STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 001

Een randwaardeprobleem

A.H.M. Levelt

1958

<u>Een randwaardeprobleem</u>

A.H.M. Levelt

Gevraagd wordt de oplossing op het interval $[0,R]$ van de differentiaalvergelijking

(1) $$r^2 w'''(r) + r w''(r) - (1-Br^2)w'(r) = C\,r^3$$

(B en C zijn niet-negatieve constanten), die voldoet aan

(2) $$w(R) = 0, \quad w'(0) = w'(R) = 0.$$

Verder wordt gevraagd

$$I = \int_0^R r\,w(r)\,dr\,,$$

waarin $w(r)$ de oplossing van het randwaardeprobleem is.

<u>Oplossing</u>. Door de substitutie

(3) $$w'(r) = u(r\sqrt{B}) + \frac{C}{B}\,r$$

gaat (1) over in

(4) $$r^2 B\,u''(r\sqrt{B}) + r\sqrt{B}\,u'(r\sqrt{B}) - (1-Br^2)u(r\sqrt{B}) = 0.$$

We stellen $r\sqrt{B}=x$. Dan gaat (4) over in

(5) $$u''(x) + \frac{1}{x}\,u'(x) + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)u(x) = 0.$$

De voorwaarden (2) gaan over in

(6) $$u(0) = 0, \qquad u(R\sqrt{B}) + \frac{CR}{B} = 0.$$

(5) is een differentiaalvergelijking van Bessel met als onafhankelijke oplossingen $J_1(x)$ en $Y_1(x)$ (zie voor deze en overige genoemde eigenschappen der Besselfuncties: Whittaker and Watson, A course of modern analysis, 4th edition, chapter XVII).

Daar $Y_1(0)\neq 0$ en $J_1(0) = 0$ is, volgt dat

(7) $$u(x) = -\frac{CR\,J_1(x)}{B\,J_1(R\sqrt{B})}$$

de enige oplossing van (5) is die aan (6) voldoet. Daar $J_0{}'(x) = -J_1(x)$ volgt uit (7) en (3) dat

$$w(r) = \frac{CR\,J_0(r\sqrt{B})}{B^{3/2}\,J_1(R\sqrt{B})} + \frac{1}{2}\,\frac{C}{B}\,r^2 + \alpha,$$

waarin α nog zo bepaald moet worden, dat voldaan is aan $W(R)=0$ (zie (2)).

De oplossing van het randwaardeprobleem is dus

(8) $$w(r) = \frac{CR}{B^{3/2}J_1(R\sqrt{B})}\left\{J_0(r\sqrt{B}) - J_0(R\sqrt{B})\right\} + \frac{1}{2}\,\frac{C}{B}\,(r^2-R^2).$$

Nu berekenen we nog de integraal I.
Uit (8) vinden we

$$I = \frac{CR}{B^{3/2}\, J_1(R\sqrt{B})} \int_0^R r\, J_o(r\sqrt{B})dr - \frac{CR\, J_o(R\sqrt{B})}{B^{3/2}\, J_1(R\sqrt{B})} \int_0^R r\, dr$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{C}{B} \int_0^R (r^2-R^2)r\, dr$$

$$(9) \qquad I = \frac{CR^2}{B^2} - \tfrac{1}{2}\frac{CR^3\, J_o(R\sqrt{B})}{B^{3/2}\, J_1(R\sqrt{B})} - \frac{1}{8}\frac{CR^4}{B} .$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de relatie

$$\frac{d}{dx}(x\, J_1(x)) = x\, J_o(x) .$$

Tenslotte volgen nog benaderende formules voor I als $R\sqrt{B}$ klein.

Als $|x| < 1$ is, geldt

$$J_o(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + f(x)x^6 \text{ met } |f(x)| < \frac{1}{1000} ,$$

$$J_1(x) = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{384}x^5 + g(x)x^7 \text{ met } |g(x)| < \frac{1}{10.000} .$$

Hieruit volgt voor $|x| < 1$

$$\frac{J_o(x)}{J_1(x)} = \frac{2}{x}\left(1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{192}x^4 + h(x)\, x^6\right) ,$$

waarin $|h(x)| < \frac{1}{500}$.

Voor $R\sqrt{B} < 1$ volgt hieruit en uit (9)

$$(10) \qquad I = \frac{1}{192}CR^6 \left\{1 + R^2B\, k(R\sqrt{B})\right\},$$

waarin $\left|k(R\sqrt{B})\right| < \tfrac{1}{2}$.