STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 006

Berekening van een integraal

C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1958-006

Berekening van een integraal

door

C.G. Lekkerkerker en A.H.M. Levelt

§ 1. Herleiding tot een eenvoudiger integraal.

Een botsingsvraagstuk gaf aanleiding tot de volgende integraal, die de heer M.J. Offerhaus, verbonden aan het Instituut voor Theoretische Physica (Universiteit van Amsterdam), aan ons voorlegde,

$$(1.1) \quad I = I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S) = \iint^{\rho} d\vec{C}_1 \,.\, \int_0^{2\pi} d\psi \,. \qquad \rho\,(1+S\cos^2\theta)^{3/2}$$

$$\exp.\left\{-C_1^{\,2}-2\vec{c}_o.\vec{C}_1-S(C_1^{\,2}\cos^2\theta + |\vec{C}\wedge\vec{C}_1|\sin\chi\cos\psi)\right\},$$

waarin de eerste integratie over de gehele driedimensionale ruimte wordt uitgestrekt. $\vec{c}_o$, $\vec{C}$. zijn gegeven vectoren en θ, χ en S constanten ($S\cos^2\theta > -1$), C_1 is de lengte van $\vec{C}_1$ en $|\vec{C}\wedge\vec{C}_1|$ de lengte van het uitwendig product van $\vec{C}$ en $\vec{C}_1$.

Ter vereenvoudiging voeren we de volgende notaties in

$$(1.2) \qquad \vec{x} = \vec{C}_1\sqrt{1+S\cos^2\theta}\;,$$

$$(1.3) \qquad \vec{p} = -2\,\vec{c}_o\,(1+S\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(1.4) \qquad \vec{q} = \vec{C}\quad S\sin\chi\,(1+S\cos^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\;.$$

Hierdoor gaat (1.1) over in

$$(1.5) \qquad \int d\vec{x}\,.\int_0^{2\pi} d\psi\;\exp\left(-|\vec{x}|^2+\vec{p}.\vec{x}+|\vec{q}\wedge\vec{x}|\cos\psi\right).$$

We kiezen het coördinatenstelsel zó, dat $\vec{q}$ langs de z-as valt, terwijl $\vec{p}$ in het xz-vlak ligt.

In dit stelsel hebben $\vec{p}$ en $\vec{q}$ de coördinaten $(p_1,0,p_3)$ resp. $(0,0,q_3)$, zodat we voor (1.5) kunnen schrijven:

$$(1.6) \quad \iiint_{-\infty}^{\infty} dx_1dx_2dx_3 \int_0^{2\pi} d\psi\;\exp(-(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2})+p_1x_1+p_3x_3+\cos\psi.\,q_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

De integratie naar x_3 kunnen we afzonderlijk uitvoeren. In het x_1x_2-vlak voeren we poolcoördinaten in. (1.6) gaat dan over in

$$(1.7) \quad I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_3^{\,2}+p_3x_3}dx_3 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r\,dr\;.$$

$$\exp(-r^2+p_1r\cos\varphi+q_3r\cos\varphi) \;=\; 4\pi^2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{1}{4}p_3^2}\quad I(p_1,q_3)\;,$$

waarin

$$(1.8)\qquad I(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} d\psi \int_0^{\infty} r dr\ \exp(-r^2+r(a\cos\varphi+b\cos\psi)).$$

§ 2. Berekening van de integraal I(a,b).

Ontwikkeling naar machten van a en b geeft

$$(2.1)\qquad I(a,b)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^n b^m}{n!m!}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi . \frac{1}{2\pi}\int_0^{2} d\psi . \int_0^{\infty} dr(e^{-r^2} r^{n+m+1}\cos^n\varphi\ \cos^m\psi).$$

Nu is

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\varphi\ d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ als } n \text{ oneven is} \\ \frac{2\pi}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \text{ als } n=2k, \end{cases}$$

zodat we uit (2.1) vinden

$$(2.2)\qquad I(a,b)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2k}b^{2l}}{(2k)!(2l)!}\ \frac{1}{2^{2k+2l}}\binom{2k}{k}\binom{2l}{l}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2k+2l+1} dr.$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2k}b^{2l}.(k+l)!}{k!k!l!l!\ 2^{2k+2l}},$$

omdat

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2k+2l+1} dr = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{k+l} dx = \frac{1}{2}(k+l)!$$

Door verandering der sommatievolgorde leiden we uit (2.2) af

$$(2.3)\qquad I(a,b)=\frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty}\ \frac{N!}{2^{2N}}\sum_{n=0}^{N}\frac{a^{2n}b^{2(N-n)}}{n!n!(N-n)!(N-n)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{b^{2N}}{2^{2N}N!}\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}^2\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}.$$

We merken nu eerst op, dat

$$(2.4)\qquad \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}^2\left(\frac{a}{b}\right)^{2n} = \frac{1}{2\ i}\oint\frac{(1+\frac{a^2}{b^2}z)^N(1+z)^N}{z^{N+1}}dz,$$

waarin de integratieweg om de oorsprong loopt en enkelvoudig en gesloten is.

De juistheid van (2.4) volgt onmiddellijk uit de overweging, dat het rechterlid gelijk is aan de coëfficiënt van z^N in de ontwikkeling van $(1+\frac{a^2}{b^2}z)^N(1+z)^N$. Gebruiken we (2.4) in (2.3) en verwisselen we sommatie en integratie, dan volgt

$$I(a,b) = \frac{1}{4\pi i}\oint \frac{dz}{z}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(\frac{b^2(1+\frac{a^2}{b^2}z)(1+z)}{4z}\right)^N$$

$$= \tfrac{1}{2}\, e^{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{1}{4}(a^2z+\frac{b^2}{z})}\,\frac{dz}{z}$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{1}{4}abi(w-\frac{1}{w})}\,\frac{dw}{w}\,,$$

dus

$$(2.5)\qquad I(a,b) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}\, I_o(\tfrac{1}{2}ab).$$

(Zie Whittaker & Watson, Modern Analysis, 4th edition, p.355,p.372).

3. <u>De formule voor $I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S)$.</u>

Uit de formules (1.7), (1.8) en (2.5) volgt onmiddellijk

$$(3.1)\qquad I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S)= 4\pi^2\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{4}p_3^{\,2}}\,.\,\tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}(p_1^{\,2}+q_3^{\,2})}\, I_o(\tfrac{1}{2}p_1q_3).$$

Nu is $p_1^{\,2}+p_3^{\,2}=|\vec{p}\,|^2$ en $q_3^{\,2}=|\vec{q}\,|^2$, terwijl $p_1q_3=|\vec{p}\wedge\vec{q}\,|$. Overwegen we nog dat $I_o(x)$ even is om $x=0$, dan kunnen we schrijven:

$$I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S)=2\cdot\pi^{5/2}\exp\tfrac{1}{4}(|\vec{p}\,|^2+|\vec{q}\,|^2)\; I_o(\tfrac{1}{2}|\vec{p}\wedge\vec{q}\,|),$$

en met behulp van (1.2),(1.3) en (1.4) volgt

$$(3.2)\qquad I(\vec{c}_o,\vec{C},\theta,\chi,S)=2\pi^{5/2}\exp\tfrac{1}{4}\left(\frac{4c_o^{\,2}+C^2S^2\sin^2\chi}{1+S\cos^2\theta}\right).I_o\left(\frac{S\sin\chi}{1+S\cos^2\theta}|\vec{c}_o\wedge\vec{C}\,|\right),$$

waarin $c_o=|\vec{c}_o|$ en $C=|\vec{C}|$.

Supplement bij rapport ZW 1958-006.

Met formule (1.5) als uitgangspunt is een snellere berekening van $I(\vec{c}_o, \vec{C}, \theta, \chi, S)$ mogelijk. In het volgende stelt $\vec{t}$ een eenheidsvector voor loodrecht op $\vec{q}$. De formule (1.5) gaat dan over in

$$I = \int d\vec{x} \int d\vec{t} \quad \exp\left\{ - |\vec{x}|^2 + \vec{p}\cdot\vec{x} + (\vec{q}\wedge\vec{x}) \cdot \vec{t} \right\},$$

waaruit we op meer rechtstreekse wijze de voorlaatste formule van § 3 als volgt afleiden

$$\begin{aligned} I &= \int d\vec{x} \int d\vec{t} \quad \exp\left\{ -|\vec{x}|^2 + (\vec{p}+\vec{t}\wedge\vec{q}) \cdot \vec{x} \right\} \\ &= \int d\vec{x} \int d\vec{t} \quad \exp - \left\{ \vec{x} - \tfrac{1}{2}(\vec{p}+\vec{t}\wedge\vec{q}) \right\}^2 \cdot \exp \tfrac{1}{4}(\vec{p}+\vec{t}\wedge\vec{q})^2 \\ &= \exp \tfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2) \int e^{-|\vec{x}|^2} d\vec{x} \int e^{-\frac{1}{2}(\vec{p}\wedge\vec{q})\cdot\vec{t}} \, d\vec{t} \\ &= 2\pi^{5/2} \exp \tfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2) \cdot I_o(\tfrac{1}{2}|\vec{p}\wedge\vec{q}|) , \end{aligned}$$

want

$$\begin{aligned} \int e^{-\frac{1}{2}(\vec{p}\wedge\vec{q})\cdot t} \, dt &= \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}|\vec{p}\wedge\vec{q}| \cos\psi} \, d\psi \\ &= 2\int_0^{\pi} \cosh(\tfrac{1}{2}|\vec{p}\wedge\vec{q}| \cos\psi) = 2\pi \, I_o(\tfrac{1}{2}|\vec{p}\wedge\vec{q}|) . \end{aligned}$$

(Zie Whittaker & Watson, Modern Analysis, 4^{th} edition, p.373).