STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 004

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

A.H.M. Levelt

25 januari 1958

Over de existentie van Cauchy-hoofdwaarden

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1958-004

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Over de existentie van Cauchy-hoofdwaarden

A.H.M. Levelt

25 januari 1958

1. De formules van Plemelj.

In de functietheorie en haar toepassingen stuit men regelmatig op functies f(z) gedefinieerd door

$$(1.1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{\varphi(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \notin W),$$

waarin W een continu differentieerbare weg is, en $\varphi(w)$ een over W integreerbare functie. Het is niet moeilijk om in te zien, dat f(z) een analytische functie is van z in ieder gebied, dat W niet bevat. Wij vragen ons nu af hoe f(z) zich gedraagt, wanneer z tot een punt w_0 van W nadert. Ingeval $\varphi(w)$ aan een z.g. Höldervoorwaarde voldoet op W, d.w.z. dat er een $\mu > 0$ bestaat met de eigenschap

$$(1.2) \qquad |\varphi(w_1) - \varphi(w_2)| \leq C.|w_1-w_2|^{\mu}$$

voor alle w_1 en w_2 op W, leren ons de formules van Plemelj ([1], §17), dat

$$(1.3) \qquad f^+(w_0) = \tfrac{1}{2}\varphi(w_0) + \frac{1}{\pi i} \fint_W \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\, dw$$

$$(1.4) \qquad f^-(w_0) = -\tfrac{1}{2}\varphi(w_0) + \frac{1}{\pi i} \fint_W \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\, dw \quad .$$

Hierin is $f^+(w_0)$ de limiet van f(z), wanneer z in een gebied $H^+(w_0)$ (definitie in paragraaf 2) tot w_0 nadert (voor $f^-(w_0)$ analoge definitie), en

$$(1.5) \qquad \frac{1}{\pi i} \fint_W \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\, dw = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\substack{W \\ |w-w_0|>\delta}} \frac{\varphi(w)}{w-w_0}\, dw$$

de z.g. Cauchy-hoofdwaarde is. I.h.b. wordt de existentie van deze limieten uitgesproken.

Doel van de volgende beschouwingen is om na te gaan in hoeverre de stringente Höldervoorwaarde noodzakelijk is, en welke stellingen men zonder deze voorwaarde nog kan uitspreken. In het vervolg zijn alle wegen continu differentieerbaar, terwijl $\varphi(w)$

een Riemann-integreerbare functie voorstelt (behalve in paragraaf 4).

2. Een schatting voor f(z).

Laat W een weg zijn*), en laat het gedrag gevraagd worden van f(z), gedefinieerd door (1.1), in een omgeving van het punt $w_0 \in W$. Is $\varepsilon > 0$, dan is er een cirkel (met straal ρ om w_0 zó, dat aan de volgende eisen voldaan is:

a. binnen C ligt slechts één samenhangend stuk W_1 van W,

b. de raaklijn in een willekeurig punt $w_1 \in W_1$ maakt een hoek $< \varepsilon$ met een vaste rechte l.

Zij W_2 het deel van W buiten C, dan is $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, waarin

$$(2.1)\qquad f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_1} \frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw,\quad f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{W_2}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw\ .$$

$f_2(z)$ is een buiten W_2 analytische functie. I.h.b. is $f_2(z)$ analytisch binnen C. Is W_1' een gesloten deelboog van W_1, dan is

$$(2.2)\qquad \lim_{z\to w_0,\, z\in C} f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W_2}\frac{\varphi(w)}{w-w_0}\,dw$$

uniform voor $w_0 \in W_1'$. We hebben dus nog slechts het gedrag van $f_1(z)$ in een omgeving van $w_0 \in W_1$ na te gaan.

In het volgende vervangen we $f_1(z)$ door $f(z)$ en W_1 door W.

Is w_0 een inwendig punt van W, dan definiëren we gebieden $H^+(w_0)$ en $H^-(w_0)$ als volgt: $H^+(w_0)$ is het gebied links van W, dat slechts begrensd wordt door de twee rechten door w_0, die ieder een hoek 2α $(\frac{\pi}{4} > \alpha > \varepsilon)$ maken met de rechte l (zie b), $H^-(w_0)$ is het gebied dat met $H^+(w_0)$ gespiegeld ligt t.o.v. w_0.

In het volgende zal de functie $a(w_0, \delta)$, gedefinieerd als de niet-negatieve functie die voldoet aan

$$(2.3)\qquad a^2(w_0, \delta) = \frac{1}{\delta}\int_{|w-w_0|<\delta} |\varphi(w)-\varphi(w_0)|\,|dw|\ ,$$

een rol spelen. Hiervoor geldt:

Stelling 2.1. Voor bijna alle $w_0 \in W$ is $\lim_{\delta\to 0} a(w_0, \delta)=0$. Hiertoe behoren de punten w_0, waarin $\varphi(w)$ continu is. Is W' een gesloten deelboog van W, waarop $\varphi(w)$ continu is, dan is $a(w_0, \delta) \leq a(\delta)$ met $a(\delta)$ onafhankelijk van w_0 $(w_0 \in W')$ en $a(\delta) \to 0$ als $\delta \to 0$.

Bewijs. We verdelen de integratieweg $|w-w_0|<\delta$ door w_0 in twee stukken. Op ieder stuk nemen we de booglengte s als parameter.

---

*) zonder dubbelpunten

Dan is, als $w(o)=w_o$ en $w_1=w(s_1)$, $w_2=w(s_2)$ de punten zijn met $|w(s_1)-w_o|=|w(s_2)-w_o|=\delta$,

$$\frac{1}{\delta}\int_{w_o}^{w_1}|\varphi(w)-\varphi(w_o)||dw| = \frac{1}{\delta}\int_{0}^{s_1}|\varphi(w(s))-\varphi(w(o))|ds =$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{0}^{\delta}|\varphi(w(s))-\varphi(w(o))|ds + o(1)$$

(Het andere stuk leidt tot eenzelfde schatting).
Daar $\varphi(w(s))$ Riemann-integreerbaar is, bestaat de limiet als $\delta\to 0$ voor bijna iedere w_o, en is dan gelijk aan de waarde van de integrand voor s=0, dus gelijk nul. Is $\varphi(w)$ continu in w_o, dan bestaat de limiet voor $\delta\to 0$. Tenslotte ziet men ook de laatste eigenschap der stelling gemakkelijk.

Stelling 2.2. Laat $f(z)$ gedefiniëerd zijn door (1.1) en $a(w_o,\delta)$ door (2.3), dan geldt voor de punten z in $H^+(w_o)$ of $H^-(w_o)$, die tot w_o een afstand $\delta a(w_o,\delta)$ hebben, de volgende schatting

$$(2.4)\quad \left|f(z) \pm \tfrac{1}{2}\varphi(w_o) - \frac{1}{2\pi i}\int_{W,|w-w_o|>\delta}\frac{\varphi(w)}{w-w_o}dw\right| < \lambda a(w_o,\delta)+\mu.\delta ,$$

waarin λ,μ niet van w_o en δ afhangen, en het -teken geldt als $z\in H^+(w_o)$ en het +teken als $z\in H^-(w_o)$.

Bewijs. Laat $W(\delta)$ en $W^*(\delta)$ de delen van W zijn met resp. $|w-w_o|<\delta$ en $|w-w_o|>\delta$, dan is, als $\zeta=z-w_o$ is,

$$(2.5)\quad f(w_o+\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{W(\delta)}\frac{\varphi(w)}{w-w_o-\zeta}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{W^*(\delta)}\frac{\varphi(w)}{w-w_o-\zeta}dw =$$

$$= \varphi(w_o)\frac{1}{2\pi i}\int_{W(\delta)}\frac{dw}{w-w_o-\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{W(\delta)}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_o)}{w-w_o-\zeta}dw$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{W^*(\delta)}\frac{\varphi(w)}{w-w_o}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{W^*(\delta)}\varphi(w)\left\{\frac{1}{w-w_o-\zeta} - \frac{1}{w-w_o}\right\}dw .$$

We hebben nu achtereenvolgens de schattingen

$$(2.6)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W(\delta)}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_o)}{w-w_o-\zeta}dw\right| \le \frac{1}{2\pi|\zeta|\sin\alpha}\int_{W(\delta)}|\varphi(w)-\varphi(w_o)||dw| = \frac{\delta a^2(w_o,\delta)}{2\pi|\zeta|\sin\alpha} ,$$

verder geldt, omdat $|\varphi(w)|\le M$ is,

$$(2.7)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{W^*(\delta)}\varphi(w)\left\{\frac{1}{w-w_0-\xi}-\frac{1}{w-w_0}\right\}dw\right| \le \frac{|\xi|.M}{2\pi}\int_{W^*(\delta)}\frac{|dw|}{|w-w_0-\xi||w-w_0|}$$

$$\le \frac{|\xi|M}{2\pi\sin\alpha}\int_{W^*(\delta)}\frac{|dw|}{|w-w_0|^2} \le \frac{|\xi|.M}{\delta\sin\alpha}.$$

Stel nu dat $z \in H^+(w_0)$ ligt, dan is

$$(2.8)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{W(\delta)}\frac{dw}{w-w_0-\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{w-w_0-\xi},$$

waarin V een halfcirkelvormige integratieweg is om w_0, die de eindpunten w_1 en w_2 van $W(\delta)$ verbindt en niet door $H^+(w_0)$ loopt. Nu is

$$(2.9)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{w-w_0-\xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{w-w_0} + \frac{\xi}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{(w-w_0-\xi)(w-w_0)}.$$

en

$$(2.10)\quad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{w-w_0}-\frac{1}{2}\right| < \gamma.\delta,$$

waarin γ onafhankelijk is van δ en w_0, terwijl

$$(2.11)\quad \left|\frac{\xi}{2\pi i}\int_V\frac{dw}{(w-w_0-\xi)(w-w_0)}\right| \le \frac{|\xi|}{\delta}.$$

Uit (2.5) t.m. (2.11) volgt

$$(2.12)\quad \left|f(z)-\tfrac{1}{2}\varphi(w_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{W^*(\delta)}\frac{\varphi(w)}{w-w_0}dw\right| \le$$

$$\le \frac{\delta a^2(w_0,\delta)}{2\pi|\xi|\sin\alpha}+\frac{|\xi|M}{\delta\sin\alpha}+M.\gamma.\delta+M.\frac{|\xi|}{\delta},$$

en wanneer men $|\xi| = \delta a(w_0,\delta)$ neemt, is dit kleiner dan

$$\lambda a(w_0,\delta)+\mu\delta \quad \left(\lambda = \frac{1}{2\pi\sin\alpha}+\frac{M}{\sin\alpha}+M,\ \mu = M.\gamma\right).$$

<u>Stelling 2.3.</u> Is $\varphi(w)$ continu op W en W' een gesloten deelboog van W, dan geldt voor alle punten w_0 van W en ieder punt z in $H^+(w_0)$ of $H^-(w_0)$, dat tot w_0 een afstand $\delta a(\delta)$ heeft

$$(2.13)\quad \left| f(z) \pm \tfrac{1}{2}\varphi(w_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W^*(\delta)} \frac{\varphi(w)}{w-w_0}dw \right| \leq \lambda a(\delta)+\mu\delta.$$

Bewijs. Het rechterlid van (2.12) is in dit geval kleiner dan

$$\frac{\delta a^2(\delta)}{2\pi|\xi|\sin\alpha} + \frac{|\xi| M}{\delta \sin\alpha} + M.\gamma.\delta + M.\frac{|\xi|}{\delta}.$$

Kiezen we nu $|\xi| = \delta a(\delta)$, dan volgt (2.13).

3. Toepassingen.

Uit stelling 2.2 volgt onmiddellijk:

Stelling 3.1. Voor bijna ieder punt $w_0 \in W$, waaronder de punten zijn, waarin $\varphi(w)$ continu is, volgt uit het bestaan van

$$\lim_{z\in H^+(w_0), z\to w_0} f(z)$$

dat ook

$$\frac{1}{2\pi i}\fint_W \frac{\varphi(w)}{w-w_0}dw$$

bestaat, en omgekeerd. (Eenzelfde stelling geldt, wanneer men z door $z^* \in H^-(w_0)$ vervangt).

Stelling 3.2. Is $\varphi(w)$ continu op W, en bestaat op een gesloten deelboog W' van W

$$\lim_{z\in H^+(w_0); z\to w_0} f(z)$$

uniform in w_0 (d.w.z. $\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall w_0\,\forall z((\varepsilon>0,\ w_0\in W',\ |w_0-z|<\delta$ en $z\in H^+(w_0)) \Rightarrow f(z)-f(w_0) < \varepsilon)))$, dan bestaat op W' ook

$$\lim_{z^*\in H^-(w_0), z\to w_0} f(z)$$

uniform in w_0, en geldt

$$\lim_{z\in H^+(w_0), z\to w_0} f(z) - \lim_{z^*\in H^-(w_0), z\to w_0} f(z) = \varphi(w_0).$$

Bewijs: We kunnen W' overdekken met een eindig aantal open cirkelschijven C, die ieder de eigenschappen a,b hebben. Het is dan voldoende om de stelling te bewijzen voor het stuk W_1 van W binnen zo'n C. Laat n.l. W_2 het resterende deel van W zijn, en laat $f_1(z)$

en $f_2(z)$ weer gedefinieerd zijn door (2.1). Dan is $f_2(z)$ analytisch binnen C, en bestaan beide limieten

$$\lim_{z \in H^+(w_o), z \to w_o} f_2(z), \qquad \lim_{z \in H^-(w_o), z \to w_o} f_2(z)$$

uniform in w_o en zijn gelijk ($w_o \in W_1'$, W_1' is gesloten deelboog van W_1).
De rest van het bewijs volgt aldus uit stelling 2.2:
Door (2.4) eenmaal met $z \in H^+(w_o)$ en eenmaal met $z^* \in H^-(w_o)$ toe te passen verkrijgen we

$$\left| f_1(z) - f_2(z^*) - \varphi(w_o) \right| \leq 2\lambda a(\delta) + 2\mu\delta ,$$

waarin $a(\delta) \to 0$ voor $\delta \longrightarrow 0$ en

$$z \in H^+(w_o) , \quad z^* \in H^-(w_o) \text{ en } |z-w_o| = |z^*-w_o| = \delta a(\delta).$$

Definitie 3.1. Laat w_o een inwendig punt zijn van een weg W, en C een cirkelvormige omgeving van w_o, zoals in paragraaf 2 onder a en b. Het deel van C, dat aan de positieve kant van W ligt heet C^+. We zeggen dat f(z) in w_o bij nadering van de positieve kant de randwaarde $f^+(w_o)$ aanneemt dan en slechts dan als

$$\lim_{z \in C^+, z \to w_o} f(z) = f^+(w_o).$$

Stelling 3.3.*) Zij W een gesloten weg zonder dubbelpunten, en laat $\varphi(w)$ een op W continue functie zijn. Noodzakelijk en voldoende, opdat $\varphi(w)$ randwaarde is van een binnen W analytische functie, is dat

$$\int_W \frac{\varphi(w)}{w-z}\, dw = 0 \tag{3.1}$$

voor alle z buiten W.

Bewijs. Wat de noodzakelijkheid betreft volstaan we met op te merken dat, wanneer een binnen W analytische functie f(z) overal op W randwaarden aanneemt, f(z) continu is (en dus uniform continu) op de vereniging van W en zijn inwendige G. Het eerste deel van de stelling volgt dan door een limietovergang uit de stelling van Cauchy.

---

*) Voor het geval $\varphi(w)$ aan een Höldervoorwaarde voldoet werd een analoge stelling voor dubbelperiodieke functies bewezen door W.T. Koiter [5] , appendix A.

Dat (3.1) ook voldoende is blijkt als volgt:
Laat W_1 een willekeurige deelweg van W zijn, en W_2 het overblijvende stuk van W. Definiëer nu $f_1(z)$, resp. $f_2(z)$ door (2.1). Dan is $f_1(z)$ analytisch buiten W_1 en $f_2(z)$ analytisch buiten W_2. Is W_1' een gesloten deelboog van W_1, dan is

$$\lim_{z \in H^-(w_o), z \to w_o} f_1(z)$$

uniform in w_o ($w_o \in W_1'$), immers $f_1(z) = -f_2(z)$ voor z buiten W. Maar dan volgt uit stelling 3.2 dat ook

$$\lim_{z \in H^+(w_o), z \to w_o} f_1(z)$$

bestaat en uniform is in w_o ($w_o \in W_1'$). Bovendien geldt

$$\lim_{z \in H^+(w_o), z \to w_o} f_1(z) - \lim_{z \in H^-(w_o), z \to w_o} f_1(z) = \varphi(w_o),$$

en daar $f_2(z)$ analytisch is buiten W_2 volgt

$$\lim_{z \in H^+(w_o), z \to w_o} f(z) = \lim_{z \in H^+(w_o), z \to w_o} f(z) - \lim_{z \in H^-(w_o), z \to w_o} f(z) = \varphi(w_o),$$

waarin f(z) voor z binnen W gedefinieerd is door (1.1).
Uit de uniformiteit in w_o, besluiten we gemakkelijk dat f(z) in w_o de randwaarde $\varphi(w_o)$ aanneemt.
Een stelling, die uit bovenstaande beschouwingen onmiddellijk volgt is:
Stelling 3.4. Is W een gesloten weg zonder dubbelpunten, is verder f(z) analytisch binnen W en heeft f(z) op W randwaarden $\varphi(w)$, dan bestaat voor alle $w_o \in W$

$$\frac{1}{\pi i} \fint \frac{\varphi(w)}{w-w_o}\, dw$$

en is gelijk aan $\varphi(w_o)$.

4. Slotbeschouwingen.

Met de voorgaande stellingen is het bestaan van een hoofdwaarde in een punt w_o van W soms af te leiden uit het bestaan van een limiet voor f(z), wanneer z naar w_o nadert. Evenwel, er bestaan dieperliggende stellingen, die het bestaan van een hoofdwaarde uitspreken voor bijna alle punten van de integratieweg. Een voorbeeld is:

Stelling 4.1. Is $\varphi(x)$ Lebesgue-integreerbaar over een interval (a,b), dan bestaat

$$\fint_a^b \frac{\varphi(x)}{x-x_0}\,dx$$

voor bijna alle $x_0 \in (a,b)$.
Zie voor het bewijs van deze stelling, en andere soortgelijke stellingen [2], chapter V, en [3].

In de voorafgaande paragrafen kan men iets algemenere wegen toelaten. Men behoeft slechts te eisen dat de wegen uit een eindig aantal continu differentieerbare stukken bestaan. Zie hiervoor [1], appendix 2 en [4].

Literatuur

[1] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations.
P. Noordhoff N.V., Groningen 1953.

[2] E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals.
Oxford 1937.

[3] H.A. Lauwerier, A note on the formulae of Plemelj.
Rapport TW 39, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[4] J.F. Koksma, C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt, Over randwaarden van analytische functies en Cauchy-hoofdwaarden.
Rapport ZW 1957-023, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[5] W.T. Koiter, Generalized plane stress in an infinite plate with a doubly-periodic set of equal holes, Part I.
Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Technische Hogeschool te Delft.