STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 004

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

A. Heyting

Recursieve Functies

1963

ZW 1963-004

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Recursieve Functies

A. Heyting

15 mei 1963

Alle functies, die als argument en als waarde natuurlijke getallen hebben en in de wiskunde optreden zonder met opzet als uitzondering geconstrueerd te zijn, zijn primitief recursief, d.w.z. zij kunnen uit de hierna te noemen uitgangsfuncties verkregen worden door een eindig aantal toepassingen van de substitutieregel en de regel voor primitieve recursie. Uitgangsfuncties zijn:

I. De opvolgerfunctie x'.

II. De constante functies $f(x_1,\dots,x_n) = a$.

III. De functies $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$.

De substitutieregel stelt ons in staat, uit bekende functies $g, h_1,\dots,h_m$ de functie f af te leiden, die voldoet aan

$$f(x_1,\dots,x_n) = g(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_m(x_1,\dots,x_n)).$$

De recursieregel staat ons toe, uit bekende functies g en h de functie f af te leiden, die voldoet aan

$$f(0,x_2,\dots,x_n) = g(x_2,\dots,x_n),$$
$$f(x',x_2,\dots,x_n) = h(x,f(x,x_2,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n).$$

Toch zijn er functies, die zonder twijfel berekenbaar zijn, zonder primitief recursief te zijn. Het eerste voorbeeld is door Ackermann geconstrueerd. Deze functie stijgt zo snel, dat geen enkele primitief recursieve functie ze kan bijhouden. Een ander voorbeeld is een universele functie voor de primitief recursieve functie van een veranderlijke, d.w.z. een functie f(y,x) met de eigenschap, dat iedere primitief recursieve functie van een veranderlijke te schrijven is als f(a,x) voor zeker getal a. Was f(y,x) primitief recursief, dan ook f(x,x) + 1, dus f(x,x) + 1 = f(a,x) voor zekere a. Door hierin x = a te nemen, verkrijgt men een tegenstrijdigheid.

Het begrip primitief recursieve functie kan uitgebreid worden tot dat van de recursieve functie. Deze uitbreiding is op verschillende wijzen geschied, waarbij steeds equivalente begrippen ontstonden. Dit is een sterk argument voor de belangrijkheid van het zo gedefinieerde begrip; door Church is de these opgesteld, dat het alle effectief berekenbare functies omvat. Zolang het begrip "effectief berekenbaar" niet exact gedefinieerd is, kan men geen bewijs voor deze these verwachten. Een der definities van recursieve functies bestaat hierin, dat zij door Turing-machines kunnen worden berekend. Een Turing-machine lijkt, wat zijn verrichtingen betreft, op een moderne computer, maar dan in zoverre geidealiseerd, dat er willekeurig lange berekeningen op kunnen worden gemaakt. Het zijn geen materiële, maar denkbeeldige machines. Bij elke recursieve functie f behoort minstens een Turing-machine. Slaat men op die machine een getal a aan, dan berekent zij f(a).

Een belangrijk hulpmiddel in de theorie der recursieve functies is de zogenaamde Gödelnummering. Zij bestaat hierin, dat men alle Turing-machines, die denkbaar zijn, nummert; verder worden ook alle berekeningen, die door Turing-machines uitgevoerd kunnen worden, genummerd. Men beschouwt nu het predicaat T(x,y,z), dat betekent: z is het nummer van een Turing-machine M, die een functie f definieert, y is het nummer van een berekening, die door M uitgevoerd kan worden, en het resultaat van die berekening is f(x). De relatie "Er is een y, zodat T(z,x,y)" blijkt nu niet recursief te zijn (d.w.z. haar karakteristieke functie is niet recursief). Dit betekent,dat het probleem, of een gegeven Turing-machine haar functie voor een gegeven argumentwaarde bepaalt, recursief onoplosbaar is. Uit dit eerste voorbeeld van een recursief onoplosbaar probleem zijn vele andere afgeleid, waarvan het meest treffende het woordprobleem uit de groepentheorie is.

Het genoemde niet recursieve predicaat is wel recursief opsombaar, d.w.z. het definieert de waardenverzameling van een recursieve functie. De theorie der recursieve en recursief opsombare verzamelingen is tot een belangrijk stuk wiskunde uitgegroeid, waaruit enkele voorbeelden zullen worden behandeld. Evenals voor de primitief recursieve functies blijkt, dat er geen recursieve universele functie voor de recursieve functies van een veranderlijke kan zijn. Gaat men echter over tot partieel recursieve functies, die niet voor elke argumentwaarde gedefinieerd behoeven te zijn, dan is er wel een partieel recursieve universele functie voor de partieel recursieve functies van een veranderlijke.

Ten slotte zal de vraag besproken worden, of iedere recursieve functie effectief berekenbaar is. Dit blijkt af te hangen van de logica die men gebruikt. Laat men voor het bewijs, dat een functie recursief is, alle bewijsmethoden van de klassieke wiskunde toe, dan behoeft zo'n functie niet effectief berekenbaar te zijn.