplex $\sigma'' \in \Gamma$ zijn met $\sigma' \subset \sigma''$ dan zou $\sigma'' \cap \sigma'$ een randsimplex zijn van $\sigma'$ en van $\sigma''$. Omdat evenwel $\sigma \subset \sigma'' \cap \sigma'$ en $\sigma$ n-dimensionaal is, moet dan $\sigma'' \cap \sigma' = \sigma'$ en $= \sigma''$. Bij een n-simplex $\sigma \in \beta^r \Gamma$ is er dus precies één n-simplex $\sigma'$ van $\Gamma$ met $\sigma \subset \sigma'$. $\sigma'$ is blijkbaar de drager van $\sigma$ d.w.z. het kleinste simplex uit $\Gamma$ dat $\sigma$ bevat. Zij nu $\sigma \in \beta^s \Gamma$, $\dim \sigma = n$, en $\sigma' \in \beta^m \Gamma$ met $\dim \sigma' = n$, en $\sigma \subset \sigma'$. Volgens het voorafgaande is $\sigma'$ ondubbelzinnig bepaald. Laat nu $\sigma''$ het n-simplex in $\beta^k \Gamma$ zijn met $\sigma' \subset \sigma''$. Dan is ook blijkbaar $\sigma \subset \sigma''$, dus volgens het voorafgaande is $\sigma''$ = drager van $\sigma$.
Dus: drager van $\sigma$ in $\beta^k \Gamma$ = drager in $\beta^k \Gamma$ van (de drager van $\sigma$ in $\beta^m \Gamma$). Hieruit volgt nu zonder moeite verder de te bewijzen betrekking.

## § 3. Homologie en continue afbeeldingen

Zijn $\Gamma$ en $\Gamma'$ simpliciale complexen, $|\Gamma| = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma$, $|\Gamma'| = \bigcup_{\tau \in \Gamma'} \tau$ en f een continue afbeelding van $|\Gamma|$ in $|\Gamma'|$. We gaan nu bij f een homomorfisme $f_* : H_k(\Gamma) \to H_k(\Gamma')$ construeren, $k=0,1,2,\dots$ .

Zij nu $\alpha > 0$ het getal van Lebesgue voor de collectie simplices $\Gamma'$. *)

$|\Gamma|$ is als vereniging van eindig vele simplices een gesloten begrensde verzameling in een $R^n$, dus f is op $|\Gamma|$ gelijkmatig continu. Bijgevolg is er een $\theta > 0$, zodat, als $V \subset |\Gamma|$, en diam. $V < \theta$, diam. $f(V) < \alpha$. Laat nu $\beta^n \Gamma$ een geitereerde barycentrische onderverdeling van $\Gamma$ zijn, zodat voor iedere $\sigma \in \beta^n \Gamma$, diam. $\sigma < \theta$, dus diam. $f(\sigma) < \alpha$.

---------------

*) Zij $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_s\}$ een eindige collectie gesloten begrensde verzamelingen in de $R^n$. Het "lemma van Lebesgue" zegt dat er een $\theta > 0$ is zodat geldt: "Als $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, V een verzameling met diameter$<\theta$, en $A \cap V \neq \emptyset$ voor iedere $A \in \mathfrak{B}$, dan is $\bigcap_{A \in \mathfrak{B}} A \neq \emptyset$".
De kleinste bovengrens van de getallen $\theta$ met deze eigenschap is weer een getal met deze eigenschap, het zgn. getal van Lebesgue voor de collectie $\mathfrak{A}$.

We definiëren nu een correspondentie $F_n$ van $\beta^n \Gamma$ in $\Gamma$ door

$$F_n(\sigma) = \bigcup_{f(\sigma)\cap\tau\neq\emptyset} \{\tau\} \quad .$$

De collectie van $\tau$ 's uit $\Gamma$ ' met $f(\sigma)\cap\tau\neq\emptyset$ heeft wegens de definitie van het getal van Lebesgue een niet lege doorsnede. Deze doorsnede is een randsimplex van al deze $\tau$ 's (Hfdst. I, § 1, def. simpliciaal complex (i)), en bevat tenminste één hoekpunt t.
$F_n(\sigma)$ is dan klaarblijkelijk een kegel met top t, en dus is $F_n$ een acyclische correspondentie. Bijgevolg induceert $F_n$ een homomorfisme

$$F_{n*} : H_k(\beta^n \Gamma) \longrightarrow H(\Gamma').$$

Door $D_{on*}$ (zie laatste deel van § 2) wordt $H_k(\beta^n\Gamma)$ geidentificeerd met $H_k(\Gamma)$. Dus $F_{n*}\ D_{on*}^{-1}$ is een homomorfisme van $H_k(\Gamma)$ in $H_k(\Gamma')$.

Zij nu $k > n$. Dan blijkt uit de definities gemakkelijk dat $F_k \subset F_n D_{nk}$, en voorts weer dat $F_n D_{nk}$ een acyclische correspondentie is nl. $F_n D_{nk}(\sigma) = F_n$ (drager van $\sigma$ in $\beta^n\Gamma$). Dus $F_{k*} = F_{n*} D_{nk*}$ . Voorts is $D_{on} D_{nk} = D_{ok}$ (zie laatste deel § 2).

Dus $$F_{k*}\ D_{ok*}^{-1} = F_{n*}\ D_{on*}^{-1} \quad .$$

Het aldus geconstrueerde homomorfisme van $H_k(\Gamma)$ in $H_k(\Gamma')$ hangt niet meer af van de toevallig gebezigde barycentrische onderverdeling maar slechts van $\Gamma$, $\Gamma'$ en f. We geven het (daar we $\Gamma$ en $\Gamma'$ als "vast" wensen te beschouwen) aan door $f_*$ .

Uit het voorafgaande is duidelijk dat, als $\Gamma = \Gamma'$ en f = identieke afbeelding, $f_*$ eveneens het identieke homomorfisme is in iedere dimensie.

Zij g nu nog een continue afbeelding $|\Gamma| \to |\Gamma'|$ zodat voor iedere $x \in |\Gamma|$ geldt afstand $(f(x), g(x)) < \frac{1}{2}\alpha$ . Zij nu $\beta^n\Gamma$ een n-voudig geitereerde barycentrische onderverdeling zodanig dat voor iedere $\sigma \in \beta^n\Gamma$ geldt diam $\frac{g(\sigma)}{f(\sigma)} < \frac{1}{2}\alpha$ . Voor iedere $\sigma \in \beta^n\Gamma$ is $V(\sigma) = g(\sigma) \cup f(\sigma)$ een verzameling met diameter $< \alpha$ . Zij C de correspondentie van $\beta^n\Gamma$ in $\Gamma'$ gedefinieerd door

$$C(\sigma) = \bigcup_{\tau\cap V(\sigma)\neq\emptyset} \{\tau\} \quad .$$

Op dezelfde wijze als voorheen blijkt C een acyclische correspondentie te zijn en klaarblijkelijk geldt $F_n \subset C$ en $G_n \subset C$.

Dus $$F_{n*} = C = G_{n*} \quad , \text{ dus } \quad f_* = g_* \quad .$$

Twee afbeeldingen die een onderlinge afstand $< \frac{1}{2}\alpha$ hebben induceren voor de homologie hetzelfde homomorfisme. Als twee afbeeldingen $f_1$ en $f_2$ verbonden kunnen worden door een eindige ketting van afbeeldingen waarvan ieder tweetal naburige een afstand $< \frac{1}{2}\alpha$ hebben, dan is dus ook $f_{1*} = f_{2*}$ .

Zij tenslotte $\Gamma''$ nog een simpliciaal complex en h een continue afbeelding $|\Gamma'| \rightarrow |\Gamma''|$ . Men kan nu bewijzen door gelijksoortige redeneringen als boven dat

$$(hf)_* = h_* f_* .$$

Uit het voorafgaande volgt: zijn $\Gamma \xrightarrow{f} \Gamma'$ en $\Gamma' \xrightarrow{g} \Gamma$ continue afbeeldingen met fg = identieke afbeelding en gf = identieke afbeelding, dan zijn ook $f_* g_*$ en $g_* f_*$ identieke homomorfismen.

Dus: <u>Homeomorfe simpliciale complexen hebben isomorfe homologiegroepen.</u>

In het bijzonder volgt uit dit resultaat dat twee simpliciale complexen $\Gamma$ en $\Gamma'$ met $|\Gamma| = |\Gamma'|$ isomorfe homologiegroepen bezitten.

Verder kan men op grond van het bovenstaande aan een ruimte P die homeomorf is met een $|\Gamma|$ waarbij $\Gamma$ een simpliciaal complex is homologiegroepen toekennen nl. de homologiegroepen van $\Gamma$ . Op isomorfie na liggen ze dan vast. Dergelijke ruimten P noemt men <u>polyeders</u>. Voor ieder polyeder P denken we ons een vast simpliciaal complex $\Gamma_P$ met een vast homeomorfisme $\eta_P : P \rightarrow \Gamma_P$ van P op $\Gamma_P$ gekozen. Een continue afbeelding $f : P_1 \rightarrow P_2$ induceert dan een continue afbeelding $\eta_{P_2} f \eta_{P_1}^{-1} : \Gamma_{P_1} \rightarrow \Gamma_{P_2}$, en daarmee een homomorfisme $f_*$ van $H(P_1) = H(\Gamma_{P_1})$ in $H(P_2) = H(\Gamma_{P_2})$. We vinden voor de aldus gedefinieerde $f_*$ dezelfde algemene eigenschappen als bij de $f_*$ -en voor de simpliciale homologiegroepen.

In het bijzonder is de n-dimensionale sfeer $S^n$ een polyeder nl. homeomorf met $|\{\dot\sigma\}|$ waarbij $\sigma$ een (n+1)-dimensionaal simplex is, en $\{\dot\sigma\}$ het complex van zijn hoogstens n-dimensionale randsimplexen. Bijgevolg is

$$H_0(S^n) = J, \quad H_i(S^n) = 0 \qquad 0 < i < n,$$
$$H_n(S^n) = J, \quad H^j(S^n) = 0 \qquad j > n.$$