STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12b

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950,3b;

Sommatie van Euler.

Incompl.

Corput J.G.van der.

1949

Sommatie van Euler.

§ De methode der divergente enkelvoudige integralen.

Indien $\alpha > 0$ en $\beta \gtrless 0$ vaste getallen voorstellen, is de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} e^{-\varepsilon n^{\alpha}},$$

waarin $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$, voor grote positieve waarden van ω in eerste benadering gelijk aan

$$\int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-\varepsilon x^{\alpha}} dx = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) \omega^{\frac{\beta+1}{\alpha}}$$

Diepergaand onderzoek leert, zoals we hieronder zullen zien, dat voor grote positieve ω de som gelijk is aan de genoemde integraal vermeerderd met een asymptotische reeks, in $\frac{1}{\omega}$, dus

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} e^{-\varepsilon n^{\alpha}} \sim \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) \omega^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \sum_{h=1}^{\infty} c_h \omega^{-h}$$

Wij kunnen dit resultaat afleiden door directe toepassing van de sommatieformule van Euler, maar het bewijs wordt dan ingewikkeld en de voor de constanten c_h gevonden uitdrukkingen zeer gecompliceerd. De moeilijkheid zit hem daarin dat, tengevolge van de factor x^{β}, de h-de afgeleide van $x^{\beta} e^{-\varepsilon x^{\alpha}}$ voor $h \to \infty$ niet asymptotisch tot nul nadert, behalve in het speciale geval, dat β geheel is.

Volgens de eerste grondformule van § 1 kunnen we schrijven

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} e^{-\varepsilon n^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right) \omega^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \int_0^{\infty} P_1(x)\, g(x)\, dx,$$

indien voor $\beta = 0$ het rechterlid met $\frac{1}{2}$ verminderd wordt; hierin is

$$(3) \quad g(x) = \frac{d}{dx} x^{\beta} e^{-\varepsilon x^{\alpha}}$$

Ontwikkelen we $g(x)$ naar oplimmende machten van $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$,

$$(4) \quad g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h (\beta + \alpha h) x^{\beta+\alpha h-1} \omega^{-h},$$

en sommeren we formeel, dan vinden we

$$(5) \quad \int_0^{\infty} P_1(x)\, g(x)\, dx \sim \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h (\beta + \alpha h) \omega^{-h} \int_0^{\infty} P_1(x)\, x^{\beta+\alpha h-1} dx,$$

maar dit heeft natuurlijk geen zin, omdat alle integralen in het rechterlid divergeren. Wij kunnen echter aan deze divergente integralen een zodanige betekenis toekennen, dat we juist het goede antwoord krijgen.

Algemeen zullen we een betekenis toekennen aan elke integraal van de gedaante

$$\int_a^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx \tag{6}$$

waarin de functies $p_1(x)$ en $g(x)$ aan de volgende voorwaarden voldoen:

1. De functie $p_1(x)$ is een Riemann-integreerbare functie met de periode 1 met de eigenschap

$$\int_0^1 p_1(x)\, dx = 0$$

2. Er bestaat een getal $b > a$, waarvoor de integraal

$$\int_a^b p_1(x)\, g(x)\, dx$$

convergeert.

3. Voor $x \geqq b$ is $g(x)$ te schrijven als een som van een eindig aantal functies $g(x) = g_1(x) + \ldots + g_m(x)$ en er bestaan evenveel gehele getallen $k_\mu \geqq 0$ zodanig dat $g_\mu(x)$ voor $x \geqq b$ een k_μ -de afgeleide bezit, die voor $x \to \infty$ tot nul nadert en van b naar ∞ absoluut integreerbaar is.

Zijn deze voorwaarden vervuld, dan kennen we als volgt een betekenis aan (6) toe.

Wordt voor $h \geqq 2$

$$p_h(x) = \int_0^x p_{h-1}(u)\, du + c_h \tag{7}$$

gesteld, waarin c_h zo gekozen wordt, dat

$$\int_0^1 p_h(x)\, dx = 0 \tag{8}$$

is, dan zijn de functies $p_1(x)$, $p_2(x)$,..., zoals we in § 1 gezien hebben, periodiek met periode 1, dus begrensd. Wij geven nu aan (6) de waarde

$$\int_a^b p_1(x)\, g(x)\, dx + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{h=0}^{k_\mu - 1} (-1)^{h-1} p_{h+2}(b)\, g_\mu^{(h)}(b) + \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{k_\mu} \int_0^\infty p_{k_\mu+1}(x)\, g_\mu^{(k_\mu)}(x)\, dx \tag{9}$$

Elke in de laatste term voorkomende integraal convergeert omdat van de integrand de eerste factor begrensd, de tweede absoluut integreerbaar is.

Deze uitdrukking komt niet zo maar uit de lucht vallen, want indien de integraal

$$\int_0^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b + \sum_{\mu=1}^{m} \int_b^\infty p_1(x)\, g_\mu(x)\, dx$$

convergeert en de laatste integraal k_μ maal partieel geintegreerd wordt, dan krijgt men uitdrukking (9), tenminste als men de bijdragen van het oneindige weglaat.

Door b tot a te laten naderen, vindt men dat

$$\int_a^\infty p_1(u)\, g(u)\, du$$

gelijk is aan

$$\lim_{b\to a} \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{h=0}^{k_\mu-1} (-1)^{h-1}\, p_{h+2}(b)\, g_\mu^{(h)}(b)$$

(10)

$$+\sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{k_\mu}\int_a^\infty p_{k_\mu+1}(x)\, g_\mu^{(k_\mu)}(x)\,dx\,,$$

aangenomen dat deze m integralen convergeren.

Bovenstaande definitie is alleen geoorloofd, indien bewezen wordt:

1. Uitdrukking (9) is bij gegeven a en bij gegeven functies $p_1(u)$ en $g(u)$ ondubbelzinnig bepaald, dus onafhankelijk van b, onafhankelijk van de manier, waarop $g(x)$ voor $x \geqq b$ gesplitst wordt en ook onafhankelijk van de keuze der getallen $k_1, \ldots, k_m$.

2. Indien de integraal (6) convergeert, dan is zijn waarde gelijk aan (9).

Voor het bewijs van deze twee beweringen heb ik de volgende hulpstelling nodig.

Lemma: Zij $g_\sigma(x)$ $(\sigma = 1,\ldots,s)$ voor voldoend grote bestaanbare x minstens k_σ maal differentieerbaar $(k_\sigma \geqq 0)$, zodanig dat bij onbegrensd aangroeiende x de k_σ-de afgeleide van $g_\sigma(x)$ tot nul en

(11) $$\sum_{\sigma=1}^{s}\sum_{h=0}^{k_\sigma-1} (-1)^h\, p_{h+2}(x)\, g_\sigma^{(h)}(x)$$

tot een eindige limiet nadert. Hierin stellen $p_2(x),\ldots,p_{k_\sigma+1}(x)$ periodieke functies met de eigenschappen (7) en (8) voor.

Dan is de genoemde limiet nul.

Voor het bewijs duid ik met k het grootste der getallen $k_1,\ldots,k_s$ aan. De bewering is evident, als $p_2(x)$ identiek nul is, want dan zijn alle functies $p_h(x)$ voor $h \geqq 2$ eveneens identiek nul. Ik zal nu verder veronderstellen, dat $p_2(x)$ niet identiek nul is. Tevens zal ik $k \geqq 1$ veronderstellen omdat anders de som (11) leeg, dus nul is, en de bewering derhalve evident is.

Zij a een veranderlijk getal, dat onbegrensd aangroeit. Omdat de k_σ-de afgeleide van $g_\sigma(x)$ voor $x \to \infty$ tot nul nadert, kan men aan elk dezer getallen a een natuurlijk getal t toevoegen, dat met a onbegrensd aangroeit, zodanig dat

$$t^k \max_{a\leqq x\leqq a+(k-1)t} \left| g_\sigma^{(k_\sigma)}(x)\right| \to 0 \qquad (\sigma = 1,\ldots,s)$$

Bij onbegrensd aangroeiende a geldt dan voor iedere x in dit interval

(12) $$g_\sigma^{(h)}(x) - \sum_{r=0}^{k_\sigma-h-1} \frac{(x-a)^r}{r!}\, g_\sigma^{(h+r)}(a) \to 0 \qquad (\sigma = 1,\ldots,s;\ h = 0,\ldots,k_\sigma-1)$$

Omdat het linkerlid en ook uitdr. (11) begrensd is, is dat ook het geval met

$$q(x,a)=\sum_{\sigma=1}^{s}\sum_{h=0}^{k_\sigma}(-1)^h p_{h+r}(x)\sum_{r=0}^{k_\sigma-h-1}\frac{(x-a)^r}{r!}g_\sigma^{(h+r)}(a)$$

Men heeft

(13) $$q(x,a)=\sum_{r=0}^{k-1} c_r\left(\frac{x-a}{t}\right)^r \quad ;$$

Hierin is

$$c_r=\frac{t^r}{r!}\sum_{h=0}^{k-r-1}(-1)^h p_{h+r}(x)\,\varphi_{h+r}(a)$$

waarin

(14) $$\varphi_{h+r}(a)=\sum_{\substack{\sigma=1\\ k_\sigma>h+r}}^{s} g_\sigma^{(h+r)}(a)$$

Kiest men nu voor x de getallen $a+nt\ (n=0,1,\ldots\ldots,k-1)$, dan is wegens de periodiciteit $p_{h+r}(x)=p_{h+r}(a)$

zodat

(15) $$c_r=\frac{t^r}{r!}\sum_{h=0}^{k-r-1}(-1)^h p_{h+r}(a)\,\varphi_{h+r}(a)$$

onafhankelijk van x is.

Formule (13) levert voor elk der k genoemde waarden van x een lineaire betrekking tussen de k getallen $c_0,\ldots,c_{k-1}$. Deze k relaties leveren een systeem waarvan de determinant gelijk is aan de determinant van Van der Monde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1\\ 0 & 1 & 2 & \ldots\ldots & k-1\\ 0 & 1 & 2^2 & \ldots\ldots & (k-1)^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 1 & 2^{k-1} & \ldots\ldots & (k-1)^{k-1}\end{vmatrix} \neq 0$$

Met behulp van deze betrekkingen kunnen we derhalve de k getallen c_r lineair in de k getallen $q(a+nt,a)$ uitdrukken met coefficienten, die uitsluitend van r en n afhangen. Omdat de getallen $q(a+nt,a)$ begrensd zijn, is dat ook het geval met de k getallen c_r. Wegens $t\to\infty$ blijkt dus uit (15), dat voor $a\to\infty$ en r = 1,...,k-1

$$\sum_{h=0}^{k-r-1} (-1)^h p_{h+2}(a)\, \varphi_{h+r}(a) \to 0$$

Omdat de continue periodieke functie $p_2(x)$ niet identiek nul is, bevat het interval $0 \leq x \leq 1$ een deelinterval waarin $p_2(x)$ steeds ongelijk nul is. In dat interval heeft de functie $p_3(x)$, die door integratie uit $p_2(x)$ ontstaat, hoogstens één nulpunt, heeft $p_4(x)$ hoogstens twee nulpunten enz. Het interval $0 \leq x \leq 1$ bevat dus zeker een punt ϑ met

$$p_2(\vartheta) \neq 0 \quad ; \; p_3(\vartheta) \neq 0 ; \ldots\ldots ; p_k(\vartheta) \neq 0$$

Ik kies nu $a = m + \vartheta$, waarin het natuurlijke getal m onbegrensd aangroeit. Volgens het bovenstaande is dan voor r = 1,..., k - 1

$$\sum_{h=0}^{k-r-1} (-1)^h p_{h+2}(\vartheta)\, \varphi_{h+r}(m+\vartheta) \to 0 \qquad \text{voor } m \to \infty .$$

De keuze r = k-1 levert

$$p_2(\vartheta)\, \varphi_{k-1}(m+\vartheta) \to 0 \qquad \text{dus} \quad \varphi_{k-1}(m+\vartheta) \to 0 \;;$$

r = k-2 geeft

$$p_3(\vartheta)\, \varphi_{k-2}(m+\vartheta) \to 0 \qquad \text{dus} \quad \varphi_{k-2}(m+\vartheta) \to 0 \;;$$

enz. ~~Een~~ En ten slotte r=1 levert

$$p_k(\vartheta)\, \varphi_1(m+\vartheta) \to 0 \qquad , \text{ dus} \quad \varphi_1(m+\vartheta) \to 0$$

In verband met (14) vinden we dus voor r=1,...k-1

(16) $$\sum_{\substack{\sigma=1 \\ k_\sigma > r}}^{s} q_\sigma^{(r)}(m+\vartheta) \to 0 \qquad \text{voor } m \to \infty$$

Bij onbegrensd aangroeiende x kunnen we steeds een onbegrensd aangroeiend getal m vinden met

$$m + \vartheta \leq x < m + \vartheta + 1$$

Aangezien formule (12) dan met $a = m + \vartheta$ geldt, vinden we voor h=0,1,...k

$$\sum_{\substack{\sigma=1 \\ k_\sigma > h}}^{s} q_\sigma^{(h)}(x) - \sum_{r=0}^{k-h-1} \frac{(x-a)^r}{r!} \sum_{\substack{\sigma=1 \\ k_\sigma > h+r}}^{s} q_\sigma^{(h+r)}(m+\vartheta) \to 0$$

De eerste term in deze uitdrukking nadert dus wegens (16) tot nul en deze eerste term is $\varphi_h(x)$, dus

(17) $\varphi_h(x) \to 0$ $(h=1,2,\ldots,k)$.

Gegeven dat (11), die gelijk is aan

$$\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \, p_{h+2}(x) \, \varphi_h(x)$$

bij onbegrensd aangroeiende x tot een eindige limiet l nadert. Formule (17) leert ons, dat elk der termen met $h=1,2,\ldots,k$ tot nul nadert, zodat de overblijvende term $p_2(x)\,\varphi_0(x)$ eveneens tot l nadert. De continue functie $p_2(x)$, die bij integratie van 0 naar 1 nul oplevert, is tussen 0 en 1 ergens nul. Wij kunnen dus x zo onbegrensd laten aangroeien, dat $p_2(x)$ steeds nul is. Daaruit volgt $l = 0$.

Na deze hulpstelling is het vrij gemakkelijk om te laten zien, dat (9) bij gegeven functies $p_1(x)$ en $g(x)$ en bij gegeven a ondubbelzinnig bepaald is. Vooreerst merken we op, dat de bij de definitie van de divergente integraal $\int_0^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx$

genoemde voorwaarden blijven gelden, als b door een groter getal c wordt vervangen. Bij die vervanging wordt uitdrukking (9) vermeerderd met

$$(18)\left\{\begin{aligned}&\int_b^c p_1(x)\, g(x)\, dx + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{h=0}^{k_\mu-1} (-1)^{h-1} \Big\{ p_{h+2}(c)\, g^{h}(c) \\ &- p_{h+2}(b)\, g^{h}(b) \Big\} - \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{k_\mu} \int_b^c p_{k_\mu+1}(x)\, g^{(k_\mu)}(x)\, dx = 0\end{aligned}\right.$$

zoals uit partiele integratie blijkt. Uitdrukking (9) is dus onafhankelijk van de keuze van b.

Nu gaan we na, wat er gebeurt, indien we b niet veranderen, maar i.p.v. de splitsing $g(u) = g_1(u) + \ldots + g_m(u)$ met de getallen $k_1,\ldots,k_m$ dezelfde of een andere splitsing $g(x) = \chi_1(x) + \ldots + \chi_n(x)$ met dezelfde of andere getallen $k_1,\ldots,k_n$ gebruiken. Dan wordt uitdrukking (9) vermeerderd met

$$(19)\left\{\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{h=0}^{k_\nu-1} (-1)^{h-1} p_{h+2}(b)\, \chi_\nu^{(h)}(b) - \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{h=0}^{k_\mu-1} (-1)^{h-1} p_{h+2}(b)\, g_\mu^{(h)}(b) \\ &+ \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{k_\nu} \int_b^\infty p_{k_\nu+1}(x)\, \chi_\nu^{(k_\nu)}(x)\, dx - \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{k_\mu} \int_b^\infty p_{k_\mu+1}(x)\, g_\mu^{(k_\mu)}(x)\, dx\end{aligned}\right.$$

We moeten bewijzen, dat deze toename nul is.

Passen we (18) twee maal toe, eerst in de oorspronkelijke vorm en vervolgens voor de nieuwe in plaats van de oude splitsing, dan vinden we door aftrekking dat uitdrukking (19) niet verandert, als daarin b door c wordt vervangen. De uitdrukking (19) is dus gelijk aan de limiet die we krijgen door b onbegrensd te laten aangroeien. De in (19) voorkomende integralen naderen dan tot nul. Volgens de voorgaande hulpstelling, toegepast met $s = n+m$ is genoemde limiet nul, waarmee het bewijs geleverd is. Tevens is hiermee bewezen: Convergeert

$$\int_a^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx$$

dan is zijn waarde gelijk aan (9), want men kan in uitdrukking (9), zonder dat haar waarde verandert, m = 1 en $k_1 = 0$ kiezen.
Voor het nieuwe integraalbegrip gelden regels, analoog aan die welke gelden voor het gewone integraalbegrip, b.v.
1°. Bestaan de integralen

$$\int_a^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx \quad \text{en} \int_a^\infty p_1(x)\, \chi(x)\, dx$$

dan bestaat ook de integraal

$$\int_a^\infty p_1(x) \{ g(x) + \chi(x) \}\, dx$$

en laatstgenoemde integraal is de som van de beide anderen.
2°. Bestaat de integraal

$$\int_a^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx$$

en is $b > a$, dan bestaat ook de integraal

$$\int_b^\infty p_1(x)\, g(x)\, dx$$

en deze laatste integraal is gelijk aan de eerste, verminderd met

$$\int_a^b p_1(x)\, g(x)\, dx$$

Voorbeeld: Voor $0 < \delta < 1$ en λ willekeurig complex, is

$$(20) \qquad \int_\delta^\infty p_1(x)\, x^{\lambda-1}\, dx = \frac{\zeta(-\lambda)}{\lambda} - \frac{\delta^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\delta^\lambda}{2\lambda}$$

Voor $\lambda = 0$ wordt rechts de limiet $-\zeta'(0) - \delta + \frac{1}{2}\log\delta$ bedoeld en voor $\lambda = -1$ wordt rechts de limiet $1 - C - \log\delta - \frac{1}{2\delta}$ bedoeld.

Het rechterlid is in het gehele λ-vlak analytisch. Het linkerlid ook. Dit laatste is evident voor $\lambda < -1$, volgt dan voor $\lambda < 0$ uit

$$\int_\delta^\infty p_1(x)\, x^{\lambda-1}\, dx = -p_2(\delta)\, \delta^{\lambda-1} - (\lambda-1) \int_\delta^\infty p_2(x)\, x^{\lambda-2}\, dx,$$

enz. Het is ons voldoende de gevraagde betrekking in het halfvlak $R\lambda < -1$ te bewijzen. Men heeft dan

$$\sum_{n=1}^\infty n^\lambda = \frac{1}{2} + \int_1^\infty x^\lambda\, dx + \lambda \int_1^\infty p_1(x)\, x^{\lambda-1}\, dx$$