STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 21

Cursus elementaire meetkunde van hogere standpunt belicht.

Eindhoven 1952/53.

A.Heyting.

1952

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Cursus Elementaire Meetkunde van
hoger standpunt belicht.
1951/ 1952
door
Prof. Dr A. Heyting.

I. Toepassing der projectieve meetkunde.

1. Het Euclidische vlak wordt uitgebreid tot het projectieve vlak, door de volgende oneigenlijke elementen toe te voegen:
a) aan de verzameling van alle lijnen, evenwijdig aan een gegeven lijn, een oneigenlijk punt, dat op die lijnen, en op geen andere ligt;
b) aan de verzameling van alle vlakken, evenwijdig aan een gegeven vlak, een oneigenlijke lijn, die in die vlakken en in geen ander vlak ligt, terwijl zij de oneigenlijke punten van alle in die vlakken gelegen lijnen, en geen andere bevat;
c) een oneigenlijk vlak, dat alle oneigenlijke punten en lijnen en slechts deze bevat.
De volgende eigenschappen gelden nu zonder uitzondering:
α) Twee verschillende punten bepalen één en slechts één lijn, die ze beide bevat.
β) Twee verschillende vlakken hebben één en slechts één lijn gemeen.
γ) Een vlak en een lijn, die niet in dat vlak ligt, hebben één en slechts één punt gemeen.
δ) Twee verschillende lijnen in een vlak hebben één en slechts één punt gemeen.
ε) Drie punten, niet op één rechte lijn gelegen, bepalen één en slechts één vlak, dat ze bevat.

2. Door centrale projectie gaat de oneigenlijke rechte van een vlak α over in een gewone rechte. Omgekeerd kan men door geschikte keuze van projectiecentrum en tafereel τ iedere rechte van α in de oneigenlijke rechte van τ overvoeren.

3. De stelling van Desargues.
a) Zijn twee driehoeken ABC en A'B'C' zo in een vlak gelegen, dat AA', BB' en CC' door een punt gaan, terwijl AB//A'B' en AC//A'C', dan is ook BC//B'C'
Het bewijs is zeer eenvoudig met evenredigheid van lijnstukken.

b) Zijn twee driehoeken ABC en A'B'C' zo in een vlak gelegen, dat AA', BB' en CC' door een punt gaan, en zijn P, Q en R de snijpunten van BC met B'C', van AC met A'C' en van AB met A'B', dan liggen P, Q en R op een rechte lijn.

Bewijs. Projecteer de figuur zo op een ander vlak, dat PQ in de oneigenlijke rechte overgaat; pas a) toe en projecteer terug.

c) Door een andere rechte in de oneigenlijke rechte te projecteren, leidt men uit b andere bijzondere gevallen af.

d) De figuur van b) vormt een configuratie (10_3), die opgevat kan worden, als de doorsnede van een volledige ruimtelijke vijfhoek met een plat vlak. Hieruit volgt, dat de configuratie in zichzelf overgaat door een groep, die isomorf is met de symmetrische groep van 5 elementen.

4. De stelling van Pappus.

a) Liggen op l de punten A, B, C en op m de punten A', B', C', zodat AB'//A'B en AC'//A'C, dan is ook BC'//B'C.

Bewijs. Is l//m, dan is het bewijs zeer eenvoudig. Snijden l en m elkaar in S, dan volgt uit SA:SB = SB': SA' en SA:SC = SC':SA' dat SA.SA' = SB.SB' = SC.SC', dus SB:SC = SC' : SB'.

b) Door projecteren leidt men uit a) af:

Liggen de hoekpunten van een enkelvoudige zeshoek beurtelings op twee rechte lijnen l en m, dan liggen de snijpunten van overstaande zijden op een rechte lijn.

c) Evenals onder 3c) worden andere bijzondere gevallen behandeld.

d) De Pappusfiguur vormt een configurante (9_3), die invariant is tegenover een groep van 108 permutaties.

e) De stelling van Pappus is identiek met haar duale stelling: Gaan de zijden van een enkelvoudige zeshoek beurtelings door twee punten P en Q, dan gaan de verbindingslijnen van overstaande hoekpunten door een punt R.

5. De centrale collineatie.

a) Projecteert men de punten van een vlak α uit twee centra O_1 en O_2 op vlak τ, dan bestaat tussen de projecties P_1 en P_2 van P een betrekking met de volgende eigenschappen:

I) zij is een - eenduidig;

II) zij voert rechte lijnen in rechte lijnen over;

III) verbindingslijnen van overeenkomstige punten gaan door een vast punt O (snijpunt van O_1O_2 met τ);

IV) snijpunten van overeenkomstige lijnen liggen op een vaste lijn d (snijlijn van α met τ).

Een betrekking met deze vier eigenschappen heet centrale collineatie.

b) Stelling. Er is een en slechts een centrale collineatie met gegeven O en d, die A_1 in A_2 overvoert (A_1 en A_2 buiten O en d) , mits A_1A_2 door O gaat.

Bewijs. Men construeert de betrekking, door een vlak α door d te brengen en O_1 willekeurig te kiezen. O_1A_1 snijdt α in A; A_2A snijdt OO_1 in O_2.

De betrekking is eenduidig bepaald, omdat met de eigenschappen I/-IV/ het toegevoegde punt B_2 van ieder punt B_1 geconstrueerd kan worden.

c) In plaats van toegevoegde punten A_1, A_2 kan men ook toegevoegde lijnen l_1, l_2 geven. In het bijzonder is er een centrale collineatie, die de oneigenlijke rechte W_1 overvoert in een lijn $W_2//d$, of omgekeerd een lijn $v_1//d$ in de oneigenlijke rechte v_2.

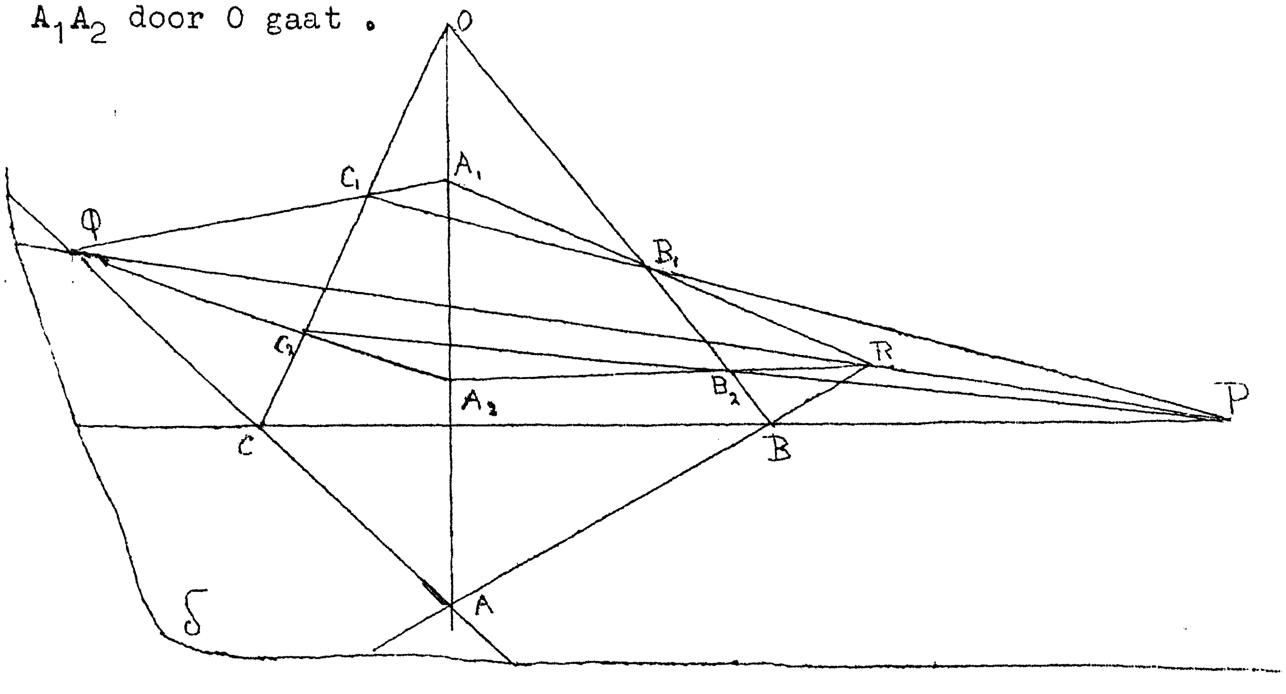
d) De bewijzen van 3b/ en 4b/ kunnen dus in plaats van door projecteren ook met behulp van een centrale collineatie uitgevoerd worden. Dit geeft de mogelijkheid, de methode tot de ruimte uit te breiden.

e) Neerslaan van een vlak α in τ komt neer op projecteren uit het oneigenlijke punt $O_2 \perp$ een bissectrixvlak van α en τ. Tussen de projectie en de neergeslagen figuur bestaat dus een centrale collineatie. Bij parallelprojectie (O_1 oneigenlijk) wordt O oneigenlijk. De betrekking is dan een axiale affiniteit. Ook tussen de beide projecties bij de methode van Monge bestaat een axiale affiniteit.

6. De ruimtelijke centrale collineatie.

a) De definitie is als 5,I-IV; slechts moet de as d door een vast vlak δ vervangen worden.

b) Stelling. Er is een en slechts een centrale collineatie met gegeven O en δ, die A_1 in A_2 overvoert (A_1 en A_2 buiten O en δ), mits A_1A_2 door O gaat .

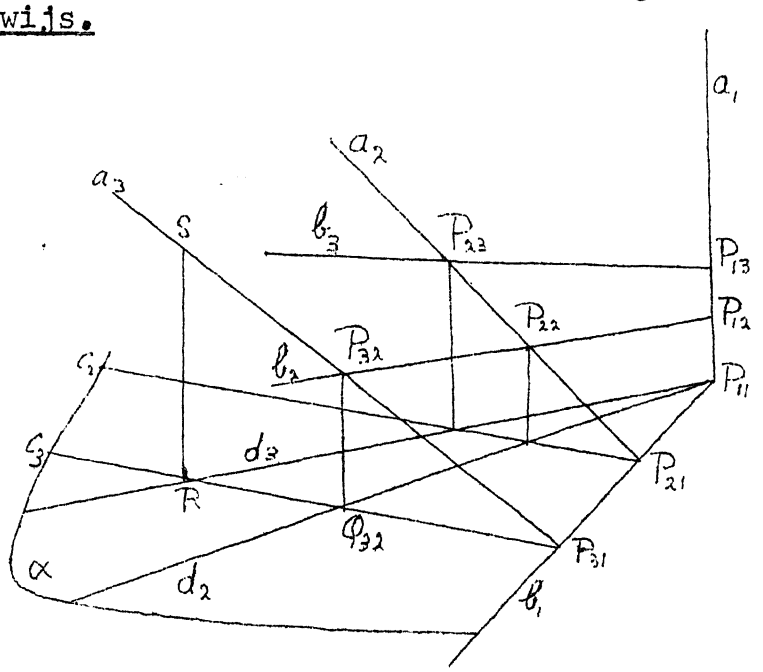


Bewijs. In ieder vlak door OA_1A_2 construeert men een centrale collineatie volgens 5b). Laat B_1C_1 een lijn zijn, die OA niet snijdt, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$. A_1B_1 snijdt A_2B_2 in R; A_1C_1 snijdt A_2C_2 in Q; B_1C_1 en B_2C_2 gaan door het snijpunt P van BC en QR. De lijn B_1C_1 voldoet dus aan II en IV.

De centrale collineatie in vlak OAB gaat nu door projecteren uit P over in die in vlak OAC. De verkregen betrekking is dus ook op OA eenduidig. Wij hebben nu een betrekking geconstrueerd, die aan I-IV voldoet. Dat zij de enig mogelijke is, blijkt als onder 5b).

7. a) Stelling. Zijn drie lijnen a_1, a_2, a_3 evenwijdig aan vlak β en worden zij gesneden door de lijnen b_1, $b_2 // \alpha$, dan zal iedere lijn $b_3 // \alpha$, die a_1 en a_2 snijdt, ook a_3 snijden.

Bewijs.



Het snijpunt van a_i met b_k noemen wij P_{ik}. Projecteer a_2, a_3, b_2, b_3 in de richting van a_1 op α; de projectie van a_i is c_i, die van b_i is d_i; die van P_{ik} is Q_{ik}. d_3 snijdt c_3 in R; R is de projectie van S op a_3. $P_{32}Q_{32} : SR = P_{31}Q_{32} : P_{31}R = P_{21}Q_{22} : P_{21}Q_{32} = P_{22}Q_{22} : P_{23}Q_{23}$, dus $SR = P_{23}Q_{23}$.

S ligt dus in het vlak door $P_{13} // \alpha$ en in het vlak door b_3 en a_1, dus op b_3.

b) Stelling. Worden vier lijnen a_0, a_1, a_2, a_3, waarvan geen twee in een vlak liggen, gesneden door drie lijnen b_0, b_1, b_2, dan zal iedere lijn b_4, die a_0, a_1, a_2 snijdt, ook a_3 snijden.

16-puntenstelling.

Bewijs. Door een centrale collineatie, die het vlak door a_0 en b_0, in het oneigenlijke vlak overvoert, brengen wij deze stelling terug tot a), waar a_0 de oneigenlijke rechte van α en b_0 de oneigenlijke rechte van β is.

c) De 16-puntenstelling staat in nauw verband met de stelling van Pappus. Van de zeshoek $P_{13}P_{12}P_{32}P_{31}P_{21}P_{23}$, gevormd door de lijnen a_1, b_2, a_3, b_1, a_2, b_3, snijden elke twee overstaande zijden elkaar, dus de verbindingslijnen van overstaande hoekpunten snijden elkaar twee aan twee; daar deze lijnen niet in een vlak liggen, gaan zij door een punt Q. Projecteert men de zeshoek uit P_{00} op een vlak τ, dan gaan de projecties van a_1, a_2, a_3 door het snijpunt van b_0 met τ, die van b_1, b_2, b_3 door het snijpunt van a_0 met τ. Men vindt dus de figuur van 4e). De 16-puntenstelling en de stelling van Pappus kunnen zo uit elkaar afgeleid worden.

8. Involuties.

a) Stelling. Wanneer van twee volledige vierhoeken $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ en $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ vijf paar overeenkomstige zijden evenwijdig lopen, dan loopt ook het zesde paar evenwijdig. Het bewijs gaat zeer eenvoudig met gelijkvormigheid van driehoeken.

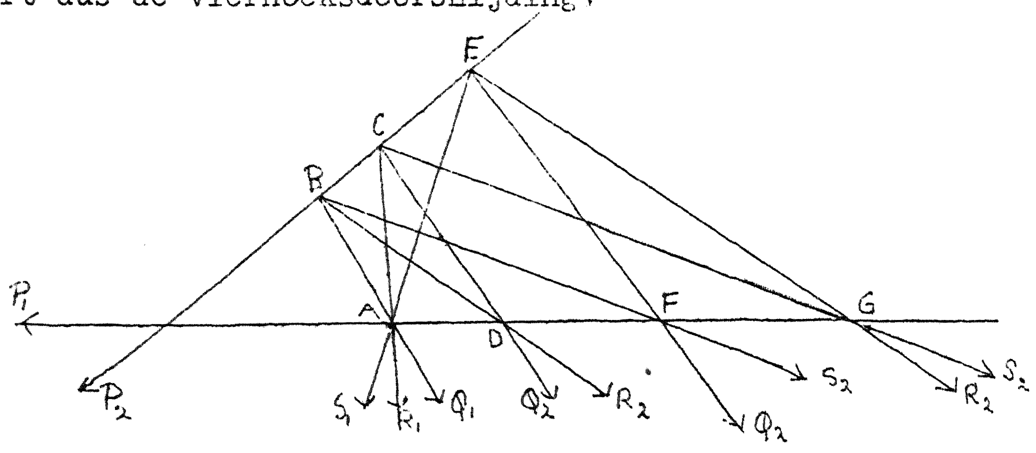
b) Stelling. Wanneer van twee volledige vierhoeken $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ en $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ vijf paar overeenkomstige zijden elkaar snijden op een lijn l, dan ligt ook het snijpunt der zijden van het zesde paar op l.

Dit volgt onmiddellijk uit a) door projectie of door toepassing van een centrale collineatie.

c) Snijden de paren overstaande zijden l in P_1, P_2; Q_1, Q_2, R_1, R_2, dan zeggen wij, dat (P_1P_2; Q_1Q_2; R_1R_2) een vierhoeksdoorsnijding is. Elk der zes punten is door de vijf overige eenduidig bepaald.

d) Stelling. Zijn (P_1P_2; Q_1Q_2; R_1R_2) en (P_1P_2; Q_1Q_2; S_1S_2) vierhoeksdoorsnijdingen, dan is ook (P_1P_2; R_1R_2; S_1S_2) een vierhoeksdoorsnijding.

Bewijs. [In de figuur is voor l de oneigenlijke rechte genomen.] ABCD geeft de eerste vierhoeksdoorsnijding. Trek AE door S_1, EF door Q_2; dan levert ABEF de tweede. Trek nu EG door R_2; volgens de stelling van Pappus, toegepast op BDCGEF, gaat CG door S_2. ACGE geeft dus de vierhoeksdoorsnijding.



$(P_1P_2;\ R_1R_2;\ S_1S_2)$

e) Is bovendien $(P_1P_2;\ Q_1Q_2;\ T_1T_2)$ een vierhoeksdoorsnijding, dan is ook $(R_1R_2;\ S_1S_2;\ T_1T_2)$ een vierhoeksdoorsnijding.

Bepaling. De verzameling der puntenparen, die met twee gegeven puntenparen een vierhoeksdoorsnijding vormen, heet een involutie.

Uit het voorgaande volgt nu: Twee puntenparen op een rechte lijn bepalen één en slechts één involutie, waartoe zij beide behoren.

f) Bijzonder geval.

Neem een der zijden van de vierhoek langs de oneigenlijke rechte, zodat P_1 oneigenlijk is. Men vindt dan:

$P_2Q_1 \times P_2Q_2 = P_2R_1 \times P_2R_2$.

P_2 heet het centrum van de involutie, het constante product heet de macht.

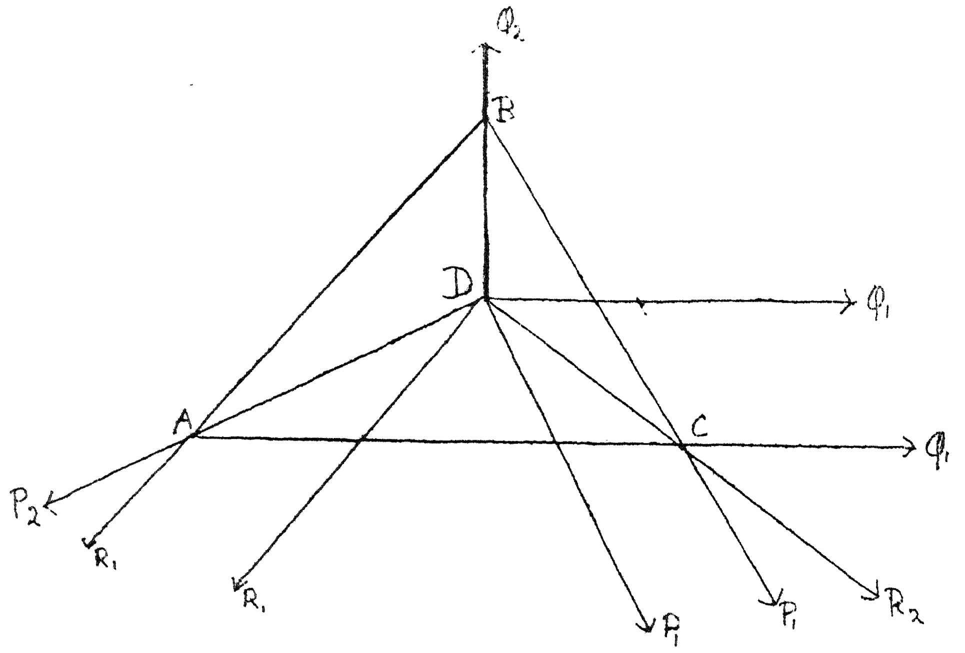
g) Een involutie gaat door centrale projectie over in een involutie. Dit volgt uit het feit, dat een volledige vierhoek door centrale projectie in een volledige vierhoek overgaat.

h) Een straleninvolutie kan op 2 manieren ontstaan:

I. Door de paren van een punteninvolutie uit een punt te projecteren.

II. Door de paren overstaande hoekpunten van een volledige vierzijde met een vast punt te verbinden.

Dat beide methoden op hetzelfde neerkomen, blijkt uit de figuur.



De volledige vierzijde wordt gevormd door de zijden van driehoek ABC en de oneigenlijke rechte l. De verbindingslijnen van D met de paren overstaande hoekpunten snijden op l de puntenparen P_1P_2, Q_1Q_2 en R_1R_2 uit, die ook door de volledige vierhoek ABCD uitgesneden worden.

9. Harmonische ligging.

a) Bepaling. Vormen de puntenparen AA, BB, CD een vierhoeksdoorsnijding, dan zijn AB en CD harmonische paren.

b) Voorbeeld. De zijden en de diagonalen van een parallelogram snijden op l_∞ harmonische paren uit.

Door het parallelogram te beschouwen, dat de middens der zijden van het eerste parallelogram als hoekpunten heeft, zien wij dat de paren verwisseld mogen worden.

De methode van Desargues levert ons nu:

Stelling. Zijn AB en CD harmonische paren, dan zijn ook CD en AB harmonische paren.

c) Uit 8g volgt, dat harmonische paren door projectie in harmonische paren overgaan. Men kan dus ook van harmonische stralenparen spreken.

Trekt men uit het middelpunt van een parallelogram lijnen // de zijden, dan vormen deze en de diagonalen volgens b) harmonische paren. Door deze paren met een zijde te snijden, vinden wij: Het midden van AB en het oneigenlijke punt van AB vormen met A en B harmonische paren. Dit geeft een eenvoudige constructie voor harmonische paren.

d) Uit 8e volgt: alle puntenparen, die met A en B harmonisch liggen, vormen met AA en BB een involutie. A en B heten de dubbelpunten van de involutie. Niet iedere involutie bezit (reële) dubbelpunten.

10. Projectieve meetkunde.

Bepalingen. Een transformatie, van een plat vlak in zichzelf, die door herhaald projecteren tot stand komt, heet een projectieve transformatie.

Tot de projectieve meetkunde behoren al die begrippen, die invariant zijn bij projectieve transformaties. Hiertoe behoren: punt, rechte lijn, incident, involutie, harmonische puntenparen.

Een stelling behoort tot de projectieve meetkunde, als er alleen projectief meetkundige begrippen in voorkomen.

Voorbeelden: de stellingen van Desargues en Pappus.

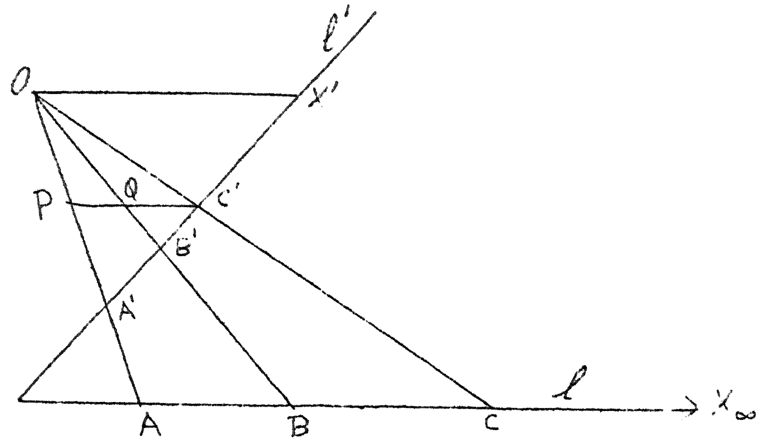
Een projectieve transformatie, die de oneigenlijke rechte invariant laat, heet een affiene transformatie. Affiene begrippen en stellingen worden analoog met de projectieve gedefinieerd. Affiene begrippen zijn: evenwijdige lijnen, middens van een lijnstuk, affiene stellingen bijv: de diagonalen van een parallelogram delen elkaar middendoor; de zwaartelijnen van een driehoek gaan door een punt.

Zowel de projectieve als de affiene transformaties vormen een groep; de tweede is een ondergroep van de eerste.

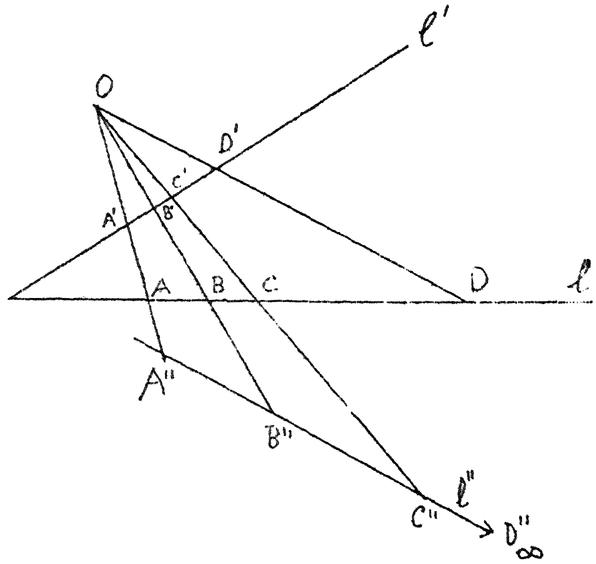
11. De dubbelverhouding.

Projecteer de punten van l uit O op l'; de projectie van X_∞ is X'
Trek C' P//l.

$\frac{CA}{CB} = \frac{C'P}{C'Q} = \frac{C'P}{X'O} : \frac{C'Q}{X'O} = \frac{C'A'}{X'A'} : \frac{C'B'}{X'B'}$.



Bepaling. De laatste uitdrukking is de dubbelverhouding (A'B'C'X').
Stelling. De dubbelverhouding is invariant bij projectie.
Bewijs.
Trek l''//OD; dan is (ABCD) = $\frac{C''A''}{C''B''}$ = (A'B'C'D').



Men kan nu ook spreken van de d.v. van twee stralenparen uit een waaier.

De dubbelverhouding (ABCD) van de harmonische paren AB en CD is -1; dit blijkt, door D naar het oneindige te projecteren.

12. Projectieve puntenreeksen en lijnenwaaiers.

a) Definitie analoog met 10a.

b) Stelling. Er is een en slechts een projectieve transformatie, die drie gegeven punten van een lijn in drie andere gegeven punten op een lijn transformeert.

Bewijs. Laat A, B, C op l en A', B' C' op l' gegeven zijn. Wanneer l=l', projecteren wij eerst A', B', C' uit S_1 op $l'' \neq l$; dit geeft A'', B'', C''. Als $A \neq A''$, projecteren wij A'', B'', C'' uit S_2 op AA'' op l''' door A; dit geeft A''' = A, B''', C''', BB''' snijdt CC''' in S_3; door projecteren uit S_3 gaat A''', B''', C''' over in A, B, C.

De eenduidigheid volgt uit de gelijkheid der dubbelverhoudingen.

c) Voorbeelden van projectieve reeksen en waaiers.

I. Een verschuiving van een lijn in zichzelf wordt door twee parallelprojecties verkregen.

II. Een draaiing van een lijn om een van zijn punten is een parallelprojectie.

III. Een vermenigvuldiging van een lijn t.o.v. een van zijn punten wordt door een parallelprojectie en een centrale projectie verkregen

IV. Volgens I, II en III zijn twee willekeurige gelijkvormige reeksen projectief.

V. Congruente waaiers zijn projectief, daar zij door lijnen evenwijdig aan overeenkomstige stralen door gelijkvormige puntenreeksen gesneden worden.

13. a) Stelling. Er is een en slechts een projectieve transformatie in het platte vlak, die vier vrij gelegen punten in vier andere vrij gelegen punten overvoert.

Bewijs. De transformatie is door herhaald projecteren te construeren. Dat ze eenduidig bepaald is, blijkt uit het invariant blijven der dubbelverhoudingen.

b) Voorbeeld. Congruente velden zijn projectief. Een congruente verplaatsing C induceert op de oneigenlijke rechte l een projectieve transformatie D, die in het oneigenlijke vlak V door herhaald projecteren verkregen kan worden. Door alle daarbij gebruikte lijnen in V door vlakken met een vast punt O te verbinden, ontstaat een projectieve transformatie in het gegeven vlak U, die een gelijkvormigheidstransformatie is. Door zo nodig een verschuiving en een vermenigvuldigingstransformatie toe te voegen, wordt de gewenste congruente verplaatsing verkregen.

c) Stelling. Er is een en slechts een projectieve transformatie, die vier gegeven vrij gelegen lijnen in vier andere vrij gelegen lijnen overvoert.

Bewijs. Pas stelling a) toe op vier der snijpunten van de lijnen.

14. Laat P en Q de toppen zijn van twee projectieve waaiers, zodat aan l door P, l' door Q toegevoegd is. PQ = a; wij onderstellen $a' \neq a$. QP = b'. Aan c door P is c' door Q toegevoegd. P_1 en Q_1 zijn de toppen van twee dergelijke waaiers.

Stelling. Er is een projectieve transformatie, die de waaiers P en Q in de waaiers P_1 en Q_1 overvoert, zodat overeenkomstige stralen in overeenkomstige stralen overgaan.

Bewijs. Men behoeft slechts aan a', b, c, c' resp. toe te voegen a_1', b_1, c_1, c_1'.

In het bijzonder zijn twee projectieve waaiers steeds projectief met congruente waaiers.

15. De meetkundige plaats van snijpunten van overeenkomstige stralen in congruente waaiers is een cirkel.

Een kromme, die projectief is met een cirkel, heet een kegelsnede. Een kegelsnede is dus volgens 14 de meetkundige plaats van de snijpunten van overeenkomstige stralen in twee projectieve waaiers. Twee willekeurige punten van de kegelsnede kunnen als toppen van de projectieve waaiers genomen worden. Zijn P en Q de toppen, dan is aan PQ de raaklijn in Q toegevoegd.

16. a) Stelling. Er is een projectieve transformatie, die een kegelsnede c in een cirkel c' en een gegeven punt P binnen c in het middelpunt M' van c' overvoert.

Bewijs. Trek een middellijn A'B' in C' en een lijn door P, die c in A en B snijdt. De raaklijnen in A en B snijden elkaar in D, die in A' en B' in D'. PD snijdt c in E, M'D' snijdt c' in E'. Voeg A, B, E, D aan A', B', E', D' toe.

b) De stelling: iedere lijn door M' is middellijn van de cirkel, gaat nu over in:

Stelling: Bepaalt men op iedere lijn door P het harmonisch toegevoegde van P t.o.v. de snijpunten met c, dan vormen deze punten een rechte lijn p (poollijn van P).

c) De stelling: een middellijn deelt alle koorden loodrecht op die middellijn middendoor, geeft:

Stelling. Ligt Q buiten c en bepaalt men op iedere lijn door Q, die c snijdt, het harmonisch toegevoegde van Q t.o.v. de snijpunten met c, dan vormen deze punten een segment RS op een lijn q (poollijn van Q); R en S zijn de raakpunten van de raaklijn uit Q.

d) Pool en poollijn zijn projectieve begrippen.

e) Stelling. Ligt Q op de poollijn van P, dan ligt P op de poollijn van Q.

Bewijs. Pas de onder a) beschreven transformatie toe. Er zijn 4 gevallen, al naar de ligging van P en Q binnen of buiten c.

Bepaling. Punten, die op elkanders poollijn t.o.v. c liggen, heten poolverwant t.o.v. c.

17. Stelling. De paren poolverwante punten op een lijn l vormen een involutie (poolinvolutie)

Bewijs. Wanneer l de kegelsnede snijdt, volgt dit direct uit de definities. Snijdt l de kegelsnede niet, dan volgt het uit de stelling, dat de puntenparen op de oneigenlijke rechte in loodrechte richtingen een involutie vormen (orthogonale involutie), en dit is een gevolg van het feit, dat de hoogtelijnen van een driehoek door een punt gaan.

18. Stelling van Pascal. Is een zeshoek in een kegelsnede beschreven, dan liggen de snijpunten van overstaande zijden op een rechte lijn.

Bewijs. Dit is een onmiddellijk gevolg van de Stelling: zijn van een in een cirkel beschreven zeshoek twee paar overstaande zijden evenwijdig, dan is ook het derde paar evenwijdig.

b) Dit bewijs geldt alleen, als de lijn van Pascal de kegelsnede niet snijdt. Een algemeen bewijs kan men leveren met de stelling van Menelaos.

Snijdt een lijn l de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in P, Q en R, dan is

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CQ}{AQ}\cdot\frac{AR}{BR} = 1,$$

en omgekeerd. Voor het bewijs trekke men door C een hulplijn evenwijdig met l.

c) Laat nu $P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5\,P_6$ een zeshoek in een cirkel zijn; $P_1\,P_2$, $P_3\,P_4$ en $P_5\,P_6$ vormen driehoek ABC ($P_1\,P_2$ langs AB, $P_3\,P_4$ langs BC, $P_5\,P_6$ langs CA). $P_1\,P_2$ snijdt $P_4\,P_5$ in Q_1; $P_3\,P_4$ snijdt $P_6\,P_1$ in Q_2; $P_5\,P_6$ snijdt $P_2\,P_3$ in Q_3. Menelaos, toegepast op deze drie transversalen, geeft, wanneer men rekening houdt met $AP_1 \times AP_2 = AP_5 \times AP_6$, enz., dat

$$\frac{AQ_1}{BQ_1}\cdot\frac{CQ_2}{AQ_2}\cdot\frac{BQ_3}{CQ_3} = 1,$$

zodat Q_1, Q_2 en Q_3 op een rechte lijn liggen.

d) Door een projectieve transformatie breidt men deze stelling uit tot willekeurige kegelsneden.

e) De methode van Desargues voert van de stelling van Menelaos tot de projectieve stelling:

Snijden twee rechte lijnen l en m de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in P_1 en P_2, Q_1 en Q_2, R_1 en R_2, dan is

$$(P_1\,P_2BC)(Q_1\,Q_2CA)(R_1\,R_2AB) = 1.$$

9. Een projectieve transformatie, die de oneigenlijke rechte in zichzelf transformeert, heet een <u>affiene</u> transformatie. Met behulp hiervan definieert men de <u>affiene meetkunde</u>.

Hiertoe behoren uit de elementaire meetkunde de hoofdstukken over het parallelogram en de evenredigheid van lijnen, en een groot deel van de theorie der oppervlakken. Ook de stellingen van Menelaos en de Céva zijn affiene stellingen.

10. <u>Voorbeeld</u>. De zwaartelijnen van een driehoek gaan door een punt. Hierbij behoort de projectieve stelling: Snijdt de lijn l de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in P, Q, R en zijn PP_1 met BC, QQ_1 met CA, en RR_1 met AB harmonische puntenparen, dan gaan AP_1, BQ_1 en CR_1 door een punt. Met behulp hiervan leidt men gemakkelijk de stelling van de Céva af uit die van Menelaos.

11. a) Een <u>spiegeling</u> in een lijn l is een involutorische centrale collineatie met l als as en het oneigenlijke punt in de richting loodrecht op l als centrum. Iedere congruente verplaatsing is door spiegelingen te verkrijgen.

b) Geeft men de oneigenlijke rechte en daarop de orthogonale involutie, dan kan men de groep der verplaatsingen definiëren en op grond daarvan de definitie van <u>metrische</u> meetkunde geven.

c) Vervangt men de orthogonale involutie door een willekeurige involutie op een willekeurige lijn, dan gaat iedere metrische stelling in een projectieve stelling over.

21. Voorbeelden.

a) De hoogtelijnen van een driehoek gaan door een punt. Hierbij behoort de projectieve stelling: Snijdt de lijn l de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC in P, Q, R en zijn PP_1, QQ_1, RR_1 paren van een involutie op l, dan gaan AP_1, BQ_1 en CR_1 door een punt.

b) De middelloodlijnen van een driehoek gaan door een punt.
Zijn $A, B, C, l, P, Q, R, P_1, Q_1, R_1$ als onder a), terwijl BC met PP_2, CA met QQ_2, AB met RR_2 harmonische paren zijn, dan gaan P_1P_2, Q_1Q_2 en R_1R_2 door een punt.

c) De zwaartelijn op de hypotenusa AB van de rechthoekige driehoek ABC is gelijk aan de helft van de hypotenusa.
Zijn A, B, C, P, Q, R als onder a), terwijl AB met RR_2 harmonische paren zijn, dan gaat AR_2 in CR_2 over door de involutonische centrale collineatie, die Q als centrum en PR_2 als as heeft.

d) Overstaande zijden van een parallelogram zijn gelijk.
Zijn AB, CD, EF de paren overstaande hoekpunten van een volledige vierzijde, E_1 een willekeurig punt op EF, terwijl AD met EE_2 harmonische paren zijn, en voert men de involutorische centrale collineaties uit met E als centrum en achtereenvolgens E_1E_2 en E_1A als as, dan gaat BD over in CA.

e) De diagonalen van een rechthoek zijn gelijk. Valt in het voorgaande E_1 met F samen, dan voert de involutorische centrale collineatie met E als centrum en FE_2 als as, zowel BD in CA als BA in CD over.

22. a) Bepaling. De bissectrices van een hoek vormen het lijnenpaar, dat zowel orthogonaal is als harmonisch met de benen van de hoek.

b) Door spiegeling in een van de bissectrices worden de benen van een hoek verwisseld.

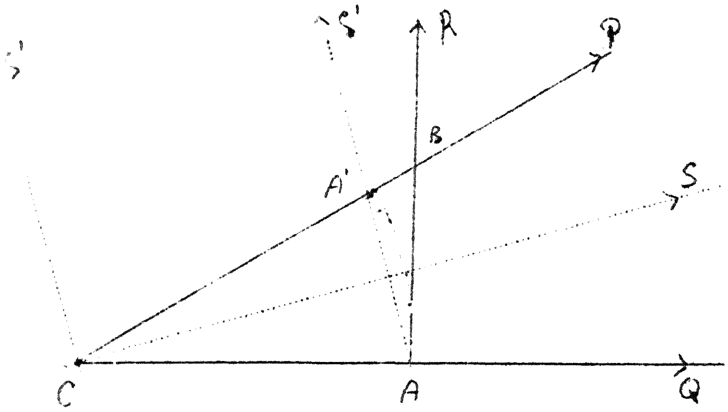
c) Stelling. De bissectrices van de hoeken van een driehoek vormen de zijden van een volledige vierhoek.
Projectieve vorm van deze stelling: Laat de zijden van driehoek ABC de lijn l snijden in P, Q, R. Bepaal van een op l gegeven involutie het paar SS', dat harmonisch ligt met PQ en trek CS en CS'. Doe analoog met A en B. De zes verkregen lijnen vormen de zijden van een volledige vierhoek.

23. a) Bepaling. Een kegelsnede, waarvoor de poolinvolutie op de oneigenlijke rechte met de orthogonale involutie samenvalt, heet een cirkel.
De pool van de oneigenlijke rechte heet het middelpunt van de cirkel.

b) Stelling. Twee stralen van een cirkel zijn gelijk.
Bewijs. Door spiegeling in een van de bissectrices van de hoek tussen die stralen, gaat de cirkel in zichzelf over en worden de stralen verwisseld.

24. Invoering van metrische begrippen.

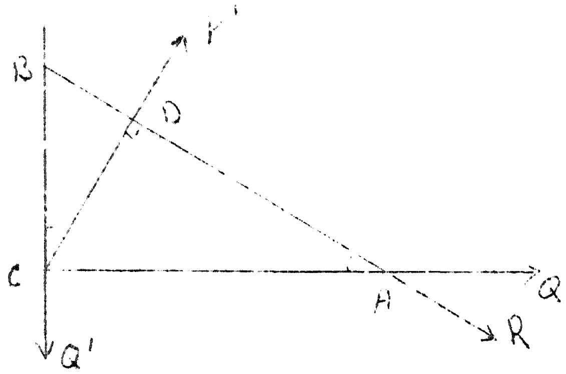
a) Om de verhouding van twee lijnstukken CA en CB te bepalen, zoeken wij eerst op CB het punt A', zodat CA = CA'; dit gelukt door spiegeling in bissectrix van hoek ACB. Zijn nu P,Q,R de oneigenlijke punten van BC, CA, AB, en S,S' die van de bissectrices van hoek ACB, dan is



$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = (A'BCP) = (S'RQP).$$

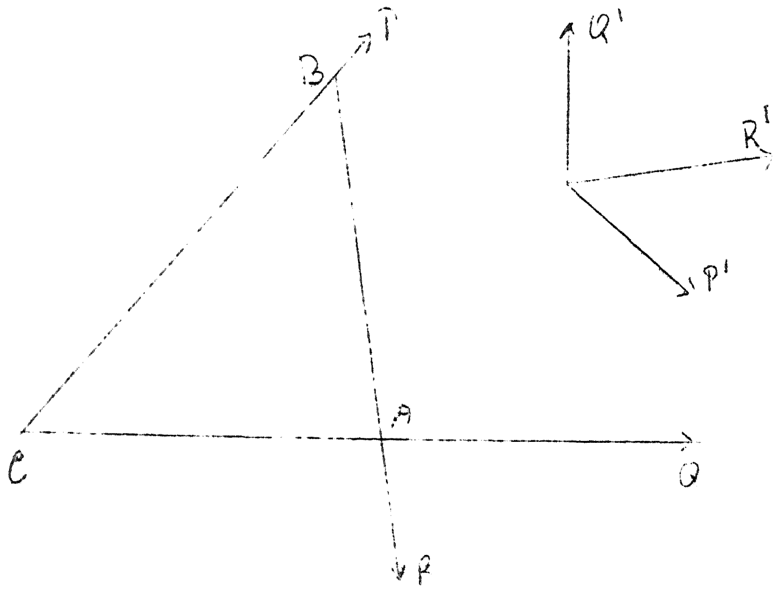
Hierdoor is een definitie van afstand op grond van projectieve begrippen gegeven, waarbij alleen de oneigenlijke rechte en daarop de orthogonale involutie I gegeven verondersteld worden.

b) Een andere methode is de volgende. Is hoek ACB recht en CD ⊥ AB, zijn Q,Q',R,R' de oneigenlijke punten van CA, CB, AB, CD, dan is



$$\sin^2 A = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BA} =$$
$$= (DABR) = (R'QQ'R).$$

Laat nu van driehoek ABC, P, Q,R de oneigenlijke punten van BC, CA, AB zijn en P',Q', R' de daaraan in I toegevoegde punten, dan is



$$\frac{CA^2}{CB^2} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} = \frac{(R'PP'R)}{(R'QQ'R)} .$$

c) <u>Stelling</u> van Pythagoras. Zie de voorlaatste figuur.

$$\frac{CA^2}{AB^2} = (R'QQ'R). \quad \frac{CB^2}{AB^2} = (R'Q'QR).$$

$$\frac{CA^2 + CB^2}{AB^2} = (R'QQ'R) +$$
$$+ (R'Q'QR) = 1.$$

II. Niet-Euclidische meetkunde.

25. a) Laat een kegelsnede ω gegeven zijn. Onder een verplaatsing verstaan wij een projectieve transformatie, die ω in zichzelf overvoert. Onder een spiegeling in een lijn l, verstaan wij de involutorische centrale collineatie met l als as en de pool L van l t.o.v. ω als centrum.

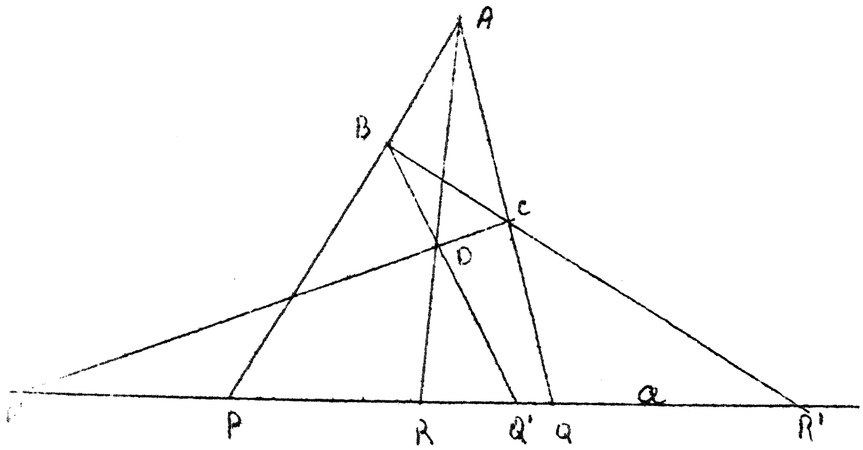
b) Stelling. Iedere spiegeling is een verplaatsing. Iedere verplaatsing is een product van spiegelingen.

Bewijs. Laat V een verplaatsing zijn, A een punt en VA = B; laten P en Q de snijpunten van AB met ω zijn. Zoek het gemeenschappelijke harmonische paar CD van AB en PQ. Laat S de spiegeling in de poollijn c van C zijn. SVA = A. Beschouw de lijn l door A; zij SVl = m. Bepaal de lijn h en k door A, die harmonisch met l en m en tegelijk poolverwant t.o.v. ω zijn. Laat S_1 de spiegeling in h zijn. S_1SV laat A en l invariant. l snijdt ω in E en F. Indien S_1SV de punten E en F verwisselt, voeren wij nog de spiegeling uit in de lijn door A, die met l poolverwant is. Zo vinden wij een verplaatsing W, die ieder punt van l invariant laat. Is S_3 de spiegeling in l, dan is of W, of S_3W de identiteit.

26. a) Bepaling. Twee lijnen, die door elkanders pool t.o.v. ω gaan, heten loodrecht.

Stelling. Door de spiegeling in een van twee onderling loodrechte lijnen gaat de andere in zichzelf over.

b) Stelling. Bestaan twee paar overstaande zijden van een volledige vierhoek uit onderling loodrechte lijnen, dan geldt dit ook voor het derde paar.

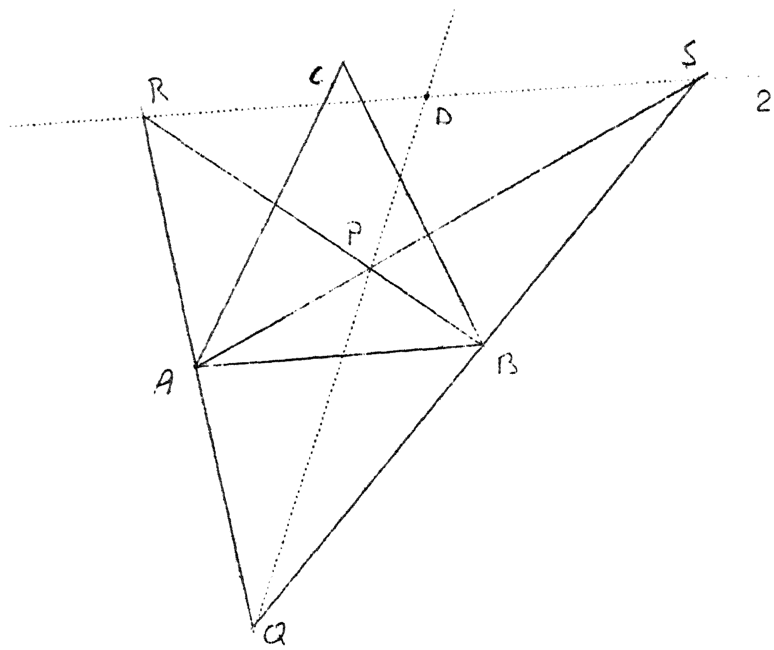


Gegeven: $AB \perp CD$; $AC \perp BD$.
Te bewijzen: $AD \perp BC$.
Bewijs: Zij a de poollijn van A en laat de zijden in bovenstaande volgorde a snijden in P, P', Q, Q', R, R'. De pool van AB is P'; De pool van AC is Q'. De paren poolverwante punten op a vormen een involutie (§ 17), waartoe PP' en QQ' behoren, dus ook RR' (§8e). Nu is R' poolverwant met A en met R, dus R' is de pool van AD. Wij hebben nu bewezen, dat de hoogtelijnen van een driehoek door een punt gaan.

27. a) Bepaling. De bissectrices van een hoek worden gedefinieerd als in § 22a.

b) Stelling. De bisectrices van de hoeken van een driehoek vormen de zijden van een volledige vierhoek.

Bewijs. De bissectrices van hoek A snijden die van hoek B in P,Q,R,S. Stel D is het snijpunt van PQ en S. Volgens §9 liggen AB en AD harmonisch met AP en AQ, dus AD valt langs AC. Evenzo valt BD langs BC, dus D valt in C. Volgens § 26b is QC ⊥ RS, en bovendien liggen CQ en CR harmonisch met CA en CB; het zijn dus bissectrices.



28.a) Laat de lijn AB ω snijden in P en Q. Het puntenpaar MN, dat harmonisch ligt zowel met AB als met PQ, bestaat uit de middens van AB. Deze definitie wordt gerechtvaardigd door de

Stelling. Door spiegeling in een middelloodlijn van AB worden de punten A en B verwisseld.

b) Stelling. De zes middens van de zijden van een driehoek vormen de hoekpunten van een volledige vierzijde. (duaal met 27b).

c) Stelling. De zes middelloodlijnen van een driehoek vormen de zijden van een volledige vierhoek.

Bewijs. Deze zijden zijn de poollijnen van de zes middens der zijden.

d) Stelling. De zes zwaartelijnen van een driehoek vormen de zijden van een volledige vierhoek.

Bewijs. Laat P en P' de middens zijn van BC, Q en Q', die van AC, R en R' die van AB. Stel, dat P',Q',R' op een rechte l liggen (stelling b). De driehoeken ABC en PQR liggen perspectief (§3), dus AP, BQ en CR gaan door een punt. Evenzo voor de andere drietallen.

29. Beperkt men zich tot punten binnen ω, dan hebben de verplaatsingen de volgende eigenschappen.

a) Er is een en slechts een verplaatsing, die een punt A in A', een halve lijn b door A in een halve lijn b' door A' en een bepaalde kant van b in een bepaalde kant van b' overvoert.

b) De gelijkvormigheidstransformaties hebben in de N,E,M geen analogon.

c) De congruentiestellingen, die direct door verplaatsing bewezen worden, gelden ook hier.

d) In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.

Bewijs door spiegeling in de bissectrix.

e) Omkering van d).

Bewijs door spiegeling in de middelloodlijn.

f) Twee driehoeken, die de drie zijden gelijk hebben, zijn congruent.

30.a) Stelling. Een buitenhoek van een driehoek is groter dan elke nietaanliggende binnenhoek.

Bewijs. Zie Euclides I 16.

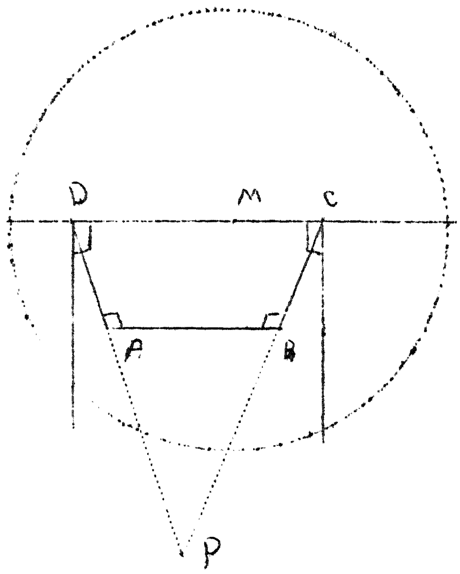
Verleng een zwaartelijn met zichzelf, dan ontstaan twee congruente driehoeken.

b) Stelling. Twee driehoeken zijn congruent, als zij twee zijden, een aanliggende en een overstaande hoek gelijk hebben.

Bewijs door verplaatsing met behulp van a).

31.a) Stelling. Is van vierhoek ABCD, $\angle A = \angle B = 90^\circ$ en AD = BC (Saccheri-vierhoek), dan zijn hoek C en hoek D scherp.

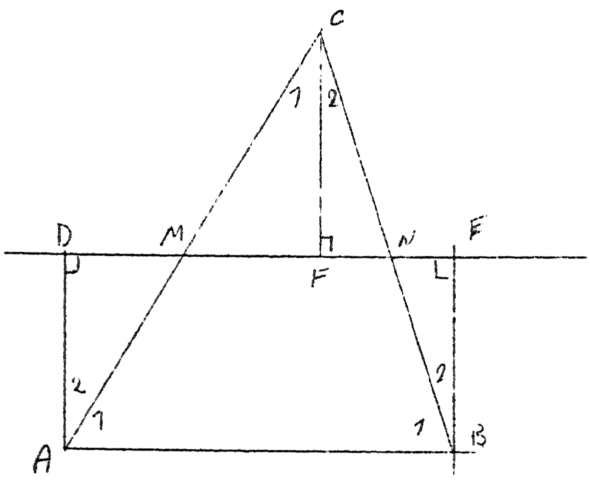
Bewijs. Voer door een projectieve transformatie ω over in een cirkel, waarvan CD een middellijn is, AD en CB gaan door de pool P van AB.



Uit de figuur blijkt, dat $\angle C$ en $\angle D$ scherp zijn.

b) Stelling. De som van de hoeken van van een driehoek is kleiner dan 180°.

Bewijs. Laat M en N de middens zijn van AC en BC. Trek de loodlijnen AD, BE en CF op MN. $\triangle ADM \cong \triangle CFM$ (ZHH), dus $\angle A_2 = \angle C_1$. Evenzo: $\angle B_2 = \angle C_2$. Verder is AD = CF = BE, dus ABED is een Saccheri-vierhoek. De som der hoeken van $\triangle ABC$ is gelijk aan $\angle DAB + \angle EBA$; volgens a) zijn die hoeken scherp.



c) Stelling. Twee driehoeken, die de drie hoeken gelijk hebben, zijn congruent.

Bewijs. Legt men de driehoeken met één der gelijke hoeken op elkaar, dan kunnen de overstaande zijden elkaar niet snijden. Zouden zij geen punt gemeen hebben, dan zou er een vierhoek met hoekensom 360° ontstaan, wat niet kan. Zij vallen dus samen.

32. <u>Cirkels, afstandslijnen en grenscirkels.</u>

Wij bestuderen de meetkundige plaats van de spiegelbeelden van A in de lijnen van een waaier met top M. Er zijn drie gevallen.

a) M is een eigenlijk punt (binnen ω). M ligt op gelijke afstanden van alle punten der meetkundige plaats γ . Zij m de poollijn van M, C een punt van γ . De middelloodlijn van AC gaat door M en is loodrecht op AC, dus ze is de poollijn van Q. (QDAC) = -1 en (RMAB) = -1, dus CB gaat door P. AQ en BP doorlopen projectieve waaiers, dus γ is een kegelsnede. PA snijdt QB in een punt F van γ ; M ligt op CF; M is ook de pool van m ten opzichte van γ . De poollijn van P zowel ten opzichte van ω als ten opzichte van γ is MQ. De raaklijn PG is dus loodrecht op MG.

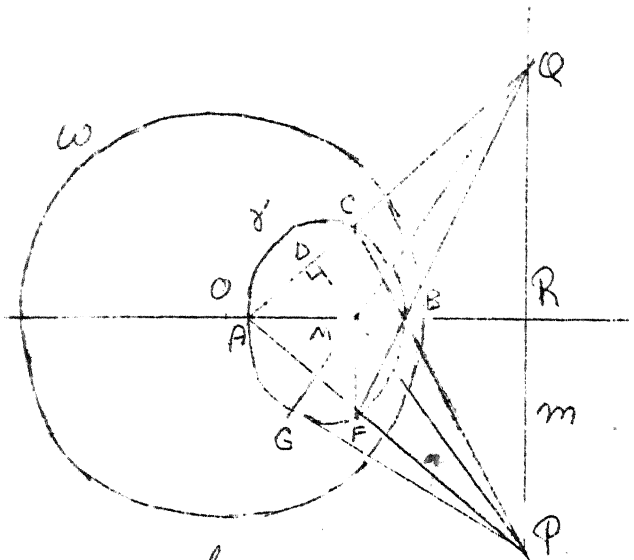


fig 1

b) M ligt buiten ω .

Hulpstelling. Is in vierhoek ABCD, $\angle A = \angle B = 90^\circ$ en AD = BC, dan is de middelloodlijn van AB tevens middelloodlijn van CD.

Zij weer m de poollijn van M; alle punten van γ liggen op dezelfde afstand van m.

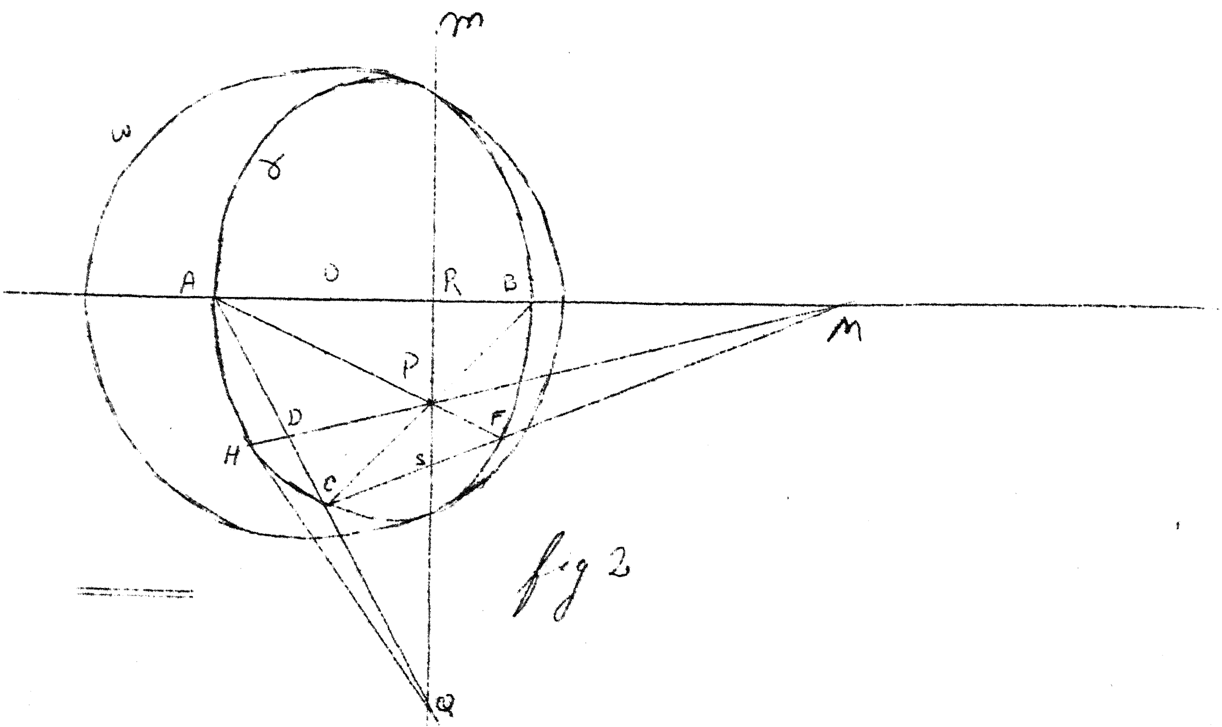


fig 2

(Zie figuur Blz. 18)
In vierhoek ACSR hebben AC en RS dezelfde middelloodlijn MD. Evenals onder a) blijkt nu, dat γ een kegelsnede is(de twee afstandslijnen aan weerskanten van m vormen samen γ)en dat de raaklijn in H aan loodrecht staat op de loodlijn HP op m.

c) M ligt op γ .

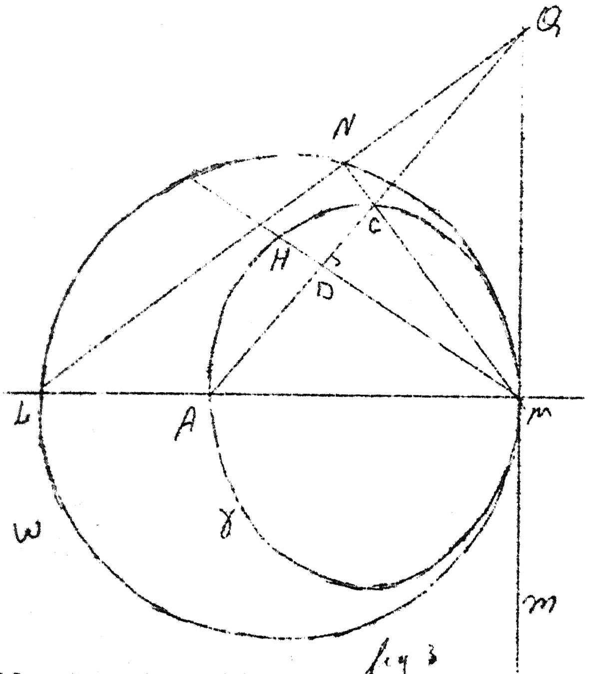


fig 3

Door spiegeling in de middelloodlijn MD gaat A in C en L in N over, dus LN gaat door Q.
MN en LN doorlopen projectieve waaiers; eveneens LQ en AQ, dus ook MC en AC. Hieruit volgt, dat γ een kegelsnede is. De raaklijn in H is loodrecht op MH.
γ heet nu grenscirkel (horocykel)

33. <u>Constructies</u>.

a) Door een punt A de lijnen evenwijdig aan een lijn l te construeren (F.Engel).

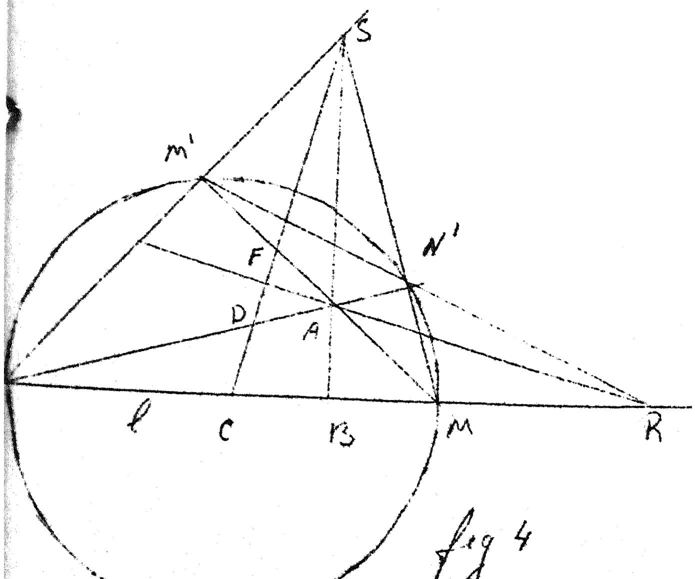


fig 4

Laat de loodlijn AB op l neer en trek AR $\perp$ AB. Een willekeurige loodlijn op AR snijdt AM in F en AN in D. Nu is (AFMM')=(ADN'N) = =(BCMN), dus AF=AD=BC.
Hieruit volgt de constructie.

b) De gemeenschappelijke loodlijn van twee niet snijdende en niet evenwijdige lijnen te construeren (Hilbert).
Kies A en C op s. Trek AB en CB' loodrecht op r. Maak A'B' = AB en $\angle$(s',A'B') = $\angle$(s,AB). s' snijdt s in D. Maak AD' = A'D. De middelloodlijn van DD' is de gevraagde lijn.

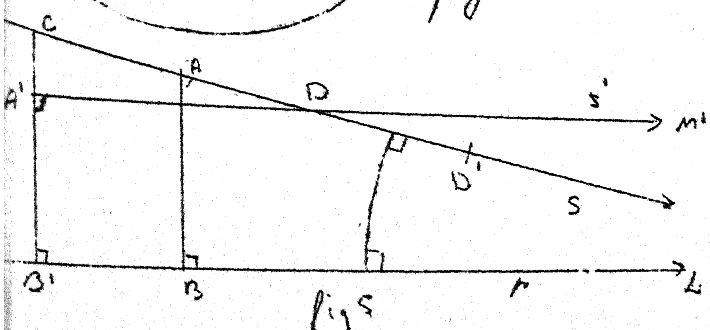


fig 5

Bewijs: Laat L, een oneigenlijk punt van r, M van s, M' van s' zijn, alle aan dezelfde kant van AB.

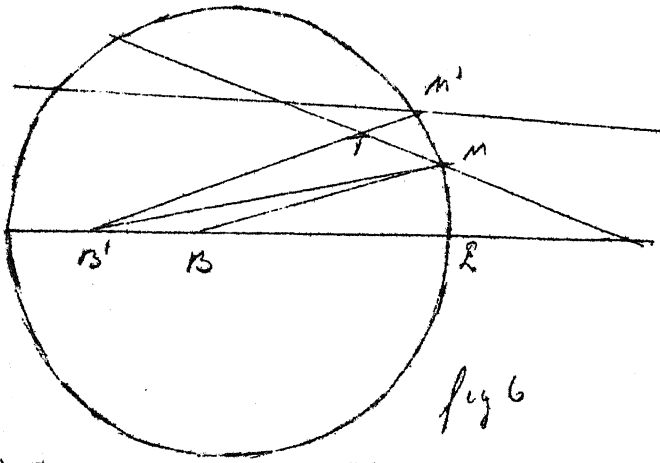


fig 6

$\angle MB'L < \angle MBL = \angle M'B'L$, dus B'M' snijdt s in T. Uit driehoek B'TC ziet men, dat s' en CT een punt D gemeen hebben. De translatie langs r, die B' in B brengt, voert A' in A, s' in s, D in D' over. De loodlijnen uit D en D' op r zijn dus gelijk. Hieruit volgt de juistheid van de constructie.

c) De gemeenschappelijke parallel van twee lijnen te tekenen.

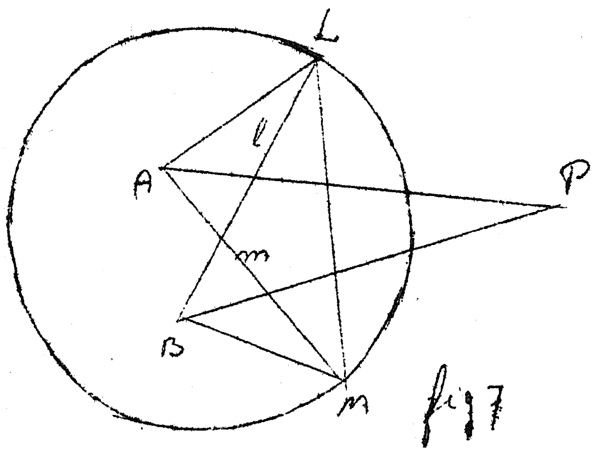


fig 7

Constructie. Laat l met het oneigenlijke punt L en m met het oneigenlijke punt M de gegeven lijnen zijn. Kies A op m en B op l. Trek AL en BM. Deel hoek LAM en hoek LBM middendoor. De gemeenschappelijke loodlijn van de bissectrices is de gevraagde lijn.

Bewijs. Is P de pool van LM, dan zijn AP en BP de bissectrices.

34. Lengte.

a) Is AB = CD, en snijden de lijnen AB en CD, ω resp. in P,Q en R,S, dan is (ABPQ)=(CDRS) of (ABPQ)=(CDSR); wij nemen het eerste aan. Het omgekeerde geldt ook. Hieruit volgt, dat (ABPQ) een functie is van de afstand $\overline{AB}$: $(ABPQ) = f(\overline{AB})$, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, maar (ABPQ)(BCPQ)=(ACPQ), zodat f voldoet aan de functionaalvergelijking

(1) $$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Stelt men log f(x) = g(x), dan is

(2) $$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

De enige continue oplossingen van deze vergelijking zijn: $g(x) = kx$, dus $f(x) = e^{kx}$; $(ABPQ) = e^{k.\overline{AB}}$;

(3) $$\overline{AB} = \frac{1}{k}\log\,(ABPQ).$$

Gewoonlijk neemt men k = 2.

(4) $$\overline{AB} = \tfrac{1}{2}\log\,(ABPQ);\quad (ABPQ) = e^{2\overline{AB}},$$

Uit (4) leidt men af:

(5) $\sinh^2 \overline{AB} = -(A'BB'A)$, $\cosh^2 \overline{AB} = (A'B'BA)$, waarin A' het punt van AB is, dat poolverwant is met A t.o.v. ω. Hierdoor is een formule verkregen, analoog met die uit 24b (blz. 14).

35. Hoeken.

Voor hoekmaten nemen wij de formule uit 24 b over: (6) $\sin^2 \angle ab =$ $= (a'bb'a)$, waarin $a' \perp a$ en $b' \perp b$.

36. De "stelling van Pythagoras".

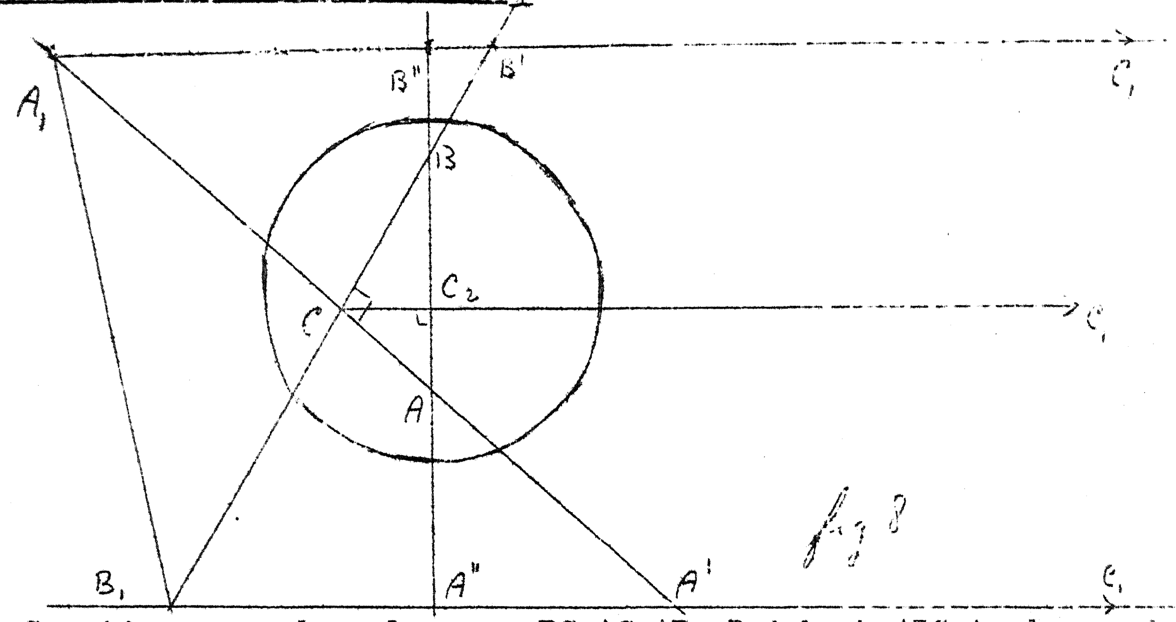


fig 8

A_1, B_1, C_1 zijn resp. de polen van BC,AC,AB. Driehoek ABC is dus rechthoekig in C.

$\cosh^2 \overline{AB} = (A''B''BA)$.

$\cosh^2 \overline{BC} = (B_1B'BC) = (A''B''BC_2)$

$\cosh^2 \overline{CA} = (A'A_1CA) = (A''B''C_2A)$.

Dus $\cosh^2 \overline{AB} = \cosh^2 \overline{BC}.\ \cosh^2 \overline{CA}$.

(6) $\cosh \overline{AB} = \cosh \overline{BC} \cosh \overline{CA}$.

Neemt men in (3) niet $k = 2$, dan vindt men in plaats van (5):

$$\cosh^2 \tfrac{1}{2}k\ \overline{AB} = (A'B'BA),$$

en (6) wordt:

$$\cosh \tfrac{1}{2}k.\overline{AB} = \cosh \tfrac{1}{2}k.\overline{BC}.\ \cosh \tfrac{1}{2}k.\overline{CA}.$$

Laat men hierin k tot 0 naderen, dan gaat dit over in

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2.$$

37. Oppervlak.

a) Bepaling. Een asymptotische driehoek is een driehoek met een hoekpunt op ω . Evenzo definiëren we dubbel-en drievoudig asymptotische driehoeken.

Stelling. Het oppervlak van een asymptotische driehoek is eindig.
Dit bewijzen wij niet.

Stelling. Alle drievoudig asymptotische driehoeken zijn congruent.

Bewijs. Er is een projectieve transformatie, die ω in zichzelf en de hoekpunten van de eerste driehoek in die van de tweede overvoert. Wij stellen het oppervlak van een drievoudig asymptotische driehoek gelijk aan $\lambda \pi$.

b) Stelling. Het oppervlak van een dubbel asymptotische driehoek met tophoek φ is $\lambda\ (\pi - \varphi)$.

Bewijs I. Als de stelling juist is voor $\varphi = \varphi_1$, en voor $\varphi = \varphi_2$, dan is ze juist voor $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, want opp. APQ = opp. APR + opp. AQR - opp. P(

$= \lambda(\pi - \varphi_1) + \lambda(\pi - \varphi_2) - \lambda\pi = \lambda(\pi - \varphi_1 - \varphi_2)$

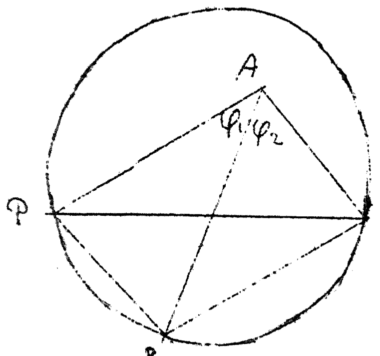


fig 9

II, Als de stelling geldt voor $\varphi = \varphi_3$, dan geldt ze voor $\varphi = \frac{1}{2}\varphi_3$. Dit volgt uit dezelfde figuur, als men $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}\varphi_3$ neemt.

III. De stelling geldt voor $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dus volgens II voor $\varphi = \pi/2^n$, dus volgens I voor $m\pi/2^n$; wegens de continuïteit geldt ze dan voor iedere hoek φ.

c) <u>Stelling</u>. Het oppervlak van een driehoek met hoeken α, β, γ is $\lambda(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$.

<u>Bewijs</u>. Opp. ABC = opp. PQR - opp. AQR - opp. BRP - opp. CPQ = $\lambda\pi - \lambda\alpha - \lambda\beta - \lambda\gamma$.

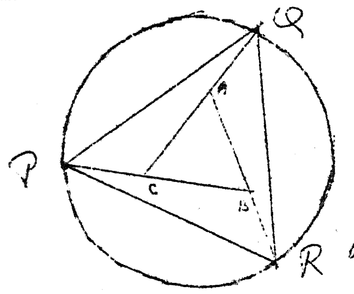


fig 10

<u>Opmerking</u>. Gewoonlijk kiest men de oppervlakte-eenheid zo, dat $\lambda = 1$.

38. Litteratuur over niet-euclidische meetkunde:

<u>H.J.E. Beth</u>, Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag. Noordhoff, Groningen, 1929.

<u>J.C.H. Gerretsen</u>, Niet-euclidische meetkunde. 2^e druk. Noorduyn, Gorinchem, 1949.

<u>H.S.M. Coxeter.</u> Non-euclidean geometry. University of Toronto press, 1942.

39. <u>Elliptische meetkunde.</u>

Wil men het parallelenpostulaat vervangen door het volgende: „Elke twee verschillende lijnen snijden elkaar", dan kan men niet alle andere axioma's handhaven. Er zijn twee mogelijkheden:

I. Men vervangt het axioma: Twee verschillende rechte lijnen hebben hoogstens een punt gemeen, door het volgende: Bij ieder punt A behoort een tegenpunt A', zodat iedere lijn door A ook door A' gaat; twee verschillende lijnen hebben twee tegenpunten gemeen.

Men verkrijgt zo de meetkunde op de bol.

II. Men laat het axioma vallen, dat een rechte lijn het vlak in twee delen verdeelt, en stelt hiervoor de ordeningseigenschappen van het projectieve vlak in de plaats.

Men verkrijgt dan de meetkunde in de schoof, d.w.z. van de lijnen en vlakken door een punt P. Een <u>punt</u> is een lijn door P, een <u>lijn</u> is een vlak door P, de <u>afstand</u> van twee <u>punten</u> is de hoek tussen de lijnen, de hoek tussen twee <u>lijnen</u> is de tweevlakshoek tussen de vlakken, een <u>verplaatsing</u> is een draaiing om P.

Meetkundige constructies.

I. Constructies met de lineaal alleen.

1. Constructiepostulaten.

I. Een punt P willekeurig aan te nemen, hetzij in het vlak, hetzij op een vroeger geconstrueerde lijn (of kromme); aan P mogen verder de voorwaarden worden opgelegd, dat het van bepaalde vroeger geconstrueerde punten verschilt en buiten bepaalde vroeger geconstrueerde lijnen (of krommen) ligt.

II. De verbindingslijn van twee vroeger geconstrueerde punten te construeren.

III. Het snijpunt van twee vroeger geconstrueerde lijnen te construeren. (De gegevens worden beschouwd als bij het begin reeds geconstrueerd.)

2. Alle lineaalconstructies zijn projectief; slechts vraagstukken uit de projectieve meetkunde kunnen met de lineaal worden opgelost. Zulke constructies zijn:

a) Het overbrengen van een dubbelverhouding: (ABCD) = (EFGX).
b) De constructie van harmonische puntenparen: (ABCX) = -1.
c) De constructie van een involutie uit twee paren: AB, CD, EX in involutie.
d) De constructie van het tweede snijpunt van een kegelsnede, die door 5 punten gegeven is, met een lijn door een van die punten (Pascal).

3. Het snijpunt van de lijnen $ax+by=c$ en $ex+fy=g$ heeft als coördinaten

(1) $$x = \frac{cf-bg}{af-be}, \qquad y = \frac{ag-ce}{af-be}.$$

De verbindingslijn van $P(x_1,y_1)$ en $Q(x_2,y_2)$ heeft de vergelijking:

(2) $$(y_1-y_2)x + (x_2-x_1)y + (x_1y_2-x_2y_1) = 0.$$

Zowel de coördinaten x en y in (1) als de coëfficiënten in (2) worden uit de gegevens (a, b, c, d, e, f, resp. x_1, y_1, x_2, y_2) verkregen door een eindig aantal malen de volgende bewerkingen toe te passen:
1) optelling; 2) vermenigvuldiging; 3) nemen van het tegengestelde;
4) nemen van het omgekeerde.
(4 kan weggelaten worden als men met homogene coördinaten werkt.)

<u>Stelling 1</u>. Opdat een constructie met de lineaal alleen is uit te voeren, is nodig, dat de coördinaten van het gevraagde punt door een eindig aantal toepassingen van de bewerkingen 1)-4) uit de gegevens worden verkregen, d.w.z. zij moeten rationale functies met gehele coëfficiënten van die gegevens zijn.

<u>Stelling 2</u>. De voorwaarde uit stelling 1 is ook voldoende.
<u>Bewijs</u>. Ieder gegeven kan als dubbelverhouding van 4 punten geïnterpre-

teerd worden. Wij moeten dus de bewerkingen 1)-4) met dubbelverhoudingen uitvoeren.

2) Als (ABCD) = x en (ABDE) = y, dan is (ABCE) = xy.

3) Als (ABCD) = x en (ABDE) = -1, dan is (ABCE) = -x.

4) Als (ABCD) = x, dan is (ABDC) = $\frac{1}{x}$.

1) Als (ABCD) = x, dan is (ACBD) = 1-x.

$$x + y = x(1-(-\tfrac{1}{x}y)).$$

4. Constructies in beperkt gebied π.

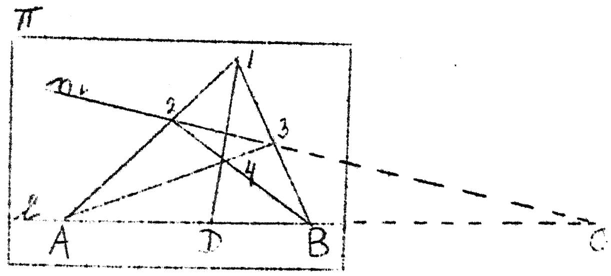
In de constructiepostulaten moet voor "punt" overal gelezen worden "punt binnen π". III wordt:

IIIa. Het snijpunt van twee vroeger geconstrueerde lijnen te construeren, indien dit snijpunt binnen π ligt.

Een punt buiten π kan gegeven zijn door twee lijnen, die elkaar binnen π niet snijden.

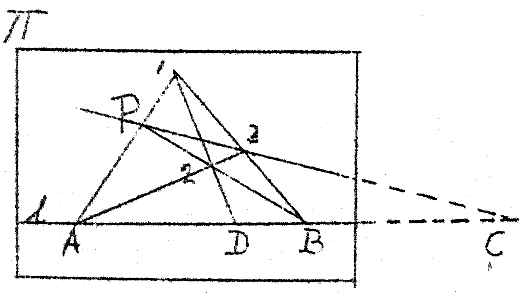
Een lijn buiten π kan gegeven zijn door twee punten buiten π.

a) Gegeven twee lijnen l en m, die elkaar buiten π in C snijden; twee punten A en B op l.
   Gevraagd D op l, zodat (ABCD) = -1.



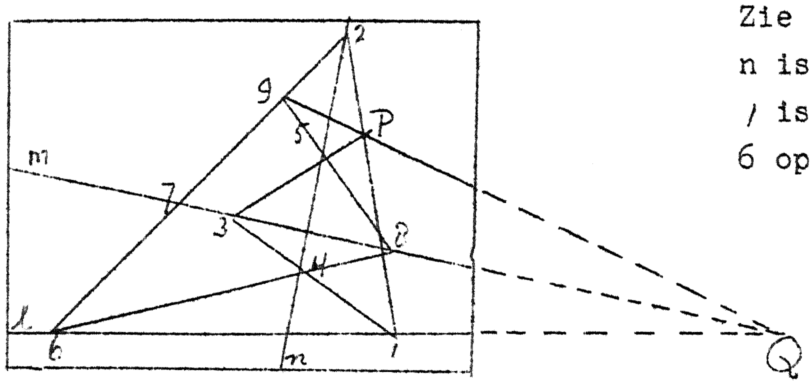
Constructie: zie de figuur; de cijfers geven de volgorde aan.

b) Gegeven A,B,D op l; P buiten l.
   Gevraagd m door P, die l snijdt in C, zodat (ABCD)= -1



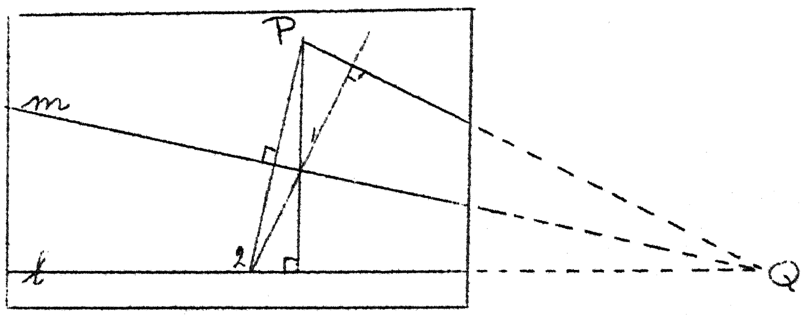
Constructie: zie de figuur.

c) Gegeven een punt P binnen π en een punt Q buiten π.
   Gevraagd de lijn PQ.
   le methode: conbineer a) en b).
   2e methode: met de stelling van Desargues.

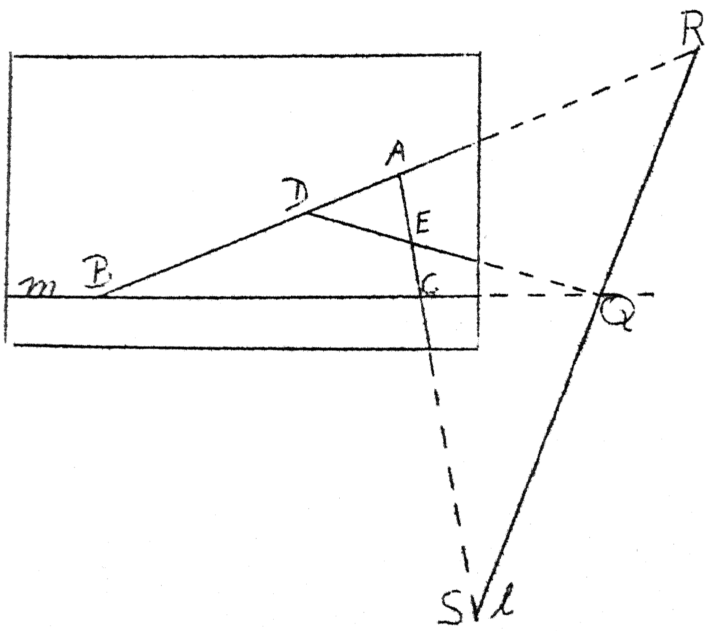


Zie de figuur.
n is willekeurig
1 is willekeurig op l, 3 op m,
6 op l.

3e methode (geen lineaalconstructie): met de hoogtelijnen van een driehoek.

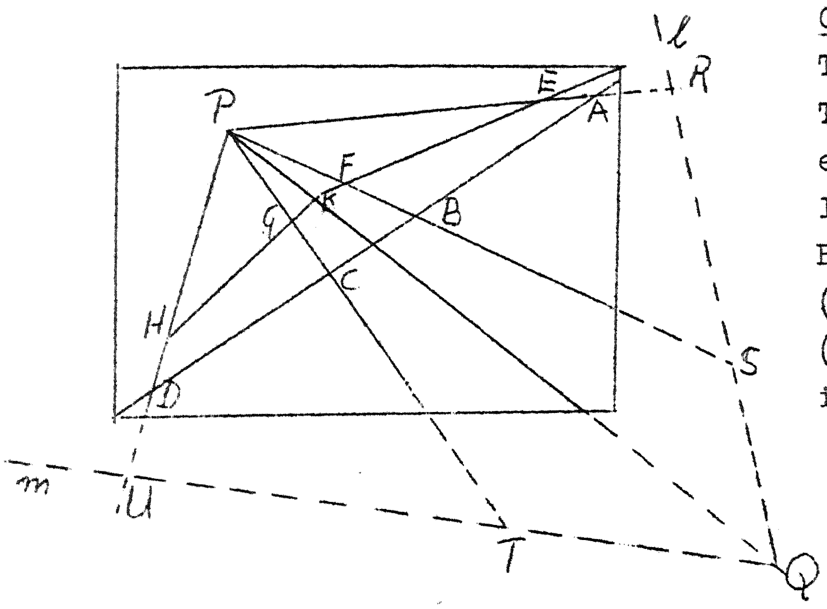


d) Gegeven een lijn l buiten π , een lijn m binnen π en een punt P. l is gegeven door de punten R en S.
Gevraagd P te verbinden met het snijpunt Q van l en m.



Constructie. Kies B op m; trek BR (geval c). Kies A op BR; trek AS (c). Bij geschikte keuze van A ligt het snijpunt C van AS met m binnen π .
Bepaal D en E, zodat (ABDR) = = (ACES) = -1 (geval a). DE gaat door Q. Nu is PQ te vinden volgens c).

e) Gegeven twee lijnen l en m buiten π ; l snijdt m in Q; P binnen π . Gevraagd de lijn PQ.



Constructie. R en S op l, T en U op m zijn gegeven. Trek PR, PS, PT, PU. Trek een lijn, die deze vier lijnen snijdt in A,B,C,D. Bepaal E,F,G,H zo, dat (PARE) = (PBSF) = (PCTG) = (PDUH) = -1 . EF snijdt GH in K. PK gaat door Q.

5. Affiene lineaalconstructies.

Constructiepostulaten als onder 1 , maar aan III wordt toegevoegd: als die lijnen niet evenwijdig zijn. De resultaten van § 4 zijn van toepassing, als men de oneigenlijke rechte beschouwt als buiten het tekenblad gelegen.

a) Als twee evenwijdige lijnen gegeven zijn, het midden van een op een van die lijnen gegeven lijnstuk te bepalen.
b) Als een lijnstuk AB met midden D gegeven is, door een punt P een lijn evenwijdig aan AB te trekken.
c) Als twee evenwijdige lijnen l en m gegeven zijn, door een punt P een lijn evenwijdig met l te trekken.
d) Als een parallelogram gegeven is, door een gegeven punt P een lijn evenwijdig met een gegeven lijn l te trekken.

Dikwijls is de methode uit § 4 niet de eenvoudigste. Uit c) en d) volgt, dat alle constructies, die met I, II en III mogelijk zijn, ook met I, II en III' uitgevoerd kunnen worden, mits een parallelogram gegeven is.

6. Metrisch-lineaire constructies.

Postulaten als in § 5.

Behalve een parallelogram zijn nog twee paar onderling loodrechte lijnen gegeven. De volgende opgaven zijn dan met de lineaal alleen oplosbaar.

a) Uit een gegeven punt de loodlijn op een gegeven lijn neer te laten.
b) Een gegeven hoek te verdubbelen.
   Is een vierkant gegeven, dan zijn de opgaven a) en b) met de lineaal uitvoerbaar, maar bovendien bijv.
c) een willekeurige rechte hoek middendoor te delen.

II. Kwadratische constructies.

7. Wij verstaan hieronder constructies, waarbij de coördinaten der

gevraagde punten uitde gegevens verkregen worden door een eindig aantal toepassingen van de bewerkingen 1)-4) (§ 3) en 5):
5) De vierkantswortel uit een positief getal te trekken.

Stelling. Is een kegelsnede γ gegeven, dan zijn alle projectief-kwadratische constructies met de lineaal alleen uitvoerbaar.
Bewijs. Kies het coördinatenstelsel zo, dat de vergelijking van de kegelsnede wordt $x_2^2 = x_0x_1$. Snijd deze met de lijn $x = ax_0$; voor de snijpunten geldt

$$\frac{x_2}{x_0} = \pm\sqrt{a}$$

Voorbeelden.

a) De raaklijn in een punt van γ te construeren. (Met de stelling van Pascal.)
b) Een kegelsnede δ is gegeven door 5 punten A,B,C,D,E. Construeer de snijpunten van δ met een lijn l.
Oplossing. Construeer eerst de raaklijnen AF en BF aan δ .
Kies A',B',C' op γ en construeer de raaklijnen A'F', B'F'.
Beschouw de projectieve betrekking, die A,B,C,F in A',B',C',F' overvoert en construeer de beeldlijn l' van l.

l' snijdt γ in P',Q', die de beeldpunten zijn van de gezochte punten P,Q.

8. Uit § 5 en § 7 volgt: In de affiene meetkunde kunnen alle kwadratische constructies uitgevoerd worden, als een kegelsnede en een parallelogram getekend zijn.

In plaats daarvan kan ook een kegelsnede met middelpunt gegeven zijn.

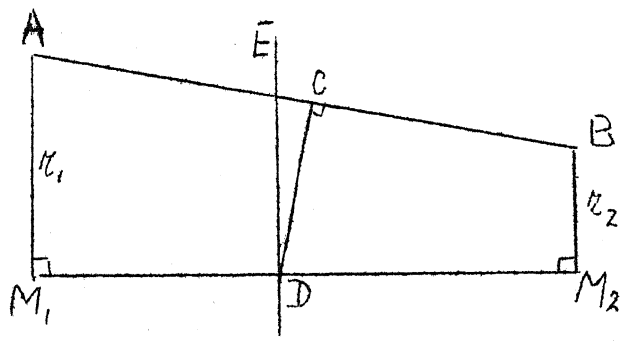
9. Uit § 6 en § 8 volgt: in de metrische meetkunde zijn alle kwadratische constructies uitvoerbaar, als een kegelsnede met middelpunt en twee rechte hoeken (niet met evenwijdige benen) gegeven zijn.
In plaats daarvan kan men ook een cirkel γ met middelpunt M geven. (Steiner.) Het trekken van evenwijdige lijnen kan dan volgens § 5b,d geschieden en het construeren van loodlijnen is zeer eenvoudig. De volgende constructies worden nu zeer eenvoudig door parallelverschuiving naar het middelpunt uitgevoerd.

a) Een gegeven hoek naar een gegeven been over te brengen.
b) Een gegeven hoek middendoor te delen.
c) Een gegeven hoek te verdubbelen.
d) Op een gegeven lijn van een gegeven punt uit een gegeven afstand af te zetten.
e) In een gegeven punt van γ de raaklijn aan γ te construeren.
f) Uit een gegeven punt P de raaklijnen aan γ te construeren.
Trek een lijn door P, die γ in A en B snijdt. De raaklijnen in A en B snijden elkaar in C. De loodlijn uit C op PM snijdt γ in de gezochte raakpunten.

g) Uit een gegeven punt de raaklijnen aan een cirkel δ te construeren (δ gegeven door het middelpunt O en een punt Q op de omtrek).
Verplaats de figuur parallel tot O in M gekomen is. Breng daarna door een vermenigvuldigingstransformatie de opgave terug tot f.

h) De gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels te construeren.
Construeer eerst de som en het verschil van de stralen.

i) De machtlijn van twee cirkels te construeren.
1e oplossing: de machtlijn deelt de gemeenschappelijke raaklijnen middendoor.
2e oplossing: zie de figuur. AC = BC. DE is de machtlijn.



Door constructie i wordt het bepalen der snijpunten van twee cirkels teruggebracht tot

j) De snijpunten van cirkel δ (O;Q) met de lijn l te bepalen.
Trek MR // OQ, zodat R op γ ligt. QR snijdt OM in G. Pas nu de gelijkvormigheidstransformatie met centrum G toe, die O in M overvoerd.

10. Is het middelpunt M van γ niet gegeven, dan zijn niet alle genoemde constructies mogelijk. Dit blijft zelfs waar, als twee elkaar niet snijdende cirkels, zonder hun middelpunten, gegeven zijn. Het is dan niet mogelijk, de middelpunten met de lineaal te construeren, dus ook niet, evenwijdige lijnen te trekken.

Bewijs. In de cirkelbundel, waartoe de cirkels γ en δ behoren, komen twee puntcirkels P en Q voor. De punten P en Q zijn poolverwant t.o.v. γ en t.o.v. δ; P heeft dus dezelfde poollijn p t.o.v. beide cirkels. De involutorische centrale collineatie met P als centrum en p als as laat γ en δ invariant. Een constructie van M zou dus overgaan in een dergelijke constructie, slechts uitgaande van andere willekeurig te kiezen punten, en zou dus weer M als resultaat moeten geven, wat niet kan, want M wordt door de collineatie verplaatst.

11. Zijn twee snijdende cirkels gegeven, dan kan men de middelpunten met de lineaal construeren. Stel, dat γ en δ elkaar in A en B snijden. Kies P en Q op γ; PA, QA, PB en QB snijden δ weer in de hoekpunten van een gelijkbenig trapezium. Hierdoor vinden wij een middellijn, en door herhaling een tweede middellijn.

Ook als drie willekeurige cirkels gegeven zijn, kan men de middelpunten met de lineaal construeren. De constructie is ingewikkeld. (Caner, Math. Annalen 74, blz. 462).

III. Constructies met de passer alleen.

12. De Romeinse cijfers verwijzen naar de constructies in S.C.van Veen, Passermeetkunde, Noorduyn, Gorinchem, 1951.

De volgende constructies zijn zeer eenvoudig met de passer alleen uit te voeren:

a) Het vierde hoekpunt te construeren van een parallelogram, waarvan drie hoekpunten gegeven zijn. (I)

b) Een gegeven lijnstuk met zichzelf te verlengen. (II)

Veel ingewikkelder is reeds:

c) Het midden van een gegeven cirkelboog te vinden. (V)

Met behulp van c) lost men op:

d) Een gegeven lijnstuk a met een ander gegeven lijnstuk b te verlengen. (VII)

Verrassend eenvoudig is:

e) De derde evenredige bij twee gegeven lijnstukken te construeren. (XLI)

Als bijzonder geval hiervan vindt men, door eerst na te construeren met b),

f) Een gegeven lijnstuk in n gelijke delen te verdelen.

Eenvoudige constructies bestaan ook voor:

g) De vierde evenredige bij drie gegeven lijnstukken te construeren (VI)

h) De middelevenredige bij twee gegeven lijnstukken te construeren.

i) Het voetpunt te bepalen van de loodlijn, uit een punt neergelaten op de verbindingslijn van twee andere punten. (XI)

13. Wij zijn nu in staat, de vijf hoofdbewerkingen uit § 7 met de coördinaten van gegeven punten uit te voeren. Het coördinatenstelsel is gegeven door O en een punt E op de X-as; wij nemen OE als lengte-eenheid. Is P gegeven, dan construeren wij de coördinaten met i) en a). Zijn de coördinaten gegeven, dan vinden wij de projectie P_1 van P op de X-as met d); vervolgens zoekt men een punt van de loodlijn, in P_1 op OE opgericht, en vindt P met d).
De optelling is mogelijk volgens d), het tegengestelde vinden wij met b). Vermenigvuldiging en deling gaan met g), worteltrekking met h).
Hiermee is bewezen, dat alle constructies, die met passer en lineaal mogelijk zijn, ook met de lineaal alleen uitgevoerd kunnen worden.

Enige mooie constructies:

j) De snijpunten van een rechte lijn en een cirkel te construeren (IX)

k) Een cirkel in 2,3,4,6,8,12 gelijke delen te verdelen. (XXXV, XXXVI)

l) Een cirkel in 5 en 10 gelijke delen te verdelen. (XXXIX)

14. Constructie van de regelmatige zeventienhoek. (LXXXV)
Neemt men in het complexe vlak de omgeschreven cirkel als $|z|=1$, dan zijn de hoekpunten de oplossingen van $z^{17}=1$, voor te stellen door $z_1, z_1^2, \ldots, z_1^{16}, z_1^{16}, z_1^{17}=1$.
Daar de som van alle wortels 0 is, is de som van de eerste 16 wortels -1.
Stel $z_1^3+z_1^{10}+z_1^5+z_1^{11}+z_1^{14}+z_1^7+z_1^{12}+z_1^6 = u_1$

$z_1^9+z_1^{13}+z_1^{15}+z_1^{16}+z_1^8+z_1^4+z_1^2+z_1 = u_2$

[de exponenten in u_1 zijn de oneven machten van 3,mod.17, die in u_2 de even machten van 3].

$u_1+u_2= -1$; $u_1u_2= -4$ (door uitwerken!), dus u_1 en u_2 zijn de wortels van

(1) $$x^2+x-4=0 \qquad u_2= -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Stel

$$z_1+z_1^4+z_1^{16}+z_1^{13}= t_1 ,$$
$$z_1^2+z_1^8+z_1^{15}+z_1^9= t_2.$$

$t_1+t_2= u_2$; $t_1t_2= -1$, dus t_1 en t_2 zijn de wortels van

(2) $$x^2-u_2x-1=0 \qquad t_1= \tfrac{1}{2}u_2+\tfrac{1}{2}\sqrt{u_2^2+4}.$$

Stel

$$z_1^3+z_1^5+z_1^{14}+z_1^{12}= t_3,$$
$$z_1^6+z_1^7+z_1^{11}+z_1^{10}= t_4,$$

dan is $t_3+t_4= u_1$; $t_3t_4= -1$,
dus t_3 en t_4 zijn de wortels van

(3) $$x^2-u_1x-1=0. \qquad t_3= \tfrac{1}{2}u_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{u_1^2+4}.$$

Stel $z_1+z_1^{16}=s_1$, $z_1^4+z_1^{13}=s_2$,

dan is $s_1+s_2=t_1$; $s_1s_2=t_3$,

dus s_1 en s_2 zijn de wortels van

(4) $$x^2-t_1x+t_3=0 \qquad s_1=\tfrac{1}{2}t_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{t_1^2-4t_3}^2.$$

z_1 voldoet nu aan:

(5) $$x^2-s_1x+1=0.$$

s_2 is de zijde van de regelmatige 34-hoek. Uit s_1 is de regelmatige 17-hoek gemakkelijk te construeren.

15. Inversie.

Bepaling. De punten P en P' liggen invers t.o.v. de cirkel C (middelpunt M, straal r), als P' op MP ligt en $PP'=r^2$.

Opmerkingen. In de theorie der inversie rekenen wij de rechte lijnen onder de cirkels, terwijl het oneindige als één punt geldt.

Stelling 1. P' is het snijpunt van alle cirkels door P, die C loodrecht snijden.

Stelling 2. Door inversie gaat een cirkel in een cirkel over.

Stelling 3. Een cirkel, die C loodrecht snijdt, is bij de inversie t.o.v. C invariant.

Stelling 4. De hoek tussen twee rechte lijnen is gelijk aan de hoek tussen de cirkels, waarin zij door inversie overgaan.

Stelling 5. Zij D een cirkel, die door inversie t.o.v. C overgaat in D'. Twee punten, die invers zijn t.o.v. D, gaan door inversie t.o.v. C over in twee punten, die invers zijn t.o.v. D!

Bewijs. Volgens st. 2 en 4 gaan loodrechte cirkels door inversie in loodrechte cirkels over. Pas nu st. 1 toe.

Stelling 6. Zij D een cirkel, die door inversie t.o.v. C overgaat in D', en M,P,P' de middelpunten van C, D,D'. laat M en Q invers zijn t.o.v. D, dan zijn Q en P' invers t.o.v. C.

Bewijs. Volgens st. 5 is het beeldpunt van Q invers met het oneigenlijke punt t.o.v. D'; het is dus P'.

16. Toepassing op de Mascheroni-constructies.

Een configuratie van rechte lijnen en cirkels kan door een inversie in een configuratie van cirkels alleen omgezet worden. Hierdoor gaat een constructie met passer en lineaal over in een constructie met de passer alleen. Aangetoond moet worden, dat het beeld van een punt, lijn of cirkel met de passer geconstrueerd kan worden.

Het beeld van een punt vindt men met de constructie van een derde evenredige (§ 12 e).

Het middelpunt van het beeld van een cirkel of rechte lijn vindt men met st. 6.

Op deze wijze kan men b.v. oplossen:

m) het snijpunt van twee rechte lijnen te bepalen. (Dit kost hier 16 cirkels;Mascheroni geeft een constructie met 13 cirkels).

n) Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van een driehoek te construeren.

IV. Kubische constructies.

7. Uit de algebra is bekend, dat de oplossing van iedere vergelijking van de derde graad terug te brengen is òf tot het trekken van de derdemachtswortel uit een reëel getal, òf tot het verdelen van een hoek in drie gelijke delen. Reeds in de oudheid is opgemerkt, dat de berekening van $\sqrt[3]{a}$ neerkomt op het vinden van getallen x en y, zodat $1 : x = x : y = y : a$.

8. De genoemde constructies zijn met passer en lineaal niet uitvoerbaar. Zij zijn reeds in de oudheid opgelost met behulp van inschuifconstructies, d.w.z. met behulp van de postulaten: I, II en III zie blz. 23.
V. Een lijn te construeren, die door een gegeven punt P gaat en waarvan door twee gegeven lijnen l en m een segment van gegeven lengte c wordt afgesneden.

Op primitieve wijze wordt V uitgevoerd met een lineaal, waarop door twee streepjes de lengte c is aangegeven. Een beter instrument is de conchoidepasser van Nicomedes. Een lineaal a is draaibaar om P; in a bevindt zich een sleuf, waardoor een pen Q kan bewegen, die eveneens door een sleuf in een tweede lineaal b steekt. Op de vaste afstand c van Q is aan a een potlood bevestigd. Legt men b vast en draait men a om P, dan beschrijft het potlood en conchoide van Nicomedes.

Ligt P op b, dan beschrijft het potlood een cirkel. Het gebruik van de passer is dus bij deze constructies overbodig.

9. Inschuifconstructie van Newton voor $\sqrt[3]{a}$.
Beschrijf een cirkel met middellijn CD = 1 en middelpunt A; verleng AC tot AB = 1. Bepaal E op de cirkel zodat CE = a. Trek een lijn door A, waarvan CE en BE een stuk $FG = \frac{1}{2}$ afsnijden. Dan is: $AB : EF = EF : AG = AG : CE$, dus $EF = \sqrt[3]{a}$.
Bewijs. Volgens Menelaos (blz. 12) is

$$\frac{AB}{CB}\cdot\frac{CE}{FE}\cdot\frac{FG}{AG} = 1,$$

dus, daar CB = FG,

(1) $\quad AB \times CE = FE \times AG.$

De macht van F t.o.v. de cirkel is

$$FE.FC = FA^2 - AC^2 = (AC+AG)^2 - AC^2 = AB.AG + AG^2.$$

$$FE(FE+EC) = AG(AB+AG)$$

$$FE^2(1+\frac{EC}{FE}) = AG.AB(1+\frac{AG}{AB}),$$

dus volgens (1): $FE^2 = AG.AB$.

$$AB : EF = EF : AG = AG : CE.$$

10. Inschuifconstructie van Newton voor $\frac{1}{3}\varphi$. Beschrijf een cirkel met M als middelpunt en middellijn AB; bepaal C op de cirkel zodat $\angle ABC = \varphi$. Trek een lijn door M, waarvan AC en BC een stuk DE = AB afsnijden. Deze lijn snijdt de cirkel in F. $\angle CBF = \frac{1}{3}\varphi$.
Bewijs. Zij G het midden van DE. EG = GD = GC = CM = MB, dus, als

$\angle$ CEM = α, dan is $\angle$ MCG = α, $\angle$ CGM = 2α, $\angle$ CME = 2α, $\angle$ BCM = 3α, $\angle$ CBM = 3α, dus $\alpha = \frac{1}{3}\varphi$, maar $\angle$ CBF = $\frac{1}{2}$ $\angle$ CMF = α.

11. Inschuifconstructie van Archimedes (?) voor $\frac{1}{3}\varphi$. Zij $\angle$BAC = φ. Trek door B een lijn l // AC en een lijn m $\perp$ AC. Trek een lijn door A, die l in F en m in E snijdt, zodat EF = 2AB. $\angle$ FAC = $\frac{1}{3}\varphi$.
Bewijs. Zij G het midden van EF. FG = EG = BG = BA. Stel $\angle$ CAF = α. $\angle$ BFE = α. $\angle$ FBG = α. $\angle$ BGA = 2α. $\angle$ BAF = 2α.

12. Constructie van de regelmatige zevenhoek.

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Stel $z + \frac{1}{z} = x$.

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Stel $x = y - \frac{1}{3}$.

$$y^3 - \frac{7}{3}y - \frac{7}{27} = 0.$$

Stel $y = r\cos\varphi$. $\cos^3\varphi = \frac{1}{4}\cos 3\varphi + \frac{3}{4}\cos\varphi$.
Men vindt: $r = \frac{2}{3}\sqrt{7}$; $\cos 3\varphi = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.
Teken een cirkel met straal 1 (middelpunt M; middellijn BG). Verdeel BG in 3 gelijke delen: BP = PO = OG. Beschrijf een cirkel om O, die door B gaat; middellijn BA. De cirkel om B met straal BG snijdt laatstgenoemde cirkel in C. AC = $\frac{2}{3}\sqrt{7}$.
Beschrijf een cirkel om A met straal AC; deze snijdt BA en zijn verlengde in F en D. De cirkel om D met straal $\frac{2}{3}$ snijdt laatstgenoemde cirkel in E. $\cos\angle$ EDA = $\frac{1}{2\sqrt{7}}$. Verdeel boog FE in drie gelijke delen door de punten H en K.
Trek AE' $\perp$ DH. DE' = y.
Pas PQ = y af op PA.
Cirkel uit Q met straal 1 om op de eerste cirkel; dan vindt men 2 hoekpunten van de zevenhoek.

Het punt (x,y), waarvoor a : x = x : y = y : b ligt op de krommen:

(1) $x^2 = ay$.
(2) $y^2 = bx$.
(3) $xy = ab$.
(4) $x^2 + y^2 = bx + ay$.

Menaichmos (-300) gebruikte (1), (2) en (3); Descartes (1) en (4). Neemt men a = 1, dan blijkt, dat $\sqrt[3]{b}$ met passer en lineaal te construeren is, als de vaste kegelsnede $x^2 = y$ getekend is.

Uit de algebra is bekend, dat de oplossing van een vergelijking van de vierde graad teruggebracht kan worden tot die van een vergelijking van de derde graad, de kubische resolvente. Meetkundig kan men dit als volgt inzien. De vergelijking $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ wordt opgelost, door de snijpunten te zoeken van de kegelsneden

$$x^2 = y,\quad y^2 + axy + cx + by + d = 0.$$

In de bundel, bepaald door deze kegelsneden, komen 3 ontaardingen voor, die bepaald worden met een vergelijking van de derde graad. De rechte lijnen, waaruit een ontaarde kegelsnede bestaat, kunnen met vierkantswortels bepaald worden. Dan zijn ook de snijpunten bekend.