

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZC 28f

Avondcursus wiskunde 1954-1956;

Gewone differentiaalvergelijkingen.

J. Popken.



1956

*Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.*

*The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.*

Gewone differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

I

- Literatuur: E.L. Ince, Integration of ordinary differential equations (alleen elementaire methoden).  
 E.L. Ince, Ordinary differential equations (handboek).  
 L.R. Ford, Differential equations (uitstekend leerboek).  
 R.E. Langer, A first course in ordinary differential equations.  
 E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (mathematisch gericht leerboek).  
 W. Hort, A. Thoma, Die Differentialgleichungen der Technik und Physik.

Hoofdstuk I

Inleiding

§1. Laat  $f(x, y, y_1, \dots, y_n)$  een functie in de veranderlijken  $x, y, y_1, \dots, y_n$  zijn. De vergelijking

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

die een verband aangeeft tussen  $x$ , de onbekende functie  $y = y(x)$  en een aantal van zijn afgeleiden, heet een gewone differentiaalvergelijking. Onder een integraal van deze vergelijking verstaan wij elke functie  $y(x)$ , zodat in zeker interval  $a < x < b$

$$f\left\{x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right\} \equiv 0.$$

Onder de orde van een vergelijking verstaan wij de orde van de hoogste afgeleide, die voorkomt; in ons geval  $n$ .

Voorbeelden:  $y = \int f(x) dx$  is een integraal van de vergelijking van de eerste orde  $y' = f(x)$ ;  $y = \sin x$  en  $y = \cos x$  zijn integralen van de vergelijking van de tweede orde  $y'' + y = 0$ .

Een differentiaalvergelijking heeft in het algemeen  $\infty$  veel integralen. Zo heeft  $y'' + y = 0$  als integraal elke functie

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

waar  $C_1$  en  $C_2$  constanten zijn.

§ 2. Differentiaalvergelijkingen treden zeer veelvuldig in de toepassingen van de wiskunde op. Wij geven twee voorbeelden:

a) Voor de "vrije val" van een materieel punt hebben wij

$$\dot{s} = g, v = \dot{s} = v_0 + gt, s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

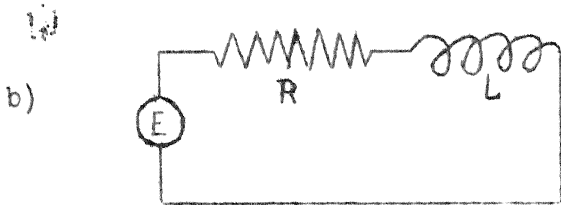
Voor de val in een medium hebben wij tevens rekening te houden met een weerstand  $W$ , welke voor kleine snelheden evenredig is met de snelheid:

$$W = kv.$$

Stellen wij de massa gelijk aan  $m$ , dan is dus de naar beneden gerichte kracht in dit geval

$$mg - kv = m\dot{v}.$$

Wij hebben dus  $v = v(t)$  op te lossen uit de differentiaalvergelijking van de eerste orde: (1)  $\dot{v} + av = g$  ( $a = \frac{k}{m}$ ),



Wij beschouwen de elektrische stroom in een gesloten kets met een stroombron met E.M.K. gelijk aan  $E(t)$ , een weerstand

$R$  en een zelfinductie  $L$ . Wij wensen b.v. de stroomsterkte  $I(t)$  te kennen als functie van de tijd  $t$ .

De E.M.K. van zelfinductie is  $-L\dot{I}$ ; de totale E.M.K. is dus

$$E(t) - L\dot{I} = RI$$

of

$$(2) \quad L\dot{I} + RI = E(t);$$

weer een differentiaalvergelijking van de eerste orde.

In het volgende hoofdstuk zullen wij de vergelijkingen (1) en (2) "integreren".

3. In het voorgaande bespraken wij functies  $y(x)$  met hun afgeleiden, van één veranderlijke. Bij de toepassingen komt het vaak voor, dat de beschouwde functie van méér variabelen afhangen en dat men dan tot een vergelijking gevoerd wordt waarin ook de partiële afgeleiden een rol spelen. Men zoekt dan b.v. een functie  $z = z(x, y)$  van twee veranderlijken  $x$  en  $y$ , welke voldoet aan een betrekking

$$f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots) = 0;$$

b.v.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Wij spreken dan van een partiële differentiaalvergelijking. Zulke vergelijkingen zullen wij hier echter niet behandelen.

## Hoofdstuk II

### Elementaire oplossingsmethoden.

§1. De lineaire vergelijking van de eerste orde:

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0.$$

Deze kunnen wij meestal op de vorm

$$(1) \quad y' + \alpha(x)y = \beta(x)$$

brengen. In het volgende nemen wij aan, dat  $\alpha(x)$  en  $\beta(x)$  continu in  $x_0 \leq x \leq x_1$  zijn.

In plaats van (1) beschouwen wij de vergelijking

$$(1a) \quad my' + \alpha my = \beta m,$$

waar  $m = m(x)$  een nog nader te bepalen functie is, die in  $[x_0, x_1]$  niet nul wordt. Kiezen wij  $m$  zó, dat

$$(1b) \quad m' = \alpha m$$

is, dan staat links in (1a) de afgeleide van  $my$ , dus  $(my)' = \beta m$ , of

$$y(x) = (m(x))^{-1} \int \beta(x)m(x)dx,$$

waarmee dan de vergelijking (1) geïntegreerd is.

Het is dus voldoende één oplossing van (1b) te zoeken; nu is  $m'(x)/m(x) = \alpha(x)$ ; dus voldoet

$$(1c) \quad m(x) = e^{\int_{x_0}^x \alpha(t)dt}$$

Wij pasten hierboven een algemene methode toe, nl. die van de "integrerende factor". De functie  $m(x)$ , in (1c) heet een multiplicator of integrerende factor van de vergelijking (1) omdat het linkerlid van (1) na vermenigvuldiging met  $m$  overgaat in een afgeleide, waardoor het probleem teruggebracht is tot een eenvoudige integratie.

Bijzonder geval:  $\alpha(x) = a = \text{constante}$ :

$$y' + ay = \beta(x).$$

Een integrerende factor is nu  $m = e^{ax}$ ; dus

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = \beta(x)e^{ax}$$

$$y = e^{-ax} \int \beta(x)e^{ax}dx.$$

Is ook nog  $\beta(x) \equiv 0$ , dan vinden wij zo  $y = Ce^{-ax}$  (C constante).

### § 2. Toepassingen.

a) Op het probleem van het vallend lichaam met differentiaalvergelijking

$$(I,1) \quad \dot{v} + av = g \quad (a = \frac{k}{m}).$$

De voorgaande methode geeft

$$v = \frac{g}{a} + Ce^{-at}.$$

De constante C kunnen wij bepalen uit een verder gegeven, b.v. uit de snelheid  $v_0$  op de tijd  $t = 0$ . In dit laatste geval komt er

$$v = \frac{g}{a} + (v_0 - \frac{g}{a})e^{-at}.$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  nadert v dus tot de "stationaire" waarde  $\frac{g}{a} = \frac{gk}{m}$  (ook te voorspellen uit (I,1)). Toepassing op bezinkingsnelheid van deeltjes.

b) Op probleem b) uit I.

$$(I,2) \quad L\dot{I} + RI = E(t)$$

De integrerende factor is nu  $L^{-1}e^{\frac{R}{L}t}$ . Wij krijgen

$$I = L^{-1}e^{-\frac{R}{L}t} \int E(t)e^{\frac{R}{L}t} dt.$$

Als wij  $I = I_0$  nemen op de tijd  $t = t_0$ , dan vinden wij tenslotte

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} + L^{-1}e^{-\frac{R}{L}t} \int_{t_0}^t E(\tau)e^{\frac{R}{L}\tau} d\tau$$

Het bijzondere geval  $E(t) = E_0 = \text{constant}$  levert

$$I = \frac{E_0}{R} + (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}.$$

De eerste term rechts geeft de "stationaire" waarde  $\frac{E_0}{R}$  voor I, de tweede term heet "inschakelterm".

Opgave: Behandel het geval  $E(t) = E_0 \sin \omega t$ ,  $I(0) = 0$ .

Antwoord: Stelt men  $\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$ , dan is

$$I = \frac{E_0 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi);$$

$\varphi$  = "phasevertraging" (zie Hort-Thoma § 75)

§ 3. De z.g. methode van "variatie van constante" toegepast op (1).

Men zoekt eerst de integralen van de bijbehorende "homogene" vergelijking

$$(2) \quad y' + \alpha(x)y = 0$$

Men vindt

$$y = ce^{-\int_{x_0}^x \alpha(t) dt},$$

waar  $c$  een willekeurige constante is. Stel ter afkorting

$$u(x) = e^{-\int_{x_0}^x \alpha(t) dt}$$

dan zijn dus de integralen van (2) te schrijven als  $y = cu$ . Nu vervangt men de constante  $c$  door een functie  $v(x)$  en men probeert deze functie zó te bepalen, dat  $y = v(x)u(x)$  aan (1) voldoet. Na substitutie van  $y = vu$  in (1) vindt men

$$\begin{aligned} uv' + (u' + \alpha u)v &= \beta \\ v' &= \beta u^{-1} = \beta(x) e^{\int_{x_0}^x \alpha(t) dt}, \end{aligned}$$

zodat een nieuwe integratie  $v(x)$  levert en dus ook  $y(x)$ . Controleer het resultaat met dat van § 1.

Zijn  $y_1(x), y_2(x)$  en  $y_3(x)$  drie integralen van (1), dan voldoet zowel  $y_1 - y_2$  als  $y_1 - y_3$  aan de homogene vergelijking

$$\begin{aligned} y' + \alpha y &= 0, \\ \text{zodat} \quad y_1 - y_2 &= C_1 e^{-\int_{x_0}^x \alpha(t) dt} \\ y_1 - y_3 &= C_2 e^{-\int_{x_0}^x \alpha(t) dt} \end{aligned}$$

Men vindt zo, dat de verhouding  $\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_3(x)}$  constant is.

§ 4. Opgaven. Integreer de volgende differentiaalvergelijkingen:

1.  $y' - ay = e^{\lambda x}$  ( $a$  en  $\lambda$  constant).

Antwoord:  $y = \frac{1}{\lambda - a} e^{\lambda x} + C e^{ax}$ .

2.  $y' \cos x + y \sin x = 1$ .

Antwoord:  $y = \sin x + C \cos x$ .

3.  $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2 + 1$ .

Antwoord:  $y = (x^2 + 1)(\arctg x + C)$ .

4.  $x + y + y' = 0$ .

Antwoord:  $y = -x + 1 + C e^{-x}$ .

$$5. xy' - y = x^3 + 1.$$

$$\text{Antwoord: } y = \frac{1}{2}x^3 - 1 + Cx.$$

$$6. \sqrt{1-x^2} y' + y + \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

$$\text{Antwoord: } y = \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \right\} e^{\arcsin x}.$$

7. Los de vorige vraagstukken ook op met "variatie van constanten".

### § 5. De vergelijking van Riccati

Passen wij op een lineaire vergelijking

$$y' = a(x) + b(x)y$$

de substituties

$$(3a) \quad z = y + p(x)$$

$$(3b) \quad z = q(x)y$$

}  $p(x)$  en  $q(x)$  differentieerbaar

toe, dan gaat deze telkens in een nieuwe lineaire vergelijking over. Dit is in het algemeen niet meer het geval voor de substitutie

$$(3c) \quad z = \frac{1}{y}.$$

De vergelijking van Riccati, gedefinieerd door

$$(4) \quad y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

gaat daarentegen door elk van de substituties (3) in een nieuwe vergelijking van Riccati over. Speciaal levert de laatste (3c)

$$(5) \quad z' = -c(x) - b(x)z - a(x)z^2.$$

Deze beschouwing geeft al direct een oplossingsmethode voor de speciale vergelijking van Riccati

$$(6) \quad y' = b(x)y + c(x)y^2.$$

Door de substitutie  $z = \frac{1}{y}$  gaat deze nl. over in de lineaire vergelijking

$$z' = -c(x) - b(x)z.$$

Opmerking: (6) is ook een bijzonder geval van de z.g. vergelijking van Bernoulli

$$y' = b(x)y + c(x)y^n \quad (n \text{ constant}).$$

Deze wordt tot de lineaire teruggebracht door eerst links en rechts door  $y^n$  te delen en dan  $z = y^{1-n}$  te stellen.



Liouville heeft bewezen, dat de vergelijking van Riccati slechts in zeer bijzondere gevallen "elementair geïntegreerd" kan worden (zie J.F. Ritt, Integration in finite terms, p. 70). Wel is dit laatste het geval als men reeds een particuliere integraal van (4) kent. Is deze  $y_1(x)$ , dan stelt men nl.

$$z = y - y_1.$$

Dan gaat (4) over in een nieuwe vergelijking van Riccati

$$z' = a_1(x) + b_1(x)z + c_1(x)z^2.$$

Aan deze vergelijking voldoet echter  $z \equiv 0$ , dus  $a_1(x) \equiv 0$ , zodat deze de vorm (6) heeft, welke door een nieuwe substitutie

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$$

overgaat in een lineaire vergelijking in  $w$ .

Kent men twee verschillende particuliere integralen  $y_1$  en  $y_2$  van (4), dan stelt men

$$z = \frac{y - y_2}{y - y_1} = 1 + \frac{y_1 - y_2}{y - y_1},$$

welke blijkbaar aan een lineaire vergelijking

$$z' = A(x) + B(x)z$$

voldoet. Nu is bovendien  $A(x) \equiv 0$ , dus

$$(7) \quad z' = B(x)z.$$

Eén integratie is nu voldoende voor de oplossing.

Stel, dat  $y_1, y_2, y_3$  en  $y_4$  vier integralen van (4) zijn, dan voldoet zowel

$$z_1 = \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} \quad \text{als} \quad z_2 = \frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1}$$

aan (7), zodat  $z_2 : z_1$  constant is. M.a.w. Zijn  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  en  $y_4(x)$  vier integralen van dezelfde differentiaalvergelijking van Riccati, dan is de dubbelverhouding

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$$

voor elke  $x$  dezelfde.

Aanvullingen: Men bewijst gemakkelijk, dat alle lineaire substituties

$$z = \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)} \quad \text{met } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

een groep vormen. Elke dergelijke substitutie is op te bouwen uit de elementaire substituties (3); immers

$$\frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\Delta}{\gamma^2} \frac{1}{y + \gamma^{-1}\delta}.$$

Een vergelijking van Riccati gaat dus door een niet singuliere lineaire substitutie over in een nieuwe vergelijking van Riccati.

### 6. Opgaven

1. Integreer:  $y' = -y + (x-1)y^2$ .

Antwoord:  $y = \frac{1}{x + Ce^x}$ ,  $y \equiv 0$ .

2. Integreer:  $y' - 4xy = 2\sqrt{y}$  met bijvoorwaarde  $y(0) = 0$ .

Antwoord:  $y = e^{2x^2} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ ,  $y \equiv 0$ .

3. Integreer:  $y' = (y-1)(xy - y - x)$ .

Antwoord:  $y = 1 + \frac{1}{x + Ce^x}$ ,  $y \equiv 1$ .

4. Integreer:  $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$ .

Antwoord:  $y = x + \frac{1}{x-1 + Ce^{-x}}$ ,  $y = x$ .

5. Integreer:  $xy' + y = xy^3$ .

Antwoord:  $y = \frac{1}{\sqrt{2x + Cx^2}}$ .

6. Integreer:  $y \sin x + y' \cos x = y^2$ .

Antwoord:  $y = \frac{\cos x}{-\sin x + C}$ .

## Gewone differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

### II

§7. Scheiding van variabelen. We zeggen, dat van een differentiaalvergelijking de variabelen gescheiden zijn als deze de vorm

$$(8) \quad f(x) dx + g(y) dy = 0$$

heeft, waarbij we veronderstellen, dat  $f(x)$  en  $g(x)$  continu zijn in zeker interval. Men bewijst gemakkelijk, dat (8) equivalent is met

$$(9) \quad \int f(x) dx + \int g(y) dy = C.$$

Blijkbaar zijn in een vergelijking van het type

$$A(x) B(y) dx + C(x) D(y) dy = 0$$

de variabelen steeds te scheiden.

Voorbeeld:

$$x(1+y^2) dx + y(1+x^2) dy = 0$$

$$\frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{2y}{1+y^2} dy = 0$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{2y}{1+y^2} dy = C$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1$$

Een voorbeeld uit de praktijk is de vergelijking die de stand van het grondwater beheerst in de omgeving van een cilindrische put:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi kxy},$$

waar  $k$  en  $Q$  constanten zijn (zie Hort-Thoma p.122).

### §8. Invoering van een nieuwe veranderlijke.

Deze methode is ook al toegepast bij de vergelijkingen van Riccati en Bernoulli.

Voorbeeld 1.  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$ , waar  $f(t)$  een in een interval continue functie betekent en waar  $a$  en  $b$  constanten zijn. In dit geval stellen we  $ax+by=z$ . Dit geeft

$$dz = a dx + b dy = (a + b f(z)) dx,$$

zodat de variabelen  $z$  en  $x$  te scheiden zijn.

Voorbeeld 2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x f(y) + g(y)}$ .

Vat omgekeerd  $x$  als functie van  $y$  op en men krijgt een lineaire vergelijking

$$\frac{dx}{dy} = f(y)x + g(y).$$

Voorbeeld 3.  $4xy'' + (4+x)y' = 0$ .

Stel  $y'=z$ , dus  $4xz' + (4+x)z=0$ ; integratie geeft

$$\begin{aligned} z &= C x^{-1} e^{-\frac{x}{4}} \\ y &= -C \int_x^\infty v^{-1} e^{-\frac{v}{4}} dv + C_1 \\ &= C_2 \int_{\frac{x}{4}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt + C_1. \end{aligned}$$

Hierin is  $\int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt = \text{Ei}(x)$  een getabelleerde functie, welke o.a. nauw samenhangt met  $\text{li } x = \int_2^x \frac{\log t}{t} dt$  uit de theorie der priemgetallen.

Voorbeeld 4. De partiële differentiaalvergelijking van een verhitte draad luidt

$$(P) \quad \theta_t = a(\theta_{rr} + r^{-1}\theta_r)$$

( $\theta$  = temperatuur,  $t$ =tijd,  $r$ =afstand tot de draad).

De dimensie van  $a$  is blijkbaar gelijk aan die van  $\frac{r^2}{t}$ , zodat  $x=r^2/at$  dimensieloos is. We zoeken nu een oplossing van (P) van de vorm  $\theta(x)$ .

$$\theta_t = -\frac{r^2}{a t^2} \frac{d\theta}{dx}, \quad \theta_r = \frac{2r}{at} \frac{d\theta}{dx}, \quad \theta_{rr} = \left(\frac{2r}{at}\right)^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{at} \frac{d\theta}{dx}$$

Substitutie in (P) geeft

$$4x \frac{d^2\theta}{dx^2} + (4+x) \frac{d\theta}{dx} = 0.$$

Integratie volgens voorbeeld 3 geeft

$$\begin{aligned} \theta(r,t) &= C_2 \int_{\frac{r^2}{4at}}^\infty t^{-1} e^{-t} dt + C_1 \\ &= C_2 \text{Ei} \left( \frac{r^2}{4at} \right) + C_1. \end{aligned}$$

### § 9. Homogene vergelijkingen.

$$(10) \quad A(x,y) dx + B(x,y) dy = 0,$$

waar  $A(x,y)$  en  $B(x,y)$  continu zijn en bovendien homogeen in  $x$  en  $y$  van dezelfde graad  $n$ ; d.w.z.  $A(tx, ty) = t^n A(x,y)$ ,  $B(tx, ty) = t^n B(x,y)$ . Door  $t = x^{-1}$  te nemen gaat (10) over in

$$A\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + B\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Stel nu  $\frac{y}{x} = v$ , dan komt er

$$\left\{ A(1,v) + v B(1,v) \right\} dx + x B(1,v) dv = 0,$$

zodat de variabelen te scheiden zijn.

Een vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$$

wordt overgevoerd in een homogene door de substitutie

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y,$$

waar  $(x_0, y_0)$  het snijpunt is van de beide rechten

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Dit gaat als  $D = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$  en dan is  $\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}$ .

Is  $D = 0$ ,  $b_1 \neq 0$ , dan stelt men  $y + a_1 b_1^{-1} x = z$  en men vindt een vergelijking, waarin de variabelen te scheiden zijn:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b_1 z + c_1}{b_2 z + c_2} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Behandel zelf:  $D = 0$ ,  $b_1 = 0$ .

Geheel analoog behandelt men de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right).$$

### § 10. Opgaven.

1. Integreer  $(x^2+1)(y^2-1) + xy y' = 0$   
 Antwoord:  $y^2 = 1 + Cx^{-2} e^{-x^2}$ .

$$2. \text{ Integreer } (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = k^2$$

$$\text{Antwoord: } y = C + k \text{ arc tg } \frac{x+y}{k} .$$

$$3. (x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$\text{Antwoord: } x^2 + y^2 = Cx.$$

$$4. y^4 - 2x^3y + (x^4 - 2xy^3) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{Antwoord: } x^3 + y^3 = Cxy.$$

$$5. x(x^2 + 3y^2) + y(y^2 + 3x^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{Antwoord: } x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C.$$

$$6. (3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$$

$$\text{Antwoord: } (y-x+1)^2 (y+x-1)^5 = C.$$

#### §11. Exacte vergelijkingen.

In het volgende zij  $G$  telkens een enkelvoudig samenhangend gebied van het  $x$ - $y$ -vlak. Stel  $U(x,y)$  bezit in  $G$  continue afgeleiden  $U_x$  en  $U_y$ . Laat verder de in het interval  $(x_0, x_1)$  differentieerbare functie  $y=y(x)$  de eigenschap hebben, dat voor elke  $x$  uit  $(x_0, x_1)$  het punt  $(x,y)$  steeds in  $G$  ligt, terwijl

$$(11) \quad U(x,y) \equiv C$$

is. Door differentiatie van (11) naar  $x$  volgt, dat  $y$  dan voldoet aan de vergelijking

$$(12) \quad U_x dx + U_y dy = 0.$$

Omgekeerd voldoet dan elke integraal van (12) bij geschikte keuze van  $C$  aan (11).

We beschouwen nu een differentiaalvergelijking

$$(13) \quad A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0,$$

waar  $A$  en  $B$  in  $G$  continue eerste afgeleiden naar  $x$  en  $y$  hebben.

Definitie: De vergelijking (13) wordt exact genoemd als het linkerlid bovendien een totale differentiaal is, m.a.w. als er een functie  $U(x,y)$  bestaat, zodat

$$(14) \quad U_x = A, \quad U_y = B.$$

Nog anders: als vector  $(A,B) = \text{grad } U$ .

Voorbeeld:  $(x^3+y)dx + (x+y^3)dy = 0$  is exact; men kiese  
 $U = \frac{x^4}{4} + xy + \frac{y^4}{4}$ .

Een exacte vergelijking wordt geïntegreerd door (11).

De vergelijking (13) is dan en alleen dan exact als de z.g. integrabiliteitsvoorwaarde is vervuld:

$$A_y = B_x$$

Bewijs: 1) Stel (13) is exact, zodat (14) geldt; bijgevolg geldt de integrabiliteitsvoorwaarde.

2) Het omgekeerde bewijzen we hier alleen voor het geval, dat G een gerichte rechthoek is. Kies in G een vast punt  $(x_0, y_0)$  en beschouw

$$(15) \quad U(X, Y) = \int_{x_0}^X A(x, y_0) dx + \int_{y_0}^Y B(X, y) dy.$$

Dan is

$$\begin{aligned} U_x(X, Y) &= A(X, y_0) + \int_{y_0}^Y B_x(X, y) dy \\ &= A(X, y_0) + \int_{y_0}^Y A_y(X, y) dy = A(X, Y), \end{aligned}$$

$$U_y(X, Y) = B(X, Y).$$

Q.E.D.

Voor het bewijs in het algemene geval kiese men in G een vast punt  $(x_0, y_0)$  en een veranderlijk punt  $(X, Y)$  en verbind de deze door een in G verlopende weg C. Onder de integrabiliteitsvoorwaarde  $A_y = B_x$  blijkt de wegintegraal

$$(16) \quad U(X, Y) = \int_C (A dx + B dy)$$

onafhankelijk te zijn van de keuze van de weg: U stelt dan de "potentiaal" van het vectorveld  $(A, B)$  voor. Zie b.v. R. Courant, Differential and Integral Calculus, Volume II, Chapter V, § 4 and § 5.

Kiest men de weg zo, dat op het laatste stuk  $y=Y$  constant blijft, dan volgt  $U_x(X, Y) = A(X, Y)$ . Analoog door  $x=X$  constant te houden  $U_y(X, Y) = B(X, Y)$ .

Merk op, dat (15) een bijzonder geval van (16) is.

De formules (15) of (16) geven tevens een berekeningsmethode voor de functie  $U(x, y)$ , zodat een exacte differentiaalvergelijking langs deze weg vaak geïntegreerd kan worden. Voor de praktijk is de volgende modificatie iets eenvoudiger:

Voorbeeld: Integreer de exacte vergelijking

$$(17) \quad e^x(y+xy+\sin y)dx + e^x(x+\cos y)dy = 0$$

Oplossing:  $U(x,y)$  is te bepalen uit

$$U_x = e^x (y + xy + \sin y)$$

$$U_y = e^x (x + \cos y)$$

Uit de laatste volgt door integratie naar  $y$

$$U = x y e^x + e^x \sin y + f(x),$$

dus

$$U_x = y e^x + x y e^x + e^x \sin y + f'(x),$$

zodat  $f'(x) \equiv 0$  moet zijn. We vinden

$$(18) \quad U = e^x (xy + \sin y).$$

§12. Integrerende factoren.  $G$  en de vergelijking  $A dx + B dy = 0$  worden als in §11 gekozen.

Definitie. Is  $m=m(x,y) \neq 0$  een functie met continue eerste afgeleiden in  $G$ , zó dat

$$m A dx + m B dy = 0$$

exact is, dan heet  $m$  een integrerende factor (multiplicator) van

$$A dx + B dy = 0.$$

Voorbeeld:  $m=e^{\int \alpha(x) dx}$

is een integrerende factor van de lineaire vergelijking  $\{\alpha(x)y - \beta(x)\} dx + dy = 0$  (zie ook §1).

Noodzakelijk en voldoende opdat  $m$  een integrerende factor is, is

$$(mA)_y = (mB)_x$$

of uitgewerkt

$$(19) \quad m(A_y - B_x) + A m_y - B m_x = 0,$$

een partiële differentiaalvergelijking voor  $m$ .

Stelling. Laat  $m$  een integrerende factor zijn van  $A dx + B dy = 0$ , zodat er een functie  $U(x,y)$  bestaat met

$$U_x = m A, \quad U_y = m B.$$

Tenslotte zij  $f(t)$  een willekeurige functie van één variabele  $t$  met continue afgeleide.

Dan is  $M=m f(U)$  weer een integrerende factor van  $A dx + B dy = 0$ .



Bewijs. We hebben  $M=m f(U)$ , dus

$$M_x = m_x f(U) + m f'(U) U_x = m_x f(U) + m^2 A f'(U)$$

$$M_y = m_y f(U) + m f'(U) U_y = m_y f(U) + m^2 B f'(U).$$

Hieruit volgt

$$M(A_y - B_x) + A M_y - B M_x = \{m(A_y - B_x) + A m_y - B m_x\} f(U),$$

zodat, daar  $m$  aan (19) voldoet, dit tevens het geval is met  $M$  in plaats van  $m$ . Q.E.D.

### §13. Het zoeken van een integrerende factor.

Methode A: We zoeken een particuliere integraal van de partiële differentiaalvergelijking (19). Bijvoorbeeld we proberen een functie  $m=m(x)$  die van  $x$  alleen afhangt. Dan krijgt men

$$(20) \quad m^{-1} \frac{dm}{dx} = B^{-1} (A_y - B_x) .$$

Deze methode gelukt als het rechterlid onafhankelijk van  $y$  is.

Voorbeeld: Integreer  $(y+xy+\sin y) dx + (x + \cos y) dy=0$ .

Oplossing:  $B = x + \cos y$ ,  $B_x=1$ ,  $A_y=1+x+\cos y$ , zodat (20) wordt

$$m^{-1} \frac{dm}{dx} = 1 \quad (\text{onafhankelijk van } y)$$

We vinden de integrerende factor  $m=e^x$ ; m.a.w.

$$(17) \quad e^x (y + xy + \sin y) dx + e^x (x + \cos y) dy = 0$$

is exact.

Voor verdere uitwerking zie voorbeeld §11.

Gelukt de voorgaande methode niet, dan kunnen we geheel analoog trachten een integrerende factor te bepalen, die alléén van  $y$  afhangt, alléén van  $x+y$ ,  $x-y$ ,  $xy$  of alléén van  $y/x$  (vgl. § 14, opgave 6).

Methode B. Wanneer twee vergelijkingen

$$(21) \quad A_1 dx + B_1 dy = 0 \quad (i = 1, 2)$$

een gemeenschappelijke integrerende factor  $m$  hebben, dan is  $m$  ook een multiplicator van de vergelijking

$$(A_1 + A_2) dx + (B_1 + B_2) dy = 0.$$

We behandelen nu een methode om zo'n gemeenschappelijke factor te vinden. Laten de vergelijkingen (21) resp. de multiplicatoren  $m_1$  hebben. We integreren deze in de vorm

$$U_1(x, y) = C_1 .$$

Volgens de stelling uit de vorige paragraaf zijn dan voor willekeurige differentieerbare functies  $f_1(t)$  ook  $m_1 f_1(U_1)$  en  $m_2 f_2(U_2)$  integrerende factoren. Er is een gemeenschappelijke multiplicator als

$$m_1 f_1(U_1) \equiv m_2 f_2(U_2) \text{ in } x \text{ en } y.$$

Voorbeeld. Zoek een integrerende factor voor

$$(y^3+x) dx + (x^3+y)dy = 0.$$

We splitsen deze in

$$\begin{array}{l|l} y^3 dx + x^3 dy = 0 & x dx + y dy = 0 \text{ exact} \\ \frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} = 0 \text{ exact} & \\ m_1 = x^{-3} y^{-3} & m_2 = 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{-2} + y^{-2}) = C_1 & \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C_2 \end{array}$$

We trachten nu  $f_1(t)$  en  $f_2(t)$  zó te vinden dat

$$x^{-3} y^{-3} f_1(x^{-2} + y^{-2}) = f_2(x^2 + y^2)$$

Men vindt zo de gemeenschappelijke multiplicator

$$m = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(Neem n.l.  $f_1(t) = f_2(t) = t^{-3/2}$ ).

#### § 14. Opgaven.

1. Is de integrabiliteitsvoorwaarde  $A_y = B_x$  vervuld, dan is

$$\int_{x_0}^x A(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y B(x, y) dy = \int_{y_0}^y B(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x A(x, y) dx .$$

2. Toon aan, dat de volgende vergelijking exact is en integreer daarna:

$$\frac{2x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2} dy = 0$$

Antwoord:  $\log(x^2+y^2) - \text{arc tg } \frac{x}{y} = C.$

3. Integreer:  $(y^2 e^x + e^{-y}) dx + (2ye^x - xe^{-y} + 1) dy = 0$

Antwoord:  $y^2 e^x + xe^{-y} + y = C.$

4. Bewijs dat van de homogene vergelijking  $A dx + B dy = 0,$

$m = (xA + yB)^{-1}$  een integrerende factor is.

(Gebruik de bekende formule van Euler:  $x F_x + y F_y = nF$ , geldig voor een homogene functie  $F(x, y)$  van de  $n^{\text{de}}$  graad).

5. Integreer  $x dx + y(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0.$

Aanwijzing: Splits de vergelijking in  $x dx + y dy = 0$  en

$$\sqrt{x^2 + y^2} y dy = 0.$$

en pas methode B van § 13 toe.

Antwoord:  $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} y^2 = C.$

6. Van de vergelijking  $A dx + B dy = 0$  kan men een integrerende factor vinden die:

a) alleen van  $y$  afhangt als  $A^{-1}(B_x - A_y)$  niet van  $x$  afhangt ;

b) " "  $x+y$  " "  $\frac{A_y - B_x}{B - A}$  een functie van  $x+y$  is ;

c) " "  $xy$  " "  $\frac{A_y - B_x}{yB - xA}$  een functie van  $xy$  is ;

d) " "  $\frac{x}{y}$  " "  $x^2 \frac{B_x - A_y}{xA + yB}$  een functie van  $\frac{x}{y}$  is .

7. Integreer  $(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2) dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2) dy = 0$

Aanwijzing: pas 6c toe.

Antwoord:  $e^{xy} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = C.$

8. Integreer  $\left\{ \sin x - x \cos x - 3x^2(y-x)^2 \right\} dx + 3x^2(y-x)^2 dy = 0.$

Aanwijzing: pas § 13, A toe.

9. Integreer:  $dy + (y \operatorname{tg} x - \sin 2x) dx = 0.$

Antwoord:  $y = -2 \cos^2 x + C \cos x.$

10. Bewijs: zijn  $m_1$  en  $m_2$  twee integrerende factoren van  $A dx + B dy = 0.$  Stellen we  $\frac{m_2}{m_1} = \omega$ , dan is  $B \omega_x - A \omega_y = 0$ , zodat  $\omega(x, y) = C$  gesteld, de vergelijking integreert.

11. Integreer  $(x+y) dx + dy = 0$

a) door direct een integrerende factor te bepalen,

b) door  $x+z=u$  te stellen.

Antwoord:  $e^x(x+y-1) = C.$

Gewone differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

## III

§ 15. Integratie door middel van machtreeksen.

Als de voorgaande methoden geen succes hebben tracht men vaak de oplossing te vinden in de gedaante van een machtreeks.

Voorbeeld: Integreer

$$(22) \quad y'(x) = \cos x + \sin y$$

zodat  $y=0$  voor  $x=0$ .

We stellen daartoe, dat de oplossing in de gedaante van een machtreeks

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

kan worden geschreven. Wegens  $y=0$  voor  $x=0$  volgt onmiddellijk  $c_0=0$ . Verder is

$$c_n = \frac{1}{n!} y^{(n)}(0),$$

zodat we slechts  $y'(0)$ ,  $y''(0)$ ,  $y'''(0)$ , -- enz. te berekenen hebben.

Uit (22) volgt na substitutie  $x=0$

$$y'(0) = 1;$$

na differentiatie van (22) gevolgd door de substitutie  $x=0$

$$y''(x) = -\sin x + y' \cos y, \quad y''(0) = 1,$$

$$y'''(x) = -\cos x - (y')^2 \sin y + y'' \cos y, \quad y'''(0) = 0,$$

$$y^{(4)}(x) = \sin x - 3y'y'' \sin y - (y')^3 \cos y + y'''\cos y, \quad y^{(4)}(0) = -1$$

enz.

Dus

$$y(x) = x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{24} x^4 + \dots$$

Meer algemeen kan men deze methode toepassen bij differentiaalvergelijkingen van het type

$$y' = f(x, y).$$

Op de vraag onder welke omstandigheden de zo gevonden machtreeksen convergeren gaan we hier niet in.

Opgave 1. Bereken in bovenstaand voorbeeld ook  $c_5$  en  $c_6$ . Antwoord:

$$c_5 = -\frac{1}{20}, \quad c_6 = -\frac{1}{36}.$$

2. Pas de methode toe op de vergelijking

$$y' = 1 + y^2$$

met  $y=0$  voor  $x=0$ . Aldus krijgt men de machtreeks voor  $\operatorname{tg} x$ . Antwoord:

$$y(x) = \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

Appendix: Enkele gebruikte begrippen en stellingen:

1. Differentiaal: Stel  $y = y(x)$  is gegeven.

$$dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x; \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x);$$

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx} dx; \quad dy \text{ is een benadering voor } \Delta y.$$

$$d(y_1 \pm y_2) = dy_1 \pm dy_2; \quad d(y_1 y_2) = y_1 dy_2 + y_2 dy_1;$$

$$d(y_1/y_2) = (y_2 dy_1 - y_1 dy_2) / y_2^2.$$

2. Omgeving van een punt  $(x_0, y_0)$  van het  $x$ - $y$ -vlak: elke cirkelschijf zonder rand met  $(x_0, y_0)$  als middelpunt.

Equivalent: alle punten  $(x, y)$  met

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta \quad (= \text{vierkant zonder rand}).$$

3. Gebied in het  $x$ - $y$ -vlak  $\left\{ \begin{array}{l} \text{open} \\ \text{samenhangend} \end{array} \right.$  ;

open wil zeggen: met  $(x_0, y_0)$  behoort ook een voldoende klein gekozen omgeving van  $(x_0, y_0)$  tot het gebied;

samenhangend: elk tweetal punten in het gebied is te verbinden door een polygoon, welke geheel tot het gebied behoort.

4. Gebied van enkelvoudige samenhang: het gebied is omsloten door één kromme zonder dubbelpunten.

5.  $f(x, y)$  heet continu in  $(x_0, y_0)$  als bij elke  $\epsilon > 0$  een omgeving van  $(x_0, y_0)$  te vinden is, zodat voor elk punt van die omgeving geldt:

$$(23) \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Equivalent daarmee:  $\epsilon, \delta$  definitie: Bij elke  $\epsilon > 0$  is een  $\delta > 0$  te vinden, zodat (23) geldt voor

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta.$$

6. Partiële afgeleide naar  $x$ :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

andere notaties:  $\frac{\partial}{\partial x} f$ ,  $f'_x$ ,  $D_x f$ .

Analoog:  $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=x_0, y=y_0} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Notaties:  $\frac{\partial}{\partial y} f$ ,  $f'_y$ ,  $D_y f$ .

tweede partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_{xx}^2 f$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = D_{xy}^2 f \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} = D_{yx}^2 f \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(let op} \\ \text{volgorde van} \\ \text{x en y)} \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D_{yy}^2 f$$

#### 7. Differentieerbare functie $f(x,y)$ :

$\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x,y) = Ah + Bk + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$ , waar A en B niet van h en k afhangen en waar  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$  als  $h, k \rightarrow 0$ .

Gemakkelijk volgt <sup>1)</sup>  $A = f'_x$ ,  $B = f'_y$

2)  $f(x,y)$  is zeker differentieerbaar als  $f'_x$  en  $f'_y$  continu zijn.

#### 8. Differentiaal voor $f(x,y)$ : $dx \stackrel{\text{def}}{=} \Delta x=h$ , $dy \stackrel{\text{def}}{=} \Delta y=k$

$$df \stackrel{\text{def}}{=} Ah + Bk = f'_x dx + f'_y dy,$$

df is een approximatie voor  $\Delta f$  (foutenrekening).

Analoge definities voor functies van meer dan twee veranderlijken.

#### 9. Stelling: Zijn $f_{xy}$ en $f_{yx}$ in een gebied continu, dan geldt hier $f_{xy} = f_{yx}$ (m.a.w. de volgorde der differentiaties is onverschillig).

#### 10. Kettingregel voor een samengestelde functie

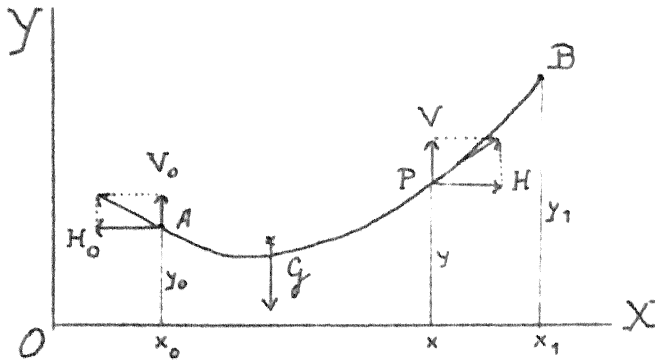
$$f(x,y) = F \{ u(x,y), v(x,y), w(x,y) \}.$$

Laat de optredende functies  $u, v, w, F(u, v, w)$  alle differentieerbaar zijn (zie 7.), dan volgt:

$$\begin{cases} f'_x = F_u u'_x + F_v v'_x + F_w w'_x \\ f'_y = F_u u'_y + F_v v'_y + F_w w'_y \end{cases}$$

Voorbeeld:  $f(x,y) = \sin u$ , waar  $u = x^2 + y^2$   
 $f'_x = \cos u \frac{du}{dx} = 2x \cos(x^2 + y^2).$

### Hoofdstuk III - Toepassingen



#### § 1. De kettinglijn.

Een draad met lengte  $l$  is opgehangen in de vaste punten  $A(x_0, y_0)$  en  $B(x_1, y_1)$  (vgl. de figuur).

De draad is homogeen en heeft het gewicht  $\rho$  per lengte eenheid. Bovendien is de draad

volkomen buigzaam, (d.w.z. de draad neemt overal de richting van de spanning aan). Gevraagd de vorm van de draad.

Neem een willekeurig punt  $P(x, y)$  van de draad; het stuk  $AP$  is in evenwicht:

a) de horizontale componenten van de spanningen in  $A$  en  $P$  zijn gelijk doch tegengesteld gericht:  $H_0 = H$  ( $H$  is dus constant).

b) voor de verticale componenten  $V_0$  en  $V$  geldt

$$V + V_0 = \text{gewicht van de draad } AP = \rho \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\frac{V}{H} + \frac{V_0}{H_0} = \frac{\rho}{H_0} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y' + \frac{V_0}{H_0} = \frac{\rho}{H_0} \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$y'' = \frac{\rho}{H_0} \sqrt{1 + (y')^2}, \text{ een differentiaalvergelijking.}$$

Stel  $y' = z$ , dan volgt

$$z' = \frac{\rho}{H_0} \sqrt{1 + z^2}.$$

De variabelen  $x$  en  $z$  zijn nu te scheiden; integratie levert

$$\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = k(x+c), \text{ met } k = \frac{\rho}{H_0}.$$

$$z = \sinh k(x+c)$$

$$(1) \quad y = \frac{1}{k} \cosh k(x+c) + c_1$$

De "kettinglijn" is dus identiek met de grafiek van de functie in het rechterlid.

In de oplossing (1) staan echter nog drie onbekende parameters  $k, c$  en  $c_1$ . Hoe bepalen wij deze in een concreet geval, b.v. als we de coördinaten van de ophangpunten  $A(x_0, y_0)$  en  $B(x_1, y_1)$  kennen en als de lengte  $l$  bovendien gegeven is?

Wegens (1) leveren ons de gegevens

$$(a) \quad y_0 = \frac{1}{k} \cosh k(x_0 + c) + c_1$$

$$(b) \quad y_1 = \frac{1}{k} \cosh k(x_1 + c) + c_1$$

$$(c) \quad 1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k} \frac{d}{dx} \cosh k(x+c)\right)^2} dx$$

We gebruiken in het volgende de formules  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,  
 $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,

$$(x) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(y) \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$(z_1) \quad \sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{1}{2}(x+y) \sinh \frac{1}{2}(x-y)$$

$$(z_2) \quad \cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{1}{2}(x+y) \sinh \frac{1}{2}(x-y).$$

Uit (a) en (b) elimineren we  $c_1$ :

$$(2) \quad k(y_1 - y_0) = 2 \sinh \frac{1}{2}k(x_1 + x_0 + 2c) \sinh \frac{1}{2}k(x_1 - x_0).$$

Uit (c) volgt

$$1 = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (\sinh k(x+c))^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \cosh k(x+c) dx$$

$$(3) \quad \begin{cases} k l = \sinh k(x_1+c) - \sinh k(x_0+c) \\ = 2 \cosh \frac{1}{2}k(x_1+x_0+2c) \sinh \frac{1}{2}k(x_1-x_0). \end{cases}$$

Uit (2) en (3) elimineren we de parameter  $c$  met behulp van (x). Er komt

$$k^2 l^2 - k^2 (y_1 - y_0)^2 = 4 \sinh^2 \frac{1}{2}k(x_1 - x_0)$$

$$\frac{\sinh \frac{1}{2}k(x_1 - x_0)}{\frac{1}{2}k(x_1 - x_0)} = \frac{\sqrt{1^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0}.$$

Stellen we  $\frac{1}{2}k(x_1 - x_0) = X$ ,  $\frac{\sqrt{1^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0} = \alpha$  (bekend),

dan wordt dit

$$(3) \quad \frac{\sinh X}{X} = \alpha.$$

Met behulp van een tafel van functiewaarden voor  $\frac{\sinh x}{x}$  is hieruit  $X$ , en dus  $k$ , te bepalen.

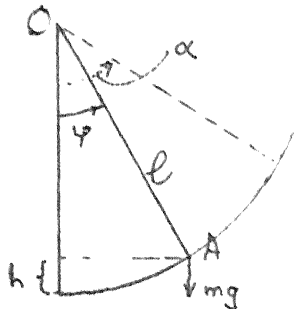
Er is één en slechts één positieve waarde voor  $X$ , die aan (3) voldoet, omdat



- 1°  $\alpha > 1$   
 2°  $\frac{\sinh x}{x} \begin{cases} \rightarrow 1 & \text{voor } x \rightarrow 0 \\ \rightarrow +\infty & \text{voor } x \rightarrow \infty \end{cases}$   
 3°  $\frac{\sinh x}{x}$  monotoon stijgt voor  $x > 0$ .

c is nu eenduidig te bepalen uit formule (2), omdat  $\sinh x$  monotoon van  $-\infty$  naar  $+\infty$  stijgt. Tenslotte vinden we  $c_1$  uit formule (a).

§ 2. De mathematische slinger. Een materieel punt A met massa  $m$  is door



middel van een draad zonder gewicht met lengte  $l$  opgehangen in een vast punt  $O$ . Het punt wordt uit de evenwichtsstand gebracht en losgelaten. Gevraagd wordt de slingertijd  $T$  te berekenen.

Zij  $A$  de stand van het punt op de tijd  $t$ ; zij op dat ogenblik  $h$  de hoogte van  $A$  boven het laagste punt; dus  $h = l(1 - \cos \varphi)$ , zodat de potentiële energie (=0 in de laagste stand) gelijk is aan  $h \cdot mg = mg l(1 - \cos \varphi)$ . Zij  $\dot{\varphi}$  de hoek die  $OA$  maakt met zijn evenwichtsstand, dan is de snelheid  $v$  van  $A$  gelijk aan

$$\left| l \frac{d\varphi}{dt} \right| = |l \dot{\varphi}|. \text{ De kinetische energie is gelijk aan}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2. \text{ Dus}$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mg l (1 - \cos \varphi) = C,$$

waar  $C$  een of andere van  $t$  onafhankelijke grootheid is.

Stel dat  $A$  de grootste hoogte bereikt voor  $\varphi = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ). Voor dit punt is  $v = 0$ ; dus de kinetische energie nul, zodat

$$(5) \quad mg l (1 - \cos \alpha) = C.$$

Uit (4) en (5) volgt de differentiaalvergelijking voor

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{2g}{l} (\cos \alpha - \cos \varphi) = 0,$$

of

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

In deze vergelijking zijn de variabelen te scheiden:

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}}.$$

Na integratie vindt men voor de slingertijd  $T$

$$\frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}}$$

Substitueren we  $u = \sin^{-1} \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} \varphi$ , dan vinden we zo de elliptische integraal

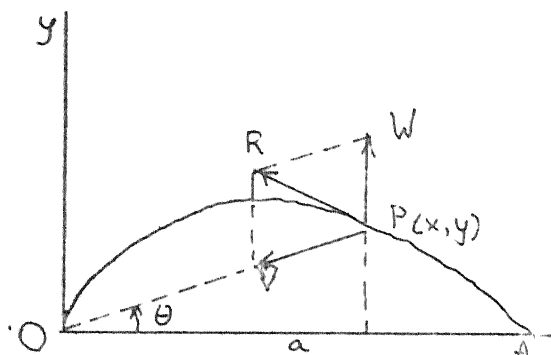
$$T = 2 \sqrt{\frac{1}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha)}},$$

welke voor gegeven  $\alpha$  uit een tabel gevonden kan worden.

Voor kleine waarden van  $\alpha$  vindt men zo de benadering

$$T \approx 2 \sqrt{\frac{1}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}}.$$

§ 3. Het volgend voorbeeld is uit een uitgebreide familie van analoge vraagstukken gekozen.



Een vliegtuig moet van A naar O worden gevlogen (zie fig.) Er is een constante windsnelheid  $W \perp AO$ . De vlieger houdt de neus van het toestel steeds naar O gericht. De snelheid van het vliegtuig t.o.v. de lucht is  $V$ . Gevraagd de baan van het vliegtuig  $P: y=y(x)$ .

Stel afstand  $OA = a$  (bekend),  $\angle POA = \Theta$ . Snelheid van P in de richting van de X-as:  $-V \cos \Theta$ ; snelheid in de richting van de Y-as:  $W - V \sin \Theta$ , dus richtingscoëfficiënt van de resulterende snelheid R:

$$\frac{W - V \sin \Theta}{-V \cos \Theta} = -\frac{W}{V} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x}.$$

Stellen we  $\frac{W}{V} = k$ , dan krijgen we de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Voor de integratie stellen we  $y=xu$  en vinden dan

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -k \frac{dx}{x},$$

$$\log(u + \sqrt{1+u^2}) = -k \log x + C,$$

dus wegens  $u = \frac{y}{x}$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C_1 x^{1-k}.$$

De onbekende constante  $C_1$  wordt bepaald uit de beginvoorwaarde  $x=a$ ,  $y=0$ ;  
dit levert  $C_1=a^k$  en tenslotte

$$y = \frac{1}{2} a \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k} \right\}.$$

Gewone differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

IV

Richtingsveld

§1. Inleiding. We beschouwen hier voornamelijk differentiaalvergelijkingen van het type

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

waarbij  $f(x, y)$  gedefinieerd is op een gebied  $G$  in het  $x$ - $y$ -vlak.

Laat  $y(x)$  een willekeurige integraal van (1) voorstellen, dan heet de bijbehorende grafiek een integraalkromme van (1); bv. heeft de vergelijking  $y' = -\frac{y}{x}$  als integraalkrommen de hyperbolen  $xy = C$ .

Zij nu  $(x_0, y_0)$  een willekeurig punt van een integraalkromme van (1), dan stelt

$$f(x_0, y_0)$$

de richtingscoëfficiënt voor van de raaklijn in  $(x_0, y_0)$  aan de kromme getrokken.

Wij kunnen als volgt een meetkundig beeld van de vergelijking (1) ontwerpen. Neem een willekeurig punt  $P(x_0, y_0)$  van  $G$ ; bereken daarbij  $p = f(x_0, y_0)$  en trek door  $P$  een lijntje  $l$  met richtingscoëfficiënt  $p$ . De combinatie  $(P, l)$  heet een lijnelement van de vergelijking (1). Het totaal van alle lijnelementen van de vergelijking heet het richtingsveld.

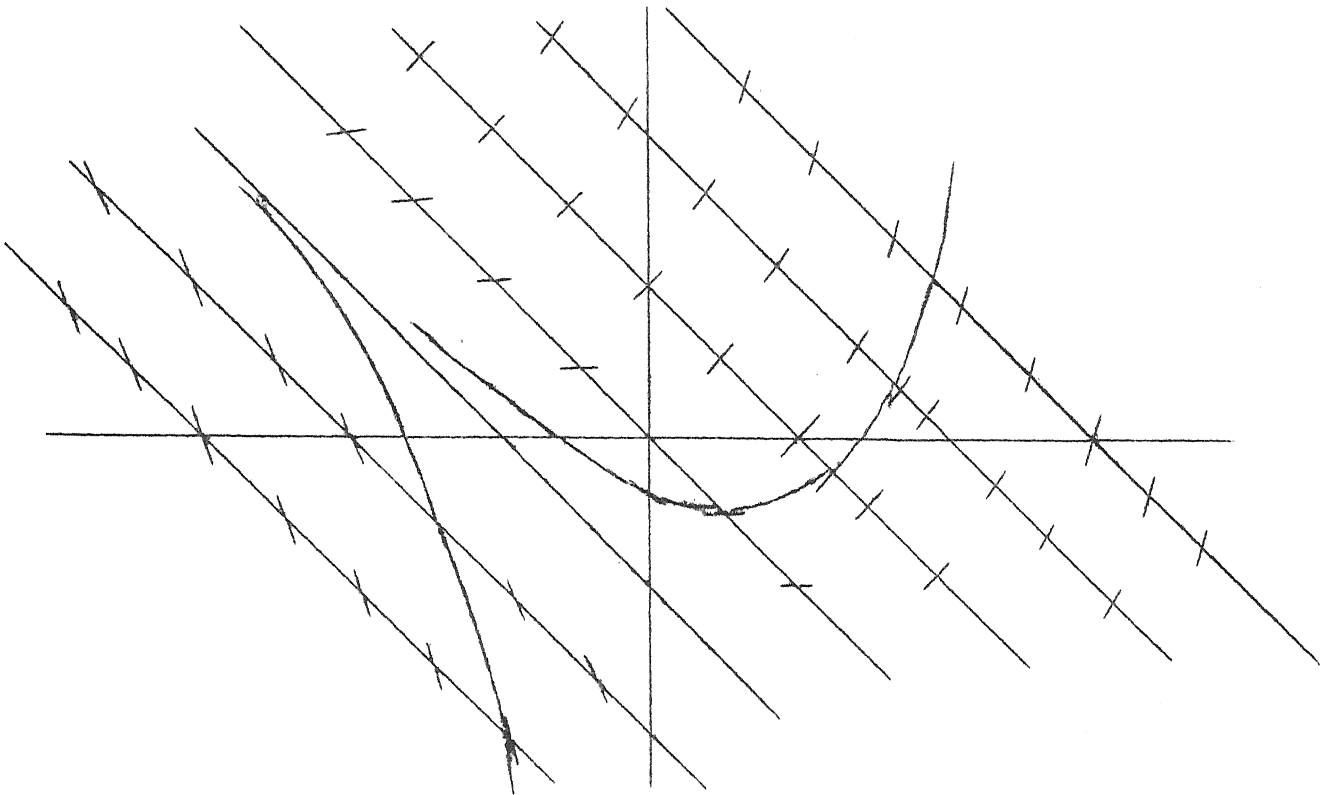
Een integraalkromme is als het ware opgebouwd uit lijnelementen.

Voor de punten  $P$  op een kromme  $f(x, y) = C$  heeft het lijnelement  $l$  steeds dezelfde richting. Men noemt zo'n kromme een isocline.

§2. Lineaire vergelijking met constante coëfficiënten.

Als eerste voorbeeld ontwerpen wij het richtingsveld van de vergelijking

$$(2) \quad y' = x + y$$



We beginnen met het tekenen van enkele isoclinen  $x + y = C$ ; dus een stelsel evenwijdige rechten. Bv. voor punten op de rechte  $x + y = 0$  is de richting van het bijbehorende lijnelement die van de  $x$ -as. Merkwaardig is ook de isocline  $x + y = -1$ , omdat daar de richting van het lijnelement samenvalt met die van de rechte zelf:  $x + y = -1$  is dan ook een integraalkromme.

Trekt men te beginnen bij een vast punt zo goed mogelijk een vloeiend verlopende kromme door de lijnelementen die men tegenkomt, dan krijgt men aldus een approximatieve integraalkromme. Zo zijn in de figuur twee integraalkrommen geschetst. Met behulp van een richtingsveld kan men zo een goede indruk van de mogelijke integraalkrommen krijgen.

Uit (2) blijkt, dat de integraalkrommen rechts van de isocline  $x + y = 0$  stijgen en dat ze links daarvan dalen. Door differentiatie van (2) blijkt dat de integraalkrommen rechts van  $x + y = -1$  concaaf naar boven zijn ( $y'' > 0$ ) en links daarvan concaaf naar beneden.

Voor het meer algemene geval

$$(3) \quad y' = ax + by + c \quad (a, b, c \text{ constant})$$

kan men soortgelijke opmerkingen maken (vgl. opgaven 3 en 4). De isoclinen zijn nu rechten evenwijdig aan  $ax + by = 0$ . Door een verschuiving van het  $x$ - $y$  vlak evenwijdig aan deze rechte gaan lijnelementen over in lijnelementen. Hieruit volgt gemakkelijk:

Bij een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten (3) gaat een integraalkromme door een verschuiving evenwijdig aan  $ax + by = 0$  over in een nieuwe integraalkromme.

Men kan de integraalkrommen van vergelijking (1) in de omgeving van een punt  $(x_0, y_0)$  onderzoeken door  $f(x, y)$  bij benadering te vervangen door  $f(x_0, y_0) + d f(x, y)$ :

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0),$$

zodat (1) in eerste benadering overgaat in

$$y' = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0),$$

welke van het type (3) is.

### § 3. Homogene vergelijkingen

$$y' = f(x, y),$$

waar  $f(x, y)$  homogeen van de graad nul is; d.w.z.

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Hieruit volgt onmiddellijk, dat de rechten door de oorsprong isoclinen zijn. Hieruit volgt weer:

Bij een homogene vergelijking gaat een integraalkromme door vermenigvuldiging met een vast getal t.o.v. de oorsprong over in een nieuwe integraalkromme.

Zo worden bv. de integraalkrommen van

$$(x^2 - y^2)dx + 2xy dy = 0$$

gevormd door de parabolische cirkelbundel

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2.$$

### § 4. Het richtingsveld in de omgeving van een singulier punt.

Het kan zijn, dat in

$$y' = f(x, y)$$

de functiewaarde van  $f(x, y)$  voor een zeker punt onbepaald is. We spreken dan van een singulier punt voor de vergelijking. In het volgende behandelen we een zeer eenvoudig geval waarin zich zo iets manifesteert; nl. in de oorsprong bij de differentiaalvergelijking

$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (a, b, c, d \text{ constant})$$

In het geval  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$  is het rechterlid constant en dan vormen de integraalkrommen een stelsel evenwijdige rechten. Dit geval zullen we steeds buitensluiten.

We brengen de vergelijking in de symmetrische vorm

$$(4) \quad (a_1x + b_1y) dx = (a_2y + b_2x) dy.$$

Voor  $a_1 = 0$  is  $y = 0$  integraalkromme en omgekeerd.

Voor  $a_2 = 0$  is  $x = 0$  integraalkromme en omgekeerd.

We behandelen nu eerst de volgende drie speciale gevallen:

I  $a_1=a_2=0$  :  $b_1y dx = b_2x dy$ .

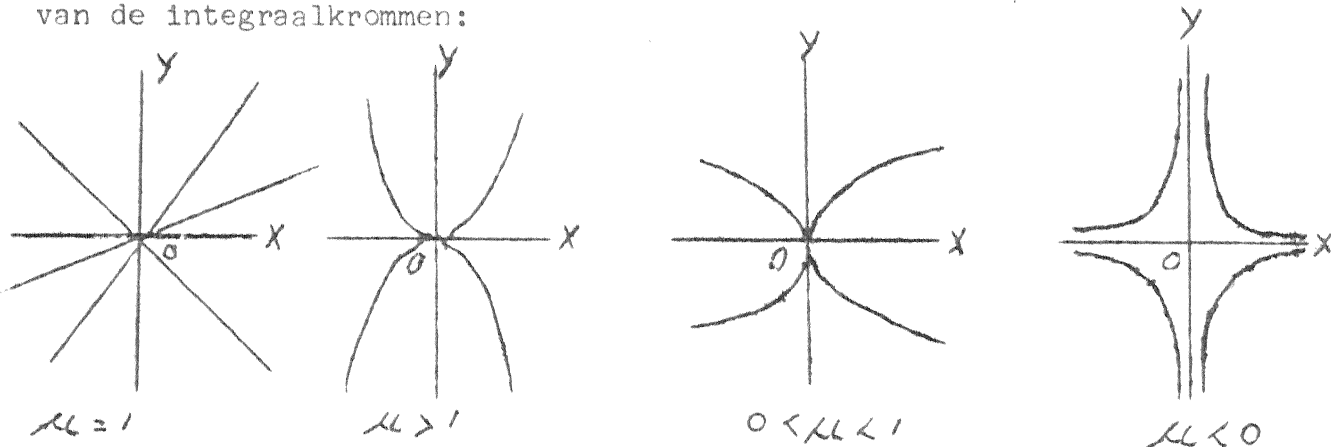
II  $a_1=0, b_1=b_2$ :  $b y dx = (ay + bx) dy$

III  $a_1+a_2=0, b_1=b_2$ :  $(ax + by)dx = (-ay + bx) dy$

Geval I:  $x=0$  en  $y=0$  zijn blijkbaar integraalkrommen. Integratie door scheiding van variabelen levert

$$|y| = C |x|^\mu \quad (\mu = b_1/b_2)$$

Als wij afzien van de integraalkrommen samenvallende met de coördinaatassen, dan hebben we de volgende vier gevallen voor het gedrag van de integraalkrommen:



Vermenigvuldiging t.o.v. 0 voert een integraalkromme in een nieuwe over.

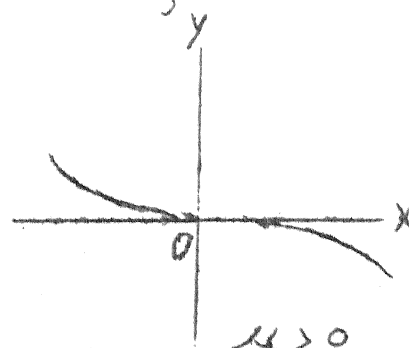
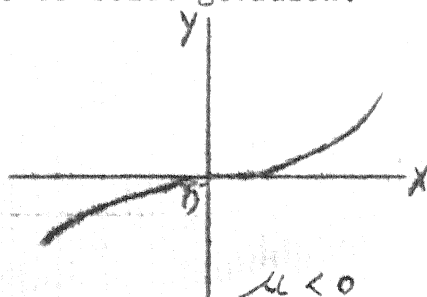
Geval II. De  $x$ -as is integraalkromme. Verder is

$$y dx = (\mu y + x) dy, \quad \mu = a/b.$$

We integreren door  $x = vy$  te stellen (homogene vergelijking)

$$x = y \left\{ \mu \log |y| + C \right\}$$

met de beide gevallen:



Geval III:  $x dx + y dy = \mu (x dy - y dx)$ ,  $\mu = b/a$ .

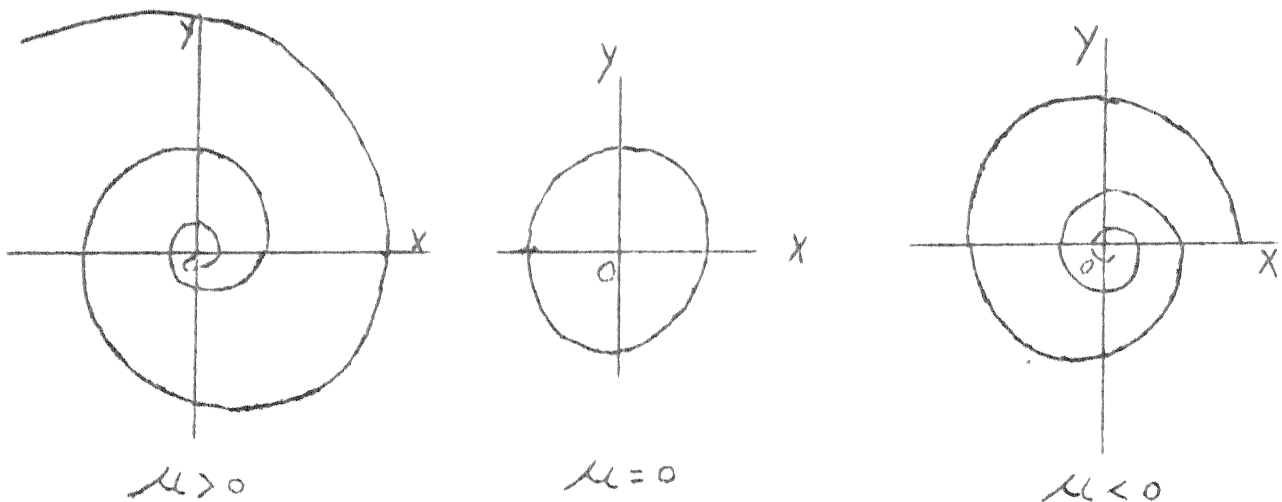
We voeren poolcoördinaten in:  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y/x = \operatorname{tg} \varphi$ .

Dus  $x dx + y dy = r dr$ ,  $\frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ , zodat wegens  $x = r \cos \varphi$  de vergelijking wordt

$$r dr = \mu r^2 d\varphi$$

$$r = C e^{\mu \varphi}$$

De integraalkrommen zijn dus logaritmische spiralen of cirkels. We hebben drie gevallen:



We zullen nu laten zien, dat we het algemene geval (4) tot I, II en III kunnen terugbrengen. Allereerst zoeken we naar rechten door de oorsprong

$$y = \lambda x,$$

die tevens integraalkrommen zijn. Substitutie in (4) levert de voorwaarde

$$a_2 \lambda^2 + (b_2 - b_1) \lambda a_1 = 0.$$

Voor het geval  $a_2 = b_2 - b_1 = a_1 = 0$  is elke rechte door de oorsprong integraalkromme (zie geval I,  $\mu = 1$ ). In elk ander geval krijgen we twee rechten door de oorsprong die voldoen (óók in het geval  $a_2 = 0$ ). Dit zullen we de hoofdrichtingen noemen.

We onderscheiden drie gevallen:

I. De hoofdrichtingen zijn reëel en verschillend.

Zij  $a_2 \neq 0$  en stel dat de hoofdrichtingen gegeven zijn door  $y = \lambda_1 x$  en  $y = \lambda_2 x$ . Deze laatste kunnen we door de substitutie

$$X = x - \lambda_1 y$$

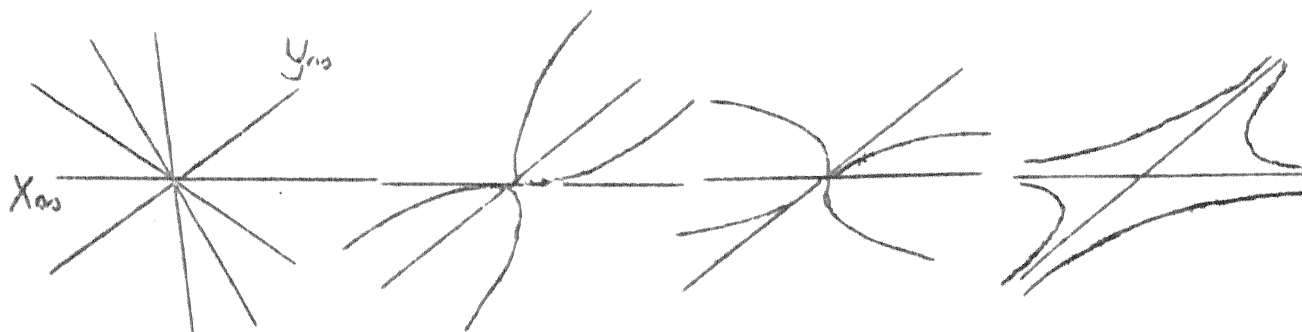
$$Y = y - \lambda_2 x$$

tot de coördinaatassen van een scheefhoekig assenstelsel maken. De vergelijking (4) gaat daardoor over in een vergelijking van de gedaante

$$(5) \quad (A_1 X + B_1 Y) dX = (A_2 Y + B_2 X) dY.$$



De coördinaatassen  $Y=0$  en  $X=0$  zijn echter integraalkrommen, dus  $A_1=A_2=0$ , zodat men in geval I verkeert. Men heeft dus de volgende vier gevallen met betrekking tot het gedrag der integraalkrommen:



In het geval  $a_2=0$  gebruike men de substitutie  $X=y-\lambda x$ ,  $X=x$  en men komt tot hetzelfde resultaat als hierboven.

2. De hoofdrichtingen vallen samen. Zij deze  $y=\lambda x$ ; welke in ons scheefhoekig assenstelsel tot X-as gepromoveerd wordt. We gebruiken de substitutie

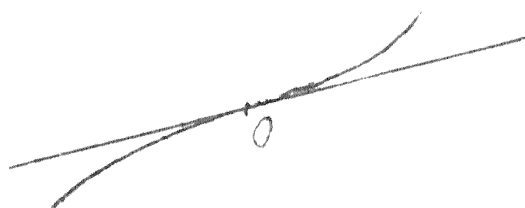
$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y - \lambda x \end{aligned}$$

De vergelijking (4) neemt weer de gedaante (5) aan. De X-as is integraalkromme, dus  $A_1=0$ ; de beide hoofdrichtingen vallen samen, dus

$$(B_2 - B_1)^2 - 4A_1A_2 = 0,$$

dus  $A_1=0$ ,  $B_1=B_2$  en we verkeren in geval II.

De integraalkrommen hebben dus de vorm



3. De hoofdrichtingen zijn toegevoegd complex, nl.  $y = (p+iq)x$ .

Stel

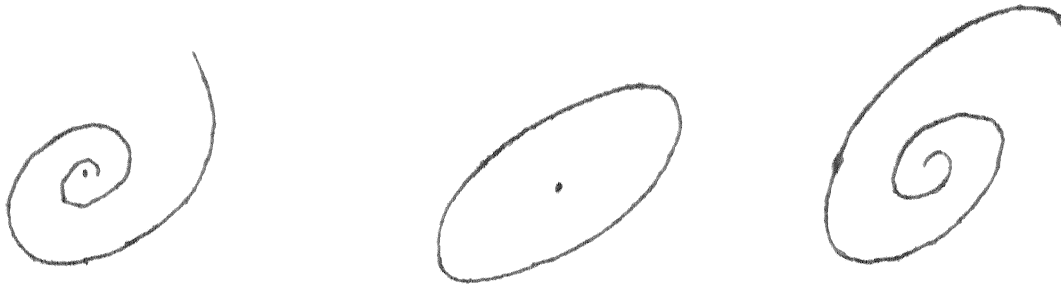
$$\begin{aligned} y - px &= Y \\ qx &= X \end{aligned}$$

De nieuwe vergelijking heeft weer de vorm (5). Hieraan voldoet  $Y=iX$ , zodat  $i$  een wortel is van

$$A_2 \lambda^2 + (B_2 - B_1) \lambda - A_1 = 0,$$

d.w.z.  $A_1 + A_2 = 0$ ,  $B_1 = B_2$  en we verkeren in geval III.

De integraalkrommen zijn dus of spiralen om de oorsprong of ellipsen met de oorsprong als middelpunt.



Heeft men een differentiaalvergelijking van het type

$$A(x,y) dx + B(x,y) dy = 0$$

en is  $A(x_0, y_0) = 0$ ,  $B(x_0, y_0) = 0$ , en zijn de integraalkrommen in de omgeving van  $(x_0, y_0)$  te bestuderen, dan vervangt men  $A(x,y)$  door de benadering  $A_x(x_0, y_0)(x-x_0) + A_y(x_0, y_0)(y-y_0)$  en  $B(x,y)$  door  $B_x(x_0, y_0)(x-x_0) + B_y(x_0, y_0)(y-y_0)$ .

Stelt men nog  $X=x-x_0$ ,  $Y=y-y_0$ . Men krijgt aldus

$$(A_x X + A_y Y) dX + (B_x X + B_y Y) dY = 0,$$

welke van het hiervoor bestudeerde type is.

Een voorbeeld is de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{axy - by}{cx - dxy} \quad (a,b,c,d \text{ positieve constanten})$$

welke vergelijking van belang is bij de bestudering van een verschijnsel uit de biologie. De singuliere punten zijn hier  $(0,0)$  en  $(\frac{b}{a}, \frac{c}{d})$ . De integraalkrommen in de omgeving van de oorsprong gedragen zich als in het vierde voorbeeld van 1, die in de omgeving van  $(\frac{b}{a}, \frac{c}{d})$  zijn bij benadering ellipsen (laatste voorbeeld van 3).

OPGAVEN

- 1) Los de differentiaalvergelijking van § 2 (2) op.  
 Het is een eerste orde vergelijking, in het antwoord treedt één integratieconstante  $C$  op.  
 Met welke waarden van  $C$  corresponderen de integraalkrommen rechts van de rechte  $y + x = -1$ ? Bewijs dat deze integraalkrommen een minimum hebben voor  $x = -\log C$ .  
 Met welke waarden van  $C$  corresponderen de integraalkrommen links van de rechte  $y + x = -1$ ? Bewijs dat deze integraalkrommen monotoon dalen.  
 Bewijs dat  $x+y=-1$  een asymptoot is voor elke integraalkromme van (2).
- 2) Schets een richtingsveld met daarin enige integraalkrommen van de differentiaalvergelijking  $y' = y - x$ .  
 Welke rechte is een integraalkromme?  
 Bewijs dat deze asymptoot is van alle andere integraalkrommen.  
 Ga ook weer eigenschappen als convexiteit en het al of niet hebben van extrema na.
- 3) Zoek de integraalkromme van (3), die tevens rechte is.  
 Antwoord:  $abx + b^2y + a + bc = 0$ .
- 4) Bewijs dat aan de ene kant van de rechte uit vraagstuk 3 de integraalkrommen concaaf naar boven, aan de andere kant concaaf naar beneden zijn.
- 5) Beschouw vier integraalkrommen van een vergelijking van Riccati.  
 Een ordinaat  $x=x_1$  snijdt deze kromme in de vier punten A,B,C en D.  
 Bewijs dat de dubbelverhouding van A,B,C en D onafhankelijk is van de keuze van  $x_1$ .
- 6) Schets het richtingsveld van de differentiaalvergelijking  $y' = -\frac{x}{y}$ , met daarin enige isoclinen ( $x$  en  $y$  niet beide 0).  
 Wat vermoedt men nu als oplossing? Verifieer dit door integratie.  
 Antwoord: Cirkels met 0 als middelpunt.
- 7) Onderzoek het verloop van de integraalkrommen in de buurt van het punt (1,1) van de differentiaalvergelijking:
- $$y' = e^{xy-1}$$
- Antwoord: In de buurt van (1,1) worden de integraalkrommen benaderd door de krommen  $y = -x + C e^x$ . In dit gebied is  $C$  dus ongeveer  $\frac{2}{e}$ .
- 8) Geef een benadering van het verloop van de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking  $y = \frac{e^x - 1}{y}$ , in de omgeving van het singuliere punt (0,0).  
 Antwoord: In de buurt van (0,0) zijn de integraalkrommen bij benadering

gelijk aan de in dat gebied lopende gedeelten van de krommen  $x^2 - y^2 = C$ .

- 9) Idem voor de differentiaalvergelijking  $y' = \frac{\sin xy}{y-1}$  in de omgeving van het singuliere punt  $(0,1)$ .

Antwoord: Een goede benadering in de buurt van  $(0,1)$  wordt gegeven door de krommen  $x^2 - (y-1)^2 = C$ .

§5. Orthogonale trajectoriën. Stel, dat op een gebied  $G$  in het  $x$ - $y$  vlak een richtingsveld gegeven is. Dan heeft het zin om te vragen naar de differentiaalvergelijking, die bij dit veld behoort.

Zij gegeven een stelsel krommen

$$(6) \quad f(x, y, c) = 0,$$

waar  $c$  een parameter is. Beschouw een kromme

$$(7) \quad f(x, y, c_0) = 0,$$

die door een gegeven punt  $P(x_0, y_0)$  gaat. Door in  $P$  de raaklijn aan (7) te trekken krijgen we een lijnelement en door  $P$  te variëren krijgen we een richtingsveld. Met behulp van de kettingregel vinden we voor de richtingscoëfficiënt  $p_0$  van de raaklijn aan (7)

$$(8) \quad f_x(x_0, y_0, c_0) + f_y(x_0, y_0, c_0)p_0 = 0$$

De vier grootheden  $x_0, y_0, c_0$  en  $p_0$  voldoen dus aan (8) en aan (7) met  $x=x_0, y=y_0$ . Stel dat we  $c_0$  uit deze beide vergelijkingen elimineren kunnen en dat aldus de betrekking

$$F(x_0, y_0, p_0) = 0$$

ontstaat. Dan is

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

een differentiaalvergelijking, welke (6) als integraalkrommen heeft.

Voorbeeld: Zoek een differentiaalvergelijking, welke de cirkels

$$(6^*) \quad x^2 + y^2 - 2cx = c$$

tot integraalkrommen heeft.

Oplossing: Elimineer  $c$  uit (6\*) en

$$(8^*) \quad 2x - 2c + 2y p = c.$$

Er komt

$$x^2 - y^2 + 2xy p = 0,$$

zodat

$$x^2 - y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

aan de vraag voldoet.

We zoeken nu naar orthogonale trajectoriën van (6), d.w.z. naar krommen, die de exemplaren van het stelsel onder rechte hoeken snijden.

We krijgen weer een richtingsveld door in het bovenbeschouwde punt  $P$  een lijntje te trekken loodrecht op de raaklijn aan (7). Is nu  $q_0$  de richtingscoëfficiënt daarvan, dan is  $p_0 q_0 = -1$ , zodat (8) overgaat in

$$f_x(x_0, y_0, c_0) - f_y(x_0, y_0, c_0) \frac{1}{q_0} = 0.$$

Het eliminatie resultaat heeft dus nu de vorm

$$F(x_0, y_0, -\frac{1}{q_0}) = 0,$$

zodat de orthogonale trajectoriën integraalkrommen zijn van de vergelijking

$$F(x, y, -\frac{dx}{dy}) = 0.$$

Voorbeeld: Het stelsel confocale kegelsneden

$$(9) \quad \frac{x^2}{a^2-c} + \frac{y^2}{b^2-c} = 1$$

heeft als differentiaalvergelijking

$$(10) \quad (x+py)(y-px) + (a^2-b^2)p = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

Vervangt men hierin  $p$  door  $-\frac{1}{q}$  dan ontstaat er

$$(x + qy)(y - qx) + (a^2 - b^2)q = 0,$$

zodat de orthogonale trajectoriën van (9) integraalkrommen van (10) zijn.

## OPGAVEN

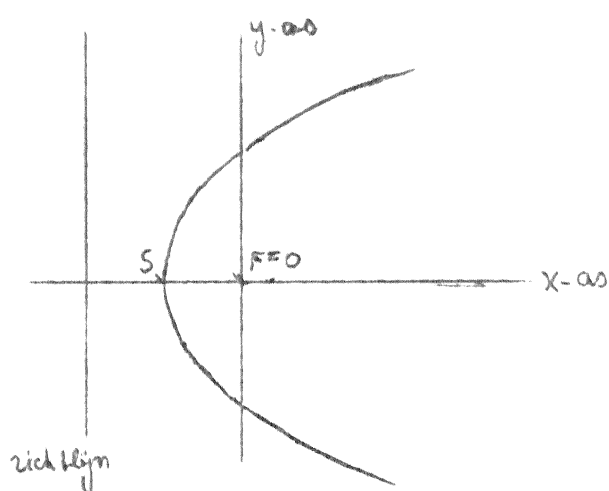
- 1) Teken in een figuur enkele krommen uit de familie

$$x^2 + y^2 - 2cx = 0, \text{ waarin } c \text{ een parameter voorstelt.}$$

Vindt de differentiaalvergelijking van de familie der orthogonale trajectoriën en los deze op.

Antwoord:  $x^2 + y^2 - 2cy = 0$ .

2)



- a) Geef een parametervoorstelling van de familie der parabolen met brandpunt in 0 en richtlijn evenwijdig aan de Y as (zie figuur).

Laat de afstand  $SF=c$  als parameter optreden.

Antwoord:  $y^2 = 4c(x+c)$ . (1)

- b) Geef de bijbehorende differentiaalvergelijking van deze parabolen.

Antwoord:  $y = 2xy' + y(y')^2$ . (2)

- c) Stel de bijbehorende differentiaalvergelijking van de orthogonale trajectoriën op. Toon aan dat dit weer de vergelijking (2) is. Als orthogonale trajectoriën vinden we dus de zelfde familie van parabolen terug.
- d) Neem twee vertegenwoordigers van (1):

$y^2 = 4c_1(x+c_1)$  en  $y^2 = 4c_2(x+c_2)$ . Bewijs dat deze elkaar dan en slechts dan snijden als de tekens van  $c_1$  en  $c_2$  tegengesteld zijn. Toon in dit geval aan dat de krommen loodrecht op elkaar staan door in de snijpunten de richtingscoëfficiënten te bepalen.

- 3) Bepaal de orthogonale trajectoriën van de hyperbolen:

$$x^2 - y^2 + 2cxy = 1.$$

Antwoord: De krommen van Cassini:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = c.$$

6. Vergelijking van Clairaut:

$$y = xy' + f(y'),$$

waar  $f(u)$  een gegeven differentieerbare functie is. Dit is een voorbeeld van een z.g. impliciete differentiaalvergelijking.

Door differentiatie naar  $x$  ontstaat

$$y'' (x + f'(y')) = 0,$$

(we beperken ons tot integralen, waarvoor  $y''$  bestaat).

Voor integralen hebben we dus de volgende mogelijkheden:

1)  $y'' = 0$ , dus  $y' = c$ ,

2)  $x + f'(y') = 0$

3) eventuele integralen  $y(x)$ , waarvoor in sommige punten 1) in andere punten 2) vervuld is.

1) leidt tot  $y = cx + f(c)$ , d.i. een stelsel lineaire functies met parameter  $c$ ; in het  $x$ - $y$  vlak een stelsel rechten.

2) leidt tot de integraalkromme gegeven door de parameter voorstelling

$$\left. \begin{aligned} x &= -f'(p) \\ y &= xp + f(p) = -pf'(p) + f(p) \end{aligned} \right\}$$

Het verband tussen beide integralen, de "algemene" integraal 1) en de "singuliere" integraal 2) is, dat in het laatste geval de integraalkromme de omhullende is van het stelsel integraalkrommen 1).

Voorbeeld  $y = xy' - \frac{1}{4} (y')^2$

De algemene integraal wordt geleverd door

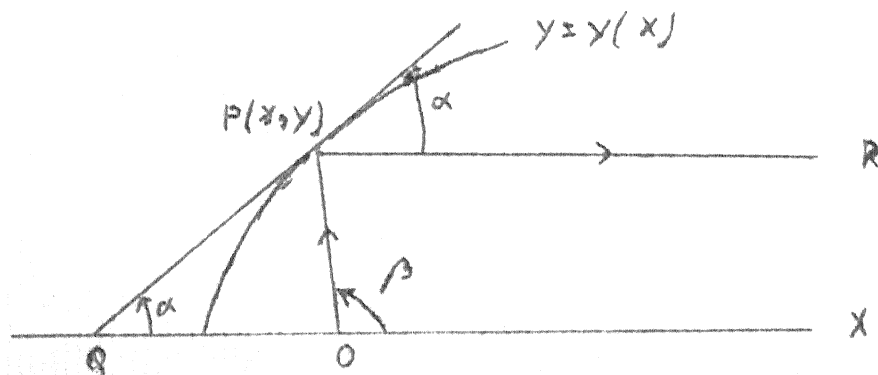
$$y = cx - \frac{1}{4} c^2$$

met als singuliere integraal

$$y = x^2$$

3) Er zijn ook integraalkrommen bestaande uit twee rechte stukken en een deel van de singuliere integraalkromme.

Toepassing: De parabolische spiegel. Constructie van een spiegel zodat de lichtstralen, die uit een bepaald punt komen, als een evenwijdige bundel worden gereflecteerd





We maken het punt tot oorsprong van ons assenstelsel en kiezen de X-as evenwijdig aan de gereflecteerde stralen. Laat  $y=y(x)$  de doorsnede met de spiegel voorstellen. OP is een uitgaande lichtstraal, gereflecteerd volgens PR; PQ is de raaklijn in P aan  $y=y(x)$ .  $\angle XQP = \alpha$ ,  $\angle XOP = \beta$ .

Stel korthedshalve  $\frac{dy}{dx} = p$ , dan is  $\operatorname{tg} \alpha = p$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}$ . Aan de andere kant is  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ . Dit geeft de differentiaalvergelijking

$$y = 2px + yp^2.$$

Stellen we  $z=y^2$ , dan krijgen we de vergelijking van Clairaut

$$z = x \frac{dz}{dx} + \frac{1}{4} \left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

met de algemene oplossing

$$\begin{aligned} z &= cx + \frac{1}{4} c^2 \\ y^2 &= cx + \frac{1}{4} c^2, \end{aligned}$$

terwijl de singuliere integraal  $z = -\frac{1}{4} x^2$  in ons geval geen zin heeft.

OPGAVEN

1) Los de differentiaalvergelijking  $y' = y'x - e^{y'}$  op.

Antwoord: 1) : de rechten  $y = cx - e^c$

2) : de kromme  $y = x \log x - x$ .

We weten: 2) zal een omhullende van 1) zijn. In het algemeen bepalen we de omhullende van een familie van krommen  $f(x,y,c)=0$  door uit  $f(x,y,c)=0$  en  $f_c(x,y,c)=0$   $c$  te elimineren (zie Courant, Differential- und Integralrechnung). Ga na dat men op deze wijze ook 2) als omhullende van 1) vindt.

2) Bepaal de omhullende van de lijnen verzameling waarvan iedere lijn  $l$  de volgende eigenschap heeft:

De positieve X-as en de positieve Y-as snijden van  $l$  een stuk met constante lengte  $C$  af.

Antwoord: Het in het eerste kwadrant gelegen gedeelte van de astroïde

$$x^{2/3} + y^{2/3} = C^{2/3}.$$

Aanwijzing: Stel een differentiaalvergelijking op waaraan alle lijnen voldoen; deze differentiaalvergelijking is van het type van Clairaut. Bepaal hiervan de singuliere oplossing.

Gewone differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

VExistentiëlestellingen§1. Iteratie (methode van de successieve approximaties).Laat de functie  $f(x)$  aan de volgende twee voorwaarden voldoen:a) Voor elk paar punten  $x_1, x_2$  uit het gesloten interval  $[a, b]$  geldt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq q|x_1 - x_2| \quad (0 < q < 1).$$

(eenvoudigste geval van een z.g. Lipschitz voorwaarde).

b) Ligt  $x$  in  $[a, b]$ , dan ook  $f(x)$ .We willen aantonen, dat onder de voorwaarden a) en b)

$$(1) \quad f(x) = x$$

juist één oplossing in  $[a, b]$  heeft en we zullen tevens een methode aangeven om die oplossing te berekenen.We gaan daartoe uit van een willekeurige  $x_0$  van  $[a, b]$  en vormen successievelijk

$$(2) \quad x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

Alle  $x_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) behoren tot  $[a, b]$ ; dus wegens a)

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq q|x_{n-1} - x_{n-2}|.$$

De reeks

$$x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$$

breekt daarom af of convergeert (kenmerk van d'Alembert!). Stel

$$X = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Blijkbaar is  $X$  een punt van  $[a, b]$ .Uit a) volgt, dat  $f(x)$  continu op  $[a, b]$  is; dus wegens (2)

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f(X),$$

zodat  $X$  een oplossing van (1) is.

Stel, dat er minstens twee oplossingen  $X_1$  en  $X_2$  van (1) zijn, dan volgt uit a)

$$|X_1 - X_2| = |f(X_1) - f(X_2)| \leq q|X_1 - X_2|,$$

wat alleen mogelijk is voor  $X_1 = X_2$ .

De hier uiteengezette methode, speciaal toegepast in (2), wor ook wel "feed back" (terugkoppeling) genoemd en staat in nauw verb met de cybernetica.

Toepassing: a) Los op  $e^x = x + 2$ .

Door de grafieken van  $y=x+2$  en  $y=e^x$  te tekenen, ziet men dat twee wortels zijn; één positief, één negatief.

I)  $x=e^x-2=f(x)$ ,  $[a,b] = [-2,-1]$

Aan a) is voldaan wegens  $|e^{x_1}-e^{x_2}| = |x_1-x_2| e^{\xi} \leq |x_1-x_2| e^{-1}$ .

Aan b) is voldaan wegens  $e^{x_1}-2 \leq e^{-1}-2 < -1$ .

Kies b.v.  $x_0 = -1$ , dan vindt men

$$x_1 = e^{-1} - 2 = 0,368 - 2 = -1,632$$

$$x_2 = e^{-1,632} - 2 = 0,1955 - 2 = -1,8045$$

$$x_3 = e^{-1,8045} - 2 = 0,1646 - 2 = -1,8354$$

$$x_4 = e^{-1,8354} - 2 = 0,1596 - 2 = -1,8404$$

$$x_5 = e^{-1,8404} - 2 = 0,1588 - 2 = -1,8412$$

$$x = -1,8414$$

II) Om de positieve wortel te vinden schrijven we

$$x = \log(x+2) = f(x), \quad [a,b] = [1,2]$$

Inderdaad is aan a) voldaan wegens

$$|\log(x_1+2) - \log(x_2+2)| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\xi} \right| \leq \frac{1}{3} |x_1 - x_2|$$

en aan b) wegens  $\log(x+2) \geq \log 3 > 1$ ;  $\log(x+2) \leq \log 4 < 2$ .

Kies  $x_0 = 1$ , dan wordt

$$x_1 = \log 3 = 1,10$$

$$x_2 = \log 3,10 = 1,131$$

$$x_3 = \log 3,131 = 1,141$$

$$x_4 = \log 3,141 = 1,1446$$

$$x_5 = \log 3,1446 = 1,1458$$

$$x_6 = \log 3,1458 = 1,1461$$

b) Los de volgende vergelijking van Kepler op

$$x = \sin x + 0,5.$$

Teken de bijbehorende grafieken en ga na hoe men het interval  $[a, b]$  moet nemen

$$x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = \sin \frac{\pi}{2} + 0,5 = 1,5$$

$$x_2 = \sin 1,5 + 0,5 = 0,9975 + 0,5 = 1,4975$$

$$x_3 = \sin 1,4975 + 0,5 = 0,9973 + 0,5 = \underline{\underline{1,4973}}$$

§ 2. Het existentiëletheorema. We gaan uit van een vergelijking

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Door de beschouwingen over het richtingsveld uit het vorig hoofdstuk lijkt het plausibel, dat door een bepaald punt  $(a, b)$  van het richtingsveld in het algemeen één en slechts één integraalkromme gaat. Voor de singuliere punten gaat dit niet meer door.

Existentiëletheorema. Laat in een begrensd gesloten gebied  $G$  van het  $X$ - $Y$ -vlak de functie  $f(x, y)$  continu zijn, terwijl in  $G$

$$(4) \quad |f(x, y)| \leq M$$

geldt en bovendien een voorwaarde van Lipschitz vervuld is:

$$(5) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|.$$

(Hierin zijn  $M$  en  $A$  geschikt gekozen constanten, terwijl de punten  $(x, y_1)$  en  $(x, y_2)$  willekeurig in  $G$  zijn gekozen).

Kiest men binnen  $G$  een rechthoek  $R$ :

$$|x - a| \leq p, \quad |y - b| \leq Mp,$$

dan bestaat er voor  $|x - a| \leq p$  één en slechts één integraalkromme van (3) gaande door het punt  $(a, b)$ .

Opmerking: De voorwaarde van Lipschitz is zeker vervuld als  $G$  convex is en de functie  $f_y$  continu is; immers ligt dan de verbindingsrechte van  $(x, y_1)$  en  $(x, y_2)$  binnen  $G$  en geldt

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2) f_y(x, y),$$

terwijl  $f_y(x, y)$  begrensd is.

Bewijs (Picard): De differentiaalvergelijking (3) plus de beginvoorwaarde  $y(a) = b$  vervangen we door één integraalvergelijking

$$(6) \quad y(x) = b + \int_a^x f(t, y) dt.$$

We trachten nu een oplossing van (6) te vinden door de iteratiemethode van de vorige paragraaf en hebben dan meteen een oplossing van de differentiaalvergelijking met  $y(a)=b$ .

We beginnen met  $y_0(x) \equiv b$  te nemen en definiëren dan achtereenvolgens de functies  $y_1(x), y_2(x), \dots$  voor het interval  $|x-a| \leq p$  door de recurrente definitie

$$(7) \quad y_n(x) = b + \int_a^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Dit is zinvol, want met behulp van volledige inductie kunnen we aantonen, dat  $y_n(x)$  voor dit interval continu is en dat de kromme  $y=y_n(x)$  voor  $|x-a| \leq p$  binnen de rechthoek  $R$  verloopt. (Gebruik (7) en daarna (4)).

We tonen vervolgens aan, dat voor  $|x-a| \leq p$

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

bestaat en dat daar de kromme  $y=y(x)$  binnen  $R$  verloopt. Gemakshalve zij  $x \geq a$ . Uit (7) volgt

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_a^x \{f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))\} dt,$$

dus wegens de voorwaarde van Lipschitz

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq A \int_a^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \quad (n=1, 2, \dots)$$

en hieruit, door volledige inductie,

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq A^n B \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (n=0, 1, \dots)$$

waar  $B = \max_{|t-a| \leq p} |y_1(t) - y_0(t)|$ , dus een constante, voorstelt. Daaruit volgt weer, dat de reeks

$$(8) \quad y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots$$

uniform in  $[a, a+p]$  convergeert. Noemen we de som  $y(x)$ , dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$  en de onderstreepte voorwaarden zijn vervuld voor  $a \leq x \leq a+p$ . Het bewijs voor  $a-p \leq x \leq a$  gaat analoog.

Vervolgens tonen we aan, dat  $y(x)$  aan de integraalvergelijking (6) voldoet: Voor  $|x-a| \leq p$  is

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \\ &= b + \int_a^x f(t, y(t)) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \{f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))\} dt. \end{aligned}$$

Hierin is wegens de voorwaarde van Lipschitz

$$\left| \int_a^x \{f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y(t))\} dt \right| \leq A \int_a^x |y_{n-1}(t) - y(t)| dt$$

en het rechterlid nadert voor  $n \rightarrow \infty$  tot nul wegens de uniforme convergentie van de reeks (8), zodat (6) vervuld is.

Tenslotte tonen we aan, dat er voor  $|x-a| \leq p$  slechts één integraalkromme door  $(a, b)$  gaat. Stel  $y^*(x)$  is een tweede integraal en stel voor  $|x-a| \leq p$

$$\text{Max } |y(x) - y^*(x)| = C,$$

dan volgt

$$y(x) - y^*(x) = \int_a^x \{f(t, y(t)) - f(t, y^*(t))\} dt,$$

dus

$$|y(x) - y^*(x)| \leq AC |x-a|$$

Door herhaling van deze redenering vindt men

$$|y(x) - y^*(x)| \leq \frac{A^n C |x-a|^n}{n!}$$

en door  $n \rightarrow \infty$

$$y(x) - y^*(x) \equiv 0.$$

Hiermede is ons theorema geheel bewezen.

### § 3. Continue afhankelijkheid van de beginvoorwaarden.

De integraal  $y(x)$  welke voldoet aan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b$$

hangt ook af van de keuze van  $a$  en  $b$ ; dus  $y(x) = y(a, b, x)$ .

We tonen hieraan, dat  $y(x)$  bij vaste  $a$  continu van  $b$  afhangt, wanneer de voorwaarden van de existentiestelling vervuld zijn.

We nemen daartoe een gevarieerde waarde  $\beta = b+h$  van  $b$  en beschouwen de oplossing  $\eta(x)$  van

$$\frac{d\eta}{dx} = f(x, \eta), \quad \eta(a) = \beta.$$

We beginnen met  $\eta_0(x) = \beta = b+h$  te stellen en krijgen als  $|h|$  voldoende klein is evenals in de vorige § een uniform tot  $\eta(x)$  naderende rij van functies

$$\eta_n(x) = \beta + \int_a^x f(t, \eta_{n-1}(t)) dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Blijkbaar is  $|y_0(x) - \eta_0(x)| \leq |h|$  en

$$\begin{aligned} |y_n(x) - \eta_n(x)| &\leq |h| + \left| \int_a^x |f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, \eta_{n-1}(t))| dt \right| \\ &\leq |h| + |h| A \left| \int_a^x |y_{n-1}(t) - \eta_{n-1}(t)| dt \right|. \end{aligned}$$

Past men volledige inductie toe, dan krijgt men hieruit

$$|y_n(x) - \eta_n(x)| \leq |h| \sum_{\nu=0}^n \frac{A^\nu |x-a|^\nu}{\nu!} \leq |h| e^{A|x-a|}.$$

Voor  $n \rightarrow \infty$  vindt men zo

$$|y(x) - \eta(x)| \leq |h| e^{A|x-a|},$$

zodat het verschil tussen  $y(x)$  en  $\eta(x)$  tot nul nadert als  $h \rightarrow 0$ .

Op analoge wijze kunnen we aantonen, dat bij vaste  $b$  de integraal  $y(x)$  continu van  $x$  afhangt.

#### § 4. Stelsels van vergelijkingen.

In vele getallen treden stelsels van differentiaalvergelijkingen op van het type

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{cases}$$

op, waarbij een oplossing bestaat uit twee functies  $y(x)$ ,  $z(x)$ , die aan (9) voldoen. B.v. kan de differentiaalvergelijking van de tweede orde

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy + x^2 = 0$$

worden vervangen door het stelsel

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z \\ \frac{dz}{dx} = xy - x^2 \end{cases}.$$

Een "integraal"  $(y(x), z(x))$  van (9) stelt in de ruimte een kromme voor. In elk punt  $(x, y, z)$  van de kromme zijn door (9) de richtingsgetallen van de tangent gegeven; deze zijn n.l.  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ofwel in ons geval:  $dx$ ,  $f(x, y, z)dx$ ,  $g(x, y, z)dx$ . We krijgen dus bij elk stelsel (9) in de ruimte een richtingsveld geheel analoog aan dat uit het vorig hoofdstuk. Het ligt weer voor de hand om te veronderstellen dat onder bepaalde voorwaarden één en slechts één "integraalkromme" door een gegeven punt  $(a, b, c)$  gaat, d.w.z. dat er juist één oplossingsstelsel  $(y(x), z(x))$  van (9) is met  $y(a)=b$ ,  $z(a)=c$ .

In plaats van (9) beschouwen we het meer algemene stelsel

$$(10) \quad \frac{dy_\mu}{dx} = f_\mu(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (\mu=1, 2, \dots, m)$$



met de beginvoorwaarden

$$(11) \quad y_{\mu}(a) = b_{\mu} \quad (\mu=1,2,\dots,m).$$

We kunnen de behandeling sterk bekorten door invoering van de vectornotatie:

We beschouwen  $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))$  als een vector  $Y(x)$ , waarvan de componenten van  $x$  afhangen. Zijn de componenten alle continu, dan heet de vector continu in  $x$ , zijn ze differentieerbaar dan verstaan we onder  $Y'(x)$  de vector  $(y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_m'(x))$ . Onder  $|Y| = |(y_1, y_2, \dots, y_m)|$  verstaan we  $\text{Max}_{\mu=1, \dots, m} |y_{\mu}|$ . Elke functie  $f_{\mu}(x, y_1, \dots, y_m)$  uit (10) schrijven we  $f_{\mu}(x, Y)$  en de vector gevormd door deze  $m$  functies  $f_{\mu}(x, Y)$  schrijven we kortweg

$$F(x, Y),$$

zodat (10) en (11) overgaat in

$$(10^*) \quad Y'(x) = F(x, Y(x)), \quad Y(a) = B.$$

We gaan dit weer vervangen door een integraalvergelijking in vectornotatie:

$$Y(x) = B + \int_a^x F(t, Y(t)) dt,$$

equivalent met de  $m$ -vergelijkingen

$$y_{\mu}(x) = b_{\mu} + \int_a^x f_{\mu}(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) dt.$$

Door het iteratieprocedé uit § 2 toe te passen, waarbij we

$$\begin{aligned} Y_0(x) &\equiv B, \\ Y_n(x) &= B + \int_a^x F(t, Y_{n-1}(t)) dt \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned}$$

stellen, komen we geheel analoog aan het voorgaande tot de volgende existentiëlestelling voor systemen:

Laat de componenten  $f_{\mu}(x, y, \dots, y_m)$  van een vectorfunctie  $F(x, Y)$  alle continu zijn en een begrensd gesloten gebied  $G$  van de  $(m+1)$ -dimensionale Euclidische ruimte. Zij verder in  $G$

$$(4^*) \quad |F(x, Y)| \leq M$$

en een voorwaarde van Lipschitz vervuld:

$$(5^*) \quad |F(x, Y_1) - F(x, Y_2)| \leq A |Y_1 - Y_2|$$

Kiest men binnen  $G$  een  $(m+1)$ -dimensionale balk  $R$ :

$$|x-a| \leq p, \quad |y_{\mu} - b_{\mu}| \leq Mp \quad (\mu=1,2,\dots,m)$$

dan is er voor  $|x-a| \leq p$  één en slechts één oplossingsstelsel  $Y(x)=(y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x))$  van (10\*) (dus van (10) en (11) samen).

Opmerking: (4\*) betekent dus  $|f_{\mu}(x, y_1, \dots, y_m)| \leq M$  ( $\mu=1,2,\dots,m$ )  
(5\*) betekent: Zijn  $(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m})$  en  $(x, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m})$  twee punten uit  $G$ , dan is

$$|f_{\mu}(x, y_{11}, \dots, y_{1m}) - f_{\mu}(x, y_{21}, \dots, y_{2m})| \leq A \max_{\mu=1, \dots, m} |y_{1\mu} - y_{2\mu}|.$$

Het bewijs is haast woordelijk hetzelfde als dat van § 2.

### § 5. Lineaire stelsels.

We passen de voorgaande stelling toe op het speciale geval, dat elke component van de vector  $F(x, Y)$  lineair in  $y_1, y_2, \dots, y_m$  is:

$f_{\mu}(x, y_1, y_2, \dots, y_m) = \alpha_{\mu 1}(x)y_1 + \dots + \alpha_{\mu m}(x)y_m + \beta_{\mu}(x)$   
( $\mu=1, \dots, m$ ). In dit geval neemt het stelsel de volgende vorm aan

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \alpha_{11}(x)y_1 + \dots + \alpha_{1m}(x)y_m + \beta_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_m}{dx} = \alpha_{m1}(x)y_1 + \dots + \alpha_{mm}(x)y_m + \beta_m(x). \end{cases}$$

We spreken dan van een lineair stelsel.

Existentiëtheorema: Laat in een gesloten interval  $[h, k]$  alle coëfficiënten  $\alpha_{\mu\nu}(x)$  en alle z.g. storingsfuncties  $\beta_{\mu}(x)$  continu zijn. Kies in  $[h, k]$  een willekeurig getal  $a$  en verder  $m$  volkomen willekeurige getallen  $b_1, b_2, \dots, b_m$ .

Dan is er één en slechts één stelsel oplossingen  $(y_1(x), \dots, y_m(x))$  van (12) zodat  $y_{\mu}(a) = b_{\mu}$  ( $\mu=1, 2, \dots, m$ ). Deze oplossingen voldoen voor het gehele interval  $h < x < k$ .

Bewijs: Kies het positieve getal  $K$  zo groot, dat

$$|\alpha_{\mu\nu}(x)| \leq K, \quad |\beta_{\mu}(x)| \leq K,$$

en kies voor het gebied  $G$ :

$$h \leq x \leq k, \quad |y_{\mu} - b_{\mu}| \leq 1 \quad (\mu=1, \dots, m).$$

We laten eerst zien dat in  $G$  de Lipschitz voorwaarde is vervuld met  $A=K$ . Immers

$$|f_{\mu}(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}) - f_{\mu}(x, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m})| =$$

$$|\alpha_{\mu_1}(x)(y_{11}-y_{21}) + \dots + \alpha_{\mu_m}(y_{1m}-y_{mm})| \\ \leq K |Y_1 - Y_2|.$$

In de tweede plaats zoeken we een getal  $M$ , zodat voor elk punt  $(x, y_1, \dots, y_m)$  uit  $G$  aan (4\*) is voldaan. We kiezen daartoe

$$M = m+1 + \sum_{\mu=1}^m |b_{\mu}|,$$

immers

$$|f_{\mu}(x, y_1, \dots, y_m)| = |\alpha_{\mu_1}(x) y_1 + \dots + \alpha_{\mu_m}(x) y_m + \beta_{\mu}(x)| \\ \leq K(|y_1| + \dots + |y_m| + 1) \leq M.$$

Tenslotte kiezen we het positieve getal  $p \leq M^{-1}$ , zodat het interval  $|x-a| \leq p$  nog geheel binnen  $[h, k]$  ligt. De  $(m+1)$ -dimensionale balk  $R$ :

$$|x-a| \leq p, \quad |y_{\mu} - b_{\mu}| \leq pM \quad (\mu=1, \dots, m)$$

ligt dan geheel binnen  $R$ .

Alle voorwaarden van de vorige stelling zijn vervuld en er is dus juist één stelsel oplossingen  $(y_1(x), \dots, y_m(x))$  van (12) met  $y_{\mu}(a) = b_{\mu}$  voor het interval  $|x-a| \leq p$ .

Door een bewijs uit het ongerijmde kunnen we aantonen, dat deze oplossingen voortgezet kunnen worden in het gehele interval  $h < x < k$ .

Opgave 1: In het bewijs van de existentiëlestelling kan men voor  $y_0(x)$  elke continuefunctie nemen met  $|y_0(x)-b| \leq Mp$  voor  $|x-a| \leq p$  (N.B. de kromme  $y=y_0(x)$  hoeft niet door  $(a,b)$  te gaan).

Opgave 2: Ga na dat de resultaten van § 4 uit het vorig hoofdstuk, waarbij er door de oorsprong meerdere integraalkrommen gaan, niet in strijd zijn met het existentiëletheorema.

Opgave 3:  $y' = \sqrt{|y|}$  heeft minstens twee integraalkrommen gaande door 0, n.l.  $1^0=y=0$ ,  $2^0=y = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{als } x \geq 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 & \text{als } x \leq 0 \end{cases}$ .

Aan welke voorwaarde van het existentiële theorema is niet voldaan? Bewijs dat.

Opgave 4: Bij de differentiaalvergelijking  $\frac{dy}{dx} = x+y$  met beginvoorwaarde  $x=0$ ,  $y=1$  neme men  $y_0(x)=1$ . Bereken  $y_3(x)$  en vergelijk deze met de reeksontwikkeling van  $y(x)$

$$\begin{aligned} \text{Antwoord: } y_3(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} \\ y(x) &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \dots \end{aligned}$$

Opgave 5: Los de differentiaalvergelijking

$$y' = yx,$$

d.m.v. het iteratieproces van Picard op. Beginvoorwaarde:  $y(0)=1$ .

$$\text{Antwoord: } y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Opgave 6: Ga na, dat bij de vergelijking

$$y' = x^2 + y^2$$

aan de voorwaarden van de existentiëlestelling is voldaan.

Bepaal  $y_3(x)$ ; beginvoorwaarde:  $y(0) = 0$ .

$$\text{Antwoord: } y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

Opmerking: Deze differentiaalvergelijking is niet elementair op te lossen.

VI. Lineaire differentiaalvergelijkingen

door  
Prof. Dr J. Popken

§1. Existentiestelling.

Onder een lineaire differentiaalvergelijking verstaan we een vergelijking van de vorm

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = \beta(x).$$

De vergelijking heet homogeen of gereduceerd als  $\beta(x) \equiv 0$ .  $\beta(x)$  wordt wel de storingsfunctie genoemd.

Voorbeeld: de lineaire vergelijking van de eerste orde uit II, § 1.

De gehele theorie van deze vergelijkingen berust op het volgende fundamentele resultaat:

Existentiestelling: Laat de functies  $\alpha_{\nu}(x)$ ,  $\beta(x)$  uit (1) continu zijn in het gesloten interval  $[h, k]$ , terwijl  $\alpha_n(x)$  in  $[h, k]$  geen nulpunt heeft. Stel  $h < a < k$ , terwijl  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  willekeurige getallen zijn, dan is er één en slechts één integraal  $y(x)$  van (1), zodat

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}.$$

Deze integraal bestaat voor  $h < x < k$ .

In het bijzonder voldoet aan de homogene vergelijking

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = 0$$

slechts één functie  $y(x)$  met  $y^{(\nu)}(a) = 0$  voor  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ; nl.  $y(x) \equiv 0$ .

Bewijs: We voeren de vergelijking (1) over in een lineair stelsel door te stellen

$$\begin{aligned} z_1(x) &= y(x) \\ z_2(x) &= y'(x) \\ &\dots \\ z_{n-1}(x) &= y^{(n-2)}(x) \\ z_n(x) &= y^{(n-1)}(x), \end{aligned}$$

dan is (1) equivalent met het lineaire stelsel

$$\begin{cases} z_1' = z_2(x) \\ z_2' = z_3(x) \\ \dots \\ z_{n-1}' = z_n(x) \\ z_n' = \frac{\alpha_0(x)}{\alpha_n(x)} z_1 + \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_n(x)} z_2 + \dots + \frac{\alpha_{n-1}(x)}{\alpha_n(x)} z_n - \beta(x). \end{cases}$$

Volgens de existentiestelling voor lineaire stelsels is er voor  $h < x < k$  één en slechts één systeem oplossingen  $(z_1(x), \dots, z_n(x))$  met  $z_\nu(a) = b_{\nu-1}$  ( $\nu = 1, \dots, n$ ). q.e.d.

§ 2.

Stelling 1. Stel we hebben de gereduceerde vergelijking

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu(x) y^{(\nu)}(x) = 0$$

al opgelost. Stel verder, dat we één oplossing  $y_0(x)$  van de inhomogene vergelijking (1) gevonden hebben. Dan krijgen we alle oplossingen van (1) door te stellen

$$y(x) = y_0(x) + \eta(x),$$

waar  $\eta(x)$  alle oplossingen van de gereduceerde vergelijking doorloopt.

We zullen ons daarom voorlopig tot de homogene vergelijking beperken.

Stelling 2. De integralen van de homogene vergelijking vormen een lineaire ruimte, d.w.z. zijn  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  integralen van (2) en zijn  $C_1, \dots, C_m$  willekeurige constanten, dan voldoet ook

$$y(x) = \sum_{\mu=1}^m C_\mu y_{\mu}(x)$$

aan (2).

Toepassing: We willen de vergelijking

$$(3) \quad y'' + y = x^2 + 2$$

integreren. Daartoe beschouwen we eerst de vergelijking

$$(4) \quad y'' + y = 0,$$

waarvan blijkbaar  $y = \sin x$  en  $y = \cos x$  oplossingen zijn, dientengevolge ook

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

We zullen later (§ 4) zien dat dit alle integralen van (4) zijn.

Vrij gemakkelijk ziet men een z.g. particuliere integraal van (3), n.l.  $y = x^2$ . Zo vinden we als oplossingen van (3)

$$y = x^2 + C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

§ 3. Lineaire afhankelijkheid.

Definitie: De  $n$  functies  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  gegeven in een interval  $(h, k)$  heten lineair afhankelijk als er  $n$  constanten  $C_1, \dots, C_n$  zijn, zodat

$$(5) \quad \sum_{\nu=1}^n c_{\nu} f_{\nu}(x) \equiv 0 \quad \text{in } (a,b)$$

zonder dat alle  $c_{\nu} = 0$  zijn.

Is het niet mogelijk de constanten  $c_{\nu}$  zo te kiezen dat (5) vervuld is zonder in  $c_{\nu} = 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) te vervallen, dan heten de functies  $f_{\nu}(x)$  lineair onafhankelijk.

Definitie. Beschouw een lineaire ruimte van functies  $f(x)$  gedefinieerd op een interval  $(h,k)$ . Laat  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  lineair onafhankelijk zijn, terwijl alle functies  $f(x)$  van de ruimte de vorm

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

hebben, dan heet het getal  $n$  de dimensie van de lineaire ruimte.

Laat de functies  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  lineair afhankelijk zijn in  $(h,k)$  en laten deze functies bovendien minstens  $(n-1)$  maal differentieerbaar zijn in  $(h,k)$ . Dan volgt uit (5)

$$\sum_{\nu=1}^n c_{\nu} f_{\nu}^{(k)}(x) \equiv 0 \quad \text{in } (h,k) \quad \text{voor } k=0, 1, \dots, n-1,$$

dus

$$W = |f_{\nu}^{(k)}(x)| = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{in } (h,k).$$

W heet de determinant van Wronski, en we vonden:

Stelling 3. Zijn  $n$  functies  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  lineair afhankelijk in  $(h,k)$  en daar bovendien minstens  $(n-1)$  maal differentieerbaar, dan is de bijbehorende determinant van Wronski in dit interval identiek nul.

Toepassing: Zijn  $c_1, c_2, \dots, c_n$  onderling verschillend, dan zijn de functies  $e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, \dots, e^{c_n x}$  in elk interval  $(h,k)$  lineair onafhankelijk.

Bewijs:

$$W = \begin{vmatrix} e^{c_1 x} & e^{c_2 x} & \dots & e^{c_n x} \\ c_1 e^{c_1 x} & c_2 e^{c_2 x} & \dots & c_n e^{c_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{n-1} e^{c_1 x} & c_2^{n-1} e^{c_2 x} & \dots & c_n^{n-1} e^{c_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{c_1 x + c_2 x + \dots + c_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \dots & c_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

omdat de laatste determinant (det. van Van der Monde) gelijk is aan

$$\prod_{\nu > \mu} (c_\nu - c_\mu) \neq 0.$$

Het omgekeerde van stelling 3 is niet waar. Uit het nul zijn van een determinant van Wronski in een interval  $(h,k)$  volgt nog niet, dat de functies noodzakelijk lineair afhankelijk zijn. Voorbeeld: Zij  $(h,k)$  een interval, dat  $x=0$  bevat en kies  $f_1(x)=x^2$ ,  $f_2(x)=$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{voor } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{voor } x < 0 \end{cases}.$$

Deze twee functies zijn lineair onafhankelijk op  $(h,k)$ , terwijl toch de determinant van Wronski daar identiek nul is.

**§ 4. Hoofdstelling.** Laat in de homogene lineaire differentiaalvergelijking

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu(x) y^{(\nu)}(x) = 0$$

de coëfficiënten  $\alpha_\nu(x)$  alle continu zijn in  $[h,k]$ , terwijl  $\alpha_n(x)$  in dit interval geen nulpunt heeft.

In het interval  $(h,k)$  vormen de integralen een lineaire ruimte met dimensie  $n$ .

Bewijs: De bewering bestaat uit twee gedeelten:

a) Er zijn in  $(h,k)$   $n$  lineair onafhankelijke integralen

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x).$$

b) Elke andere integraal  $y(x)$  heeft de vorm

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu y_\nu(x).$$

Bewijs: a) Kies  $a$  binnen het interval  $(h,k)$ .

De voorwaarden van de existentiestelling zijn vervuld. Zij  $\nu$  één der getallen  $1, 2, \dots, n$ . Er is dus één bepaalde integraal  $y_\nu(x)$  van (2) met

$$y_\nu(a) = 0, y'_\nu(a) = 0, \dots, y_\nu^{(\nu-1)}(a) = 1, y_\nu^{(\nu)}(a) = 0, \dots, y_\nu^{(n-1)}(a) = 0.$$

Voor deze  $n$  functies is de bijbehorende determinant van Wronski voor  $x=a$

$$W(a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

De functies zijn dus lineair onafhankelijk in  $(h,k)$  (stelling 3).

b) Stel  $y(x)$  is een willekeurige integraal van (2). We stellen  $y^{(\nu)}(a) = c_{\nu+1}$  ( $\nu=0, 1, \dots, n-1$ ). Daar de integralen van (2) een lineaire ruimte vormen is

$$y(x) = \sum_{\mu=1}^n c_\mu y_\mu(x)$$



ook een integraal van (2). Nu is

$$\eta^{(v)}(a) = \sum_{\mu=1}^n c_{\mu} y_{\mu}^{(v)}(a) = c_{v+1},$$

zodat volgens de existentiëlestelling  $y(x) \equiv \eta(x)$  in  $(h,k)$ .

Opmerking: Een stelsel  $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ , waaruit alle integralen met behulp van constante coëfficiënten lineair kunnen worden opgebouwd, heet een fundamenteelstelsel.

Voorbeeld: In het geval van een vergelijking van de eerste orde

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)$$

bestaat een fundamenteelstelsel uit één integraal  $y_1(x)$  en alle andere integralen hebben de vorm  $c y_1(x)$ . Vergelijk dit met het resultaat van II, § 1.

Stel, dat  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  integralen van de homogene vergelijking (2) zijn, terwijl de voorwaarden van de hoofdstelling vervuld zijn. Laat voor een getal  $a$  met  $h < a < k$  de determinant van Wronski

$$W(a) = |y_{\nu}^{(k)}(a)| = 0$$

zijn. We kunnen dan constanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$  vinden, die niet alle nul zijn, zodat

$$c_1 y_1^{(k)}(a) + c_2 y_2^{(k)}(a) + \dots + c_n y_n^{(k)}(a) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

is. Stellen we

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

dan is

$$y^{(k)}(a) = 0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

en dus volgens de existentiëlestelling  $y(x) \equiv 0$ , zodat  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  lineair afhankelijk zijn.

Onder de genoemde voorwaarden zijn dus  $n$  integralen van een lineaire homogene vergelijking van de  $n^{\text{de}}$  orde dan en alleen dan lineair afhankelijk als hun determinant van Wronski in het interval nul wordt.

Tevens volgt dan, dat in het interval  $(h,k)$  de determinant van Wronski of steeds van nul verschilt of identiek nul is.

Dit laatste volgt ook uit de z.g. identiteit van Abel. Zij  $W(x)$  de hiervoor bedoelde determinant, dan is:

$$W(x) = W(a) e^{-\int_a^x \frac{\alpha_{n-1}(t)}{\alpha_n(t)} dt}$$

voor  $x$  uit  $(h,k)$ .

Bewijs van deze identiteit:

$$\begin{aligned} \alpha_n(x) W'(x) &= \alpha_n(x) \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) \\ \alpha_n(x) y_1^{(n)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) \\ \sum_{\mu=0}^{n-1} \alpha_\mu(x) y_1^{(\mu)}(x) \end{vmatrix} \\ &= -\alpha_{n-1}(x) W(x), \end{aligned}$$

zodat  $W(x)$  aan een differentiaalvergelijking van de eerste orde voldoet. Integratie levert de gevraagde betrekking.

Opgaven.

- 1) Bewijs dat de functies  $x^3$  en  $|x|^3$  lineair onafhankelijk zijn op elk interval dat 0 bevat, alhoewel de determinant van Wronski voor deze beide functies 0 is.
- 2) Onderzoek of de volgende functies op het interval  $-\infty < x < \infty$  lineair afhankelijk of onafhankelijk zijn:
  - a)  $x$  en  $3x$ ,
  - b)  $x$  en  $x^2$ ,
  - c)  $x$  en  $x+1$ ,
  - d)  $\sin x$  en  $\cos x$ .

Antwoord: a) afhankelijk

b), c) en d) onafhankelijk.

- 3) Onder de determinant van Gram voor de functies

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  op zeker interval  $(a,b)$  verstaan we:

$$G = \begin{vmatrix} \int_a^b \varphi_1^2(x) dx, & \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx, & \dots & \int_a^b \varphi_1(x) \cdot \varphi_n(x) dx \\ \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx, & \int_a^b \varphi_2^2(x) dx & \dots & \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_n(x) dx \\ \vdots & & & \vdots \\ \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_1(x) dx, & \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_2(x) dx, & \dots & \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \end{vmatrix}$$

Bewijs: Een nodig en voldoende voorwaarde opdat  $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$  lineair afhankelijk zijn op  $(a, b)$ , is  $G = 0$ .

4) Bepaal de determinant van Wronski voor de volgende functies:

$$(x+1)^2, (3x^2+2x-3) \text{ en } (x^2-2).$$

Zijn de functies lineair onafhankelijk?

Antwoord:  $W(x) = 0$ .

Ja.

5) Bewijs dat een stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen lineair blijft als we de substitutie  $x = \varphi(t)$  uitvoeren.

VII. Integratiemethoden bij lineaire differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

§1. Verlaging van de orde. Stel we hebben een lineaire vergelijking van de  $n^{\text{de}}$  orde

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = \beta(x),$$

terwijl we op de één of andere manier reeds een particuliere integraal  $y_0(x) \neq 0$  van de gereduceerde vergelijking kennen. Dan is

$$(2) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu}(x) y_0^{(\nu)}(x) \equiv 0,$$

Door een eenvoudige kunstgreep is dan de vergelijking (1) terug te brengen tot één van lagere orde. We stellen daartoe

$$(3) \quad y(x) = y_0(x) \eta(x).$$

Volgens de formule van Leibniz is voor  $\nu=0, 1, \dots, n$

$$y^{(\nu)}(x) = y_0^{(\nu)} \eta + \binom{\nu}{1} y_0^{(\nu-1)} \eta' + \dots + \binom{\nu}{\nu} y_0 \eta^{(\nu)},$$

zodat het linkerlid van (1) lineair in  $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$  kan worden uitgedrukt:

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^n \beta_{\nu}(x) \eta^{(\nu)}(x) = \beta(x).$$

Hierbij is wegens (2)

$$\beta_n(x) = \alpha_n(x) y_0^{(n)}(x), \quad \beta_0(x) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu}(x) y_0^{(\nu)}(x) \equiv 0,$$

zodat uit (4) volgt

$$\sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}(x) \eta^{(\nu)}(x) = \beta(x).$$

Dit laatste is echter een vergelijking van de orde  $n-1$  in  $\eta'(x)=z(x)$ .

Een vergelijking van de tweede orde reduceert men zo tot een lineaire vergelijking van de eerste orde.

Voorbeeld:  $\alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \beta(x)$  met  $\alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \equiv 0$ . We zien gemakkelijk, dat  $y_0(x) = e^x$  een integraal is van de gereduceerde vergelijking

$$\alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = 0.$$

We stellen

$$y(x) = e^x \eta(x),$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$\alpha_2(x)\eta''(x) + \{2\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\}\eta'(x) = \beta(x)e^{-x}$$

De substitutie

$$\eta'(x) = z(x)$$

geeft een lineaire vergelijking van de eerste orde

$$\alpha_2(x)z'(x) + \{2\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\}z(x) = \beta(x)e^{-x}$$

Een speciaal geval van het voorgaande is

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

Na reductie van de orde vindt men

$$xz' - z = 0$$

met de oplossingen  $z = cx$ , d.w.z.  $y = (Ax^2+B)e^x$ .

§2. Lineaire operatoren. Een operator  $O$  voert een functie  $f(x)$  over in een andere functie  $\varphi(x)$ ; we schrijven dan  $\varphi(x) = O f(x)$ . B.v.  $D f(x) = f'(x)$ . Een operator  $O$  heet lineair als

$$1^\circ \quad O \{c f(x)\} = c O f(x),$$

$$2^\circ \quad O \{f(x) + g(x)\} = O f(x) + O g(x).$$

$1^\circ$  en  $2^\circ$  zijn equivalent met

$$O \left\{ \sum_{\nu=1}^n c_\nu f_\nu(x) \right\} = \sum_{\nu=1}^n c_\nu O f_\nu(x).$$

Voorbeeld: de D-operator van zoëven.

Optellen van operatoren:

$$(O_1 + O_2) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} O_1 f(x) + O_2 f(x);$$

Vermenigvuldigen van operatoren:

$$O_1 O_2 f(x) \stackrel{\text{def}}{=} O_1 \{O_2 f(x)\}.$$

Deze laatste behoeft niet commutatief te zijn.

Machtsverheffen:

$$\begin{aligned} 0^0 f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) && \text{(identiteit)} \\ 0^1 f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 f(x) \\ 0^2 f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \{0 f(x)\} \\ 0^n f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \{0^{n-1} f(x)\} && (n=1,2,3,\dots) . \end{aligned}$$

Bv. is  $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$ ; dit is weer een lineaire operator. Is

$P(x) = \sum_{v=0}^n \alpha_v x^v$  een willekeurige veelterm in  $x$ , dan is per definitie  $P(D) = \sum_{v=0}^n \alpha_v 0^v$ .  $P(x)$  heet de karakteristieke veelterm van de operator  $P(D)$ .  $P(x)=0$  heet de karakteristieke vergelijking.

De lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$\sum_{v=0}^n \alpha_v y^{(v)}(x) = \beta(x)$$

kunnen we kortweg schrijven

$$P(D) y = \beta(x).$$

De operator  $P(D)$  is lineair; daarmee staat in verband dat de integralen van de homogene vergelijking  $P(D)y=0$  een lineaire ruimte vormen (zie vorig hoofdstuk, stelling 2).

Stelling 1. Is  $P(D)$  een operator met karakteristieke veelterm  $P(x)$ ,  $Q(D)$  een operator met karakteristieke veelterm  $Q(x)$ , dan hebben  $P(D) + Q(D)$  en  $P(D) Q(D)$  respectievelijk als karakteristieke veeltermen  $P(x) + Q(x)$  en  $P(x) Q(x)$ .

Gevolgen:  $P(D) Q(D) = Q(D) P(D)$  "commutatieve wet",

$$P(D) \{Q(D) R(D)\} = \{P(D) Q(D)\} R(D) \text{ "associatieve wet".}$$

M.a.w. in  $P_1(D) P_2(D) \dots P_n(D)$  kunnen we de volgorde van de factoren willekeurig veranderen.

§3. Homogene vergelijking met constante coëfficiënten:

$$(5) \quad \sum_{v=0}^n \alpha_v D^v y = 0.$$

De karakteristieke veelterm is  $P(x) = \sum_{v=0}^n \alpha_v x^v$ , zodat de vergelijking ook in de vorm van  $P(D) y = 0$  kan worden geschreven. We nemen aan, dat alle coëfficiënten  $\alpha_v$  reëel zijn.

1<sup>o</sup> geval: alle wortels van de karakteristieke vergelijking,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , zijn reëel en verschillend.

Nu is  $P(D) = \alpha_n(x-p_1)\dots(x-p_n)$ , dus

$$P(D) y = \alpha_n(D-p_1)\dots(D-p_n)y .$$

We krijgen oplossingen door te stellen

$$(D-p_n) y = 0, (D-p_{n-1}) y = 0, \dots, (D-p_1) y = 0.$$

We worden zo gevoerd tot de  $n$  particuliere oplossingen

$$(6) \quad y_1(x) = e^{p_1 x}, y_2(x) = e^{p_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{p_n x} .$$

We hebben al gezien, dat deze  $n$  functies in elk interval lineair onafhankelijk zijn (vorig hoofdstuk; toepassing van stelling 3). Volgens de hoofdstelling van het vorige hoofdstuk vormen de integralen van (5) een lineaire ruimte met dimensie  $n$ . M.a.w. Alle integralen van (5) hebben de vorm

$$\sum_{v=1}^n c_v e^{p_v x} .$$

De functies (6) vormen dus een fundamenteelsysteem.

Voorbeeld:  $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$  of

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 0$$

De karakteristieke vergelijking  $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$  heeft de wortels  $p_1=1, p_2=-1, p_3=-2$ , zodat alle oplossingen de vorm

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

hebben.

2° geval. De wortels van de karakteristieke vergelijking  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zijn verschillend, maar kunnen complex zijn.

Is  $z(x) = u(x) + i v(x)$  een complexe functie van een reële variabele  $x$ , dan is

$$(7) \quad \frac{dz}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx} .$$

Voor een complex getal  $p$  is

$$\frac{d}{dx} e^{px} = p e^{px} .$$

Uit (7) volgt

$$Dz = Du + i Dv, D^v z = D^v u + i D^v v ,$$

dus

$$P(D)z = P(D)u + i P(D)v .$$

Is dus  $z=u+iv$  een integraal van  $P(D)z=0$ , dan voldoet het reële deel  $u$  aan  $P(D)u=0$  en het imaginaire deel  $v$  aan  $P(D)v=0$ .

De voorgaande theorie der operatoren gaat ook door voor complexe functies  $Y(x)$  van een reële variabele  $x$ . In ons geval vinden we zo weer  $n$  integralen (6) van de differentiaalvergelijking (5), waar nu echter  $p_1, p_2, \dots, p_n$  complex kunnen zijn. Iedere integraal  $e^{px}$  met complexe  $p=q+ir$  voert dan tot twee reële integralen

$$(8) \quad e^{qx} \cos rx, \quad e^{qx} \sin rx$$

(reëel en imaginair deel van  $e^{px}$ ). We krijgen zo in het geheel weer  $n$  integralen, want met  $p$  komt de wortel  $\bar{p}$  voor en de integraal  $e^{\bar{p}x}$  voert tot dezelfde reële integralen (8).

We zullen straks bewijzen (na stelling 3), dat de zo gevonden integralen lineair onafhankelijk zijn en dus een fundamenteelsysteem vormen.

Voorbeeld:  $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$ . De karakteristieke vergelijking is  $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2) = 0$  met de wortels  $p_1=1, p_2=i\sqrt{2}, p_3=-i\sqrt{2}$ . Een fundamenteelstelsel is dus  $y_1(x)=e^x, y_2(x)=\cos \sqrt{2}x, y_3(x)=\sin \sqrt{2}x$ . De oplossing is dus  $y=c_1 e^x + c_2 \cos \sqrt{2}x + c_3 \sin \sqrt{2}x$ .

### 3<sup>o</sup> geval. Meervoudige wortels.

Stelling 2.  $P(D)e^{\lambda x}y = e^{\lambda x}P(D+\lambda)y$ , m.a.w. men mag een factor  $e^{\lambda x}$  vóór het operatorteken brengen als men maar  $D$  vervangt door  $D+\lambda$ .

Bewijs:  $D(e^{\lambda x}y) = e^{\lambda x}Dy + yDe^{\lambda x} = e^{\lambda x}(D+\lambda)y$ ,

$$(D-p)e^{\lambda x}y = e^{\lambda x}(D+\lambda-p)y,$$

$$\begin{aligned} P(D)e^{\lambda x}y &= \alpha_n(D-p_1)\dots(D-p_n)e^{\lambda x}y \\ &= \alpha_n(D-p_1)\dots(D-p_{n-1})e^{\lambda x}(D+\lambda-p_n)y \\ &= \alpha_n(D-p_1)\dots(D-p_{n-2})e^{\lambda x}(D+\lambda-p_{n-1})(D+\lambda-p_n)y \\ &= \alpha_n e^{\lambda x}(D+\lambda-p_1)\dots(D+\lambda-p_n)y \\ &= e^{\lambda x}P(D+\lambda)y \end{aligned}$$

Voorbeeld:  $(D^2-2D+1)e^x \log x = (D-1)^2 e^x \log x = e^x D^2 \log x = -\frac{e^x}{x^2}$ .

Stel nu dat de karakteristieke veelterm  $P(x) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_\nu x^\nu$  van (5) de vorm

$$P(x) = \alpha_n(x-p_1)^{\mu_1} \dots (x-p_k)^{\mu_k}$$

heeft, waar  $p_1, \dots, p_k$  verschillende reële of complexe getallen zijn. De vergelijking (5) heeft nu de vorm



$$\alpha_n (D-p_1)^{\mu_1} \dots (D-p_k)^{\mu_k} y = 0.$$

We vinden particuliere integralen uit

$$(9) \quad (D-p_k)^{\mu_k} y = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, k)$$

Eén oplossing van (9) is  $y = e^{p_k x}$ . Verdere oplossingen vinden we door toepassing van de methode van §1. We stellen nl.

$$y = e^{p_k x} \eta(x).$$

Dit geeft

$$(D-p_k)^{\mu_k} (e^{p_k x} \eta) = 0.$$

Dus wegens stelling 2 met  $\lambda = p_k$ ,

$$e^{p_k x} D^{\mu_k} \eta = 0 \quad \text{of} \quad \eta^{(\mu_k)} = 0,$$

m.a.w.  $\eta(x)$  is een veelterm van de graad  $\mu_k - 1$ . Dus vinden we voor vaste  $k$  de particuliere integralen

$$e^{p_k x}, x e^{p_k x}, \dots, x^{\mu_k - 1} e^{p_k x};$$

dus in het geheel  $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = n$  integralen.

Is  $p_k = a_k + i r_k$  complex, dan krijgen we bij elke wortel  $p_k$  de reële integralen

$$x^\lambda e^{a_k x} \cos r_k x, \quad x^\lambda e^{a_k x} \sin r_k x \quad (\lambda = 0, 1, \dots, \mu_k - 1)$$

Bij  $\bar{p}_k$ , welke dezelfde multipliciteit als  $p_k$  heeft, krijgt men dezelfde reële integralen. We worden zo dus in elk geval gevoerd tot  $n$  reële integralen. We zullen nog aantonen, dat deze lineair onafhankelijk zijn.

Voorbeeld:  $y^{(6)} + a^2 y^{(4)} - a^4 y^{(2)} - a^6 y = 0$

De karakteristieke vergelijking is

$$x^6 + a^2 x^4 - a^4 x^2 - a^6 = (x^2 - a^2)(x^4 + 2a^2 x^2 + a^4) = 0$$

met de wortels

$$p_{1,2} = \pm a, \quad p_3 = p_4 = ia, \quad p_5 = p_6 = -ia.$$

Een fundamenteel systeem is

$$e^{\pm ax}, \quad \cos ax, \quad \sin ax, \quad x \cos ax, \quad x \sin ax,$$

zodat de oplossing is

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + (c_3 + c_4 x) \cos ax + (c_5 + c_6 x) \sin ax.$$

Stelling 3: Laat  $p_1, p_2, \dots, p_k$  onderling verschillende reële of complexe getallen zijn. Laat verder  $A_1(x), A_2(x), \dots, A_k(x)$  veeltermen in  $x$  zijn met reële of complexe coëfficiënten. Geldt nu in een interval  $(h, k)$

$$\sum_{\kappa=1}^k A_{\kappa}(x) e^{p_{\kappa} x} \equiv 0,$$

dan volgt dat elke veelterm  $A_{\kappa}(x)$  identiek nul is.

Bewijs: Voor  $k=1$  is de stelling evident. Voor  $k \geq 2$  passen we volledige inductie toe: Uit

$$A_1(x) e^{p_1 x} + \dots + A_k(x) e^{p_k x} \equiv 0 \quad \text{in } (h, k)$$

volgt

$$(10) \quad A_1(x) + A_2(x) e^{q_2 x} + \dots + A_k(x) e^{q_k x} \equiv 0$$

met  $q_2 = p_2 - p_1, \dots, q_k = p_k - p_1$ . Zij  $h-1$  de graad van  $A_1(x)$ . Door  $h$ -maal te differentieren verdwijnt de eerste term uit (10) en krijgen we

$$\sum_{\kappa=2}^k \left\{ A_{\kappa}^{(h)} + \binom{h}{1} q_{\kappa} A_{\kappa}^{(h-1)} + \dots + \binom{h}{h} q_{\kappa}^h A_{\kappa} \right\} e^{q_{\kappa} x} \equiv 0.$$

Uit de inductie aanname volgt dus

$$A_{\kappa}^{(h)} + \binom{h}{1} q_{\kappa} A_{\kappa}^{(h-1)} + \dots + \binom{h}{h} q_{\kappa}^h A_{\kappa} \equiv 0 \quad (\kappa=2, \dots, k).$$

De term met  $A_{\kappa}$  heeft de hoogste graad; dus  $A_{\kappa} \equiv 0$  ( $\kappa=2, \dots, k$ ), dus wegens (10) ook nog  $A_1(x) \equiv 0$ . Q.E.D.

Stel nu, dat  $p_1, p_2, \dots, p_k$  de wortels zijn van de karakteristieke verelijking van (5), resp. met multipliciteit  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ . We hebben gezien, dat we  $n$  (reële of complexe) integralen kunnen vinden:

$$(11) \quad y_1(x) = e^{p_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{p_1 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = x^{\mu_1-1} e^{p_1 x}.$$

Uit stelling 3 blijkt, dat deze  $n$  integralen lineair onafhankelijk zijn; in deze zin dat uit

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad \text{in } (a, b)$$

met reële of complexe coëfficiënten  $c_{\nu}$  volgt, dat  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

Laat nu een wortel  $p = q + i r$  van de karakteristieke vergelijking complex zijn, dan komt  $\bar{p} = q - i r$  ook als wortel voor met dezelfde multipliciteit  $\mu$ . Dit geeft aanleiding tot reële integralen van de vorm

$$x^{\nu} e^{q x} \cos r x, \quad x^{\nu} e^{q x} \sin r x \quad (\nu=0, 1, \dots, \mu-1).$$

Vervangen we in het stelsel (11) de voorkomende functies  $x^{\nu} e^{p x}$  en  $x^{\nu} e^{\bar{p} x}$  door  $x^{\nu} e^{q x} \cos r x$  en  $x^{\nu} e^{q x} \sin r x$ , dan is het nieuwe stelsel

integralen nog lineair onafhankelijk. Dit volgt uit de volgende Hulpstelling: Zijn  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  lineair onafhankelijk in  $(h, k)$ . Is  $g_1(x) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ,  $g_2(x) = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ , dan zijn  $g_1(x), g_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$  weer lineair onafhankelijk in  $(h, k)$ .

Door toepassing van dit principe komen we dus tot  $n$  lineair onafhankelijke reële integralen.

Voor het belangrijke geval van de tweede orde gaan we de gevonden resultaten nog even resumeren: We hebben de homogene vergelijking

$$\alpha_2 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0,$$

met de karakteristieke vergelijking

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0.$$

1° De wortels  $p_1$  en  $p_2$  zijn reëel en verschillend;

$$y = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x}.$$

2° de wortels zijn gelijk:  $p_1 = p_2 = p$ ;

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{px}$$

3° de wortels zijn toegevoegd complex:  $p_1 = q + i r$ ,  $p_2 = q - i r$ ;

$$y = e^{qx} (c_1 \cos rx + c_2 \sin rx).$$

Voorbeeld:  $y'' + \omega^2 y = 0$ :  $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$

$$\text{of } y = r \cos(\omega x + \varphi)$$

§ 4. Toepassing: Een veer, in verticale positie, is aan zijn beneden-eind op een vaste balk bevestigd. Bovenop de veer wordt een gewicht gelegd, welke de veer 0,25 cm indrukt. Daarna wordt het gewicht 0,5 cm verder naar beneden gedrukt, dan een benedenwaartse snelheid van  $\sqrt{g}$  cm/sec gegeven en losgelaten. Zoek de laagste stand van het gewicht.

Oplossing: Is  $K$  een kracht, die de veer  $u$  cm indrukt, dan is  $K$  evenredig met  $u$ ; m.a.w.

$$K = c u,$$

waar  $c$  een constante is. Noem de massa van het gewicht  $m$ , zodat  $mg = mg$ .

In ons geval is  $u=0,25$  dus

$$mg = 0,25 c \text{ of } c = 4 mg.$$

Is de veer 0,25 cm ingedrukt, dan zullen we dit de evenwichtspositie noemen. De afstand van het gewicht tot deze evenwichtspositie  $u=u(t)$  is positief als het gewicht beneden de evenwichtspositie is. Aan het begin van de beweging is dus  $u=u(0)=0,5$  cm en de beginsnelheid  $v_0=\dot{u}(0)=\sqrt{g}$  cm/sec. Is het gewicht tijdens zijn beweging op de afstand  $u=u(t)$  van de evenwichtsstand, dan is de op het gewicht werkende kracht  $-cu$ ; de versnelling is  $\ddot{u}$ . De bewegingsvergelijking is dus:

$$m\ddot{u} = -cu = -4 mg u,$$

$$\ddot{u} + 4 gu = 0.$$

Oplossing:

$$u = c_1 \cos 2\sqrt{g} t + c_2 \sin 2\sqrt{g} t.$$

Voor  $t=0$  is  $u(0)=0,5$ ,  $\dot{u}(0)=\sqrt{g}$ . Dit geeft

$$c_1 = 0,5, \quad 2c_2\sqrt{g} = \sqrt{g} \text{ dus } c_2 = 0,5.$$

$$\begin{aligned} u &= 0,5 (\cos 2\sqrt{g} t + \sin 2\sqrt{g} t). \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \left( 2\sqrt{g}t + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

De laagste stand van het gewicht is dus  $\frac{1}{2}\sqrt{2}=0,70$  (cm) beneden de evenwichtsstand.

Opgaven:

1) Los op:  $y'' - \frac{6y}{x^2} = x \log x$ .

Aanwijzing: Een oplossing van de gereduceerde vergl. is  $y_0(x)=x^3$ .

Antwoord:  $\frac{1}{5} x^3 \log x \left( \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{5} \right) + c_1 x^3 + \frac{c_2}{x^2}$ .

2) Los op:  $y'' - \sin^2 x y' - \cos^2 x y = \{x^2 + 2x + (x \cos x)^2\} e^x$ .

Antwoord:

$$y(x) = e^x \left\{ c_1 \int_{x_0}^x e^{-\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)} dt + \frac{1}{3}x^3 + c_2 \right\}.$$

3) Bewijs: Als de operator  $O$  lineair is, is ook  $P(O)$  lineair.

4) Stel  $O_1 f(x) = D f(x)$  en  $O_2 f(x) = x f(x)$ .

Bepaal  $O_1 O_2 f(x)$  en  $O_2 O_1 f(x)$ .

Antwoord:  $x f'(x) + f(x)$  resp.  $x f'(x)$ .

5) Laat  $y_0(x)$  een oplossing zijn van

$$(*) \alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = 0 \text{ met } y_0(x) \neq 0 \text{ in } [h, k].$$

Toon aan dat alle integralen van (\*) gevonden worden uit

$$y(x) = c y_0(x) \int_b^x y_0^{-2}(t) e^{-\int_a^t \frac{\alpha_1(s)}{\alpha_2(s)} ds} dt.$$

6) Los op:  $D(D+1)(D-2)^2 y = 0$

$$(D^2+2D+5) y = 0$$

$$(D^2+2D+5)^2 y = 0.$$

Antwoord:  $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}.$

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + \\ + x e^{-x}(c_3 \cos 4x + c_4 \sin 4x)$$

7) Los op:  $y^{(3)} + y^{(2)} - 7y' - 15y = 0.$

$$y^{(4)} + y^{(2)} + y = 0$$

$$y^{(4)} - y = 0$$

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} \cos x + c_3 e^{-2x} \sin x$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x}(c_1 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_2 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x) + \\ + e^{-\frac{1}{2}x}(c_3 \cos \frac{1}{2}\sqrt{3}x + c_4 \sin \frac{1}{2}\sqrt{3}x).$$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

8) Los op:  $y'' - 2y' + y = e^{2x}.$

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}.$

## VIII. Integratiemethoden bij lineaire differentiaalvergelijkingen

door

Prof. Dr J. Popken

§5. Vrije trilling. Een punt met massa  $m$  kan zich over een rechte lijn bewegen en heeft zijn evenwichtsstand in  $O$ . Het bevindt zich onder invloed van een centraal naar  $O$  gerichte kracht  $K$ , welke laatste evenredig is met de uitwijking  $u(t)$ . Bovendien is er een weerstand  $W$  evenredig met de snelheid. Stellen we  $K = \lambda u(t)$ ,  $W = \mu \dot{u}(t)$ , dan is dus

$$(1) \quad m \ddot{u} = -\lambda u - \mu \dot{u}.$$

De karakteristieke vergelijking is  $m x^2 + \mu x + \lambda = 0$  met wortels

$$x_{1,2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda m}}{2m}.$$

Geval 1:  $\mu^2 - 4\lambda m > 0$ . Er zijn twee negatieve wortels  $-p$  en  $-(p+q)$ . De oplossing heeft de vorm

$$u = e^{-pt} (c_1 + c_2 e^{-qt}).$$

Uit deze formule blijkt, dat  $u(t)$  hoogstens één keer van teken verandert (d.w.z. door  $O$  gaat) en dat verder voor  $t \rightarrow \infty$  de uitwijking  $u(t)$  tot nul nadert (het punt "kruipt" naar  $O$ ).

Geval 2:  $\mu^2 - 4\lambda m = 0$ . Er is een dubbele negatieve wortel  $-\mu/2m = -p$  en  $u(t)$  heeft de vorm

$$e^{-pt} (c_1 + c_2 t).$$

Ook hier passeert het punt hoogstens één maal het punt  $O$  en verder nadert  $u(t)$  weer tot nul.

Geval 3:  $\mu^2 - 4\lambda m < 0$ . Stel  $\mu^2 - 4\lambda m = -4m^2 \omega^2$ .

Dan is  $x_{1,2} = -\mu/2m \pm i\omega$  en

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\frac{\mu t}{2m}} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \\ &= r e^{-\frac{\mu t}{2m}} \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Het punt voert nu een oscillerende beweging uit, maar het amplitudo van de trilling neemt exponentieel af met de tijd. De frequentie is  $\omega/2\pi$ .

De laatste formule gaat ook nog door voor de vrije "ongedempte" trilling als  $W=0$  is, dus  $\mu=0$ . Stellen we de frequentie hiervan voor door  $\omega_0/2\pi$ , dan is

$$\lambda = m \omega_0^2.$$

Substitutie in (1) geeft deze vergelijking de vorm

$$(2) \quad \ddot{u} + \frac{\mu}{m} \dot{u} + \omega_0^2 u = 0.$$

### § 6. Inverse operatoren.

a)  $\varphi(x) = \frac{1}{D} f(x)$  betekent  $D \varphi(x) = f(x)$ , m.a.w.

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx;$$

deze is bepaald op een constante na. Voorbeeld:  $\frac{1}{D} x = \frac{1}{2} x^2 + c$ .

b)  $\varphi(x) = \frac{1}{D-p} f(x)$  betekent  $(D-p)\varphi(x) = f(x)$ , m.a.w.  $\varphi(x)$  is een integraal van  $y' - py = f(x)$ , of

$$\varphi(x) = e^{px} \int_a^x e^{-pt} f(t) dt + c e^{px}.$$

Voorbeeld:  $\frac{1}{D-3} e^x = -\frac{1}{2} e^x + c e^{3x}$ .

c)  $\varphi(x) = \frac{1}{P(D)} f(x)$  betekent  $P(D)\varphi(x) = f(x)$ ; m.a.w.  $y = \varphi(x)$  is een willekeurige integraal van een lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten

$$(1) \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} y^{(\nu)}(x) = f(x),$$

zodat  $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \eta(x)$ , waar  $\varphi_0(x)$  een particuliere integraal van (1) is en  $\eta(x)$  een willekeurige integraal van de homogene vergelijking

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} y^{(\nu)}(x) = 0$$

voorstelt. We zullen zeggen dat  $\varphi(x)$  en  $\varphi_0(x)$  congruent mod  $P(D)$  zijn; notatie  $\varphi(x) \sim \varphi_0(x) \pmod{P(D)}$ .

De operator  $\frac{1}{P(D)}$  toegepast op een functie  $f(x)$  levert dus niet slechts één functie  $\varphi(x)$ , maar een klasse van congruente functies.

$\frac{1}{P(D)}$  heet de inverse operator van  $P(D)$ ; er geldt n.l.

$$P(D) \left\{ \frac{1}{P(D)} f(x) \right\} = f(x)$$

$$\frac{1}{P(D)} \left\{ P(D) f(x) \right\} \sim f(x) \pmod{P(D)}.$$

We kunnen ook producten en sommen van dergelijke inverse operatoren invoeren. Zo betekent  $\frac{1}{P(D)} \frac{1}{Q(D)} f(x) = \frac{1}{P(D)} \left\{ \frac{1}{Q(D)} f(x) \right\}$ ; m.a.w. pas op  $f(x)$  de operatie  $\frac{1}{Q(D)}$  toe; het resultaat is een functieklassie  $K$ ; pas daarna op elke functie van  $K$  de operatie  $\frac{1}{P(D)}$  toe; het resultaat is een nog meer uitgebreide klasse van functies  $\frac{1}{P(D)} \frac{1}{Q(D)} f(x)$ .

Blijkbaar is  $\frac{1}{Q(D)} \frac{1}{P(D)}$  de inverse van  $P(D) Q(D)$ . De product operaties hebben weer de commutatieve en associatieve eigenschap.

Toepassing:  $\frac{1}{D^2-D} x = \frac{1}{D(D-1)} x = \frac{1}{D} \frac{1}{D-1} x \sim \frac{1}{D} (-x-1) \sim -x - \frac{1}{2} x^2$ . We krijgen alle functies van de klasse  $\frac{1}{D^2-D} x$  door bij het gevonden resultaat een

willekeurige integraal van  $y'' - y' = 0$  op te tellen; dus  $\frac{1}{D^2 - D} x = -x - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2 e^x$ .

Enkele berekeningsmethoden. Een differentiaalvergelijking

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} y^{(\nu)} = f(x)$$

kunnen we schrijven  $P(D)y = f(x)$ , of  $y = \frac{1}{P(D)} f(x)$ , zodat de integratie neerkomt op de berekening van  $\frac{1}{P(D)} f(x)$ .

I. Stel, dat de karakteristieke vergelijking wortels  $p_1, p_2, \dots, p_n$  heeft, dan is

$$P(D) = \alpha_n (D - p_1) \dots (D - p_n)$$

$$\frac{1}{P(D)} f(x) = \alpha_n \frac{1}{D - p_n} \frac{1}{D - p_{n-1}} \dots \frac{1}{D - p_1} f(x)$$

en men kan successievelijk  $\frac{1}{D - p_1} f(x)$ ,  $\frac{1}{D - p_2} \left( \frac{1}{D - p_1} f(x) \right)$ , ..... berekenen.

Voorbeeld. Integreer  $y'' + y' - 6y = e^{3x}$ .

$$y = \frac{1}{D^2 + D - 6} e^{3x} = \frac{1}{D+3} \frac{1}{D-2} e^{3x}.$$

Nu is  $\frac{1}{D-2} e^{3x} \sim e^{3x}$ , dus  $y \sim \frac{1}{D+3} e^{3x} \sim \frac{1}{6} e^{3x}$ .

De algemene integraal is dus

$$y = \frac{1}{6} e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

II. Splitsing in partieel breuken. Stel dat  $P(x)$  onderling verschillende nulpunten heeft, terwijl

$$(2) \quad \frac{1}{P(x)} = \frac{k_1}{x - p_1} + \dots + \frac{k_n}{x - p_n} \quad (k_{\nu} = \frac{1}{P'(p_{\nu})}).$$

Dan is

$$\frac{1}{P(D)} f(x) \sim \left( \frac{k_1}{D - p_1} + \dots + \frac{k_n}{D - p_n} \right) f(x).$$

Bewijs: We hebben slechts aan te tonen

$$P(D) \left( \frac{k_1}{D - p_1} + \dots + \frac{k_n}{D - p_n} \right) f(x) = f(x).$$

Nu is het linkerlid

$$\left\{ (D - p_1) \dots (D - p_n) \frac{k_1}{D - p_1} + \dots + (D - p_1) \dots (D - p_n) \frac{k_n}{D - p_n} \right\} f(x) =$$

$$\left\{ k_1 (D - p_2) \dots (D - p_n) + \dots + k_n (D - p_1) \dots (D - p_{n-1}) \right\} f(x).$$

De karakteristieke veelterm van de laatste operator is



$$k_1(x-p_2)\dots(x-p_n) + \dots + k_n(x-p_1)\dots(x-p_{n-1}) = 1$$

zoals uit (2) volgt; m.a.w. de operator is gelijk aan de identiteit, zodat het linkerlid inderdaad  $f(x)$  is. Q.E.D.

Voorbeeld:  $\frac{1}{D^2-3D+2} xe^x = \frac{1}{(D-2)(D-1)} xe^x$   
 $= \left(\frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1}\right) xe^x.$

$$\frac{1}{D-2} xe^x = e^{2x} \int xe^{-x} dx \sim -(1+x)e^x$$

$$\frac{1}{D-1} xe^x = e^x \int x dx \sim \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Dus

$$\frac{1}{D^2-3D+2} xe^x \sim -(1+x+\frac{1}{2}x^2)e^x$$

of

$$\frac{1}{D^2-3D+2} xe^x = -(1+x-\frac{1}{2}x^2)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

III. Reeksontwikkeling. Deze methode is toe te passen als  $f(x)$  een veelterm is. Voorbeeld:

$$\frac{1}{1-D} f(x) \sim (1+D+D^2+\dots) f(x)$$

Bewijs: Omdat  $f(x)$  een veelterm is, is vanaf zekere gehele  $k_0$  de  $k^{\text{de}}$  afgeleide identiek nul. Dus

$$(1-D)(1+D+D^2+\dots) f(x) = f(x).$$

Toepassing:  $\frac{1}{D-1} x^4 \sim -(1+D+D^2+D^3+D^4) x^4 =$   
 $-(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24).$

IV. Stelling 3.  $\frac{1}{P(D)} (e^{\lambda x} f(x)) \sim e^{\lambda x} \frac{1}{P(D+\lambda)} f(x) \pmod{P(D)}$

m.a.w. ook bij inverse operatoren mag men een factor  $e^{\lambda x}$  voor het operatorteken brengen mits men  $D$  in  $D+\lambda$  verandert.

Bewijs: We hebben slechts aan te tonen

$$P(D) \frac{1}{P(D)} (e^{\lambda x} f(x)) = P(D) e^{\lambda x} \frac{1}{P(D+\lambda)} f(x),$$

of wegens stelling 2

$$e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} P(D+\lambda) \frac{1}{P(D+\lambda)} f(x) \quad \text{Q.E.D.}$$

Toepassingen: a)  $\frac{1}{D^2+D-6} e^{3x} \sim e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2+(D+3)-6} 1$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2+7D+6} 1 \sim \frac{1}{6} e^{3x} \quad (\text{dit laatste b.v. met methode III}). \text{ Dus}$$

$$\frac{1}{D^2+D-6} e^{3x} = \frac{1}{6} e^{3x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{D^2-3D+2} x e^x &\sim e^x \frac{1}{(D+1)^2-3(D+1)+2} x \\ &= e^x \frac{1}{D^2-D} x \sim (x + \frac{1}{2}x^2) e^x \end{aligned}$$

Vergelijkingen van het type  $P(D)y=e^{\lambda x}$ ,  $P(D)y=\cos \lambda x$ .

De oplossingen hebben de vorm

$$(3) \quad y = \frac{1}{P(D)} e^{\lambda x} \sim e^{\lambda x} \frac{1}{P(D+\lambda)}$$

We zoeken dus een integraal van

$$P(D+\lambda)z = 1$$

of van

$$(4) \quad P(\lambda)z + \frac{P'(\lambda)}{1!} z' + \frac{P''(\lambda)}{2!} z'' + \dots = 1$$

Is  $P(\lambda) \neq 0$ , dan kunnen we blijkbaar nemen

$$z = \frac{1}{P(\lambda)}, \text{ zodat } y \sim \frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)}.$$

In het uitgesloten geval  $P(\lambda) = 0$ , is de storingsterm  $e^{\lambda x}$  een integraal van de gereduceerde vergelijking  $P(\lambda)y=0$ . We spreken dan van resonantie. Is  $P(\lambda)=0$ ,  $P'(\lambda) \neq 0$ , dan vinden we voor (4) de particuliere integraal  $z = \frac{x}{P'(\lambda)}$  en dus volgt uit (3)

$$y \sim \frac{x e^{\lambda x}}{P'(\lambda)}.$$

Ook de vergelijkingen

$$(5) \quad P(D)y = \cos \lambda x, \quad P(D)y = \sin \lambda x$$

kunnen we zo behandelen. In plaats van deze nemen we n.l.

$$(6) \quad P(D)y = \cos \lambda x + i \sin \lambda x = e^{i \lambda x}$$

Is  $P(i\lambda) \neq 0$ , dan vinden we met de voorgaande methode, dat

$$y_0 = \frac{e^{i \lambda x}}{P(i\lambda)}$$

een particuliere integraal van (6) is. Dan voldoen  $y_1 = \text{Re } y_0$  en  $y_2 = \text{Im } y_0$  respectievelijk aan de beide vergelijkingen (6).

Ook het resonantie geval is zo te behandelen.

Een toepassing vinden we in de volgende paragraaf.

§ 7. De gedwongen trilling. We beschouwen weer het punt uit § 5 met massa  $m$ . Maar behalve de kracht  $K = -\lambda u$  en de weerstand  $W = \mu \dot{u}$  laten we nog een uitwendige kracht  $c \cos \omega t$  werken. De vergelijking (2) maakt nu plaats voor

$$(1) \quad \ddot{u} + \frac{\mu}{m} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{c}{m} \cos \omega t = \frac{c}{m} \operatorname{Re} e^{i\omega t}.$$

Eerst lossen we daartoe op

$$\ddot{u} + \frac{\mu}{m} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{c}{m} e^{i\omega t}$$

met als particuliere integraal

$$u_0 = \frac{c}{m} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\mu \omega}{m}} = z e^{i\omega t},$$

waar

$$z = \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\mu \omega}{m}}.$$

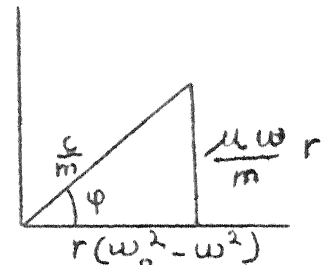
Stellen we  $z = r e^{-i\varphi}$ , dan is

$$r(\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\mu \omega}{m}) = \frac{c}{m} e^{i\varphi},$$

zodat  $r$  en  $\varphi$  te bepalen zijn uit

$$(2) \quad r^2 \left\{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\mu^2 \omega^2}{m^2} \right\} = \frac{c^2}{m^2},$$

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$



We hebben nu  $u_0 = z e^{i\omega t} = r e^{i(\omega t - \varphi)}$ .

De vergelijking (1) heeft dus de particuliere integraal

$$(4) \quad u_1 = r \cos(\omega t - \varphi)$$

Elke andere integraal van (1) krijgen we door bij  $u_1$  op te tellen een willekeurige integraal van de gereduceerde vergelijking. Uit § 5 blijkt echter dat deze laatsten exponentieel "uitsterven", zodat na betrekkelijk korte tijd elke trilling praktisch gelijk aan (4) wordt.

Merk op, dat de frequentie van de "stationaire" trilling gelijk is aan die van de uitwendige kracht. De grootte  $\varphi$  heet de "phase vertraging".

Als  $\omega = \omega_0$  spreekt men hier wel van resonantie. Dan is de frequentie van de uitwendige kracht gelijk aan de frequentie van de ongedempte eigen trilling. Is dan ook nog de demping  $\mu$  klein, dan kan volgens formule (2) het amplitudo van de trilling (4) zéér groot worden (resonantie katastrofe).

§8. De vergelijking van Euler:

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} x^{\nu} y^{(\nu)} = f(x).$$

Door de substitutie  $x=e^t$ ,  $y(x)=y(e^t)=Y(t)$  gaat deze over in

$$\sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} D(D-1)\dots(D-\nu+1)Y = f(e^t).$$

Bewijs:  $\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = e^t \frac{dy}{dx},$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} DY$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t} D \{ e^{-t} DY \} = e^{-2t} (D-1)DY$$

enz.

algemeen:

$$\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} = e^{-\nu t} D(D-1)\dots(D-\nu+1)Y$$

$$x^{\nu} \frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} = D(D-1)\dots(D-\nu+1)Y.$$

Voorbeeld:  $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

Door de substitutie  $x=e^t$  gaat de vergelijking over in

$$D(D-1)(D-2)Y + 3D(D-1)Y - 2DY + 2Y = 0$$

$$(D^3 - 3D + 2)Y = 0$$

$$(D-1)^2(D+2)Y = 0$$

$$Y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2t},$$

dus

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + c_3 x^{-2} \quad (x > 0).$$

§9. Variatie van parameters. Deze methode is ook van toepassing op vergelijkingen, waarvan de coëfficiënten niet constant zijn.

Stel, dat bij de vergelijking

$$(1) \quad y'' + \alpha(x) y' + \beta(x) y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

de gereduceerde vergelijking reeds is opgelost. Stel van deze laatste zijn  $y_1(x)$  en  $y_2(x)$  twee lineair onafhankelijke integralen. De meest algemene oplossing van de gereduceerde vergelijking heeft dan de vorm

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

We proberen nu voor (1) een oplossing te krijgen van de vorm

$$(2) \quad y(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x).$$

Stel nu, dat de functies  $u_1(x)$  en  $u_2(x)$  zo gekozen worden, dat

$$(3) \quad \begin{cases} u_1'(x) y_1(x) + u_2'(x) y_2(x) = 0 \\ u_1'(x) y_1'(x) + u_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

dan volgt uit (2)

$$(4) \quad y'(x) = u_1(x) y_1'(x) + u_2(x) y_2'(x)$$

en hieruit

$$(5) \quad y''(x) = u_1(x) y_1''(x) + u_2(x) y_2''(x) + f(x).$$

Uit (2), (4) en (5) volgt dan

$$\begin{aligned} y'' + \alpha(x) y' + \beta(x) y = \\ u_1(x) \{ y_1'' + \alpha(x) y_1' + \beta(x) y_1 \} + u_2(x) \{ y_2'' + \alpha(x) y_2' + \\ + \beta(x) y_2 \} + f(x) = f(x), \end{aligned}$$

zodat de functie (2) werkelijk aan (1) voldoet.

Het komt er dus slechts op aan om de beide vergelijkingen (3) in  $u_1'(x)$  en  $u_2'(x)$  op te lossen. Dit is steeds mogelijk omdat de determinant van dit stelsel de determinant van Wronski is en deze verschilt van nul in  $[a, b]$  (zie § 4).

Heeft men  $u_1'(x)$  en  $u_2'(x)$  gevonden, dan vindt men door integratie  $u_1(x)$  en  $u_2(x)$  en dus  $y(x)$ . Toon aan, dat men zo alle integralen van (1) vindt.

De methode is gemakkelijk uit te breiden tot een vergelijking van de  $n^{\text{de}}$  orde.

Voorbeeld:  $y'' + y = \cos x$

De gereduceerde vergelijking heeft de oplossingen

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

We stellen als integraal van de gegeven vergelijking

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

terwijl  $u_1$  en  $u_2$  moeten voldoen aan

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \cos x \end{cases}$$

Oplossing van  $u_1$  en  $u_2$  geeft

$$u_1' = -\frac{1}{2} \sin 2x, \quad u_2' = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$u_1 = \frac{1}{4} \cos 2x + c_3, \quad u_2 = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_4.$$

Dus

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{4}(\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x) \\
 &\quad + c_3 \cos x + c_4 \sin x \\
 &= \frac{1}{2}x \sin x + c_5 \cos x + c_4 \sin x
 \end{aligned}$$

Opgaven.

1) Los op:  $y'' - 4y' + 3y = x^2$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}$ .

2) Los op:  $y'' - y = x$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$ .

3) Los op:  $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{10x}$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \frac{e^{10x}}{729}$ .

4) Los op:  $y'' - 3y' + 2 = e^{2x}$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x e^{2x}$ .

5) Los op:  $y'''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + \frac{x^3 e^{-x}}{6}$ .

6) Los op:  $y'' + 3y' + 2y = x^3 + x$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{8}(4x^3 - 18x^2 + 46x - 51)$ .

7) Los op:  $ay'' + 2by' + cy = \sin \lambda x$ .

Antwoord:

$$y \sim \frac{(c-a\lambda^2)\sin \lambda x - 2b\lambda \cos \lambda x}{(c-a\lambda^2)^2 + 4b^2\lambda^2}$$

8) Los het limietgeval  $\mu=0$ ,  $\omega = \omega_0$  van vergelijking (1) op:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{c}{m} \cos \omega_0 t.$$

Oplossing:  $u \sim \frac{c}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$ .

9) Los op:  $x^2 y'' - 2y = 0$ .

Antwoord:  $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$ .

10) Los op:  $y'' - y = e^x$ . (variatie van parameters).

Oplossing:  $y(x) = \frac{1}{2}x e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ .

11) Los op:  $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$ . (variatie van parameters).

Oplossing:  $y(x) = (\frac{1}{2} \sin 2x - x) \cos 2x + (\log |\cos x| - \cos^2 x) \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ .

## IX. Lineaire Systemen met constante coëfficiënten

door

Prof. Dr J. Popken

De onafhankelijke veranderlijke stellen we voor door  $t$ ;  $D = \frac{d}{dt}$ .

§1. Voorbeelden. 1. Stel, dat  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  de massa's voorstellen van drie radioactieve stoffen. De eerste verandert in de tweede, welke op zijn beurt in de derde wordt omgezet. Deze laatste is stabiel. Dan is

$$\frac{dy_1}{dt} = -ay_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = ay_1 - by_2, \quad \frac{dy_3}{dt} = by_2,$$

waar  $a$  en  $b$  constanten zijn; of

$$(1) \quad (D+a)y_1 = 0, \quad ay_1 - (D+b)y_2 = 0, \quad by_2 - Dy_3 = 0.$$

2. Een slinger is Cardanisch opgehangen. Stel op de tijd  $t$  stelt  $y_1(t)$  de draaihoek voor om de ene as van de ring van Cardanus,  $y_2(t)$  de draaihoek om de andere as, dan is (vgl. bv. Baule, Die Mathematik des Naturforschers und des Ingenieurs IV):

$$(2) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + b_1 y_1 + c_1 \dot{y}_2 = 0 \\ \ddot{y}_2 + b_2 y_2 - c_2 \dot{y}_1 = 0, \end{cases}$$

waar  $b_1, c_1$  positieve constanten zijn. Symbolisch schrijven we in plaats van (2)

$$(3) \quad \begin{cases} (D^2 + b_1)y_1 + c_1 D y_2 = 0 \\ -c_2 D y_1 + (D^2 + b_2)y_2 = 0 \end{cases}$$

(Differentiaalvergelijkingen van Föppl).

3. In het X-Y vlak wordt een krachtveld gegeven door de beide componenten

$$(4) \quad K_x = y, \quad K_y = x$$

voor de kracht  $K$  werkend in het punt  $(x, y)$ . We vragen nu naar de baan  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  van een punt onder invloed van dit krachtveld.

Is  $m$  de massa van het punt, dan volgt uit de formule  $K=ma$  en (4)

$$(5) \quad \begin{cases} m\ddot{x} = y, & m\ddot{y} = x \quad \text{of} \quad \begin{cases} mD^2 x - y = 0 \\ x - mD^2 y = 0. \end{cases} \end{cases}$$

### § 2. Oplossingsmethoden voor homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten.

Als voorbeeld nemen we:

$$(6) \quad \begin{cases} (D+1)y_1 + Dy_2 = 0 \\ (D-1)y_1 - y_2 = 0. \end{cases}$$

We "eliminieren"  $y_2$  door op de laatste betrekking de D operator toe te passen. Er komt dan  $(D^2-D)y_1 - Dy_2 = 0$ . Tellen we deze betrekking bij de eerste van (6) op, dan vinden we

$$(7) \quad (D^2+1)y_1 = 0.$$

Op soortgelijke wijze kunnen we  $y_2$  "eliminieren" en vinden dan

$$(8) \quad (D^2+1)y_2 = 0,$$

zodat  $y_1$  en  $y_2$  aan dezelfde differentiaalvergelijking  $(D^2+1)y=0$  voldoen.

Deze voorwaarde is noodzakelijk. We kunnen echter niet verwachten, dat twee willekeurige oplossingen  $y_1$  en  $y_2$  van (7) en (8) ook automatisch aan (6) voldoen. We hebben

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ y_2 = c_1' \cos x + c_2' \sin x. \end{cases}$$

Door substitutie van deze waarden in (6) vinden we

$$\begin{aligned} (c_1+c_2+c_2') \cos x + (-c_1+c_2-c_1') \sin x &= 0, \\ (c_1+c_2-c_1') \cos x + (-c_1-c_2-c_2') \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Dus wegens de lineaire onafhankelijkheid van  $\cos x$  en  $\sin x$

$$\begin{aligned} c_1+c_2+c_2' &= 0, & -c_1+c_2-c_1' &= 0 \\ -c_1+c_2-c_1' &= 0, & -c_1-c_2-c_2' &= 0. \end{aligned}$$

M.a.w. (9) is een oplossing van (6) wanneer tussen de parameters  $c_1, c_2, c_1'$  en  $c_2'$  de lineaire betrekkingen

$$c_1+c_2+c_2' = 0, \quad c_1-c_2+c_1' = 0$$

bestaan.

Meer algemeen behandelen we nu het geval van drie homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten in  $y_1, y_2$  en  $y_3$ :

$$(10) \quad \begin{cases} (p) \quad P_1(D)y_1 + P_2(D)y_2 + P_3(D)y_3 = 0 \\ (q) \quad Q_1(D)y_1 + Q_2(D)y_2 + Q_3(D)y_3 = 0 \\ (r) \quad R_1(D)y_1 + R_2(D)y_2 + R_3(D)y_3 = 0, \end{cases}$$

waar  $P_1(D), Q_1(D)$  en  $R_1(D)$  veeltermen in de operator D zijn. We wensen alle oplossingen van (10) te kennen.

Allereerst voeren we de karakteristieke veelterm



$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q_3(x) \\ R_1(x) & R_2(x) & R_3(x) \end{vmatrix}$$

in. De bijbehorende operator is  $\Delta(D)$  en deze ontstaat door in het rechterlid  $x$  door  $D$  te vervangen. Uit de theorie der determinanten weten we

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} Q_2(x) & Q_3(x) \\ R_2(x) & R_3(x) \end{vmatrix} P_1(x) - \begin{vmatrix} P_2(x) & P_3(x) \\ R_2(x) & R_3(x) \end{vmatrix} Q_1(x) + \begin{vmatrix} P_2(x) & P_3(x) \\ Q_2(x) & Q_3(x) \end{vmatrix} R_1(x) \\ & = \begin{vmatrix} P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q_3(x) \\ R_1(x) & R_2(x) & R_3(x) \end{vmatrix} = \begin{cases} \Delta(x) & \text{als } i = 1 \\ 0 & \text{als } i = 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

De hierbij behorende operatorenvergelijking is

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} Q_2(D) & Q_3(D) \\ R_2(D) & R_3(D) \end{vmatrix} P_1(D) - \begin{vmatrix} P_2(D) & P_3(D) \\ R_2(D) & R_3(D) \end{vmatrix} Q_1(D) + \begin{vmatrix} P_2(D) & P_3(D) \\ Q_2(D) & Q_3(D) \end{vmatrix} R_1(D) \\ & = \begin{cases} \Delta(D) & \text{als } i = 1 \\ 0 & \text{als } i = 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Op respectievelijk de vergelijkingen (10p), (10q) en (10r) passen we nu toe de operatoren

$$\begin{vmatrix} Q_2(D) & Q_3(D) \\ R_2(D) & R_3(D) \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} P_2(D) & P_3(D) \\ R_2(D) & R_3(D) \end{vmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} P_2(D) & P_3(D) \\ Q_2(D) & Q_3(D) \end{vmatrix}.$$

Door optelling komt er dan  $\Delta(D)y_1=0$ . Analoog vinden we  $\Delta(D)y_2=0$  en  $\Delta(D)y_3=0$ .

Voor elke oplossing  $(y_1, y_2, y_3)$  van (10) geldt noodzakelijk

$$\Delta(D)y_1 = 0.$$

Omgekeerd zullen drie willekeurige oplossingen  $y_1, y_2$  en  $y_3$  van de laatste vergelijking nog niet automatisch aan (10) voldoen. Integendeel, tussen de in  $y_1, y_2$  en  $y_3$  optredende constanten zullen bepaalde betrekkingen bestaan, die wij kunnen ontdekken door substitutie in (10). Men kan bewijzen, dat het aantal onafhankelijke parameters in de oplossing gelijk is aan de graad van de veelterm  $\Delta(x)$ .

Als toepassing lossen we het stelsel (3) van voorbeeld 2 op. We hebben hier

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D^2+b_1 & c_1 D \\ -c_2 D & D^2+b_2 \end{vmatrix} = D^4 + (b_1+b_2+c_1 c_2) D^2 + b_1 b_2.$$

De oplossingen  $y_1(t)$  en  $y_2(t)$  voldoen dus noodzakelijk aan  $\Delta(D)y_1=0$ . Stellen we ter vereenvoudiging

$$2B = b_1 + b_2 + c_1 c_2, \quad -B \pm \sqrt{B^2 - b_1 b_2} = \begin{cases} -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 \end{cases},$$

dan zijn de wortels van de bijbehorende karakteristieke vergelijking  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$ , zodat

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t + c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t \\ y_2 &= c_1' \cos \omega_1 t + c_2' \sin \omega_1 t + c_3' \cos \omega_2 t + c_4' \sin \omega_2 t. \end{aligned}$$

We hebben nu nog slechts de betrekkingen te vinden, die tussen de  $c$ 's bestaan. Nu is

$$\begin{aligned} D^2 y_1 &= -c_1 \omega_1^2 \cos \omega_1 t - c_2 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - c_3 \omega_2^2 \cos \omega_2 t - c_4 \omega_2^2 \sin \omega_2 t \\ b_1 y_1 &= c_1 b_1 \cos \omega_1 t + c_2 b_1 \sin \omega_1 t + c_3 b_1 \cos \omega_2 t + c_4 b_1 \sin \omega_2 t \\ c_1 D y_2 &= c_2' c_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - c_1' c_1 \omega_1 \sin \omega_1 t + c_4' c_1 \omega_2 \cos \omega_2 t - \\ &\quad - c_3' c_1 \omega_2 \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

Substitutie in de eerste vergelijking van (3) geeft wegens de lineaire onafhankelijkheid van de vier functies  $\cos \omega_1 t$ ,  $\sin \omega_1 t$ ,  $\cos \omega_2 t$ ,  $\sin \omega_2 t$  de vier betrekkingen

$$\begin{aligned} c_1(b_1 - \omega_1^2) + c_2' c_1 \omega_1 &= 0, & c_2(b_1 - \omega_1^2) - c_1' c_1 \omega_1 &= 0 \\ c_3(b_1 - \omega_2^2) + c_4' c_1 \omega_2 &= 0, & c_4(b_1 - \omega_2^2) - c_3' c_1 \omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Substitutie in de tweede vergelijking van (3) geeft dezelfde betrekkingen. (Dit klopt met het feit, dat hier de graad van  $\Delta(x)$  gelijk aan vier is).

Bijzonder eenvoudig is het stelsel

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{cases}$$

In dit geval is de karakteristieke vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-x \end{vmatrix} = 0.$$

In dit geval zijn de wortels niets anders dan de eigenwaarden van de matrix  $(a_{ij})$ .

In sommige gevallen is het mogelijk de oplossing van een stelsel te herleiden tot het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen.

Dit is b.v. het geval met het stelsel (1) uit voorbeeld 1 (zie vraagstuk 1 en 2).

§ 3. Inhomogene systemen. De voorgaande methode kan ook worden toegepast op een inhomogeen systeem

$$(11) \quad \begin{cases} P_1(D)y_1 + P_2(D)y_2 + P_3(D)y_3 = f(t) \\ Q_1(D)y_1 + Q_2(D)y_2 + Q_3(D)y_3 = g(t) \\ R_1(D)y_1 + R_2(D)y_2 + R_3(D)y_3 = h(t), \end{cases}$$

waar  $f(t)$ ,  $g(t)$  en  $h(t)$  functies voorstellen, die een voldoende aantal malen differentieerbaar zijn. We vinden, dat  $y_1(t)$  noodzakelijk moet voldoen aan

$$(12) \quad \Delta(D)y_1 = \begin{vmatrix} f(t) & P_2(D) & P_3(D) \\ g(t) & Q_2(D) & Q_3(D) \\ h(t) & R_2(D) & R_3(D) \end{vmatrix},$$

waarbij het rechterlid ontwikkeld moet worden naar de elementen in de eerste kolom; de bijbehorende minoren moeten optreden als operatoren voor  $f(t)$ ,  $g(t)$  en  $h(t)$ . Voor  $y_2$  en  $y_3$  zijn er analoge vergelijkingen:

$$(13) \quad \Delta(D)y_2 = \begin{vmatrix} P_1(D) & f(t) & P_3(D) \\ Q_1(D) & g(t) & Q_3(D) \\ R_1(D) & h(t) & R_3(D) \end{vmatrix}, \quad \Delta(D)y_3 = \begin{vmatrix} P_1(D) & P_2(D) & f(t) \\ Q_1(D) & Q_2(D) & g(t) \\ R_1(D) & R_2(D) & h(t) \end{vmatrix}.$$

Elke oplossing  $(y_1, y_2, y_3)$  van (11) voldoet aan (12) en (13) maar niet omgekeerd. Door substitutie van de algemene oplossingen van (12) en (13) in (11) vinden we de beperkingen, die we moeten opleggen.

Voorbeeld: 
$$\begin{cases} y_1'' - y_1 + y_2' - y_2 = 1 \\ y_1' + y_1 + y_2'' + y_2 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D^2-1)y_1 + (D-1)y_2 = 1 \\ (D+1)y_1 + (D^2+1)y_2 = t. \end{cases}$$

Hieruit volgt noodzakelijk

$$(D^4-D^2)y_1 = t, \quad (D^4-D^2)y_2 = -t-1,$$

met de algemene oplossingen

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} - \frac{t^3}{6} \\ y_2 &= c_1' + c_2' t + c_3' e^t + c_4' e^{-t} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Na substitutie in het gegeven stelsel vindt men de relaties

$$c_1' + c_1 + c_2 + 1 = 0, \quad c_2' + c_2 = 0, \quad c_3' + c_3 = 0, \quad c_4' = 0,$$

zodat we als algemene oplossing krijgen:

$$y_1 = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} - \frac{t^3}{6}$$

$$y_2 = -(c_1 + c_2 + 1) - c_2 t - c_3 e^t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}.$$

§ 4. Stabiele systemen.

Stel dat  $(y_{10}, y_{20}, y_{30})$  een particuliere oplossing is van het stelsel differentiaalvergelijkingen (11); verder dat  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  de algemene oplossing is van het "gereduceerde" systeem (10), dan vindt men alle oplossingen van (11) uit:

$$y_1 = y_{10} + \eta_1, \quad y_2 = y_{20} + \eta_2, \quad y_3 = y_{30} + \eta_3.$$

Stel nu, dat alle wortels van de karakteristieke vergelijking  $\Delta(x)=0$  een negatief reëel deel hebben. Zijn deze wortels

$p_1 = -\lambda_1 + i\mu_1, \dots, p_k = -\lambda_k + i\mu_k$ , dan geldt voor elke oplossing  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  van het gereduceerde systeem

$$\eta_i(t) = A_{i1}(t) e^{p_1 t} + \dots + A_{ik}(t) e^{p_k t} \quad (i=1,2,3),$$

waar de  $A_{ij}(t)$  veeltermen voorstellen.

$$|A_{ij}(t) e^{p_j t}| < K t^L e^{-\lambda_j t} \quad \text{voor } t \geq 1,$$

dus volgt  $\eta_i(t) \rightarrow 0$  voor  $t \rightarrow \infty$  ( $i=1,2,3$ ). M.a.w.: Is  $(y_{10}, y_{20}, y_{30})$  een particuliere oplossing van (11) en is  $(y_1, y_2, y_3)$  een willekeurige andere oplossing van (11), dan is

$$y_1(t) - y_{10}(t) \rightarrow 0, \quad y_2(t) - y_{20}(t) \rightarrow 0, \quad y_3(t) - y_{30}(t) \rightarrow 0$$

voor  $t \rightarrow \infty$ . In dit geval noemen we het systeem (6) stabiel. Hebben de wortels van de karakteristieke vergelijking alle een negatief reëel deel, dan is het systeem stabiel.

Voorbeeld: Bij de differentiaalvergelijking van de gedwongen trilling (vgl. § 7)

$$\ddot{u} + \frac{\mu}{m} \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{c}{m} \cos \omega t$$

is de karakteristieke vergelijking

$$x^2 + \frac{\mu}{m} x + \omega_0^2 = 0$$

De wortels  $\frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4m^2 \omega_0^2}}{2m}$  hebben beide een negatief reëel deel. Alle oplossingen "naderen" daarom tot een vast gekozen integraal

$$u = r \cos(\omega t - \varphi).$$

Het onderzoek naar de stabiliteit van een systeem vergelijkingen is voor de praktijk van grote waarde, speciaal voor het onderzoek naar

(mechanische of elektrische) trillingsverschijnselen. Het is daarom van belang, dat er een test bestaat, waaruit men - zonder de wortels te berekenen - kan aflezen of de wortels van een hogere machtsvergelijking al dan niet alle een negatief reëel deel hebben.

Kriterium van Hurwitz: Stel

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

heeft reële coëfficiënten met  $a_0 > 0$ . Beschouw het schema getallen

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

waarbij men  $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$  stelt. Laat  $D_v$  de determinant zijn gevormd uit de  $v$  eerste rijen en  $v$  eerste kolommen ( $v=1, 2, \dots, n$ ).

Noodzakelijk en voldoende opdat alle wortels negatief reëel deel hebben is de voorwaarde

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots, \quad D_n > 0.$$

Voorbeeld:  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ .

Het schema wordt

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

De noodzakelijk en voldoende voorwaarde is dus

$$D_1 = a > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & c \\ 1 & b \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{vmatrix} > 0$$

of:  $a > 0, ab > c > 0$ .

Opgaven:

1. Los het stelsel (1) uit voorbeeld 1 op als  $b \neq a$ .

$$\text{Antwoord: } y_1 = c_1 e^{-at}, \quad y_2 = \frac{ac_1}{b-a} e^{-at} + c_2 e^{-bt},$$

$$y_3 = -\frac{bc_1}{b-a} e^{-at} - c_2 e^{-bt} + c_3.$$

2. Geef de oplossing als  $b=a$ .

$$\text{Antwoord: } y_1 = c_1 e^{-at}, \quad y_2 = ac_1 t e^{-at} + c_2 e^{-at},$$

$$y_3 = -ac_1 c e^{-at} (c_1 + c_2) e^{-at} + c_3$$

3. Los het analoge probleem op als er vier stoffen zijn, waarvan de eerste omgezet wordt in de tweede, de tweede op zijn beurt in de derde en de derde tenslotte in de vierde, waarbij deze laatste stabiel is.

$$\text{Antwoord: } y_1(t) = c_1 e^{-at}$$

$$y_2(t) = c_1 \frac{a}{b-a} e^{-at} + c_2 e^{-bt}$$

$$y_3(t) = c_1 \frac{ab}{(b-a)(c-a)} e^{-at} + c_2 \frac{b}{c-b} e^{-bt} + c_3 e^{-ct}$$

$$y_4(t) = -c_1 \frac{bc}{(b-a)(c-a)} e^{-at} - c_2 \frac{c}{c-b} e^{-bt} - c_3 \frac{1}{c} e^{-ct} + c_4$$

4. Los het stelsel (5) uit voorbeeld 3 op.

$$\text{Antwoord: } x = c_1 e^{\frac{t}{\sqrt{m}}} + c_2 e^{-\frac{t}{\sqrt{m}}} + c_3 \cos \frac{t}{\sqrt{m}} + c_4 \sin \frac{t}{\sqrt{m}}$$

5. Los op  $\dot{x} = x - 2y$   
 $y = 5x + 3y$

$$\text{Antwoord: } \begin{cases} x = e^{2t} (A \cos 3t + B \sin 3t) \\ y = \frac{1}{2} e^{2t} \{ -(A+3B) \cos 3t + (3A-B) \sin 3t \} \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} D(D+1)x + D(D^2+D-1)y + (D-1)z = e^t \\ Dx + (D^2-1)y - z = 0 \\ x + Dy + Dz = 0 \end{cases}$$

$$\text{Antwoord: } \begin{cases} x = e^t \{ At + B - \frac{1}{2} t^2 \} \\ y = e^t \{ -(2A+4)t + 4A - 2B + 7 + t^2 \} \\ z = e^t \{ (A+3)t - 3A + B - 6 - \frac{1}{2} t^2 \} \end{cases}$$

7. Bewijs, dat het systeem

$$\begin{cases} 7\dot{x} + \dot{y} + 2x = 29 \sin t \\ \dot{x} + 3\dot{y} + y = 0 \end{cases}$$

stabiel is. Geef de oplossing als  $x=y=0$  voor  $t=0$ .

$$\text{Antwoord: } x = \frac{1}{17} \left( \frac{116}{3} e^{-t/4} + \frac{85}{3} e^{-2t/5} + 21 \sin t - 67 \cos t \right)$$

$$y = \frac{1}{17} \left( \frac{116}{3} e^{-t/4} - \frac{170}{3} e^{-2t/5} - 13 \sin t + 18 \cos t \right)$$

$$F y = c_1 e^{\frac{t}{\sqrt{m}}} + c_2 e^{-\frac{t}{\sqrt{m}}} - c_3 \cos \frac{t}{\sqrt{m}} - c_4 \sin \frac{t}{\sqrt{m}}$$

## X. Numerieke Methoden

door

Prof. Dr J. Popken

### § 1. Numerieke benadering van integralen.

Bij de integratiemethoden uit de vorige hoofdstukken worden we soms gevoerd tot integralen  $\int_a^b f(x)dx$ , waarbij de integratie niet in gesloten vorm uitvoerbaar is. In het volgende zullen we methoden aangeven om zulke integralen toch bij benadering numeriek te berekenen.

A. Primitieve (maar vaak doeltreffende) methode: Maak op millimeter papier een grafiek van  $y=f(x)$  en tel het aantal hokjes in het gebied begrensd door de grafiek, door de X-as en door de rechten  $x=a, x=b$ . Breng als volgt een correctie aan voor de "rand hokjes":

a randhokjes doorsneden door de grafiek tellen we met gewicht  $\frac{1}{2}$ ,  
b randhokjes doorsneden door  $x=a$  en  $x=b$  geven we het preciese gewicht.

N.B.: Deze methode kan nog meer doeltreffend gemaakt worden door het bovenbeschouwde oppervlak te bepalen met behulp van een planimeter.

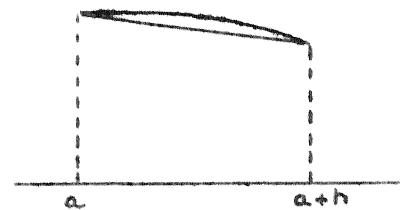
B. Meer exacte methode. Het fundamentele idee is, dat men door interpolatie  $f(x)$  gaat benaderen door een veelterm  $P(x): \int_a^b P(x)dx$  zal dan een goede benadering voor  $\int_a^b f(x)dx$  leveren.

§ 2. Trapeziumformule: Vervang  $f(x)$  door een lineaire functie, die voor  $x=a, a+h$  de waarden  $f(a)$  en  $f(a+h)$  bezit.

$$(1) \int_a^{a+h} f(x)dx \approx \frac{1}{2}h \{f(a)+f(a+h)\}$$

Schatting van de fout: Stel

$$F(t) = \int_a^{a+t} f(x)dx - \frac{1}{2}t \{f(a) + f(a+t)\},$$



dan is

$$F'(t) = \frac{1}{2} \{f(a+t) - f(a)\} - \frac{1}{2}t f'(a+t)$$

$$f(a) = f(a+t) - t f'(a+t) + \frac{t^2}{2} f''(a+\theta t), \quad 0 < \theta < 1,$$

dus als we  $M$  zo groot kiezen, dat  $|f''(x)| \leq M$  voor  $a \leq x \leq a+h$ , dan volgt

$$|F'(t)| = \left| -\frac{t^2}{4} f''(a+\theta t) \right| \leq \frac{1}{4} M t^2.$$

Verder is  $|F(h)| = \left| \int_0^h F'(t)dt \right| \leq \int_0^h \frac{1}{4} M t^2 dt$ . Dus

$$(2) \left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{1}{2}h \{f(a) + f(a+h)\} \right| \leq \frac{1}{12} M h^3.$$

Merk op, dat  $h$  hier in de derde macht voorkomt. Deze laatste opmerking leidt tot de volgende verscherping van de voorgaande methode. Stel we moeten  $\int_a^b f(x)dx$  bij benadering berekenen. Verdeel het interval  $(a,b)$

in  $n$  gelijke delen ter lengte  $h = \frac{b-a}{n}$ . Pas op elk deelinterval de trapeziumformule (1) toe:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{1}{2}h \{f(a) + f(a+h)\} + R_1,$$

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx = \frac{1}{2}h \{f(a+h) + f(a+2h)\} + R_2,$$

$$\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x) dx = \frac{1}{2}h \{f(a+(n-1)h) + f(a+nh)\} + R_n,$$

waarbij majoranten voor  $R_1, R_2, \dots, R_n$  uit (2) kunnen worden gevonden. Is dus  $M$  zo groot gekozen, dat

$$|f''(x)| \leq M \text{ voor } a \leq x \leq b,$$

dan volgt door optelling

$$(3) \int_a^b f(x) dx = h \left\{ \frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b) \right\} + R,$$

waar

$$(4) |R| \leq n \frac{Mh^3}{12} = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

Voorbeeld. Bereken  $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ . Kies daartoe in formule (3):  
 $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $n=10$ . Dus is  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ , zodat volgens (4) de fout in absolute waarde hoogstens  $\frac{1}{12} \cdot \frac{2}{10^2} = \frac{1}{600}$  is.

$a + h$	$f(a + h)$
1.1	0,9091
1.2	8333
1.3	7692
1.4	7143
1.5	6667
1.6	625
1.7	5882
1.8	5556
1.9	5263
<hr/>	
$\frac{1}{2} f(1)$	6,1877
$\frac{1}{2} f(2)$	5
	25
	<hr/>
	6,9377

Zo vinden wij  $\log 2 \approx 0,6938$ , terwijl volgens de tafel  $\log 2 = 0,6931472$ . (Vraag: waarom was het te verwachten dat de berekende waarde te groot moet uitvallen?).

§ 3. Tangentenformule: Vervang  $f(x)$  door een lineaire functie, waarvan de grafiek in het midden van het interval  $(a, a+h)$  aan de grafiek van  $f(x)$  raakt.



$$(5) \int_a^{a+h} f(x) dx \approx h f(a + \frac{1}{2}h)$$

Schatting van de fout:

Stel

$$R = \int_a^{a+h} f(x) dx - h f(a + \frac{1}{2}h)$$

Dan is

$$R = \int_a^{a+h} \{f(x) - f(a + \frac{1}{2}h)\} dx,$$

terwijl volgens de formule van Taylor geldt

$$f(x) = f(a + \frac{1}{2}h) + (x - a - \frac{1}{2}h) f'(a + \frac{1}{2}h) + \frac{1}{2}(x - a - \frac{1}{2}h)^2 f''(\xi)$$

Kiezen we dus weer M als in geval 1, dan komt er

$$\begin{aligned} |R| &= \left| \int_a^{a+h} \frac{1}{2}(x - a - \frac{1}{2}h)^2 f''(\xi) dx \right| \\ &\leq \int_a^{a+h} \frac{1}{2}(x - a - \frac{1}{2}h)^2 M dx. \end{aligned}$$

Dus

$$(6) \quad \left| \int_a^{a+h} f(x) dx - h f(a + \frac{1}{2}h) \right| \leq \frac{1}{24} M h^3.$$

Hieruit kunnen we weer een formule analoog aan (3) vinden door het interval  $(a, b)$  in  $n$  gelijke delen te verdelen en op elk deelinterval de tangentenformule (5) toe te passen. Er komt:

$$\int_a^b f(x) dx = h \left\{ f(a + \frac{1}{2}h) + f(a + \frac{3}{2}h) + \dots + f(a + \frac{2n-1}{2}h) \right\} + R$$

met

$$|R| \leq \frac{M(b-a)^3}{24 n^2}.$$

#### § 4. Interpolatieformule van Lagrange.

Stel

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$$

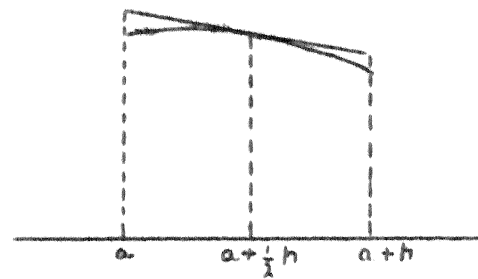
zijn gegeven. Bij elk van deze getallen is één der getallen

$$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$$

gegeven, en wel behoort  $y_\nu$  bij  $x_\nu$  ( $\nu=1, 2, \dots, n+1$ ). Gevraagd wordt een veelterm  $P(x)$  van de graad  $n$  zodat

$$P(x_\nu) = y_\nu \quad (\nu=1, 2, \dots, n+1)$$

Het is duidelijk, dat er hoogstens één veelterm aan de vraag voldoet, want waren er twee  $P_1(x)$  en  $P_2(x)$ , dan was  $P_1(x_\nu) - P_2(x_\nu) = 0$  voor  $\nu=1, 2, \dots, n+1$ . De veelterm  $P_1(x) - P_2(x)$  was dus hoogstens van de  $n^{\text{de}}$



graad en had  $n+1$  nulpunten, d.w.z.  $P_1(x) - P_2(x) \equiv 0$ .

We zoeken eerst een veelterm  $L_1(x)$  met

$$L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_v) = 0 \quad \text{voor } v=2,3,\dots,n+1.$$

Antwoord:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{n+1})}.$$

Analoog voldoet

$$L_\mu(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{\mu-1})(x-x_{\mu+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_\mu-x_1)\dots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\dots(x_\mu-x_{n+1})}$$

aan

$$L_\mu(x_v) = \delta_{\mu v} = \begin{cases} 0 & \text{als } v \neq \mu \\ 1 & \text{als } v = \mu \end{cases} \quad (\delta \text{ symbool van Kronecker})$$

Dan volgt dat

$$P(x) = \sum_{\mu=1}^{n+1} y_\mu L_\mu(x)$$

aan onze vraag voldoet.

### § 5. De regel van Simpson.

$$(7) \int_a^{a+h} f(x) dx \approx \frac{h}{6} \{f(a) + 4f(a+\frac{1}{2}h) + f(a+h)\}$$

Afleiding: We passen eerst de interpolatieformule van Lagrange toe voor het geval

$$n = 2, \quad x_1 = -k, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = k \quad (k > 0).$$

Dan is

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{x(x-k)}{2k^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{x^2-k^2}{k^2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x+k)}{2k^2},$$

dus

$$P(x) = \frac{1}{2k^2} \{y_1 x(x-k) - 2y_2(x^2-k^2) + y_3 x(x+k)\},$$

waarbij  $y_1 = f(-k)$ ,  $y_2 = f(0)$ ,  $y_3 = f(k)$ .

We vervangen nu  $\int_{-k}^k f(x) dx$  bij benadering door  $\int_{-k}^k P(x) dx$ . Nu is

$$\int_{-k}^k x(x-k) dx = \frac{2}{3} k^3$$

$$\int_{-k}^k (x^2-k^2) dx = -\frac{4}{3} k^3$$

$$\int_{-k}^k x(x+k)dx = \frac{2}{3} k^3,$$

dus

$$\begin{aligned} \int_{-k}^k P(x)dx &= \frac{1}{2k^2} \left( \frac{2}{3} k^3 y_1 + \frac{8}{3} k^3 y_2 + \frac{2}{3} k^3 y_3 \right) \\ &= \frac{k}{3} (f(-k) + 4f(0) + f(+k)) \end{aligned}$$

Hieruit volgt gemakkelijk de formule (7).

Voor de absolute waarde van de fout, die men maakt als men (7) toepast, vindt men

$$\frac{1}{2^5 \cdot 90} h^5 M \text{ als } |f^{(4)}(x)| \leq M \text{ voor } a \leq x \leq a + h$$

(vgl. b.v. L. Ford, Differentialequations (blz. 188, 2e druk), Hardy, Pure Mathematics, p. 328).

De formule (7) is dus exact voor veeltermen  $f(x)$  van de graad  $\leq 3$ .

Uit de formule van Simpson volgt de exacte inhoudsformule voor een prismoïde

$$I = \frac{H}{6} (G + 4M + B).$$

Grotere intervallen kan men weer in  $n$  gelijke delen verdelen en op elk daarvan de bovenstaande formule toepassen.

## § 6. Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen.

In vele gevallen is het zelfs niet mogelijk om de oplossing van een differentiaalvergelijking terug te brengen tot integraties. Men heeft in de laatste jaren een groot aantal methoden ontwikkeld om tot numerieke benaderingen te komen. Sommige daarvan knopen aan bij het existentiebewijs, dat wij hiervoor gegeven hebben. De volgende eenvoudige methode gaat terug op een ander existentiebewijs, n.l. dat van Cauchy. Stel we willen een approximatieve oplossing van het volgende probleem

$$(8) \quad y' = f(x, y), \quad y(a) = b.$$

Het idee is, dat men een vaste kleine aangroeiing  $h$  neemt en dan uitgaande van  $y(a)=b$  successief  $y(a+h)$ ,  $y(a+2h)$ , --- approximatief berekent, waaruit men dan een tabel voor de functie  $y(x)$  samen kan stellen. Het probleem is dus slechts om, uitgaande van  $y(x)$ , de waarde  $y(x+h)$  bij benadering te vinden. Nu is

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = h y'(x+\theta h)$$

met  $0 < \theta < 1$ . Voor kleine waarden van  $h$  is dus bij benadering

$$\Delta y \approx h y'(x) = h f(x, y),$$

zodat

$$(9) \quad y(x+h) \approx y(x) + h f(x,y).$$

Men kan aantonen dat onder zekere voorwaarden de zo gevonden approximatieve oplossingen voor  $h \rightarrow 0$  naderen tot de exacte oplossing van (8).

Voorbeeld 1:  $y' = \sqrt{x^2+y}$ ,  $y(1) = 1$ . We nemen hier  $h=0.2$ .

x	y	$f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$	$\Delta y = h f(x,y)$
1	1	1,41	0,282
1,2	1,282	1,65	,330
1,4	1,612	1,89	,378
1,6	1,990	2,13	,426
1,8	2,416	2,38	,476
2,0	2,892		

In elke rij worden de  $y$  en  $\Delta y$  opgeteld en deze som vormt de nieuwe waarde voor  $y$  in de volgende rij.

De berekening zo uitgevoerd is nog vrij ruw, want nemen we b.v.  $h=0,1$ , dan vinden we voor  $x=2$ :  $y=2,960$  in plaats van  $2,892$ . Daarom zullen we de methode later nog iets verbeteren.

Deze methode is gemakkelijk uit te breiden tot het oplossen van systemen van de eerste orde, zoals

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) & , & y(a) = b \\ z' = g(x,y,z) & , & z(a) = c. \end{cases}$$

In dit geval vinden we  $\Delta y = y(x+h) - y(x)$  en  $\Delta z = z(x+h) - z(x)$  bij benadering uit de formules

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta y \approx h y'(x) = h f(x,y,z) \\ \Delta z \approx h z'(x) = h g(x,y,z), \end{cases}$$

zodat we uit het tripel waarden  $x, y(x), z(x)$  approximatief kunnen berekenen  $x+h, y(x+h), z(x+h)$ . Zo vinden we successief uitgaande van  $y(a)=b, z(a)=c$  benaderende waarden voor  $y(a+h), z(a+h); y(a+2h), z(a+2h)$ , enz.

Een vergelijking van hogere orde dan de eerste vervangen we door een systeem van vergelijkingen.

Voorbeeld 2:  $y'' + x^2 y' + (1+x)y = 0; y(0) = 1, y'(0) = -2$ .

We stellen  $z = y'$  en vervangen de vergelijking door het systeem

$$\begin{cases} y' = z & , & y(0) = 1 \\ z' = -x^2 z - (1+x)y & , & z(0) = -2. \end{cases}$$

De numerieke oplossing met  $h=0,1$  geeft de volgende tabel (de vergelijkingen (10) worden in ons geval  $\Delta y = 0.1 z, \Delta z = 0.1(-x^2 z - (1+x)y)$ ).

x	y	z	y'(z)	z' = -x <sup>2</sup> z - (1+x)y	Δ y	Δ z
0	1	-2	-2	-1	-0,2	-0,1
0,1	0,8	-2,1	-2,1	-0,859	-0,21	-0,086
0,2	0,59	-2,186	-2,186	-0,621	-0,219	-0,062
0,3	0,371	-2,248	-2,248	-0,280	-0,225	-0,028
0,4	0,146	-2,276	-2,276			

Een gevaar bij de voorgaande methode is, dat de gemaakte fouten zich in het algemeen zullen opstapelen. We zullen daarom trachten de voorgaande methode te verbeteren. Daartoe beschouwen we nogmaals het probleem (8). We vonden daar (vgl. formule (9) voor  $y(x+h)$ ) een eerste benadering

$$(11) \quad y_1(x+h) = y(x) + h f(x, y).$$

Deze hadden we gevonden uit de vrij ruwe approximatie  $\Delta y \approx h y'(x)$ . In werkelijkheid is  $\Delta y = h y'(x + \Theta h)$ , met  $0 < \Theta < 1$ . De benadering

$$\Delta y \approx \frac{1}{2}h \{y'(x) + y'(x+h)\}$$

zal dus in het algemeen beter zijn. In het rechterlid vervangen we nog  $y'(x+h) = f(x+h, y(x+h))$  door zijn approximatie  $f(x+h, y_1)$  en zo krijgen we

$$(12) \quad \Delta y \approx \frac{1}{2}h \{f(x, y) + f(x+h, y_1)\}.$$

Zo vinden we uit  $y(x)$  door middel van (11) en (12) een tweede benadering voor  $y(x+h)$ . In de volgende tabel is deze tweede benadering verwerkt in het geval van voorbeeld 1.

x	y <sub>1</sub>	$\sqrt{x^2 + y_1}$	Δ y	y	$\sqrt{x^2 + y}$
1				1	1,414
1,2	1,283	1,65	0,306	1,306	1,65
1,4	1,636	1,90	0,355	1,661	1,90
1,6	2,041	2,14	0,404	2,065	2,15
1,8	2,495	2,40	0,455	2,520	2,40
2,0	3,000	2,64	0,504	3,024	2,64

De hier toegepaste "tweede benadering" kan ook worden uitgevoerd bij systemen van de eerste orde en dus bij differentiaalvergelijkingen van hogere orde.

## XI. Laplace transformaties

- Literatuur: J.C. Jaeger, Introduction to Laplace transformation. (1950)  
 R.V. Churchill, Modern Operational Mathematics in  
 Engineering. (1944)  
 B. van der Pol and H. Bremmer, Operational Calculus. (1950)  
 G. Doetsch, Tabellen zur Laplace-Transformation und Anleitung zum Gebrauch. (1947)

§ 1. Definitie. In het volgende is  $f(t)$  steeds een gegeven functie van een reële variabele  $t$ ; onder omstandigheden mag de functiewaarde  $f(t)$  complex zijn.

Als de integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

voor zekere waarden van  $s$  bestaat, dan heet

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

de Laplace getransformeerde (Laplace transform) van  $f(t)$ .  $f(t)$  heet de objectfunctie,  $F(s)$  de beeldfunctie. In plaats van  $F(s)$  schrijven we ook wel  $\mathcal{L} f(t)$ .  $\mathcal{L}$  is een lineaire operator:

$$\mathcal{L} (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathcal{L} f(t) + \mu \mathcal{L} g(t)$$

voor constante  $\lambda, \mu$ .

We nemen in het volgende  $s$  steeds reëel, hoewel het voor een diepergaande theorie, waarin men de theorie der complexe functies toepast, essentieel is dat  $s$  ook complexe waarden kan doorlopen.

Voorbeelden: 1. Functie van Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t \geq 0 \\ 0 & \text{voor } t < 0. \end{cases}$$

Dan is

$$H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = s^{-1} \text{ voor } s > 0$$

$$\text{2. } f(t) = t^p \text{ (} t \geq 0, p > -1 \text{), dan is}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^p dt = s^{-p-1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^p du \text{ (} u=st \text{),}$$

dus

$$\mathcal{L} (t^p) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \text{ voor } p > -1, s > 0.$$

Kiezen we speciaal  $p=n$ =geheel  $\geq 0$ , dan is

$$\mathcal{L} (t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ voor } s > 0;$$

bv.

$$\mathcal{L} (a + bt + ct^2) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}$$

In het volgende zullen we steeds aannemen, dat  $f(t)$  integreerbaar is in  $(0, \infty)$  en bovendien dat  $f(t)$  van exponentiële orde is, d.w.z. dat

$$(1) \quad |f(t)| < M e^{ct} \quad \text{voor } t > 0,$$

waarbij  $M > 0$  en  $c$  constanten zijn. In dit geval bestaat de Laplace getransformeerde  $\bar{F}(s)$  steeds voor  $s > c$ . Zo is

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{s-a} \quad \text{voor } s > a$$

(deze formule gaat ook door voor complexe  $a$  als maar  $s > \text{Re } a$ ). Uit de voorgaande formule volgt, wegens  $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ ,

$$\mathcal{L} \cosh at = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad \text{voor } s > |a|.$$

Analoog:

$$\mathcal{L} \sinh at = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{voor } s > |a|.$$

Verder, wegens

$$\cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat}),$$

$$\mathcal{L} \cos at = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia} \right) \quad \text{voor } s > \text{Re } ia,$$

dus

$$\mathcal{L} \cos at = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{voor } s > 0$$

en analoog

$$\mathcal{L} \sin at = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{voor } s > 0.$$

De vorige formules verenigen we in de volgende tabel:

objectfunctie	beeldfunctie	voorwaarde
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t^p$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$p > -1, s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n$ geheel $\geq 0, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	} $s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	} $s >  a $
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	

Elk boek over Laplace transformaties bevat, meestal achterin, een dergelijke, maar veel meer uitgebreide, tabel.

## § 2. Operaties en beeldoperaties.

1. Laat  $\lambda$  een positieve constante zijn. We zoeken de Laplace getransformeerde van  $f(\lambda t)$  als die van  $f(t)$  bekend is:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(\lambda t) dt = \lambda^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\lambda} \tau} f(\tau) d\tau \quad (\lambda t = \tau),$$

dus

$$\mathcal{L} f(\lambda t) = \lambda^{-1} \bar{F}\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad \left(\frac{s}{\lambda} > c\right).$$

2. "Verschuiving" van de objectfunctie: Zij  $\lambda > 0$ , verder

$$f_{\lambda}(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq \lambda \\ f(t-\lambda) & \text{voor } t > \lambda. \end{cases}$$

Dan is

$$\mathcal{L} f_{\lambda}(t) = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-st} f(t-\lambda) dt = \int_0^{\infty} e^{-s(u+\lambda)} f(u) du = e^{-\lambda s} \bar{F}(s).$$

3. Verschuiving van de beeldfunctie:

$$\mathcal{L} (e^{-\lambda t} f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\lambda t} f(t) dt = \bar{F}(s+\lambda).$$

4. Differentiatie van de objectfunctie: Zij  $f'(t)$  continu voor  $t > 0$ .

Dan is wegens partiële integratie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} (f'(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[ e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= s \bar{F}(s) - f(+0) \end{aligned}$$

als  $s > c$ , waarin  $c$  de constante in formule (1) is.

5. Differentiatie van de beeldfunctie: Zij  $f(t)$  continu voor  $t > 0, s > c$ .

We kunnen  $c_1 > c$  kiezen. De integraal

$$-\int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt$$

heeft continue integrand, is uniform convergent in  $s \geq c_1$ , terwijl ook  $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  daar convergeert. Dus volgt

$$\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt.$$

Dus

$$\mathcal{L} (-t f(t)) = \bar{F}'(s) \text{ voor } s > c.$$

6. Integratie van de objectfunctie: Zij  $f(t)$  continu voor  $t > 0$ . Stel

$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ , dan is  $F(0) = 0$ , dus volgens 4

$$\mathcal{L} f(t) = \mathcal{L} F'(t) = s \bar{F}(s) - F(0) = s \bar{F}(s),$$



of

$$\mathcal{L} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{s} \bar{F}(s).$$

Ook voor deze operaties en hun beelden maken wij een tafel:

n <sup>o</sup>	object functie	beeldfunctie	voorwaarde
	$f(t)$	$\bar{F}(s)$	
1	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} \bar{F}\left(\frac{s}{\lambda}\right)$	$\lambda > 0, \frac{s}{\lambda} > c$
2	$\begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq \lambda \\ f(t-\lambda) & \text{voor } t > \lambda \end{cases}$	$e^{-\lambda s} \bar{F}(s)$	$\lambda > 0, s > c$
3	$e^{-\lambda t} f(t)$	$\bar{F}(s+\lambda)$	$s+\lambda > c$
4	$f'(t)$	$s \bar{F}(s) - f(+0)$	$f'(t)$ continu, $s > c$
5	$-t f(t)$	$\bar{F}'(s)$	$f(t)$ continu, $s > c$
6	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \bar{F}(s)$	$f(t)$ continu, $s > c$

Aan enkele voorbeelden laten wij zien hoe deze regels kunnen worden toegepast:

a)  $\mathcal{L} e^{at} = \mathcal{L}(e^{at} H(t)) = H(s-a) = \frac{1}{s-a}$  voor  $s > a$ .

b)  $\mathcal{L}(t e^{at}) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}$  voor  $s > a$ .

c) Zij  $\lambda > 0$ ,

$$H_\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } t \geq \lambda \\ 0 & \text{voor } t < \lambda, \end{cases}$$

dan is

$$\bar{H}_\lambda(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{s} \quad \text{voor } s > 0.$$

Hieruit volgt weer voor

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } \lambda \leq t < \mu \\ 0 & \text{anders,} \end{cases}$$

dat

$$\bar{F}(s) = \frac{1}{s} (e^{-\lambda s} - e^{-\mu s}) \quad \text{voor } s > 0.$$

d) Berekening van  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ : Stel  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ , dan is

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt, \text{ dus volgens regel 5: } \bar{F}'(s) = -\mathcal{L} \sin t = -\frac{1}{s^2+1},$$

dus  $\bar{F}(s) = C - \text{arc tg } s$ . Voor  $s \rightarrow \infty$  geldt  $\bar{F}(s) \rightarrow 0$ ,  $\text{arc tg } s \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , dus

$C = \frac{\pi}{2}$  en we vinden  $\int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } s$  voor  $s > 0$ . Met behulp

van de tweede stelling van het gemiddelde bewijst men dat de integraal in het linkerlid uniform convergeert voor  $s \geq 0$ .  $s \rightarrow 0$  geeft dan  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

**§ 3. Het terugvinden van de objectfunctie.** In vele gevallen wordt gevraagd om bij een gegeven "beeld" functie  $\varphi(s)$  een functie  $f(t)$  zó te bepalen dat

$$(3) \quad \mathcal{L} f(t) = \varphi(s).$$

Het z.g. terugzoeken van een objectfunctie is gewoonlijk een moeilijk probleem, waarvoor men tal van methoden heeft ontwikkeld, die we echter hier niet alle kunnen behandelen. In de praktijk kan men zich in vele gevallen behelpen met een uitgebreide tabel van Laplace-transformaties als men bovendien de regels gebruikt, die in § 2 zijn uitgelegd. Aan de hand van onze simpele tabel uit § 2 zullen we dit toelichten.

Voorbeeld 1. Stel, dat we  $f(t)$  willen bepalen uit de vergelijking

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Uit onze tabel zien we dat met de beeldfunctie  $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$  correspondeert de objectfunctie  $t^p$ . Met  $\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}$  correspondeert dus  $t^{\frac{1}{2}-1}$ . Dus past in ons geval

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

(De waarde  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  volgt b.v. uit de "waarschijnlijkheidsintegraal"

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Voorbeeld 2. Bepaal  $f(t)$  uit

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \quad (a \neq 0)$$

Door kwadraatafsplitsing volgt

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{a\{(s+\lambda)^2 + \mu^2\}}, \quad \lambda = \frac{b}{2a}, \quad \mu^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2}.$$

Geval A:  $\mu^2 > 0$  (of  $b^2 - 4ac < 0$ ). In de tabel correspondeert de beeldfunctie  $\frac{\mu}{s^2 + \mu^2}$  met de objectfunctie  $\sin \mu t$ , dus volgens regel 3 van § 2 komt de beeldfunctie  $\frac{\mu}{(s+\lambda)^2 + \mu^2}$  overeen met de objectfunctie  $e^{-\lambda t} \sin \mu t$ . Dus voldoet

$$f(t) = \frac{1}{a\mu} e^{-\lambda t} \sin \mu t.$$

Geval B:  $\mu^2 = 0$  ( $b^2 - 4ac = 0$ ).  $f(t) = \frac{1}{a(s+\lambda)^2}$ ;  $\frac{1}{s^2}$  correspondeert met  $t$ , dus  $\frac{1}{(s+\lambda)^2}$  met  $e^{-\lambda t} t$ . In dit geval is dus het antwoord

$$f(t) = \frac{1}{a} t e^{-\lambda t}.$$

Geval C:  $\mu^2 < 0$  ( $b^2 - 4ac > 0$ ). Stel  $\bar{\mu}^2 = -\mu^2 > 0$ .

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{a\bar{\mu}} \frac{\bar{\mu}}{(s+\lambda)^2 - \bar{\mu}^2},$$

dus vinden we analoog met geval A

$$f(t) = \frac{1}{a\mu} e^{-\lambda t} \sinh \mu t.$$

De vraag komt nu naar boven of we bij gegeven functie  $\varphi(s)$  hoogstens één of meerdere functies  $f(t)$  als oplossing van (3) kunnen verwachten.

Stelling: Voldoet een continue functie  $f(t)$  aan (3), dan is er voor  $t > 0$  geen tweede continue functie, die ook aan (3) voldoet (z.g. eenduidigheidsstelling van de Laplace transformatie).

Het bewijs berust fundamenteel op de approximatiestelling van Weierstrass:

Is  $f(x)$  een continue functie in een eindig gesloten interval  $[a, b]$ , dan bestaat er bij elke  $\varepsilon > 0$  een veelterm  $P(x)$ , zodat

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{voor elke } x \in [a, b].$$

Voor een bewijs zie b.v. E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, blz. 103.

Uit deze approximatiestelling leiden we op zijn beurt de volgende momentenstelling af:

Zij  $f(x)$  continu in  $[0, 1]$  en zij

$$(4) \quad \int_0^1 x^n f(x) dx = 0 \quad \text{voor } n=0, 1, \dots,$$

dan volgt  $f(x) \equiv 0$  in  $[0, 1]$ .

Immers is (4) vervuld, dan geldt, daar elke veelterm  $P(x)$  uit machten van  $x$  is opgebouwd,

$$\int_0^1 P(x) f(x) dx = 0,$$

dus

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f(x) \{f(x) - P(x)\} dx \leq \varepsilon \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Hieruit volgt door  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 0,$$

dus wegens de continuïteit van  $f(x)$  inderdaad  $f(x) \equiv 0$  in  $[0, 1]$ .

We beginnen nu met het eigenlijke bewijs. Stel, dat de continue functies  $f_1(t)$  en  $f_2(t)$  beide aan (3) voldoen. Voor hun verschil  $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$  volgt dan

$$\mathcal{L} f(t) = 0 \quad \text{voor } s \gg c.$$

We hebben te bewijzen  $f(t) \equiv 0$  voor  $t > 0$ .

Als eerste stap beschouwen we het speciale geval dat  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  eindig is en  $c=0$ . We hebben dan speciaal

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-nt} f(t) dt = 0 \quad (n=1,2,\dots),$$

of, als we  $e^{-t}=x$  invoeren,

$$\int_0^1 x^{n-1} f(-\log x) dx = 0 \quad (n=1,2,\dots).$$

Hierin is  $\varphi(x)=f(-\log x)$  een continue functie in  $[0,1]$  (N.B. óók voor  $x=0$ ), waarvoor geldt

$$\int_0^1 x^n \varphi(x) dx = 0,$$

dus wegens de momentenstelling  $\varphi(x)=f(-\log x) \equiv 0$ ,  $f(t) \equiv 0$  voor  $t > 0$ .

Het algemene geval van de stelling kunnen we tot het hier behandelde speciale terugbrengen. Kies daartoe  $s_0 > c$ . Nu is

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t) dt.$$

We passen nu partiële integratie toe en noemen daartoe

$$\int_0^t e^{-s_0 \tau} f(\tau) d\tau = h(t) \quad (\text{continu, } \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \Gamma(s_0)).$$

Dan is voor  $s > s_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f(t) &= \left[ e^{-(s-s_0)t} h(t) \right]_0^{\infty} + (s-s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} h(t) dt \\ &= (s-s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} h(t) dt. \end{aligned}$$

Dus volgt  $\int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} h(t) dt = 0$  voor  $s > s_0$ ,

waardoor het probleem tot het vorige speciale geval is teruggebracht.

Dus volgt

$$\begin{aligned} h(t) &\equiv 0 \text{ voor } t > 0, \\ h'(t) &= e^{-s_0 t} f(t) \equiv 0 \text{ voor } t > 0, \end{aligned}$$

$$f(t) \equiv 0 \text{ voor } t > 0, \quad \text{q.e.d.}$$

§ 4. Toepassing op een circuitprobleem. Van fundamentele betekenis voor de toepassing der Laplace transformatie is:

- het lineaire karakter van de Laplace transformatie,
- dat differentiatie en integratie uitgeoefend op een object functie corresponderen met eenvoudiger operaties uitgeoefend op de beeldfunctie (zie regel 4 en 5 in de tafel van § 2). Daardoor kan een probleem na "vertaling" er eenvoudiger uitzien.

c) de eenduidigheidsstelling van § 2.

Ons oplossingschema is als volgt:

probleem voor object functies  $\xrightarrow{\text{(Laplace transf.)}}$  eenvoudiger probleem voor beeldfuncties

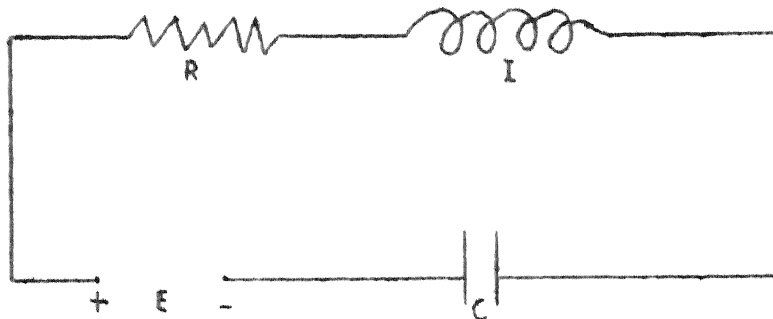
oplossing voor object functies  $\xleftarrow{\text{(Terugzoeken)}}$  oplossing in termen van beeldfuncties

We beschouwen nu een gesloten circuit met daarin

- 1) een constante electromotorische kracht E
- 2) een weerstand R
- 3) een zelfinductie L
- 4) een condensator met capaciteit C

Op de tijd  $t=0$  wordt de stroomsterke  $I(t)=0$  gedacht.

Gevraagd wordt  $I(t)$  als functie van  $t$ .



Aan de electriciteitsleer ontleen we de vergelijking

$$E = R I(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau$$

We nemen links en rechts de Laplace getransformeerde

$$\frac{E}{s} = R I(s) + L(s I(s) - I(0)) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} .$$

Dit wordt een vergelijking in de beeldfunctie  $I(s)$  met daarin geen enkele differentiatie of integratie meer. Oplossing van  $I(s)$  levert

$$I(s) = \frac{E}{Ls^2 + Rs + C^{-1}} = \frac{E}{L} \frac{1}{(s+\lambda)^2 + \mu^2}$$

met  $\lambda = \frac{1}{2}RL^{-1}$ ,  $\mu^2 = \frac{4L - R^2C}{4L^2C}$ . Het terugzoeken van  $I(t)$  gebeurt met behulp van voorbeeld 2 van § 3. We vinden:

Geval A:  $\mu^2 > 0$  ( $4L > R^2C$ )  $I(t) = \frac{E}{\mu L} e^{-\lambda t} \sin \mu t.$

Geval B:  $\mu^2 = 0$  ( $4L = R^2C$ )  $I(t) = \frac{E}{L} t e^{-\lambda t}.$

Geval C:  $\mu^2 < 0$  ( $4L < R^2C$ )  $I(t) = \frac{E}{\mu L} e^{-\lambda t} \sinh \mu t.$

§ 5. De beeldfunctie is een rationale functie. Gevraagd wordt de objectfunctie  $f(t)$  te bepalen uit de vergelijking

$$(5) \quad \mathcal{L} f(t) = \frac{q(s)}{p(s)},$$

waar  $p(s)$  en  $q(s)$  veeltermen zijn zodanig dat de graad van  $p(s)$  hoger is dan die van  $q(s)$ .

We kunnen  $\frac{q(s)}{p(s)}$  steeds in partiële breuken splitsen

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_v} \frac{c_{v\mu}}{(s-s_v)^\mu},$$

waarin  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de nulpunten van de noemer  $p(s)$  voorstellen en  $m_1, m_2, \dots, m_n$  de respectievelijke multipliciteiten zijn. De object functie, die bij de term  $\frac{c_{v\mu}}{(s-s_v)^\mu}$  behoort is

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{c_{v\mu}}{(s-s_v)^\mu} = \frac{c_{v\mu}}{(\mu-1)!} \frac{t^{\mu-1}}{e^{s_v t}} \quad (\text{gebruik } \mathcal{L} \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} = \frac{1}{s^\mu} \text{ en verder de verschuivingsregel 3 van } \S 2).$$

Hieruit volgt voor  $f(t)$  de uitdrukking

$$(6) \quad f(t) = \sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{m_v} c_{v\mu} \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} e^{s_v t}.$$

De vergelijking (5) geldt voor elke  $s > \max_{v=1, \dots, n} \operatorname{Re} s_v$ .

Is  $s_v$  complex, dan komt in (6) ook de term  $\frac{c_{v\mu}}{(\mu-1)!} \frac{t^{\mu-1}}{e^{\bar{s}_v t}}$  voor.

De beide toegevoegd complexe termen kunnen we dan samen nemen volgens de rekenregel

$$\begin{aligned} c e^{st} + \bar{c} e^{\bar{s}t} &= (a+ib)e^{(x+iy)t} + (a-ib)e^{(x-iy)t} \\ &= 2e^{xt}(a \cos y t - b \sin y t). \end{aligned}$$

In eenvoudige gevallen pakt men dit vaak anders aan.

Voorbeelden: a. Bepaal  $f(t)$  uit  $\mathcal{L} f(t) = \frac{s}{s^2+3s+2}$ .

Er geldt

$$\frac{s}{s^2+3s+2} = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2},$$

$$f(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

b. Bepaal  $f(t)$  uit  $\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{s^2+a^2}$ . De laatste breuk is te schrijven  $\frac{1}{a^2} \frac{1}{s^2+a^2}$ . Dus

$$f(t) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} \cos a t.$$

c. Vraagstuk 4.

We krijgen een eenvoudige regel als alle nulpunten van de noemer enkelvoudig zijn (dus  $m_1=m_2=\dots=m_n=1$ ).

Dan is n.l.

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \sum_{v=1}^n \frac{c_v}{s-s_v} \quad \text{met } c_v = \frac{q(s_v)}{p'(s_v)} \quad (v=1, \dots, n).$$

Dus

$$(7) \quad f(t) = \sum_{v=1}^n \frac{q(s_v)}{p'(s_v)} e^{s_v t}.$$

Van belang is hiervan het speciale geval

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{s P(s)}$$

waar  $P(s)$  een veelterm is met enkelvoudige nulpunten, die alle ongelijk nul zijn. De formule (7) geeft in dit geval

$$(8) \quad f(t) = \frac{1}{P(0)} + \sum_{\lambda=1}^r \frac{e^{s_\lambda t}}{s_\lambda P'(s_\lambda)},$$

welke we de ontwikkelingsformule van Heaviside noemen.

### § 6. Homogene lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten.

Eenvoudigheidshalve nemen we eerst een vergelijking van de tweede orde:

$$(9) \quad y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Volgens regel 4 van § 2 is de beeldfunctie van  $y'(t)$  gelijk aan  $s \bar{y}(s) - y(0)$ ; dus die van  $y''(t)$  is

$$s \mathcal{L} y'(t) - y'(0) = s^2 \bar{y}(s) - s y(0) - y'(0).$$

Door toepassing van de Laplace transformatie neemt (9) de vorm aan

$$\{s^2 \bar{y}(s) - s y(0) - y'(0)\} + a_1 \{s \bar{y}(s) - y(0)\} + a_2 \bar{y}(s) = 0.$$

Oplossing van  $\bar{y}(s)$  uit deze vergelijking levert

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \{(s + a_1) y_0 + y_1\}.$$

Het rechterlid is een rationale functie in  $s$ . De bijbehorende object functie  $y(t)$  vindt men met behulp van de methode uit de vorige paragraaf.

Voorbeeld:  $y'' + a^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s^2 + a^2} \{s y_0 + y_1\}$$

$$y(t) = y_0 \cos at + \frac{1}{a} y_1 \sin at.$$

In het meer algemene geval

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

vindt men als men de karakteristieke veelterm door

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

voorstelt

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{p(s)} \left\{ (s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-1}) y_0 + (s^{n-2} + a_2 s^{n-3} + \dots + a_{n-2}) y_1 + \dots + y_{n-1} \right\},$$

dus weer een rationale functie  $\frac{q(s)}{p(s)}$  van de in § 5 beschouwde vorm. De coëfficiënten van  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  in het rechterlid van de vorige formule kan men onthouden door de regel, dat dit de "gehele delen" van  $\frac{p(s)}{s}, \frac{p(s)}{s^2}, \dots, \frac{p(s)}{s^n}$  zijn.

§ 7. Convoluties. (Faltung, Product de composition). Laat in het volgende  $f(t)$  en  $g(t)$  twee continue functies van exponentiële orde zijn. Zij

$$(10) \quad |f(t)| \leq M_1 e^{ct}, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{ct} \quad \text{voor } t > 0$$

Onder de convolutie van  $f(t)$  en  $g(t)$  verstaat men de functie

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Voorbeeld. Zij  $f(t) = g(t) = e^{ct}$ , dan is

$$f * g(t) = t e^{ct}.$$

Blijkbaar is deze bewerking commutatief

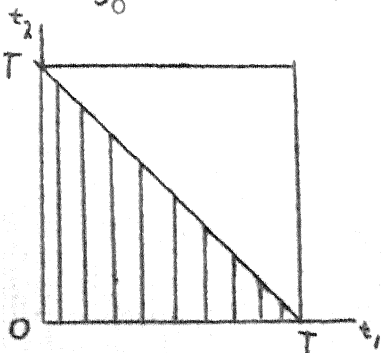
$$f * g(t) = g * f(t).$$

Verder is de convolutie weer continu en ook van exponentiële orde:

$$|f * g(t)| \leq M_1 M_2 t e^{ct} \quad \text{voor } t > 0$$

Hoofdeigenschap:  $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f \cdot \mathcal{L}g$  voor  $s > c$ , m.a.w. de beeldoperatie van de convolutie is de vermenigvuldiging van de beeldfuncties.

Bewijs:  $\int_0^T e^{-st_1} f(t_1) dt_1 \cdot \int_0^T e^{-st_2} g(t_2) dt_2 =$



$$= \iint_V e^{-s(t_1+t_2)} f(t_1) g(t_2) dt_1 dt_2,$$

waar de dubbele integraal uitgestrekt is over het getekende vierkant V. Noem  $I_1$  de integratie bijdrage over de gearceerde driehoek,  $I_2$  de bijdrage over de tweede driehoek. Bij  $I_2$  is  $t_1 + t_2 \geq T$ , dus

$$\begin{aligned} |e^{-s(t_1+t_2)} f(t_1) g(t_2)| &\leq M_1 M_2 e^{(c-s)(t_1+t_2)} \\ &\leq M_1 M_2 e^{-(s-c)T}, \end{aligned}$$



zodat  $|I_2| \leq \frac{1}{2}T^2 \cdot M_1 M_2 e^{-(s-c)T}$  en dus, als  $s > c$ , geldt  $I_2 \rightarrow 0$  als  $T \rightarrow \infty$ .  
 Stelt men verder  $t_1 + t_2 = t$ ,  $t_2 = \tau$ , dan is wegens  $\frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(t, \tau)} = 1$

$$I_1 = \iint e^{-st} f(t-\tau)g(\tau) dt d\tau,$$

waar geïntegreerd wordt over  $0 < \tau < t < T$ . Omzetting van de dubbele integraal in een herhaalde geeft

$$I_1 = \int_0^T e^{-st} dt \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^T e^{-st} f * g(t) dt.$$

Dus

$$\int_0^T e^{-st_1} f(t_1) dt_1 \cdot \int_0^T e^{-st_2} g(t_2) dt_2 = \int_0^T e^{-st} f * g(t) dt + I_2.$$

Voor  $T \rightarrow \infty$  nadert  $I_2$  tot nul en volgt inderdaad

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \cdot \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} f * g(t) dt.$$

Voorbeeld:  $\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) H(t-\tau) d\tau = f * H$ .

Dus vinden we terug

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L} f \cdot \mathcal{L} H = \frac{F(s)}{s}.$$

Opgave: Bewijs de associatieve eigenschap

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

met behulp van de hoofdeigenschap.

§ 8. Inhomogene lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten.

$$(11) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

We splitsen de opgave in twee delen:

I. Oplossing van de gereduceerde vergelijking met dezelfde beginwaarden. Dit is in § 6 geschied.

II. Oplossing van (11) met  $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$  (de z.g. restoplossing  $r(t)$ ).

Door optelling van de oplossingen I en II vindt men de gevraagde integraal van (11).

Voor de restoplossing heeft men  $\bar{r}'(s) = s \bar{r}(s)$ ,

$$\bar{r}''(s) = s^2 \bar{r}(s), \dots, \bar{r}^{(n)}(s) = s^n \bar{r}(s). \text{ Dus}$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) \bar{r}(s) = \bar{F}(s)$$

$$\bar{r}(s) = \frac{1}{p(s)} \bar{F}(s),$$

als  $p(s)$  de karakteristieke veelterm voorstelt.

Laat  $q(t)$  de objectfunctie van  $\frac{1}{p(s)}$  zijn (te vinden met de methoden van § 5), dan is

$$\bar{r}(s) = \bar{q}(s) \bar{f}(s)$$

en dus volgens de hoofdeigenschappen

$$\bar{r}(s) = \bar{q} * \bar{f}$$

$$r(t) = q * f = \int_0^t q(\tau) f(t-\tau) d\tau.$$

Voorbeeld:  $y'' + a^2 y = f(t)$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y_1$

Wegens  $\bar{q}(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$  is  $q(t) = \frac{1}{a} \sin at$ , zodat de restoplossing is

$$r(t) = \frac{1}{a} f(t) * \sin at.$$

Dus

$$y(t) = y_0 \cos at + \frac{1}{a} y_1 \sin at + \frac{1}{a} \int_0^t f(t-\tau) \sin a\tau d\tau$$

### § 9. Het "superpositieprincipe" (Maxwell, Boltzmann).

Dit stelt ons in staat de restoplossing  $r(t)$  van (11) terug te brengen tot de restoplossing  $r_1(t)$  van

$$(12) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = H(t).$$

Uit (12) volgt n.l.

$$(13) \quad (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) \bar{r}_1(s) = \frac{1}{s};$$

aan de andere kant is

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) \bar{r}(s) = \bar{F}(s).$$

Dus

$$\bar{r}(s) = s \bar{F}(s) \cdot \bar{r}_1(s).$$

Nemen we aan, dat  $f'(t)$  continu is, dan is volgens regel 4 uit § 2

$$\begin{aligned} \bar{r}(s) &= \{s \bar{F}(s) - f(0)\} \bar{r}_1(s) + f(0) \bar{r}_1(s) \\ &= \mathcal{L} f'(t) \cdot \mathcal{L} r_1(t) + f(0) \mathcal{L} r_1(t) \end{aligned}$$

en de hoofdeigenschap van § 7 geeft

$$\begin{cases} r(t) = f' * r_1(t) + f(0) r_1(t) \\ = f(0) r_1(t) + \int_0^t f'(\tau) r_1(t-\tau) d\tau. \end{cases}$$

Dit is het z.g. superpositieprincipe.

De restoplossing  $r_1(t)$  van (12) is zeer eenvoudig te vinden als de nulpunten  $s_1, s_2, \dots, s_n$  van de karakteristieke veelterm  $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$  alle enkelvoudig en ongelijk nul zijn. Uit (13) volgt n.l.

$$\bar{r}(s) = \frac{1}{s p(s)}$$

en de ontwikkelingsformule van Heaviside (8) geeft in dit geval

$$r_1(t) = \frac{1}{p(0)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{e^{s_\nu t}}{s_\nu p'(s_\nu)} .$$

Opgaven:

1) Bepaal  $f(t)$  als  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2}$  ( $s > 0$ )

Antwoord:  $\frac{t \sin at}{2a}$

2) Bepaal  $\mathcal{L}(t \cos at)$ .

Antwoord:  $\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$  ( $s > 0$ )

3) Bepaal  $f(t)$  als  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$  ( $s > -\frac{1}{2}$ )

Antwoord:  $\frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2} \sqrt{3} t$ .

4) Bepaal  $f(t)$  als  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$  ( $s > -\frac{1}{2}$ )

Aanwijzing: Schrijf:  $\frac{s}{s^2 + s + 1} = \frac{c_1(s + \frac{1}{2})}{(s + \frac{1}{2})^2 + a^2} + \frac{c_2 a}{(s + \frac{1}{2})^2 + a^2}$

Antwoord:  $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (\cos \frac{1}{2} \sqrt{3} t - \frac{1}{3} \sqrt{3} \sin \frac{1}{2} \sqrt{3} t)$

5) Bepaal  $y(t)$  uit:

$$\begin{cases} y(t) + y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 1 & (\text{gebruik hierbij vraagstuk 3 en 4}) \\ y(+0) = 1 \end{cases}$$

Antwoord:  $y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left\{ \frac{1}{3} \sqrt{3} t \sin \frac{1}{2} \sqrt{3} t + \cos \frac{1}{2} \sqrt{3} t \right\}$ .

6) We definiëren  $f(t)$  als volgt:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 2n \leq t < 2n+1 \\ 0 & \text{voor } 2n+1 \leq t < 2n \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

Bepaal  $\bar{F}(s)$ .

Antwoord:  $\frac{1}{s(1+e^{-s})}$  ( $s > 0$ ).

7) Gegeven:  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$ ,  $\text{Re } s > 0$ .

Gevraagd  $f(t)$  te berekenen:

A) Door gebruik te maken van de regel  $\bar{F}'(s) = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$ ,

B) Door middel van convoluties.

Antwoord:  $f(t) = \frac{1}{2} t \sin t$ .

8) Gegeven:  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}$ ,  $a > 0$ ,  $\text{Re } s > 0$

Gevraagd  $f(t)$  te berekenen:

A) Door  $\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2}$  geschikt te splitsen (zie ook opgave 2).

B) Met behulp van convoluties.

Antwoord:  $f(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin at}{a} - t \cos at \right)$ .

9) Los op:  $y'' - 2y' + y = 2e^t$   
 $y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$

Antwoord:  $y(t) = e^t(t^2 - 2t + 3)$ .

10) Gegeven:  $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{2\pi s(s^2+1)(1-e^{2\pi s})}$ ,  $\text{Re } s > 0$ .

Gevraagd:  $f(t)$ .

Aanwijzingen: Gebruik het resultaat van opgave 6 en de hoofdstelling over convoluties.

Antwoord:  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 2(2n+1)\pi < t \leq 2(2n+2)\pi \quad n=0,1,2,\dots \\ 1 - \cos t & \text{als } 2(2n)\pi < t \leq 2(2n+1)\pi \quad n=0,1,2,\dots \end{cases}$

Einde van de cursus "Gewone Differentiaalvergelijkingen"