STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 28d

Avondcusus wiskunde 1954-1956;

Analytische meetkunde II.

A.Heyting.

1956

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Avondcursus 1955-1956

Analytische meetkunde II

door

Prof.Dr A. Heyting

Hoofdstuk 1
Vectorruimten

1. Vectoren in het platte vlak.

Bepaling 1. Een vector in het platte vlak is een gericht lijnstuk, gegeven door een beginpunt A en een eindpunt B. Deze vector wordt aangeduid door $\overrightarrow{AB}$; een vector kan ook op de wijze van $\vec{a}$ worden aangeduid.
Een vector, waarvan begin- en eindpunt samenvallen, heet een nulvector.
Twee vectoren zijn gelijk, als zij dezelfde richting (niet tegengestelde richting) en dezelfde lengte hebben. Alle nulvectoren zijn gelijk. De nulvector wordt aangeduid door $\vec{0}$.

Men ziet gemakkelijk in, dat deze gelijkheidsrelatie de volgende eigenschappen heeft:

1e. zij is reflexief, d.w.z., steeds is $\vec{a} = \vec{a}$.
2e. zij is symmetrisch, d.w.z., als $\vec{a} = \vec{b}$, dan is $\vec{b} = \vec{a}$.
3e. zij is transitief, d.w.z., als $\vec{a} = \vec{b}$ en $\vec{b} = \vec{c}$, dan is $\vec{a} = \vec{c}$.

Bepaling 2. De som van twee vectoren wordt als volgt gevonden. Als $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CD}$, dan is $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$.

Stelling 1. Als $\vec{a} = \vec{b}$, dan is $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$.
Als $\vec{c} = \vec{d}$, dan is $\vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{d}$.

Stelling 2. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Stelling 3. Bij elke vector $\vec{a}$ behoort een vector $(-\vec{a})$, zodat $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Stelling 4. De vectoroptelling is commutatief, d.w.z., steeds is $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Stelling 5. De vectoroptelling is associatief, d.w.z., steeds is $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Al deze stellingen zijn direct uit de figuren af te lezen.
Men kan de stellingen 2, 3, 4 en 5 samenvatten in

Stelling 6. Tegenover de optelling vormen de vectoren een Abelse (= commutatieve) groep.

Bepaling 3. Is λ een reëel getal en $\vec{a}$ een vector, dan wordt het product $\lambda.\vec{a}$ als volgt gevonden:
De lengte van $\lambda.\vec{a}$ is $|\lambda| \times$ de lengte van $\vec{a}$.
$\lambda.\vec{a}$ is gericht langs dezelfde lijn als $\vec{a}$.
Is $\lambda > 0$, dan heeft $\lambda.\vec{a}$ dezelfde richting als $\vec{a}$; ⌈

Stelling 7. Als $\vec{a} = \vec{b}$, dan is $\lambda.\vec{a} = \lambda.\vec{b}$.

Stelling 8. $0.\vec{a} = \vec{0}$. $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$. $1.\vec{a} = \vec{a}$.

Stelling 9. $(\lambda\mu).\vec{a} = \lambda.(\mu.\vec{a})$.

Stelling 10. $\lambda.(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$.
(Eerste distributieve eigenschap).

Stelling 11. $(\lambda + \mu).a = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a}$.
(Tweede distributieve eigenschap).

Bepaling 4. Laat een verzameling V gegeven zijn, waarvan wij de elementen door $\vec{a}$, $\vec{b}$,... voorstellen.
Laat van elke twee elementen $\vec{a}$, $\vec{b}$ van V de som $\vec{a} + \vec{b}$ gegeven zijn. Laat verder, als λ een getal voorstelt, voor elke vector $\vec{a}$ het product $\lambda.\vec{a}$ gegeven zijn. Wanneer V voldoet aan de eigenschappen, uitgedrukt in de stellingen 2,3,4,5, 7,8,9,10,11, dan heet V een <u>vectorruimte</u>.

Stelling 12. Op grond van de bepalingen 2 en 3 is het platte vlak een vectorruimte.

Bepaling 5. Heeft A de coördinaten (a_1,a_2),en B de coördinaten (b_1,b_2), dan wordt de vector $\vec{AB}$ voorgesteld door het getallenpaar $(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$. Men schrijft: $\vec{AB} = (b_1-a_1, b_2-a_2)$. Deze twee getallen heten de <u>componenten</u> van de vector. In het vervolg is steeds $\vec{p} = (p_1,p_2)$.

Stelling 13. Gelijke vectoren hebben gelijke componenten.

Stelling 14. $\vec{0} = (0,0)$.

Stelling 15. Als $\vec{a} = (a_1,a_2)$, $\vec{b} = (b_1,b_2)$, dan is $\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2)$.

Bewijs. Stel $\vec{PQ} = \vec{a}$, $\vec{QR} = \vec{b}$, dan is
$a_1=q_1-p_1$, $a_2=q_2-p_2$.
$b_1=r_1-q_1$, $b_2=r_2-q_2$.
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{PR} = (r_1-p_1,\ r_2-p_2) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2)$.
(Teken de figuur!)

Stelling 16. Als $\vec{a} = (a_1,a_2)$, dan is $-\vec{a} = (-a_1,-a_2)$.

Stelling 17. Als $\vec{a} = (a_1,a_2)$, dan is $\lambda.\vec{a} = (\lambda a_1,\ \lambda a_2)$.

Parametervoorstelling van een rechte lijn l.
Laat de lijn l gegeven zijn door $P(p_1,p_2)$ op l en de vector $\vec{a}(a_1,a_2)$ // l.

⌈ is $\lambda < 0$, dan heeft $\lambda.\vec{a}$ tegengestelde richting als $\vec{a}$.

Is X een willekeurig punt op l, dan is $\vec{OX}=\vec{OP}+\vec{PX}$. Wij stellen in het vervolg steeds $\vec{OP}=\vec{p}$, $\vec{OX}=\vec{x}$. $\vec{PX}//\vec{a}$, dus er is een getal λ zodat $\vec{PX}=\lambda\vec{a}$.

(1) $$\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{a}.$$

Is Q een tweede gegeven punt op l, dan kan men $\vec{PQ}=\vec{a}$ nemen. Dan is $\vec{a}=\vec{q}-\vec{p}$, dus (1) wordt

(2) $$\vec{x}=(1-\lambda)\,\vec{p}+\lambda\vec{q}.$$

§2. Vectoren in de ruimte.

Bepalingen 1,2,3. Geheel analoog met §1, bep. 1,2,3.

Stellingen 1 tot en met 11 zijn gelijkluidend met de overeenkomstige stellingen uit §1.

Stelling 12. Analoog met §1, stelling 12.

Bepaling 5. Heeft A de coördinaten (a_1,a_2,a_3) en B de coördinaten (b_1,b_2,b_3), dan wordt de vector $\vec{AB}$ voorgesteld door $(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$. De drie getallen heten de componenten van $\vec{AB}$.
Ook hier stellen wij steeds $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$.

Stellingen 13 tot en met 17. Analoog met §1, stelling 13-17.

De parametervoorstelling van een lijn in de ruimte is dezelfde als in het platte vlak en wordt op dezelfde wijze afgeleid.

Parametervoorstelling van een vlak α.
Laat het vlak α gegeven zijn door een punt P in α en twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, die $//\alpha$ zijn. Laat X een willekeurig punt in α zijn. De vector $\vec{PX}$ is de som van twee vectoren, die respectievelijk evenwijdig zijn met $\vec{a}$ en met $\vec{b}$, dus

$$\vec{PX}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

(3) $$\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

Zijn Q en R twee punten in α, die niet met P op een rechte lijn liggen, dan kan men $\vec{a}=\vec{q}-\vec{p}$ en $\vec{b}=\vec{r}-\vec{p}$ nemen. Men vindt dan uit (3):

(4) $$\vec{x}=(1-\lambda-\mu)\,\vec{p}+\lambda\vec{q}+\mu\vec{r}.$$

§3. Vectoren in R_n.

Bepaling 1. Een vector in R_n, of n-vector, is een rij van n getallen; $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$.

Bepaling 2. De nulvector $\vec{0}$ in R_n is de rij van n nullen.

Bepaling 3. De som van de vectoren $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$ en $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$ is $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$.

<u>Bepaling 4.</u> Is $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$ een vector en λ een getal, dan verstaan wij onder $\lambda\vec{a}$ de vector $(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)$.

<u>Stellingen</u> 1-12, analoog met de stellingen 1-12 uit §1, volgen onmiddellijk uit deze definities.

<u>Bepaling 5.</u> Enige vectoren $\vec{a},\vec{b},\dots,\vec{p}$ zijn <u>afhankelijk</u>, wanneer men getallen $\lambda,\mu,\dots,\xi$ kan vinden, zodat $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\dots+\xi\vec{p}=\vec{0}$, terwijl $\lambda,\mu,\dots,\xi$ niet alle nul zijn.

<u>Voorbeelden.</u> Wanneer zijn twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in het platte vlak afhankelijk? Dan en slechts dan, wanneer men λ en μ kan vinden, niet beide 0, zodat $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$. Neem aan, dat $\lambda\neq 0$; dan is $\vec{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}$. Men vindt zo:

<u>Stelling 13.</u> Twee vectoren in het platte vlak zijn dan en slechts dan afhankelijk, wanneer zij dezelfde richting hebben, of minstens een van beide de nulvector is.

<u>Stelling 14.</u> Wanneer onder een stel vectoren de nulvector voorkomt, dan zijn zij steeds afhankelijk.

<u>Bewijs.</u> Laat de vectoren zijn $\vec{0},\vec{a},\vec{b},\dots$; dan is

$$1.\vec{0}+0.\vec{a}+0.\vec{b}+\dots=\vec{0}.$$

<u>Stelling 15.</u> Zijn de vectoren $\vec{a},\vec{b},\dots,\vec{p}$ afhankelijk, dan zijn ook de vectoren $\vec{a},\vec{b},\dots,\vec{p},\vec{q},\dots\vec{s}$ afhankelijk.

<u>Bewijs.</u> Gegeven is $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\dots\xi\vec{p}=\vec{0}$.
Dan is ook $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\dots\xi\vec{p}+0.\vec{q}+\dots+0.\vec{s}=\vec{0}$.

<u>Stelling 16.</u> n+1 vectoren in R_n zijn altijd afhankelijk.

<u>Bewijs.</u> Om de gedachten te bepalen, nemen wij n=3.
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b},\vec{c}$ en $\vec{d}$.
Wij moeten getallen λ,μ,ν,ρ, niet alle 0, bepalen, zodat $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}+\rho\vec{d}=\vec{0}$,
d.w.z.
$$\begin{cases}\lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1+\rho d_1=0,\\ \lambda a_2+\mu b_2+\nu c_2+\rho d_2=0,\\ \lambda a_3+\mu b_3+\nu c_3+\rho d_3=0.\end{cases}$$
Dit zijn 3 homogene lineaire vergelijkingen met 4 onbekenden λ,μ,ν,ρ; deze laten altijd een andere dan de nuloplossing toe. (Zie syllabus algebra blz.23).

<u>Voorbeelden.</u> Drie vectoren in het platte vlak zijn altijd afhankelijk.
Vier vectoren in de ruimte zijn altijd afhankelijk.

<u>Stelling 17.</u> k vectoren in R_n zijn dan en slechts dan afhankelijk, wanneer de rang van de matrix, die de vectoren als rijen bezit, kleiner is dan k.

<u>Bewijs.</u> Ik neem k=4. De vectoren zijn $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\dots,b_n)$, $\vec{c}=(c_1,\dots,c_n)$, $\vec{d}=(d_1,\dots,d_n)$.

Zij zijn afhankelijk, als λ, μ, ν, ρ, niet alle 0, bestaan, zodat $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \rho\vec{d} = \vec{0}$,

d.w.z. $\begin{cases} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \rho d_1 = 0. \\ - - - - - - - \\ \lambda a_n + \mu b_n + \nu c_n + \rho d_n = 0. \end{cases}$

Dit zijn n homogene lineaire vergelijkingen in 4 onbekenden λ, μ, ν, ρ. Zij hebben een andere dan de nuloplossing, als de rang van hun matrix kleiner is dan 4 (syllabus algebra, blz.25). Deze matrix heeft de vier vectoren als kolommen; de matrix met die vectoren als rijen heeft dezelfde rang.

§ 4. Lineaire deelruimtes in R_n.

Bepaling 1. In een willekeurige vectorruimte V heet de vector $\vec{x}$ een lineaire combinatie van de vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$, wanneer er getallen $\lambda, \mu, \ldots, \rho$ bestaan, zodat

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \ldots + \rho\vec{p}.$$

Stelling 1. Alle lineaire combinaties van een aantal gegeven vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$ vormen een vectorruimte W.

Bewijs. Men behoeft slechts na te gaan, dat, wanneer $\vec{a}$ tot W behoort, ook $\lambda\vec{a}$ (voor een willekeurig getal λ) tot W behoort, en dat, als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ tot W behoren, ook $\vec{a} + \vec{b}$ tot W behoort.

Bepaling 2. De vectorruimte W, die uit alle lineaire combinaties van $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$ bestaat, heet de door $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$ opgespannen ruimte.

Bepaling 3. Wanneer de vectorruimte W opgespannen wordt door de vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$, dan vormen $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$ een basis van W.

Voorbeeld. De vectoren $\vec{e}^{\,1}=(1,0,0)$, $\vec{e}^{\,2}=(0,1,0)$ en $\vec{e}^{\,3}=(0,0,1)$ vormen een basis van R_3. Laat namelijk $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ een willekeurige vector zijn; dan is $\vec{a} = a_1\vec{e}^{\,1}+a_2\vec{e}^{\,2}+a_3\vec{e}^{\,3}$. Meetkundig komt dit neer op de ontbinding van $\vec{a}$ langs de drie coördinatenassen.

Bepaling 4. De vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{p}$ vormen een lineair onafhankelijke basis van de vectorruimte W, wanneer zij een basis van W vormen en onafhankelijk zijn.

Voorbeeld. $\vec{e}^{\,1}$, $\vec{e}^{\,2}$ en $\vec{e}^{\,3}$ vormen een lineair onafhankelijke basis van R_3.

Stelling 2. k onafhankelijke vectoren in een vectorruimte V spannen een R_k op.

Bewijs. Laat de vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ de ruimte W opspannen. Elke vector $\vec{x}$ in W is een lineaire combinatie van $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \rho\vec{d}.$$

De vector $\vec{x}$ kan op slechts één wijze zo geschreven worden; stel namelijk, dat

$$\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \rho\vec{d} = \lambda'\,\vec{a} + \mu'\vec{b} + \nu'\,\vec{c} + \rho'\,\vec{d},$$

dan heeft men $(\lambda-\lambda')\,\vec{a} + (\mu-\mu')\,\vec{b} + (\nu-\nu')\,\vec{c} + (\rho-\rho')\,\vec{d} = \vec{0}$, dus, daar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ onafhankelijk zijn,

$$\lambda-\lambda' = \mu-\mu' = \nu-\nu' = \rho-\rho' = 0.$$

Aan iedere vector $\vec{x}$ uit W is dus eenduidig een rijtje van vier getallen $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ toegevoegd, en omgekeerd.
Zijn aan $\vec{p}$ de getallen (p_1,p_2,p_3,p_4) toegevoegd, dan is

$$\vec{p} = p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c} + p_4\vec{d}, \text{ dus}$$

$$\lambda p = \lambda p_1\vec{a} + \lambda p_2\vec{b} + \lambda p_3\vec{c} + \lambda p_4\vec{d}.$$

Aan $\lambda\vec{p}$ zijn dus de getallen $(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3, \lambda p_4)$ toegevoegd.
Zijn verder aan $\vec{q}$ de getallen (q_1,q_2,q_3,q_4) toegevoegd, zodat $\vec{q} = q_1\vec{a} + q_2\vec{b} + q_3\vec{c} + q_4\vec{d}$,
dan is $\vec{p} + \vec{q} = (p_1+q_1)\,\vec{a} + (p_2+q_2)\,\vec{b} + (p_3+q_3)\,\vec{c} + (p_4+q_4)\,\vec{d}$, zodat aan $\vec{p} + \vec{q}$ de getallen $(p_1+q_1,\ldots,p_4+q_4)$ zijn toegevoegd.
Vermenigvuldiging van een vector met een getal, en optelling van vectoren, gaan dus in W precies zo als in R_k.

Stelling 3. n onafhankelijke vectoren in R_n vormen een basis voor R_n.

Bewijs. Laat $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ onafhankelijke vectoren in R_4 zijn, en $\vec{x}$ een willekeurige vector in R_4. Volgens §3, st.16, zijn $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{x}$ afhankelijk.

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \rho\vec{d} + \sigma\vec{x} = \vec{0}.$$

Hierin is $\sigma \neq 0$ (anders waren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ afhankelijk).

$$\vec{x} = -\frac{\lambda}{\sigma}\vec{a} - \frac{\mu}{\sigma}\vec{b} - \frac{\nu}{\sigma}\vec{c} - \frac{\rho}{\sigma}\vec{d}.$$

$\vec{x}$ is dus een lineaire combinatie van $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

Stelling 4. Elke lineair onafhankelijke basis voor R_n bestaat uit n vectoren.

Bewijs. Laat k onafhankelijke vectoren een basis voor R_n vormen. Volgens §3, st. 16 is $k > n$ onmogelijk. Neem nu aan, dat $k < n$. Volgens de stelling 2 spannen de k vectoren een R_k op. De vraag is, of deze R_k met R_n zou kunnen samenvallen. Volgens §3, st.16, zijn elke k+1 vectoren in R_k afhankelijk, maar R_n bevat de k+1 onafhankelijke vectoren $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \ldots,$

$\vec{e}^{\,k+1}$. De twee ruimten kunnen dus nooit samenvallen.

Bepaling. De dimensie van een vectorruimte is het aantal vectoren, waaruit een lineair onafhankelijke basis van die ruimte bestaat. Uit de voorgaande stelling volgt, dat de dimensie ondubbelzinnig bepaald is.

Stelling 5. De oplossingen van een stelsel homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden, vormen een lineaire deelruimte van R_n (d.w.z. een vectorruimte, die in R_n is bevat).

Bewijs. Als $\vec{p} = (p_1,\dots,p_n)$ en $\vec{q} = (q_1,\dots,q_n)$ oplossingen van het stelsel vergelijkingen zijn, dan zijn ook $\vec{p} + \vec{q}$ en $\lambda\vec{p}$ oplossingen. (Ga dit na!)

Stelling 6. Als de rang van het stelsel vergelijkingen, bedoeld in st.5, r is, dan heeft de oplossingsruimte de dimensie n-r.

Bewijs. Volgens de syllabus algebra, blz.24, kan men in de oplossing $x_{r+1},\dots,x_n$ willekeurig kiezen. Neemt men hiervoor achtereenvolgens $x_s=1$, $x_t=0$ voor $t\neq s$ $(s=r+1,\dots,n)$, dan vindt men de n-r oplossingen:

$$\vec{p}^{\,1} = (\ c_{11},\dots,c_{1r},\ 1,\ 0,\dots,0)$$
$$\vec{p}^{\,2} = (\ c_{21},\dots,c_{2r},\ 0,\ 1,\dots,0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{p}^{\,n-r} = (c_{n-r,1},\dots,c_{n-r,r},0,0,\dots,0)\ .$$

De oplossing, waarin $x_{r+1}=a_{r+1},\dots,x_n=a_n$ is, wordt blijkbaar $a_{r+1}\vec{p}^{\,1} + a_{r+2}\vec{p}^{\,2}+\dots+a_n\vec{p}^{\,n}$.

(Dit is een oplossing volgens st.5, en zij voldoet aan de eis).

De oplossingsruimte wordt dus opgespannen door de n-r onafhankelijke vectoren $\vec{p}^{\,1},\dots,\vec{p}^{\,n-r}$.

Gevolg. Uit st. 5,6 en 3 volgt nu:
n-r willekeurige onafhankelijke oplossingsvectoren van het stelsel, bedoeld in st.5, spannen de oplossingsruimte op.

Stelling 7. Een (n-r)-dimensionale deelruimte van R_n kan door r vergelijkingen worden bepaald. Zij is dus de doorsnede van r hypervlakken ((n-1)-dimensionale deelruimten).

Bewijs. Ik neem n=5, r=3, dus n-r=2. Laat een 2-dimensionale deelruimte opgespannen worden door de onafhankelijke vectoren $\vec{a} = (a_1,\dots,a_5)$ en $\vec{b} = (b_1,\dots,b_5)$. Wij zoeken vergelijkingen $s_1x_1+\dots+s_5x_5=0$, waaraan $\vec{a}$ en $\vec{b}$ voldoen. Dan moet voldaan zijn aan

$$s_1a_1 + \dots + s_5a_5 = 0$$
$$s_1b_1 + \dots + s_5b_5 = 0.$$

Wij kunnen dit beschouwen als 2 vergelijkingen in $s_1,\dots,s_5$. Daar $\vec{a}$ en $\vec{b}$ onafhankelijk zijn, is hun rang 2. Zij hebben dus n-r=3 onafhankelijke oplossingen $(s_1',\dots,s_5'),(s_1'',\dots,s_5'')$, $(s_1''',\dots,s_5''')$.

De vergelijkingen
$$s_1'x_1+\dots+s_5'x_5=0$$
$$s_1''x_1+\dots+s_5''x_5=0$$
$$s_1'''x_1+\dots+s_5'''x_5=0$$
bepalen een R_2, die $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bevat en dus met de gegeven deelruimte samenvalt.

Als toepassing bewijzen wij:

Stelling 8. Wanneer in een matrix M een onderdeterminant H van nul verschilt, terwijl alle onderdeterminanten, die uit H ontstaan door randen met een rij en een kolom uit M, nul zijn, dan is H een hoofddeterminant.
(Dit wil dus zeggen, dat dan alle onderdeterminanten uit M, die groter zijn dan H, ook diegene die niet door randen uit H ontstaan, nul zijn. Het is duidelijk dat deze stelling veel werk bespaart bij het bepalen van de rang van H).

Bewijs. Laat H uit de eerste r rijen en de eerste r kolommen van M zijn gevormd. Beschouw nu het stelsel vergelijkingen:

$$a_{1k}x_1+\dots+a_{rk}x_r=a_{qk} \quad (k=1,\dots,n).$$

Omdat det. $H\neq 0$, is de rang van de coefficienten-matrix der linkerleden gelijk aan r; verder zijn alle karakteristieke determinanten nul volgens onderstelling. De vergelijkingen hebben dus een oplossing (syllabus algebra, blz. 21; de karakteristieke determinanten heten daar $R_{k+1},\dots,R_p$). Dit wil zeggen, dat alle rijen van M lineaire combinaties zijn van de eerste r rijen. Dan zijn r+1 willekeurige rijen afhankelijk (§3, stelling 16). Hieruit volgt, dat alle determinanten uit M met r+1 rijen nul zijn (§3, stelling 17).

Hoofdstuk 2.
Homogene lineaire transformaties

§5. Transformaties en matrices.

Bepaling 1. Een homogene lineaire transformatie heeft de vorm

$$(1)\quad \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_p=a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n, \end{cases}$$

of, verkort geschreven, $y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$ $(i=1,\dots,p)$.

De transformatie (1) voert de n-vector $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$ over in de p-vector $\vec{y} = (y_1,\dots,y_p)$.

Stelling 1. De transformatie (1) is volkomen bepaald door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11},\dots,a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{p1},\dots,a_{pn} \end{pmatrix}$$

en omgekeerd.

Bewijs. Het is duidelijk, dat de matrix de transformatie bepaalt. Wij behoeven nog slechts te bewijzen, dat dezelfde transformatie niet bij twee verschillende matrices kan behoren. Stel dat bij A en bij

$$B = \begin{pmatrix} b_{11},\dots,b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{p1},\dots,b_{pn} \end{pmatrix}$$

dezelfde transformatie behoort. Dan moet voor elke vector $\vec{x}$ gelden:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_{11}x_1+\dots+b_{1n}x_n \,. \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n=b_{p1}x_1+\dots+b_{pn}x_n. \end{cases}$$

Ik pas dit toe op de vector $\vec{e}^{\,1}=(1,0,\dots,0)$. Dan vind ik: $a_{11}=b_{11},\dots,a_{p1}=b_{p1}$. De eerste kolom in A en B is dus gelijk. Door $\vec{e}^{\,2},\dots,\vec{e}^{\,n}$ voor $\vec{x}$ in te vullen, vind ik, dat ook de overige kolommen overeenstemmen.

Bepaling 2. Wij stellen de transformatie (1) voor door dezelfde letter A als de bijbehorende matrix, en schrijven haar

(1) $$\vec{y} = A\,\vec{x}\,.$$

(Let op: $\vec{y}$ is een p-vector, $\vec{x}$ is een n-vector!)

Stelling 2. De transformatie (1) voldoet aan de betrekkingen:

(2) $$A\,(\vec{p}+\vec{q}) = A\,\vec{p} + A\,\vec{q}.$$

(3) $$A\,(\lambda\vec{p}) = \lambda(A\,\vec{p}).$$

Bewijs. Door gewoon invullen, bijv.

$$a_{11}(p_1+q_1)+\dots+a_{1n}(p_n+q_n)=(a_{11}p_1+\dots+a_{1n}p_n)+(a_{11}q_1+\dots+a_{1n}q_n).$$

Stelling 3. Een transformatie T, die iedere n-vector in een p-vector overvoert, en de eigenschappen (2) en (3) heeft, is een homogene lineaire transformatie.

Bewijs. Gegeven is, dat voor alle vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ geldt

$$T(\vec{p}+\vec{q}) = T\vec{p}+T\vec{q};\quad T(\lambda\vec{p}) = \lambda(T\vec{p})\,.$$

Voor een willekeurige vector $\vec{x}$ geldt $\vec{x} = x_1\vec{e}^{\,1}+\ldots+x_n\vec{e}^{\,n}$.
Uit de twee gegeven eigenschappen volgt nu, dat

$$\vec{y} = T\,\vec{x} = x_1(T\,\vec{e}^{\,1})+\ldots+x_n(T\,\vec{e}^{\,n}).$$

Stel $T\,\vec{e}^{\,1}=\vec{a}^{\,1},\ldots,T\,\vec{e}^{\,n}=\vec{a}^{\,n}$. $\quad(\vec{a}^{\,k}=(a_1^k,\ldots,a_p^k))$

Dan is dus $\vec{y} = x_1\vec{a}^{\,1}+\ldots+x_n\vec{a}^{\,n}$.

Dit betekent: $\begin{cases} y_1=x_1a_1^1+\ldots\ldots+x_na_1^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p=x_1a_p^1+\ldots\ldots+x_na_p^n. \end{cases}$

Dit is een homogene lineaire transformatie.

Stelling 4. Een homogene lineaire transformatie laat alle betrekkingen van lineaire afhankelijkheid tussen vectoren bestaan.

Bewijs. Uit $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ volgt

$$A(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}) = A\,\vec{0} = \vec{0}.$$
$$\lambda(A\,\vec{a}) + \mu(A\,\vec{b}) + \nu(A\,\vec{c}) = \vec{0},$$

hetgeen te bewijzen was.

Bepaling 3. De som van twee matrices (ieder met p rijen en n kolommen) wordt verkregen, door overeenkomstige elementen bij elkaar op te tellen.

Bepaling 4. Een matrix wordt met een getal vermenigvuldigd, door elk van zijn elementen met dat getal te vermenigvuldigen.

Bepaling 5. De nulmatrix is de matrix, waarvan alle elementen nul zijn.

Stelling 5. De matrices met p rijen en n kolommen vormen een np-dimensionale vectorruimte.

Stelling 6. $(c\,A)\,\vec{x} = c(A\,\vec{x})$.
$(A + B)\,\vec{x} = A\,\vec{x} + B\,\vec{x}$.
Bewijzen zeer eenvoudig.

§6. Samenstelling van transformaties.

Beschouw de transformaties

(1) $\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\ldots\ldots+a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p=a_{p1}x_1+\ldots+a_{pn}x_n \end{cases}$ of $y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1,\ldots,p)$ of $\vec{y} = A\,\vec{x}$

(2) $\begin{cases} z_1=b_{11}y_1+\ldots+b_{1p}y_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_q=b_{q1}y_1+\ldots+b_{qp}y_p. \end{cases}$ of $z_h=\sum_{i=1}^{p} b_{hi}\,y_p \quad (h=1,\ldots,q)$ of $\vec{z} = B\,\vec{y}$

Dan is $z_h = \sum_{i=1}^{p} b_{hi} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}x_k$,

(*) met $c_{hk} = \sum_{i=1}^{p} b_{hi}\, a_{ik}$ $(h=1,\ldots,q;\ k=1,\ldots,n)$.

$$(3)\begin{cases} z_1 = c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_q = c_{q1}x_1 + \ldots + c_{qn}x_n \end{cases} \qquad \text{of } z_h = \sum_{k=1}^{n} c_{hk}x_k \ (h=1,\ldots,q) \qquad \text{of } \vec{z} = C\,\vec{x}.$$

<u>Bepaling 1.</u> (3) heet de productmatrix van (1) en (2).

$$\vec{z} = C\,\vec{x} = B\,A\,\vec{x}.$$

C heet de productmatrix van A en B; wij schrijven C=BA.
Let op: A heeft p rijen en n kolommen; B heeft q rijen en p kolommen; C heeft q rijen en n kolommen. A heet daarom een (p,n)-matrix, enz.

<u>Stelling 1.</u> De matrixvermenigvuldiging is associatief. D.w.z.: Is A een (r,q)-matrix, B een (q,p)-matrix, C een (p,n)-matrix, dan is (AB)C = A(BC).

<u>Bewijs.</u> Zij $\vec{x}$ een n-vector, $\vec{y} = C\,\vec{x}$, $\vec{z} = B\,\vec{y} = (BC)\vec{x}$, $\vec{u} = A\,\vec{z} = A(BC)\vec{x}$, dan is $\vec{u} = A\,B\vec{y} = (AB)\,C\,\vec{x}$.
Volgens §5, st.1, volgt hieruit A(BC)=(AB)C.

<u>Stelling 2.</u> OA=AO=O.

<u>Opmerkingen.</u> De matrixvermenigvuldiging is niet commutatief, ook niet als q=p=n.
Uit AB=O volgt <u>niet</u>, dat A=O of B=O.
Geef tegenvoorbeelden!

Nemen wij in (*) n=1, dan is A een vector $\vec{a}$, als kolom geschreven, en C een vector $\vec{c}$, als kolom geschreven. Er staat nu:

$$c_h = \sum_{i=1}^{p} b_{hi}\, a_i, \qquad \text{of } \vec{c} = B\,\vec{a}.$$

Zo vinden wij:

<u>Stelling 3.</u> Een homogene lineaire transformatie kan als matrixvermenigvuldiging geschreven worden, mits men elke vector als een matrix van een kolom beschouwt.

<u>Stelling 4.</u> De matrixvermenigvuldiging is distributief t.o.v. de matrixoptelling, d.w.z.

$$(A+B)C = AC+BC \text{ en } C(A+B) = CA+CB,$$

mits de producten bestaan.

<u>Bewijs.</u> Volgens §5, st.6, is

$$(A+B)C\vec{x} = AC\vec{x} + BC\vec{x} = (AC+BC)\vec{x}.$$
$$C(A+B)\vec{x} = C(A\vec{x} + B\vec{x}) = CA\vec{x} + CB\vec{x}$$
$$(\S 5,\ \text{st.}2) = (CA+CB)\vec{x}.$$

§7. De inverse van een matrix.

In deze paragraaf beschouwen wij alleen vierkante (n,n)-matrices en n-vectoren.

Bepaling 1. De transformatie $I\vec{x} = \vec{x}$ heet de identieke transformatie; de matrix $I(a_{ii}=1,\ a_{ik}=0$ voor $i\neq k)$ heet de eenheidsmatrix.

Stelling 1. $IA = AI = A$.

Bepaling 2. De transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ heet singulier, als det. $A = 0$. Zij nu det. $A \neq 0$. Lost men uit de vergelijkingen

$$(1)\quad \begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n \end{cases}$$

de onbekenden $x_1,\ldots,x_n$ op, dan vindt men

$$(2)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, y_k,\ \text{waarin } b_{ik} = \frac{m_{ki}}{\det A},$$

en m_{ik} de minor van a_{ik} in A voorstelt.

(Syllabus algebra, blz. 19).

Bepaling 2. De transformatie (2) heet de inverse transformatie van (1). De bijbehorende matrix B heet de inverse matrix van A; wij schrijven $B = A^{-1}$.

Stelling 2. Elke niet-singuliere matrix A bezit een inverse A^{-1}. Men heeft $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

Stelling 3. De elementen b_{ik} van de inverse matrix van A zijn
$b_{ik} = \dfrac{m_{ki}}{\det A}$, waarin m_{ki} de minor van a_{ki} in A voorstelt.

Stelling 4. Zijn A en B niet-singuliere n-matrices, dan is $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bewijs. $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$.

Stelling 5. Is B niet singulier, dan is de rang van AB en die van BA gelijk aan de rang van A.

Bewijs. Stel $BA=C$. De stelsels vergelijkingen

$$(1)\quad A\vec{x} = \vec{0}, \qquad\qquad (2)\quad C\vec{x} = \vec{0}$$

hebben dezelfde oplossingen, want uit $A\vec{x} = \vec{0}$ volgt $B(A\vec{x})=0$, en uit $B(A\vec{x})=0$ volgt $A\vec{x}=0$, (syllabus algebra, blz.25).

Is r de rang van A, dan heeft (1) n-r onafhankelijke oplossingsvectoren, dus (2) eveneens; de rang van C is dus r. Stel AB=D. Een stel van n-r onafhankelijke oplossingsvectoren van (1) noem ik $\vec{v}^{\,1},\dots,\vec{v}^{\,n-r}$.
Stel $B^{-1}\vec{v}^{\,i}=\vec{y}^{\,i}$ (i=1,...,n-r); dan is $\vec{v}^{\,i}=B\,\vec{y}^{\,i}$. De vectoren $\vec{y}^{\,1},\dots,\vec{y}^{\,n-r}$ zijn onafhankelijk volgens §5, st. 4.
Laat $\vec{p}$ een oplossing zijn van

(3) $$D\,\vec{x}=\vec{0}.$$

Dan is $D\,\vec{p}=\vec{0}$, dus $AB\,\vec{p}=0$, zodat $B\,\vec{p}$ aan (1) voldoet.
Volgens §4, st.6, is dan $B\,\vec{p}$ een lineaire combinatie van $\vec{v}^{\,1},\dots,\vec{v}^{\,n-r}$:

$$B\,\vec{p}=\lambda_1\vec{v}^{\,1}+\dots+\lambda_{n-r}\vec{v}^{\,n-r}.$$

$$\vec{p}=\lambda_1B^{-1}\,\vec{v}^{\,1}+\dots+\lambda_{n-r}B^{-1}\,\vec{v}^{\,n-r}.$$

$$\vec{p}=\lambda_1\vec{y}^{\,1}+\dots+\lambda_{n-r}\vec{y}^{\,n-r}.$$

Iedere oplossing van (3) is dus een lineaire combinatie van $\vec{y}^{\,1},\dots,\vec{y}^{\,n-r}$. Hieruit volgt, dat D de rang r heeft.

§ 8. De productstelling voor determinanten.

Beschouw de determinant, die gevormd is uit 4 vakken; in het vak links boven staat de matrix A, rechts onder B, rechts boven O, links onder - I.

$$d=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & 0\;\dots\;0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & 0\;\dots\;0 \\ \begin{matrix}-1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -1\end{matrix} & \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \\ b_{n1}\cdots b_{nn}\end{matrix} \end{vmatrix}$$

Iedere term uit d is, ook wat het teken betreft, gelijk aan het product van een term uit A en een term uit B; omgekeerd komt elk van deze producten in d voor. Hieruit volgt: d = det A det B. Vermenigvuldig nu de $(n+1)^e$ rij met a_{11}, de $(n+2)^e$ met a_{12}, enz., en tel ze daarna bij de 1^e rij op.

Vermenigvuldig vervolgens de $(n+1)^e$ rij met a_{21}, de $(n+2)^e$ met a_{22}, en tel ze daarna bij de 2^e rij op.

Zo doorgaande bereiken wij, dat links boven O komt te staan, terwijl rechts boven de matrix C=AB komt, (zie §6, formule (*), met verwisseling van A en B).

$$d = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n1} & \ldots & c_{nn} \\ -1 & & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & -1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Ontwikkel ik deze determinant achtereenvolgens naar de eerste n kolommen, dan vind ik d= det C. (Ga na, dat het teken klopt!) Bijgevolg is

$$\det AB = \det A \det B.$$

<u>Stelling.</u> De determinant van het product van twee matrices is gelijk aan het product van de determinanten van die matrices.

Hoofdstuk 3
Vectorrekening in R_3

§ 9. Draaiingen in de ruimte.

Bepaling 1. De lengte of absolute waarde van de vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ is $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Men stelt de lengte van $\vec{a}$ voor door $|\vec{a}|$. Let op: $|\vec{a}|$ is geen vector, maar een getal!

Bepaling 2. Een draaiing om O is een afbeelding T van de ruimte op zichzelf, die de volgende drie eigenschappen heeft:

I. $T(\lambda\vec{p}) = \lambda(T\vec{p})$ voor iedere vector $\vec{p}$ en ieder getal λ.

II. $T(\vec{p} + \vec{q}) = T\vec{p} + T\vec{q}$ voor alle vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$.

III. $|T\vec{p}| = |\vec{p}|$ voor iedere vector $\vec{p}$.

Opmerking: Het is duidelijk, dat een draaiing in de gewone zin van het woord deze drie eigenschappen heeft. De bepalingen 1 en 2 hebben het voordeel, dat zij direct tot R_n uitgebreid kunnen worden.

Stelling 1. Iedere draaiing wordt voorgesteld door een homogene lineaire transformatie. Dit volgt uit §5, stelling 3.

Wij kunnen T dus schrijven als

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3. \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3. \\ y_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3. \end{cases}$$

of

$$y_i = \sum_{k=1}^{3} c_{ik}x_k \ (i = 1,2,3), \text{ of } \vec{y} = C\,\vec{x}.$$

Opdat III vervuld is, moet voldaan zijn aan

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

$$(c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2)x_1^2 + (c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2)x_2^2 + (c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2)x_3^2 +$$

$$2(c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32})x_1x_2 + 2(c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33})x_1x_3 +$$

$$(c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33})x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 .$$

Dit moet gelden voor iedere vector $\vec{x}$. Wij vinden dus:

Stelling 2. Nodig en voldoende, opdat de transformatie (1) een draaiing om O voorstelt, is

$$(2)\qquad \begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0. \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1 & c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0. \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1 & c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0. \end{cases}$$

<u>Stelling 3</u>. Nodig en voldoende, opdat de transformatie (1) een draaiing om O voorstelt, is

(3) $$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3') $$C^T C = I.$$

Hierin stelt C^T de matrix voor, die uit C door spiegelen in de hoofddiagonaal ontstaat.

<u>Bepaling 3</u>. Een matrix, die aan (3) voldoet, heet orthogonaal.

Stelling 4. Voor een orthogonale matrix C geldt:

(4) $$C^T = C^{-1}.$$

(5) $$CC^T = I.$$

(6) $$\det. C = \pm 1.$$

<u>Opmerking</u>. De betrekkingen (2) tussen de kolommen van C zijn equivalent met (3). Evenzo is (5) equivalent met de analoge betrekkingen (7) tussen de rijen van C.

(7) $$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1 & c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = 0 . \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1 & c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = 0 . \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1 & c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = 0 . \end{cases}$$

Bijgevolg is (2) equivalent met (7).

De draaiingen C, waarvoor det. C = 1, kunnen continu uit de identiteit verkregen worden; zij heten <u>eigenlijke draaiingen</u>. Diegene, waarvoor det. C = -1, kunnen niet continu uit de identiteit verkregen worden. Is (1) een draaispiegeling, dan is C = SI, waarin I een eigenlijke draaiing en S een spiegeling is:

(D) $$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 . \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 . \\ y_3 = -c_{31}x_1 - c_{32}x_2 - c_{33}x_3 . \end{cases}$$

(S) $$z_1 = y_1,\ z_2 = y_2,\ z_3 = -y_3 .$$

§ 10. <u>Het inwendige product van twee vectoren.</u>

Voor willekeurige vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$ geldt:

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 =$$
$$= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 2(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) =$$
$$= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3).$$

Bepaling 1. $p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ heet het inwendige of scalaire product van $\vec{p}$ en $\vec{q}$, en wordt voorgesteld door $\vec{p}.\vec{q}$ (spreek uit: $\vec{p}$ in $\vec{q}$). Wij hebben dus de formule: $|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}.\vec{q}$.
Let op: $\vec{p}.\vec{q}$ is geen vector, maar een getal.

Stelling 1. Het inwendige product van twee vectoren is invariant bij orthogonale transformatie.

Bewijs. Laat C een orthogonale transformatie zijn, dan is volgens §8, bepaling 2, voor alle vectoren $\vec{p}$ en $\vec{q}$,

$$|C(\vec{p} - \vec{q})| = |\vec{p} - \vec{q}| \quad \text{en} \quad C(\vec{p} - \vec{q}) = C\,\vec{p} - C\,\vec{q}.$$

Dus $$|C\,\vec{p} - C\,\vec{q}|^2 = |\vec{p} - \vec{q}|^2 .$$

$$|C\,\vec{p}|^2 + |C\,\vec{q}|^2 - 2(C\,\vec{p}).(C\,\vec{q}) = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}.\vec{q}.$$

Maar $|C\,\vec{p}| = |\vec{p}|$ en $|C\,\vec{q}| = |\vec{q}|$, dus $(C\,\vec{p}).(C\,\vec{q}) = \vec{p}.\vec{q}$,
hetgeen te bewijzen was.

Stelling 2. Is α de hoek tussen $\vec{p}$ en $\vec{q}$, dan is $\vec{p}.\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos\alpha$.

Bewijs $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$, dus $\overrightarrow{QP} = \vec{p} - \vec{q}$.
De cosinusregel in $\triangle$ OPQ geeft

$$|\vec{p} - \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\alpha$$
$$|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p}.\vec{q} = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\alpha.$$
$$\vec{p}.\vec{q} = |\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\alpha.$$

Stelling 3. $\vec{p}.\vec{q} = 0$ is equivalent met $\vec{p} = \vec{0}$ of $\vec{q} = \vec{0}$ of $\vec{p} \perp \vec{q}$. (Vergelijk syllabus am I, blz. 27)

Stelling 4. Voor het inwendige product gelden de volgende rekenregels.

I. $\vec{p}.\vec{q} = \vec{q}.\vec{p}$
II. $(\lambda\vec{p}).\vec{q} = \lambda(\vec{p}.\vec{q})$
III. $\vec{p}.(\vec{q} + \vec{r}) = \vec{p}.\vec{q} + \vec{p}.\vec{r}$.

Opmerking. In II komen drie verschillende soorten van vermenigvuldiging voor. Ga dat na!
$\vec{p}.\vec{p} = |\vec{p}|^2$. Men schrijft hiervoor wel $\vec{p}^{\,2}$.

§11. Het eindproduct van drie vectoren.

Bepaling 1. Onder de matrix $M(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ van drie vectoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ verstaan wij de matrix, die deze vectoren tot kolommen heeft.
Het eindproduct van $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ is det. $M(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$; het wordt voorgesteld door $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Stelling 1. Is A een homogene lineaire transformatie, dan is

$$M(A\,\vec{a}, A\,\vec{b}, A\,\vec{c}) = A\,M(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

(In het rechterlid staat een matrixproduct!)

Bewijs Men ziet dit in, door de matrices uit te schrijven.

Stelling 2. $(A\,\vec{a}, A\,\vec{b}, A\,\vec{c}) = \det. A.(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.(in het rechterlid staat een product van getallen!)

Bewijs. Dit volgt uit stelling 1 en §8.

Stelling 3. Het eindproduct van drie vectoren is invariant bij eigenlijke draaiingen.

Bepaling 2. Drie onafhankelijke vectoren vormen een *driepoot*. Een driepoot $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, waarvoor $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$ heet positief georiënteerd. Is $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$ dan heet de driepoot negatief georiënteerd.

Bepaling 3. De oriëntatie van viervlak ABCD is dezelfde als die van de driepoot $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$. Zij wordt dus bepaald door het teken van

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Stelling 4. De oriëntatie van een viervlak gaat in de tegengestelde over bij verwisseling van twee hoekpunten.

Bewijs. In de laatste determinant worden twee kolommen verwisseld.

§12. Het uitwendige product van twee vectoren.

Het eindproduct $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ kan geschreven worden als

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 .$$

Bepaling 1. De vector $\vec{v}$, waarvan

$$v_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad v_2 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\quad v_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

heet het *uitwendige product* of *vectorproduct* van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ en wordt geschreven als $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ (spreek uit: a uit b).

Stelling 1. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$.

Bewijs. Zie de opmerking aan het begin van deze paragraaf.

Stelling 2. Een eigenlijke draaiing voert het uitwendige product van twee vectoren over in het uitwendige product van hun beeldvectoren; in formule, als C een eigenlijke draaiing is, $(C\,\vec{a}) \times (C\,\vec{b}) = C(\vec{a} \times \vec{b})$.

Hulpstelling. Als voor iedere vector $\vec{x}$ geldt $\vec{a}.\vec{x} = 0$, dan is $\vec{x} = 0$.

Bewijs. Dit volgt uit $\vec{e}^{\,1}.\vec{a} = 0$, dus $a_i = 0$ $(i = 1,2,3)$.

Bewijs van stelling 2. Volgens §11, stelling 3 is

(1) $(C\,\vec{a}, C\,\vec{b}, C\,\vec{x}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{x})$ voor iedere vector $\vec{x}$.

(2) $((C\,\vec{a}) \times (C\,\vec{b})).(C\,\vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{x}$ (stelling 1).

(3) $(C(\vec{a} \times \vec{b})).(C\,\vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{x}$ (§9, stelling 1).

(4) $((C\,\vec{a}) \times (C\,\vec{b})).(C\,\vec{x}) = (C(\vec{a} \times \vec{b})).(C\,\vec{x})$ (uit (2) en (3)).

Daar $C\,\vec{x}$ een willekeurige vector is, volgt hieruit volgens de hulpstelling

$$(C\,\vec{a}) \times (C\,\vec{b}) = C(\vec{a} \times \vec{b}).$$

<u>Stelling 3</u>. Zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ afhankelijk, dan is $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ en omgekeerd. Zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ onafhankelijk, dan is $\vec{a} \times \vec{b}$ loodrecht op het vlak, dat door $\vec{a}$ en $\vec{b}$ opgespannen wordt.

<u>Bewijs</u>. Uit bepaling 1 volgt direct, dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dan en slechts dan afhankelijk zijn, als $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Neem nu aan, dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ onafhankelijk zijn, en stel

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$.

$\vec{v}.\vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{a} = (\vec{a},\vec{b},\vec{a}) = 0$

(determinant met twee gelijke kolommen). Evenzo blijkt $\vec{v}.\vec{b} = 0$, dus $\vec{v} \perp \vec{a}$ en $\vec{v} \perp \vec{b}$.

<u>Stelling 4</u>. Zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ onafhankelijk, en is $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, dan is de driepoot $\vec{a},\vec{b},\vec{v}$ positief georiënteerd.

<u>Bewijs</u>. $(\vec{a},\vec{b},\vec{v}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{v} = \vec{v}.\vec{v} = |\vec{v}|^2 > 0$.

<u>Stelling 5</u>. Is $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$, dan is $|\vec{v}|$ = het oppervlak van het parallelogram, dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ als zijden heeft.

<u>Bewijs</u>. Laat φ de hoek tussen a en b zijn, dan is het bedoelde oppervlak

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sqrt{1-\cos\varphi} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2} =$$
$$\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} =$$
$$\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2} =$$
$$\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} = |\vec{v}|.$$

<u>Opmerking</u>. Door de stellingen 3, 4 en 5 is de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ meetkundig volkomen bepaald.

<u>Stelling 6</u>. Voor het uitwendige product gelden de volgende rekenregels.

$\vec{q} \times \vec{p} = -(\vec{p} \times \vec{q})$ (<u>niet</u> commutatief!).

$(\lambda\vec{p}) \times \vec{q} = \lambda(\vec{p} \times \vec{q})$.

$\vec{p} \times (\vec{q} + \vec{r}) = \vec{p} \times \vec{q} + \vec{p} \times \vec{r}$.

Deze regels volgen direct uit bepaling 1.

<u>Stelling 7</u>. $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

<u>Bewijs</u>. $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}).\vec{a} = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Stelling 8. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

Bewijs. Door narekenen.

Stelling 9. $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$.

Bewijs. $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a},\vec{b}\ \vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a}.(\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) =$
$\vec{a}.((\vec{b}.\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$.

Bijzonder geval. $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\,\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$.

Stelling 10. $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c} - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$.

Bewijs. Uit stelling 8.

§13. De inhoud van een viervlak.

Stelling. De inhoud van het viervlak met $\vec{p}$, $\vec{q}$ en $\vec{r}$ als ribben is $\pm \frac{1}{6}(\vec{p},\vec{q}\ \vec{r})$.

Bewijs. Het viervlak is OPQR. Laat RS de hoogtelijn uit R zijn; stel $\angle ORS = \varphi$. De inhoud is, afgezien van het teken, gelijk aan

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{RS.opp.}\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{6}|\vec{r}|\cos\varphi\,|\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{1}{6}(\vec{p} \times \vec{q}).\vec{r} = \frac{1}{6}(\vec{p},\vec{q},\vec{r}).$$

Opmerking. Wanneer wij afspreken, de inhoud van een positief georiënteerd viervlak positief, die van een negatief georiënteerd viervlak negatief te nemen, dan geldt algemeen: Inhoud OPQR $= \frac{1}{6}(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$.

§14. Enige toepassingen.

1. Vergelijking van een vlak.

Laat de vector $\vec{a}$ loodrecht op het vlak V staa, en laat P een punt in V zijn. Het punt X ligt dan en slechts dan in V, als $\vec{PX} \perp \vec{a}$, dus als $\vec{a}.(\vec{x} - \vec{p}) = 0$. De vergelijking van het vlak is dus:

$$\vec{a}.\vec{x} = \vec{a}.\vec{p}.$$

Stelling 1. Is $\vec{a}.\vec{x} = b$ de vergelijking van een vlak V, dan is $\vec{a}$ een vector loodrecht op V (normaalvector).

2. **Opgave.** Door een gegeven punt P een vlak te brengen, evenwijdig aan het gegeven vlak met vergelijking $\vec{a}.\vec{x} = b$.

Oplossing. De vergelijking van het gevraagde vlak is $\vec{a}.\vec{x} = c$. P ligt er in, dus $\vec{a}.\vec{p} = c$. De gevraagde vergelijking is dus $\vec{a}.\vec{x} = \vec{a}.\vec{p}$.

Opmerking. Schrijft men deze vergelijking in de vorm $\vec{a}.(\vec{x} - \vec{p}) = 0$ dan drukt zij uit, dat $\vec{PX} \perp \vec{a}$.

3. **Opgave.** Het snijpunt te bepalen van de lijn met parametervoorstelling $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$ en het vlak met vergelijking $\vec{b}.\vec{x} = c$.

Oplossing. Stel, dat het snijpunt Q behoort bij $\lambda = \lambda_1$, zodat $\vec{q} = \vec{p} + \lambda_1\vec{a}$. Dan is $\vec{b}.(\vec{q} + \lambda_1\vec{a}) = c$. Hieruit kan men λ_1 berekenen.

4. <u>Opgave</u>. Gegeven zijn een punt P en twee vlakken $\alpha(\vec{a}.\vec{x} = b)$ en $\gamma(\vec{c},\vec{x} = d)$. Bepaal een parametervoorstelling van de lijn door P, evenwijdig met de snijlijn van α en β.

<u>Oplossing</u>. $\vec{a} \perp \alpha$, $b \perp \beta$, dus de snijlijn van α en β is loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$. De vector $\vec{a} \times \vec{b}$ is dus evenwijdig aan die snijlijn. De gevraagde parametervoorstelling luidt $\vec{x} = \vec{p} + \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

5. <u>Opgave</u>. Gegeven zijn een punt P en twee lijnen l en m, met parametervoorstelling $\vec{x} = \vec{q} + \lambda\vec{a}$, resp. $\vec{x} = \vec{r} + \lambda\vec{b}$. Bepaal de vergelijking van het vlak α door P, dat evenwijdig is met l en met m.

<u>Oplossing</u>. De normaalvector van α is loodrecht op $\vec{a}$ en op $\vec{b}$, dus evenwijdig aan $\vec{a} \times \vec{b}$. De vergelijking van α is dus $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{x} - \vec{p}) = 0$, of $(\vec{a},\vec{b},\vec{x} - \vec{p}) = 0$.

<u>Opmerking</u>. In de laatste vorm drukt de vergelijking uit, dat $\vec{a},\vec{b}$ en $\vec{x} - \vec{p}$ in een vlak liggen. Dit is het vlak door O en $/\!/ \alpha$.

6. <u>Opgave</u>: Gegeven zijn een punt P en twee vlakken $\alpha(\vec{a}.\vec{x} = b)$ en $\gamma(\vec{c}.\vec{x} = d)$. Bepaal de vergelijking van het vlak door P en de snijlijn van α en β.

<u>Oplossing</u>. Alle vlakken door de snijlijn van α en γ vormen een <u>vlakkenwaaier</u>; de vlakken van deze waaier hebben vergelijkingen van de vorm

$$\lambda(\vec{a}.\vec{x} - b) + \mu(\vec{c}.\vec{x} - d) = 0.$$

(Analoog met lijnenwaaier in het platte vlak; zie syllabus am I, blz. 11).

Stel dat het gevraagde vlak behoort bij $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$.
P moet in dit vlak liggen, dus $\lambda_1(\vec{a}.\vec{p} - b) + \mu_1(\vec{c}.\vec{p} - d) = 0$.
Berekenen wij hieruit de verhouding van λ_1 en μ_1, dan vinden wij voor de gevraagde vergelijking

$$(\vec{c}.\vec{p} - d)(\vec{a}.\vec{x} - b) - (\vec{a}.\vec{p} - b)(\vec{c}.\vec{x} - d) = 0.$$

7. <u>Stelling 2</u>. Nodig en voldoende, opdat de lijnen l en m, met parametervoorstellingen $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$ en $\vec{x} = \vec{q} + \mu\vec{b}$, in een vlak liggen, is dat $(\vec{a},\vec{b},\vec{q} - \vec{p}) = 0$.

<u>Bewijs</u>. $(\vec{a},\vec{b},\vec{q} - \vec{p}) = 0$ is gelijkwaardig met de voorwaarde, dat $\vec{a},\vec{b}$ en $\vec{q} - \vec{p}$ afhankelijk zijn, dus dat óf $\vec{a}$ en $\vec{b}$ afhankelijk zijn (d.w.z. $l /\!/ m$), óf $\vec{q} - \vec{p}$ een lineaire combinatie is van $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Het laatste wil zeggen, dat men λ_1 en μ_1 zo kan bepalen, dat $\vec{q} - \vec{p} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}$, dus $\vec{p} + \lambda_1\vec{a} = \vec{q} - \mu_1\vec{b}$. Dit betekent dat l en m een snijpunt hebben.

8. <u>Opgave</u>. Gegeven zijn twee lijnen l en m, met parametervoorstellingen $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$ en $\vec{y} = \vec{q} + \mu\vec{b}$. Bepaal de punten, waar de gemeenschappelijke loodlijn van l en m die lijnen snijdt.

<u>Oplossing</u>. Stel, dat die punten R (op l) en S (op m) behoren bij $\lambda = \lambda_1$ en $\mu = \mu_1$, zodat $\vec{r} = \vec{p} + \lambda_1\vec{a}$, $\vec{s} = \vec{q} + \mu_1\vec{b}$. $\vec{RS} \perp \vec{a}$ en $\vec{RS} \perp \vec{b}$, dus $\vec{RS} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$. Er is dus een getal ρ, zodat

$\vec{s} - \vec{r} = \rho(\vec{a} \times \vec{b})$

$(\vec{q} + \mu_1\vec{b}) - (\vec{p} + \lambda_1\vec{a}) = \rho(\vec{a} \times \vec{b})$.

$\lambda_1\vec{a} - \mu_1\vec{b} + \rho(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{p} - \vec{q}$.

Door deze vergelijking achtereenvolgens inwendig met $\vec{a}$ en met $\vec{b}$ te vermenigvuldigen, vinden wij

$\lambda_1\vec{a}^2 - \mu_1\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.(\vec{p} - \vec{q})$.

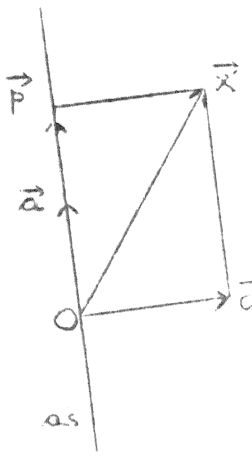
$\lambda_1\vec{a}.\vec{b} - \mu_1\vec{b}^2 = \vec{b}.(\vec{p} - \vec{q})$.

Uit deze twee vergelijkingen kan men λ_1 en μ_1 berekenen; dan zijn R en S bekend.

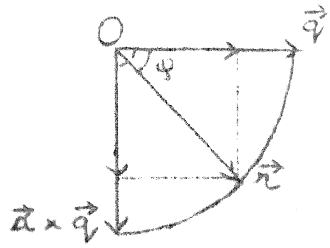
<u>Opmerking</u>. Het resultaat kan vereenvoudigd worden met behulp van de formule $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$ (§12, stelling 8 en 9).

9. <u>Opgave</u>. Een vector $\vec{x}$ draait over een hoek φ om de as door de eenheidsvector $\vec{a}$. Druk de zo verkregen vector $\vec{y}$ uit in $\vec{x}, \vec{a}$ en φ.

<u>Oplossing</u>. Ontbind $\vec{x}$ in een component $\vec{p}$ langs $\vec{a}$ en een component $\vec{q} \perp \vec{a}$.



Stel $\vec{p} = \lambda\vec{a}$. $\vec{q} = \vec{x} - \lambda\vec{a}$. $\vec{a}.(\vec{x} - \lambda\vec{a}) = 0$.
Daar $\vec{a}^2 = 1$, volgt hieruit $\lambda = \vec{a}.\vec{x}$.
$\vec{p}$ blijft bij de draaiing onveranderd; $\vec{q}$ gaat over in $\vec{r}$. De tweede figuur ligt in het vlak loodrecht op $\vec{a}$; hierin ligt ook $\vec{a} \times \vec{q}$; $|\vec{a} \times \vec{q}| = |\vec{q}|$.
Uit de figuur blijkt, dat $\vec{r} = \vec{q}\cos\varphi + (\vec{a} \times \vec{q})\sin\varphi$. Bijgevolg is
$\vec{y} = \vec{p} + \vec{r} = \vec{p} + \vec{q}\cos\varphi + (\vec{a} \times \vec{q})\sin\varphi = \vec{x}\cos\varphi + (\vec{a}.\vec{x})(1 - \cos\varphi)\vec{a} + \sin\varphi(\vec{a} \times \vec{x})$.
Stelt men $\cos\frac{1}{2}\varphi = c_0$, $\vec{a}\sin\frac{1}{2}\varphi = \vec{c}$, dan wordt dit $\vec{y} = (c_0^2 - \vec{c}^2) + 2(\vec{c}.\vec{x})\vec{c} + 2c_0(\vec{c}.\vec{x})$.



Door de componenten van $\vec{y}$ uit te schrijven, vindt men de parametervoorstelling van Cayley voor de algemene orthogonale transformatie. (Werk dit uit!)

Hoofdstuk 4
Coördinatentransformaties. Eigenwaarden en eigenvectoren.

§15. Coördinatentransformaties.

Laat $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ drie onafhankelijke vectoren in R_3 zijn. Volgens §4, st.3, vormen zij een basis voor R_3, d.w.z. elke vector $\vec{x}$ kan worden geschreven als

(1) $$\vec{x} = x_1{}'\vec{u} + x_2{}'\,\vec{v} + x_3{}'\,\vec{w}.$$

Men noemt $x_1{}', x_2{}', x_3{}'$ de componenten van $\vec{x}$ in het coördinatenstelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Is $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$, dan heten $x_1{}', x_2{}', x_3{}'$ ook de coördinaten van X in het stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

<u>Opmerking</u>. x_1, x_2, x_3 zijn dus de coördinaten van X in het stelsel $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})$.

(1) kan ook in de volgende vorm worden geschreven:

(1') $$\begin{cases} x_1 = u_1x_1{}' + v_1x_2{}' + w_1x_3{}' \\ x_2 = u_2x_1{}' + v_2x_2{}' + w_2x_3{}' \\ x_3 = u_3x_1{}' + v_3x_2{}' + w_3x_3{}' \end{cases}$$

of

(1") $$\vec{x} = S\,\vec{x}\,' ,$$

waarin

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

(1') heet de coördinatentransformatie van het stelsel $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})$ naar het stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

<u>Stelling 1</u>. De coördinatentransformatie van het stelsel $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})$ naar het stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ is homogeen lineair. In de kolommen van de transformatiematrix S staan de componenten van de nieuwe grondvectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. det $S \neq 0$.

<u>Opmerking</u>. In (1), (1') en (1") stellen $\vec{x}$ en $\vec{x}\,'$ dezelfde vector voor, genomen ten opzichte van verschillende coördinatenstelsels.

<u>Bepaling</u>. Een coördinatenstelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ heet Cartesisch als $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ drie onderling loodrechte eenheidsvectoren zijn. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ is dus Cartesisch, als $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$ en $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = \vec{v}.\vec{w} = 0$.

<u>Stelling 2</u>. Zijn de beide stelsels $(\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3})$ en $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ Cartesisch, dan is de matrix S der coördinatentransformatie orthogonaal.

<u>Bewijs</u>. Dit volgt direct uit §9, st.2 en 3, bep.3.

Laat $\vec{y} = A\vec{x}$ een homogene lineaire transformatie zijn en S een coördinatentransformatie, zodat $\vec{x} = S\vec{x}'$, $\vec{y} = S\vec{y}'$. Dan is $\vec{y}' = S^{-1}\vec{y} = S^{-1}A\vec{x} = S^{-1}AS\vec{x}'$. Hieruit volgt

<u>Stelling 3.</u> De transformatie $\vec{y} = A\vec{x}$ krijgt in het stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vorm

$$\vec{y}' = S^{-1}AS\vec{x}',$$

waarin S de coördinatentransformatie van het stelsel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ naar het stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ voorstelt.

§16. Eigenwaarden en eigenvectoren.

<u>Bepaling 1.</u> Een van $\vec{O}$ verschillende vector $\vec{v}$, die door de homogene lineaire transformatie A met een constante λ vermenigvuldigd wordt, heet een eigenvector van A. λ heet een eigenwaarde van A.

Voor de eigenvector $\vec{v}$ geldt dus:

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda v_1 = a_{11}v_1 + \ldots\ldots + a_{1n}v_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda v_n = a_{n1}v_1 + \ldots\ldots + a_{nn}v_n \end{cases}$$

of

$$(2)\quad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22}-\lambda)v_2 + \ldots\ldots + a_{2n}v_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots\ldots + (a_{nn}-\lambda)v_n = 0. \end{cases}$$

Men kan (2) ook schrijven in de vorm

$$(2')\qquad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{O}.$$

De vergelijkingen (2) hebben een oplossing die verschilt van $\vec{v} = \vec{O}$, als

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

of, anders geschreven

$$(3')\qquad \det.\ (A-\lambda I) = 0.$$

<u>Bepaling 2.</u> (3) heet de karakteristieke vergelijking van de matrix A.

<u>Stelling 1.</u> De eigenwaarden van A zijn de wortels van de karakteristieke vergelijking van A.

Stelling 2. Is λ_1 een eigenwaarde van A, dan zijn de bij λ_1 behorende eigenvectoren de oplossingen van

$$(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}. \tag{4}$$

Opgave. Schrijf (4) uit in de vorm van (2).

Stelling 3. De eigenwaarden van A zijn invariant bij coördinatentransformaties.

Bewijs. Zij $B = S^{-1}AS$.

$$B - \lambda I = S^{-1}AS - \lambda I = S^{-1}(A - \lambda I)S.$$

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I).$$

De karakteristieke vergelijking van B is dus dezelfde als die van A.

Stelling 4. Iedere eigenvector van A gaat door de coördinatentransformatie S over in een eigenvector van $B=S^{-1}AS$ met dezelfde eigenwaarde.

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit het feit, dat B dezelfde transformatie voorstelt als A, maar op het andere coördinatenstelsel. Men kan het ook als volgt narekenen.

Stel $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, en $\vec{v} = S\vec{v}\,'$, dan is $B\vec{v}\,' = S^{-1}AS\vec{v}\,' = S^{-1}A\vec{v} = S^{-1}(\lambda\vec{v}) = \lambda S^{-1}\vec{v} = \lambda\vec{v}\,'$.

Stelling 5. Een nodige en voldoende voorwaarde, opdat $\vec{e}^{\,1}$ een eigenvector van A is, luidt, dat $a_{21}=\ldots=a_{n1}=0$. De bij $\vec{e}^{\,1}$ behorende eigenwaarde is dan a_{11}.

Bewijs. Substitueer $\vec{e}^{\,1}$ voor $\vec{v}$ in (2).

Onderstel nu, dat A de n onafhankelijke eigenvectoren $\vec{v}^{\,1},\ldots,\vec{v}^{\,n}$ heeft. Voeren wij deze als nieuwe grondvectoren in door de coördinatentransformatie S, dan heeft volgens st.5 en §15,st.3, de matrix $B=S^{-1}AS$ de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{5}$$

waarin $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn. Wij noemen de matrix 5 de diagonaalmatrix $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Zo komen wij tot

Stelling 6. Heeft de matrix A n onafhankelijke eigenvectoren, dan is er een matrix S, zodat $S^{-1}AS$ de vorm (5) heeft, en omgekeerd.

Niet iedere matrix van n rijen en kolommen heeft n onafhankelijke eigenvectoren.
Bijvoorbeeld: de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ heeft alleen de eigenvectoren $(v_1,0)$.

Zulk een matrix kan dus niet door coördinatentransformatie op de diagonaalvorm worden gebracht.

Stelling 7. De eigenvectoren, behorende bij een bepaalde eigenwaarde λ_1, vormen een lineaire deelruimte van R_n.

Bewijs. De eigenvectoren, behorende bij λ_1, zijn de oplossingen van (2), waarin λ_1 voor λ gesubstitueerd is. Volgens §4, st.5, vormen deze een lineaire deelruimte.

Stelling 8. Behoort bij de eigenwaarde λ_1 een k-dimensionale deelruimte van eigenvectoren, dan is λ_1 een minstens k-voudige eigenwaarde van A.

Bewijs. Laat $\vec{v}^1,\ldots,\vec{v}^k$ onafhankelijke eigenvectoren bij de eigenwaarde λ_1 zijn. Voer een coördinatentransformatie S uit, waardoor $\vec{v}^1,\ldots,\vec{v}^k$ de eerste k nieuwe grondvectoren worden. Volgens st.5 is de matrix $B=S^{-1}AS$ zo gevormd, dat in de eerste k kolommen overal λ_1 in de hoofddiagonaal en 0 buiten de hoofddiagonaal staat. (Teken die matrix!).
De karakteristieke vergelijking van B is dus deelbaar door $(\lambda-\lambda_1)^k$.
Volgens st.3 is dit dus ook het geval voor de karakteristieke vergelijking van A.
Opmerking. Uit het voorbeeld na st.6 blijkt, dat bij een k-dimensionale ruimte van eigenvectoren een meer dan k-voudige eigenwaarde kan behoren.

Hoofdstuk 5

Kwadrieken.

§17. Omwentelingsoppervlakken.

Stelling 1. De vergelijking van het omwentelingsoppervlak, dat ontstaat, door de kromme $x_2=0$, $f(x_1,x_3)=0$ te wentelen om de X_3-as, luidt $f(\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2},x_3)=0$.

Bewijs. Laat $P(p_1,0,p_3)$ een punt in het vlak $x_2=0$ zijn, en $Q(q_1,q_2,q_3)$ het punt, dat uit P ontstaat door draaiing om de X_3-as over een hoek φ ; dan is

$$q_1 = p_1 \cos\varphi \;,\; q_2 = p_1 \sin\varphi \;,\; q_3 = p_3,$$

en omgekeerd

$$p_1 = \pm\sqrt{q_1^2+q_2^2},\; p_3 = q_3.$$

Ligt P op de kromme $x_2=0$, $f(x_1,x_3)=0$, dan ligt Q op het oppervlak $f(\pm\sqrt{x_1^2+x_2^2},x_3)=0$. Ligt omgekeerd Q op dit oppervlak, dan ligt P op de kromme $x_2=0$, $f(x_1,x_3)=0$.

Voorbeelden. De ellips $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$ geeft door wenteling de omwentelingsellipsoide

$$(1)\qquad \frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1.$$

De hyperbool $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$ geeft evenzo de eenbladige omwentelingshyperboloide (omwentelingshalsvlak)

$$(2)\qquad \frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1.$$

De hyperbool $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1$ geeft de tweebladige omwentelingshyperboloide (draaitweeblad)

$$(3)\qquad \frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1.$$

De parabool $\frac{x_1^2}{a^2}=2x_3$ geeft de omwentelingsparaboloide (vaas)

$$(4)\qquad \frac{x_1^2+x_2^2}{a^2}=2x_3.$$

§18. Algemene kwadrieken.

Door de transformatie $x_1=x_1'$, $x_2=\frac{a}{b}x_2'$, $x_3=x_3'$ (samendrukking of uitrekking in de richting van de X_2-as) ontstaan uit de omwentelingskwadrieken achtereenvolgens:

De ellipsoide

$$(5)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1.$$

De eenbladige hyperboloide (halsvlak)

$$(6)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1.$$

De tweebladige hyperboloide (tweeblad)

$$(7)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1.$$

De elliptische paraboloide (ellipsvaas)

$$(8)\qquad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3.$$

De doorsneden van het oppervlak (8) met de vlakken $x_2=k$ zijn congruente parabolen, waarvan de toppen liggen op de parabool $x_1=0$, $x_2^2=2b^2x_3$. Laat men op analoge wijze de parabool $x_1^2=2a^2x_3$, $x_2=0$, met zijn top glijden langs de parabool $x_1=0$, $x_2^2=-2b^2x_3$, dan ontstaat:

De hyperbolische paraboloide (zadelvlak)

(9) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3.$$

§19. Rechte lijnen op kwadrieken.

Stelling 1. Op het halsvlak (6) liggen de twee stelsels rechte lijnen

$$\mathrm{I}\quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{x_2}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{x_2}{b}\right) \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\quad \begin{cases} \rho\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) = \sigma\left(1 + \frac{x_2}{b}\right) \\ \sigma\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \rho\left(1 - \frac{x_2}{b}\right). \end{cases}$$

Bewijs. Door vermenigvuldiging van de vergelijkingen I ontstaat (6); evenzo met II.

Stelling 2. Twee lijnen van I kruisen elkaar; evenzo voor II.

Bewijs. Iedere lijn uit I snijdt de lijnen

$$l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c} = 0,\quad 1 + \frac{x_2}{b} = 0\right) \text{ en } m\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = 0,\ 1 - \frac{x_2}{b} = 0\right).$$

Zouden twee lijnen uit I in een vlak liggen, dan zouden l en m in een vlak liggen. l en m liggen echter in de evenwijdige vlakken $\frac{x_2}{b} = \pm 1$, en zijn zelf niet evenwijdig. Zij kruisen elkaar dus.

Het bewijs voor II gaat net zo.

Stelling 3. Een lijn uit I en een lijn uit II liggen in een vlak.

Bewijs. De lijn I ligt in het vlak

$$\sigma\left\{\lambda\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) - \mu\left(1 + \frac{x_2}{b}\right)\right\} + \rho\left\{\mu\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) - \lambda\left(1 - \frac{x_2}{b}\right)\right\} = 0.$$

De lijn II ligt in het vlak

$$\mu\left\{\rho\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) - \sigma\left(1 + \frac{x_2}{b}\right)\right\} + \lambda\left\{\sigma\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) - \rho\left(1 - \frac{x_2}{b}\right)\right\} = 0.$$

Deze vlakken vallen samen.

Stelling 4. Aan elke lijn van I loopt één lijn van II evenwijdig, en omgekeerd.

Bewijs. De richtingsvector van de lijn I is

$$\left(\frac{\mu^2-\lambda^2}{bc},\ \frac{2\lambda\mu}{ac},\ \frac{\mu^2+\lambda^2}{ab}\right),$$

die van de lijn II is

$$\left(\frac{\rho^2-\sigma^2}{bc},\ \frac{2\rho\sigma}{ac},\ \frac{\rho^2+\sigma^2}{ab}\right).$$

Daar ρ en σ met eenzelfde factor vermenigvuldigd mogen worden, mogen wij aannemen, dat bij evenwijdige lijnen de richtingsvectoren samenvallen. Dan is

$$\rho^2-\sigma^2=\mu^2-\lambda^2, \quad \rho\sigma=\lambda\mu, \quad \rho^2+\sigma^2=\mu^2+\lambda^2.$$

Hieruit volgt $\rho=\pm\mu$, $\sigma=\pm\lambda$. Beide tekens geven dezelfde lijn.

Stelling 5. Op het zadelvlak (9) liggen de stelsels rechte lijnen

$$\text{I}\quad\begin{cases}\lambda\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\right)=2\mu\\ \mu\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}\right)=\lambda x_3.\end{cases}\qquad \text{II}\quad\begin{cases}\rho\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}\right)=2\sigma\\ \sigma\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\right)=\rho x_3.\end{cases}$$

Stelling 6. Alle lijnen van I lopen evenwijdig aan het vlak $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=0$. Alle lijnen van II lopen evenwijdig aan het vlak $\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}=0$.

Bepaling. De in stelling 6 genoemde vlakken heten de richtvlakken van het zadelvlak.

Stelling 7. Twee lijnen van eenzelfde stelsel op het zadelvlak kruisen elkaar.

Bewijs. Twee lijnen uit I zijn beide evenwijdig aan het vlak $\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}=0$ en snijden de lijn $l\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}=0,\ x_3=0\right)$, die dit richtvlak snijdt.

Stelling 8. Een lijn l uit I en een lijn m uit II snijden elkaar.

Bewijs. Analoog als voor stelling 3. l en m kunnen niet evenwijdig zijn, daar zij dan beide evenwijdig moesten zijn aan de snijlijn $x_1=x_2=0$ der richtvlakken. Uit stelling 5 volgt, dat dit niet kan.

§20. Kegels en cylinders.

Hiertoe behoren:

De kwadratische kegel

(10) $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0.$$

De elliptische cylinder

(11) $$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

De hyperbolische cylinder

(12) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

De parabolische cylinder

(13) $$x_1^2 = 2px_2.$$

§21. De algemene vergelijking van de tweede graad.

Wij willen trachten, de vergelijking

(1) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + 2a_{03}x_3 + a_{00} = 0$$

door coördinatentransformatie zoveel mogelijk te vereenvoudigen. De coefficienten worden reëel ondersteld. (1) is te schrijven als

(1') $$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\sum_{h=1}^{3} a_{oh}\, x_h + a_{oo} = 0.$$

De eerste som in het kwadratische gedeelte; wij nemen hierin $a_{ik}=a_{ki}$. De tweede som is het lineaire gedeelte, a_{oo} de bekende term. Eerst voeren wij een assendraaiing uit naar een nieuw Cartesisch stelsel. Daar deze door een homogene transformatie wordt voorgesteld, voert zij het kwadratische deel in het nieuwe kwadratische deel, het lineaire deel in het nieuwe lineaire deel over, terwijl de bekende term invariant blijft. Wij beschouwen eerst alleen het kwadratische deel. Hierbij behoort de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

<u>Stelling 1</u>. Door de coördinatentransformatie S gaat $\sum a_{ik} x_i x_k$ over in $\sum b_{ik} x_i' x_k'$, waarin $B = S^T AS$.

<u>Bewijs</u>. Als $x_i = \sum_h s_{ih} x_h'$, dan is

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = \sum_i \sum_k a_{ik} \sum_h s_{ih} x_h' \sum_j s_{kj} x_j' =$$

$$= \sum_h \sum_j \left(\sum_i \sum_k s_{ih} a_{ik} s_{kj} \right) x_h' x_j' = \sum_{h,j} b_{hj} x_h' x_j',$$

zodat $b_{hj} = \sum_i \sum_k s_{ih} a_{ik} s_{kj}$.

Stel nu $AS = C$, $S^T = U$, $D = UAS = UC$.

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} s_{kj}.$$

$$d_{hj} = \sum_i u_{hi} c_{ij} = \sum_i \sum_k s_{ih} a_{ik} s_{kj}.$$

Dus $D = B$, h.t.b.w.

<u>Stelling 2</u>. Gaat $\sum a_{ik} x_i x_k$ door de orthogonale transformatie S over in $\sum b_{ik} x_i x_k$, dan is $B = S^{-1} AS$.

<u>Bewijs</u>. Volgens § 9, st.4, is $S^T = S^{-1}$.

<u>Stelling 3</u>. Laat S de coördinatentransformatie zijn naar een Cartesisch stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, terwijl $S^{-1} AS = B$. Nodig en voldoende, opdat $b_{12} = b_{13} = 0$, is dat $\vec{u}$ een eigenvector van B is.

<u>Bewijs</u>. Zie § 16, st.5.

<u>Stelling 4</u>. Er is steeds een Cartesisch stelsel te vinden, waarvoor $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$.

<u>Bewijs</u>. Ga eerst over op het Cartesische stelsel $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, waarin $\vec{u}$ een eigenvector van A is. (In st.8 zal worden bewezen, dat men $\vec{u}$ reëel kan kiezen).

$$\sum a_{ik} x_i x_k = b_{11} x_1'^2 + b_{22} x_2'^2 + b_{33} x_3'^2 + 2b_{23} x_2' x_3'.$$

Voer nu de volgende coördinatentransformatie uit:

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' \\ x_2' = \qquad r_2 x_2'' + s_2 x_3'' , \\ x_3' = \qquad r_3 x_2'' + s_3 x_3'' . \end{cases}$$

waarin (r_2,r_3) een eigenvector is van de matrix $\begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ en $\vec{s} \perp \vec{r}$.

$(\vec{u}, \vec{s}, \vec{r})$ vormen weer een Cartesisch stelsel. Volgens stelling 3 is nu

$$b_{22}\, x_2'^2 + b_{33}\, x_3'^2 + 2b_{23}\, x_2'\, x_3' =$$

$$c_{22}\, x_2''^2 + c_{33}\, x_3''^2 \; .$$

Hiermee is het doel bereikt.

Stelling 5. Wanneer $\sum a_{ik}\, x_i\, x_k$ door een assendraaiing overgaat in $c_{11}x_1'^2 + c_{22}x_2'^2 + c_{33}x_3'^2$, dan zijn de nieuwe grondvectoren eigenvectoren van A, en c_{11}, c_{22}, c_{33} zijn de bijbehorende eigenwaarden.

Bewijs. Dat de nieuwe grondvectoren eigenvectoren zijn, volgt uit stelling 3.
Volgens § 16, st.3, zijn de eigenwaarden van A dezelfde als die van de diagonaalmatrix C; de laatste zijn c_{11}, c_{22}, c_{33}.

Stelling 6. Twee eigenvectoren van een symmetrische matrix A, die bij verschillende eigenwaarden behoren, zijn loodrecht op elkaar.

Bewijs. Laat $\vec{v}$ en $\vec{w}$ zulke eigenvectoren zijn, zodat $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$, $A\vec{w} = \lambda_2 \vec{w}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\sum_k a_{ik}\, v_k = \lambda_1\, v_i \; . \qquad\qquad \sum_k a_{ik}\, w_k = \lambda_2\, w_i \; .$$

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, v_k\, w_i = \lambda_1 \sum_i v_i\, w_i .$$

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, w_k\, v_i = \lambda_2 \sum_i v_i\, w_i .$$

De laatste twee linkerleden zijn gelijk (Verwissel i met k en denk er aan, dat A symmetrisch is).

$$\lambda_1 \sum_i v_i\, w_i = \lambda_2 \sum_i v_i\, w_i \; .$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ dus } \sum v_i\, w_i = 0. \qquad \vec{v} \perp \vec{w}.$$

Stelling 7. Alle eigenwaarden van een reële symmetrische matrix zijn reëel.

Bewijs. Stel, dat λ_1 een complexe eigenwaarde was, waarbij de eigenvector (v_1,v_2,v_3) behoort, dan is de toegevoegd complexe $\bar{\lambda}_1$ een eigen- ⌐
Daar $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, volgt uit st..6, dat $v_1\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_2 + v_3\bar{v}_3 = 0$. Nu geldt voor ieder complex getal $a \neq 0$, dat $a\bar{a} > 0$. Wij zijn dus tot een tegenstrijdigheid gekomen.

⌐waarde met de eigenvector $(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3)$.

<u>Stelling 8</u>. Iedere eigenvector van een reële symmetrische matrix is een veelvoud van een reële vector.

<u>Bewijs</u>. Vult men in de vergelijkingen § 16 (2) voor λ een reële waarde in, dan vindt men voor de verhouding van $v_1, \ldots, v_n$ reële waarden.

<u>Voorbeeld</u>. $2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2x - y - 2z + 2 = 0.$

Wij zoeken eerst de eigenwaarden van

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit zijn de wortels van

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Men vindt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$.

De eigenvector, behorende bij $\lambda = 1$, vindt men uit de vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Hieraan voldoet $(0,1,1)$. Een eenheidsvector in dezelfde richting is $\vec{u} = (0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$. Evenzo vinden wij

bij $\lambda = 3$ de eigenvector $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$;

bij $\lambda = 0$ de eigenvector $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

Wij voeren dus de volgende assendraaiing uit:

$$\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.y' + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.z'. \\ y = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.x' - \tfrac{1}{6}\sqrt{6}.y' + \tfrac{1}{6}\sqrt{6}.z'. \\ z = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.x' + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.y' - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.z'. \end{cases}$$

Zonder deze substitutie werkelijk uit te voeren, weten wij, dat het kwadratische deel van de vergelijking daardoor de volgende gedaante krijgt:

$$x'^2 + 3y'^2.$$

Het lineaire deel kan door substitutie worden gevonden. Ter afkorting schrijven wij hiervoor

$$bx' + cy' + dz'.$$

De vergelijking is dus geworden:

$$x'^2 + 3y'^2 + bx' + cy' + dz' + 2 = 0.$$

$$(x' + \tfrac{b}{2})^2 + 3(y' + \tfrac{c}{6})^2 + dz' + e = 0$$

$$(e = 2 - \tfrac{b^2}{4} - \tfrac{c^2}{36}) .$$

Nu voeren wij een assenverschuiving uit door

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{b}{2}, \\ y' = y'' - \frac{c}{6}, \\ z' = z'' - \frac{e}{d}. \end{cases}$$

Er komt dan:

$$x''^2 + 3y''^2 + dz'' = 0.$$

Het oppervlak is een elliptische paraboloide.

§ 22. Indeling der kwadrieken.

Geval 1. De eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ van A zijn alle $\neq 0$.
De methode, door het voorbeeld geïllustreerd, voert dus tot

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0.$$

Geval 1a. $c \neq 0$.

Afhankelijk van de tekens van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, c heeft men een kwadriek zonder reële punten (nuldelige kwadriek), een ellipsoide, een halsvlak of een tweeblad.
Geval 1b. $c=0$. Kegel, nuldelig of eendelig.
Geval 2. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.
De vergelijking wordt (zie het voorbeeld):

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + dz + e = 0.$$

Geval 2a. $d \neq 0$. Men komt dan tot

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + dz = 0.$$

Elliptische of hyperbolische paraboloide.

Geval 2b. $d = 0$, $e \neq 0$.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + e = 0.$$

Elliptische of hyperbolische cylinder.

Geval 2c. $d = e = 0$.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0.$$

Kwadriek ontaard in twee snijdende vlakken (reëel of toegevoegd complex).

Geval 3. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 x^2 + ay + bz + c = 0.$$

Geval 3a. a en b niet beide 0.

$$\lambda_1 x^2 + dy = 0.$$

Parabolische cylinder.

Geval 3b. $a = b = 0$, $c \neq 0$.

$$\lambda_1 x^2 + c = 0.$$

Kwadriek ontaard in twee evenwijdige vlakken, reëel of toegevoegd complex.

Geval 3c. $a = b = c = 0$.

$$x^2 = 0.$$

Kwadriek ontaard in twee samenvallende vlakken.

§ 23. Invarianten van een kwadriek.

Het volgende heeft betrekking op de kwadriek

$$(1) \qquad \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k + 2 \sum_h a_{oh} x_h + a_{oo} = 0,$$

die door de assendraaiing S overgaat in

$$(2) \qquad \sum_{i,k} b_{ik} x_i' x_k' + 2 \sum_h b_{oh} x_h' + b_{oo} = 0.$$

<u>Stelling 1</u>. Det. A is invariant bij assendraaiing, d.w.z. det.A = det.B.

<u>Bewijs.</u> Volgens § 21, st.1, is $B = S^T AS$, dus $\det.B = (\det.S)^2 \det.A$, maar $\det.S = 1$, dus $\det.B = \det.A$.

<u>Bepaling</u>. Onder D verstaan wij de matrix

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Stelling 2. Det.D is invariant bij assendraaiing.

Bewijs. Wij voeren hulpveranderlijken x_o en x_o' in en beschouwen de vormen

(3) $$\sum_{i,k=0}^{3} a_{ik}\, x_i\, x_k \quad \text{en}$$

(4) $$\sum_{i,k=0}^{3} b_{ik}\, x_i'\, x_k',$$

die in (1), resp. (2), overgaan, als men $x_o = x_o' = 1$ stelt. Hieruit volgt, dat (3) in (4) overgaat door

$$T \qquad \begin{cases} x_o = x_o' \\ x_1 = \quad s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3. \\ x_2 = \quad s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3. \\ x_3 = \quad s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3. \end{cases}$$

Laat E de matrix zijn, die bij (4) hoort, evenals D bij (3). Volgens § 21, st.1, is $E = T^T DT$, dus

$$\det.\ E = (\det.T)^2 \det.D.$$

$\det.T = \det.S = 1$, dus $\det.\ E = \det.\ D$.

Stelling 3. De rang van A en die van D zijn invariant bij assendraaiing.

Bewijs. Dit volgt uit § 7, st.5, in verband met de formules $B=S^T AS$ en $E=S^T DS$.

De gevallen uit § 5 kan men onderscheiden naar de rang van A en van D.

Geval	rang A	rang D.
1a	3	4
1b	3	3
2a	2	4
2b	2	3
2c	2	2
3a	1	3
3b	1	2
3c	1	1

Men kan dus door berekening van de rang uitmaken in welk geval men verkeert. Vervolgens kan men, door gebruik te maken van de invarianten, de coefficienten uit de eenvoudigste vergelijking berekenen.
Voorbeeld. In § 21 vonden wij, dat de kwadriek

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2x - y - 2z + 2 = 0$$

een elliptische paraboloïde is met als eenvoudigste vergelijking

$$x'^2 + 3y'^2 + dz' = 0.$$

$$\text{det. } D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{det. } E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3d^2$$

$-3d^2 = -\frac{1}{4}$. $d = \pm\frac{1}{6}\sqrt{3}$.
(Het teken van d verandert, als men de Z'-as in tegengestelde richting kiest).

§ 24. Bepaling van het middelpunt.

In de voorafgaande paragrafen hebben wij geleerd, de gedaante (blijkende uit de vereenvoudigde vergelijking) van een kwadriek te bepalen, zonder de coördinatentransformatie werkelijk uit te voeren. De stand van het oppervlak in de ruimte is pas bekend, als men weet, hoe het nieuwe assenstelsel ligt ten opzichte van het oude. De richtingen der nieuwe assen worden gegeven door de eigenvectoren van A. Wij behoeven dus nog slechts de nieuwe oorsprong te zoeken. In de gevallen 1a, 1b, 2b, 2c, 3b, 3c is de nieuwe oorsprong een middelpunt van de kwadriek.

<u>Stelling 1.</u> De oorsprong is dan en slechts dan een middelpunt van de kwadriek, als het lineaire gedeelte uit de vergelijking wegvalt.

<u>Bewijs.</u> De vergelijking mag niet veranderen door de substitutie $x_1=-x_1'$, $x_2=-x_2'$, $x_3=-x_3'$.

Laat de vergelijking van de kwadriek zijn

$$(1) \qquad \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\sum_h a_{oh}\, x_h + a_{oo} = 0.$$

Voer de assenverschuiving uit naar het punt :

$$x_1 = x_1' + p_1, \quad x_2 = x_2' + p_2, \; x_3 = x_3' + p_3.$$

$$\sum_{i,k} a_{ik}\,(x_i'+p_i)(x_k'+p_k) + 2\sum_h a_{oh}\,(x_h'+p_h)+a_{oo} = 0.$$

De termen van de eerste graad hieruit zijn:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\; x_i' p_k + \sum_{i,k} a_{ik}\, x_k'\; p_i + 2\sum_h a_{oh}\, x_h'.$$

De eerste twee sommen zijn gelijk (verwissel i met k). Er komt dus:

$$2(a_{11}\,p_1 + a_{12}\,p_2 + a_{13}\,p_3 + a_{10})\,x_1' +$$

$$+\,2(a_{21}\,p_1 + a_{22}\,p_2 + a_{23}\,p_3 + a_{20})\,x_2' +$$

$$+\,2(a_{31}\,p_1 + a_{32}\,p_2 + a_{33}\,p_3 + a_{30})\,x_3'.$$

De nieuwe oorsprong is middelpunt, als

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}\,p_1 + a_{12}\,p_2 + a_{13}\,p_3 + a_{10} = 0 \\ a_{21}\,p_1 + a_{22}\,p_2 + a_{23}\,p_3 + a_{20} = 0 \\ a_{31}\,p_1 + a_{32}\,p_2 + a_{33}\,p_3 + a_{30} = 0. \end{cases}$$

(2), met p_1,p_2,p_3 als onbekenden, heten de middelpuntsvergelijkingen bij (1).

Opgave. Ga met behulp van de tabel uit § 23 het verband na tussen de rang van A en de dimensie van de verzameling der middelpunten.

Opmerking. In de gevallen 2a (paraboloide) en 3a (parabolische cylinder) is er geen middelpunt. Om te laten zien, hoe men in deze gevallen de nieuwe oorsprong vindt, gebruiken wij weer het voorbeeld
$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2x - y - 2z + 2 = 0$.
De X'-as had de richting (0,1,1). Snijd de kwadriek met een lijn in die richting, bijv. $x=0$, $y=\mu$, $z=\mu$. Substitutie geeft $2\mu^2-3\mu+2=0$. Het midden tussen de snijpunten hoort bij $\mu = \frac{3}{4}$, dus is het punt $(0, \frac{3}{4},\frac{3}{4})$. Het vlak door dit punt loodrecht op (0,1,1) is een symmetrievlak: de vergelijking hiervan is $y=z=1\frac{1}{2}$. Evenzo vindt men voor het symmetrievlak loodrecht op (2,-1,1) de vergelijking $2x-y+z= \frac{5}{6}$. De snijlijn van deze twee vlakken snijdt de paraboloide in de nieuwe oorsprong (top van de paraboloide).

Hoofdstuk 6

Algebraïsche krommen en oppervlakken

§25. Algebraïsche krommen (zie am I blz.23-25).

De vergelijking van een algebraïsche kromme van de graad n kan als volgt worden geschreven:

(1) $f_n(x_1,x_2)+f_{n-1}(x_1,x_2)+\ldots+f_1(x_1,x_2)+f_o=0$;

hierin stelt $f_k(x_1,x_2)$ een homogene veelterm van de graad k in x_1 en x_2 voor.

Om de snijpunten van de kromme met de rechte lijn, waarvan de parametervoorstelling luidt $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{a}$, te bepalen, substitueren wij deze parametervoorstelling in (1). Er ontstaat dan een vergelijking van de graad n in λ (tenzij de coefficient van λ^n nul wordt). Hieruit volgt: Een rechte lijn heeft met een kromme van de graad n in het algemeen n snijpunten, mits een snijpunt, behorende bij een r-voudige wortel λ, r-voudig wordt geteld.

De kromme gaat door O, als $f_o=0$. Dit aannemende, snijd ik de kromme met de lijn $l(\vec{x}=\lambda\vec{a})$. Substitutie in (1) geeft

(2) $\lambda^n f_n(a_1,a_2)+\lambda^{n-1} f_{n-1}(a_1,a_2)+\ldots+\lambda f_1(a_1,a_2)=0$.

Ik onderstel, dat $f_1(x_1,x_2)$ niet identiek nul is; dan heeft (2) in het algemeen een enkelvoudige wortel $\lambda=0$; de wortel $\lambda=0$ is alleen meervoudig, als $f_1(a_1,a_2)=0$; dan is $f_1(x_1,x_2)=0$ de vergelijking van l.
Wij formuleren deze resultaten met behulp van de volgende bepalingen en stellingen.

Bepaling 1. P heet een enkelvoudig punt van een algebraische kromme k, als P op k ligt en er lijnen bestaan, die in P een enkelvoudig snijpunt met k hebben.

Bepaling 2. Is P een enkelvoudig punt van k en heeft de lijn r in P een meervoudig snijpunt met k, dan is r een raaklijn in P aan k.

Stelling 1. In een enkelvoudig punt heeft de kromme één raaklijn.

Stelling 2. O is een enkelvoudig punt van de kromme (1), als $f_o=0$, terwijl $f_1(x_1,x_2)$ niet identiek nul is.

Stelling 3. Is O een enkelvoudig punt van de kromme (1), dan is $f_1(x_1,x_2)=0$ de vergelijking van de raaklijn in O aan de kromme.

Bepaling 3. P is een buigpunt van de kromme k, als P een enkelvoudig punt van k is en P meer dan tweevoudig telt als snijpunt van k met de raaklijn in P aan k.

Bepaling 4. Een punt P heet een r-voudig punt van de kromme k, als er lijnen bestaan, waarvoor P als snijpunt met k r-voudig telt, maar geen lijn, waarvoor P minder dan r-voudig telt.

Stelling 4. O is een r-voudig punt van de kromme (1) als $f_o,f_1,\ldots,f_{r-1}$ identiek O zijn, maar f_r niet.

Bepaling 5. Is P een r-voudig punt van de kromme k en telt P meer dan r-voudig als snijpunt van k met de lijn l, dan heet l een raaklijn in P aan k.

Stelling 5. Is O een r-voudig punt van de kromme (1), dan is $f_r(x_1,x_2)=0$ de vergelijking van het stel raaklijnen in O.

Bewijs. Laat $l(\vec{x}=\lambda\vec{a})$ een raaklijn in O zijn; dan is $\lambda=0$ een minstens (r+1)-voudige wortel van (2), dus $f_r(a_1,a_2)=0$; daar f_r homogeen is, geldt $f_r(x_1,x_2)=0$ voor ieder punt van l. Voldoet omgekeerd Q aan $f_r(q_1,q_2)=0$, en is m de lijn OQ, dan is m een raaklijn in O.

Bepaling 6. Een dubbelpunt (tweevoudig punt) met twee verschillende reële raaklijnen heet een knooppunt van de kromme.

Een dubbelpunt met twee complexe raaklijnen heet een geisoleerd punt van de kromme.

Een dubbelpunt met samenvallende raaklijnen heet een keerpunt van de kromme.

Om het gedrag van de kromme in een willekeurig punt P te onderzoeken verplaatsen wij de oorsprong naar P door de coördinatentransformatie

(3) $$x_1 = x_1' + p_1 \quad , \qquad x_2 = x_2' + p_2.$$

Laat de vergelijking van de kromme k zijn $f(x_1,x_2)=0$. Op de nieuwe coördinaten luidt zij

$$f(x_1'+p_1, x_2'+p_2)=0 \quad \text{of}$$

(4) $$f(p_1,p_2)+\left(x_1'\frac{\partial f}{\partial p_1}+x_2'\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)+\left(x_1'^2\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^2}+2x_1'x_2'\frac{\partial^2 f}{\partial p_1\partial p_2}+x_2'^2\frac{\partial^2 f}{\partial p_2^2}\right)+\ldots\ldots = 0.$$

Ligt P op k, dan is $f(p_1,p_2)=0$. Volgens stelling 3 is de vergelijking van de raaklijn in P

(5) $$(x_1-p_1)\frac{\partial f}{\partial p_1}+(x_2-p_2)\frac{\partial f}{\partial p_2}=0.$$

Dit is ook gemakkelijk af te leiden met behulp van de differentiaalrekening.

Uit stelling 4 volgt

Stelling 6. Nodig en voldoende opdat P een meervoudig punt van k is, is dat

(6) $$f(p_1,p_2)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial p_2}=0.$$

Wij keren nu terug tot de snijpunten van de kromme (1) met de lijn $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{a}$.

Bij substitutie worden de termen met λ^n:

$$\lambda^n f_n(a_1,a_2).$$

Nadert $a_2:a_1$ tot een waarde, waarvoor $f_n(a_1,a_2)=0$, dan nadert één der wortels λ tot ∞. De bij deze verhoudingen $a_2:a_1$ behorende richtingen heten de asymptotische richtingen van de kromme (1).

Stelling 7. De asymptotische richtingen van de kromme (1) worden gegeven door $f_n(x_1,x_2)=0$.

Stelling 8. Heeft de lijn l een asymptotische richting van de kromme k, dan heeft l hoogstens n-1 snijpunten met k.

(Men zegt in dit geval, dat een of meer snijpunten van l naar het oneindige verdwenen zijn).

Bepaling 7. Heeft de lijn l n-1 snijpunten met de kromme k, en heeft de lijn m, evenwijdig met l, n-2 snijpunten met k, dan heet m een gewone asymptoot van k.

§26. Toepassing op de kegelsneden.

Laat de vergelijking van de kegelsnede γ zijn

(1) $f(x)\equiv a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{10}x_1+2a_{20}x_2+a_{00}=0.$

Laat P een punt van γ zijn. Volgens §25,(5) is de vergelijking van de raaklijn in P:

$(x_1-p_1)(a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{10})+(x_2-p_2)(a_{12}p_1+a_{22}p_2+a_{20})=0.$

Telt men hierbij $f(p_1,p_2)$ op, wat 0 is, dan vindt men

(2) $a_{11}p_1x_1+a_{12}(p_1x_2+p_2x_1)+a_{22}p_2x_2+a_{10}(x_1+p_1)+a_{20}(x_2+p_2)+a_{00}=0.$

De asymptotische richtingen worden gegeven door

(3) $$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2=0.$$

Er zijn drie gevallen:

I. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. (3) heeft complexe wortels. Ellips of nuldelige kegelsnede.

II. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. (3) heeft twee reële wortels. Hyperbool.

III. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$. (3) heeft samenvallende wortels. Parabool.

In geval II zijn de asymptotische richtingen loodrecht op elkaar, wanneer het product der wortels van (3) gelijk is aan -1. Dit is zo, als $a_{11}+a_{22}=0$.

Stelling. (1) stelt een orthogonale hyperbool voor, als $a_{11}+a_{22}=0$.

§27. Algebraische oppervlakken.

De vergelijking van een algebraisch oppervlak van de graad n luidt

(1) $f_n(x_1,x_2,x_3)+f_{n-1}(x_1,x_2,x_3)+\ldots+f_1(x_1,x_2,x_3)+f_o=0$;

hierin stelt $f_k(x_1,x_2,x_3)$ een homogene veelterm van de graad k in x_1,x_2,x_3 voor.

De snijpunten met een rechte lijn $\vec{x}=\vec{p}+\lambda\vec{a}$ worden bepaald als bij een algebraische kromme.

De bepalingen van een enkelvoudig punt en van een raaklijn in een enkelvoudig punt zijn gelijkluidend met die bij een algebraische kromme (§25, bep.1 en 2).

O ligt op het oppervlak, als $f_o=0$. Snijd nu met de lijn $l(\vec{x}=\lambda\vec{a})$. Substitutie in (1) geeft

(2) $\lambda^n f_n(a_1,a_2,a_3)+\ldots+\lambda f_1(a_1,a_2,a_3)=0$.

Neem aan, dat $f_1(x_1,x_2,x_3)$ niet identiek 0 is; dan is O een enkelvoudig punt.

Stelling 1. De raaklijnen in O vormen het vlak $f_1(x_1,x_2,x_3)=0$.

Bewijs. Is $l(\vec{x}=\lambda\vec{a})$ een raaklijn in O, dan is $f_1(a_1,a_2,a_3)=0$; daar f_1 homogeen is, geldt dan $f_1(x_1,x_2,x_3)=0$ voor ieder punt van l. Omgekeerd: is $f_1(q_1,q_2,q_3)=0$, dan is OQ een raaklijn in O.

Bepaling. De meetkundige plaats der raaklijnen in een enkelvoudig punt aan het oppervlak heet het raakvlak in dat punt aan het oppervlak.

Stelling 2. Is P een enkelvoudig punt van het oppervlak $T(f(x_1,x_2,x_3)=0)$, dan is de vergelijking van het raakvlak in P

(3) $(x_1-p_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_2-p_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}+(x_3-p_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$.

Bewijs. Analoog met de afleiding van §25, (5).

§28. Toepassing op de kwadrieken.

Laat de vergelijking van de kwadriek Γ zijn

$$f(x)\equiv\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\,x_i\,x_k+\sum_{l=1}^{3} a_{ol}\,x_l+a_{00}=0,$$

en laat P een punt van Γ zijn.

Op analoge wijze als §26, (2) leidt men af, dat de vergelijking van het raakvlak in P van Γ luidt

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\,p_i\,x_k+\sum_{l=1}^{3} a_{ol}(x_l+p_l)+a_{00}=0.$$

Hoofdstuk 7.

Meetkundige plaatsen

§29. Meetkundige plaatsen in het platte vlak.

Een vraagstuk, waarin een meetkundige plaats in het platte vlak wordt gevraagd, kan dikwijls teruggebracht worden tot een vraagstuk van de volgende vorm:

Gegeven zijn twee stelsels krommen $f(x_1,x_2,\lambda)=0$ en $g(x_1,x_2,\lambda)=0$. Gevraagd wordt de meetkundige plaats van de snijpunten van overeenkomstige (bij dezelfde waarde van λ behorende) krommen uit beide stelsels.

Algebraisch wil dit zeggen: De voorwaarde te zoeken, waaraan x_1 en x_2 moeten voldoen, opdat de vergelijkingen $f(x_1,x_2,\lambda)=0$ en $g(x_1,x_2,\lambda)=0$ een gemeenschappelijke oplossing voor λ hebben. De gevraagde meetkundige plaats wordt dus gevonden, door λ uit die twee vergelijkingen te elimineren.

In de ruimte doen zich analoge gevallen voor. Hier volgen enkele voorbeelden.

§ 30. Regelvlakken.

Een regeloppervlak kan worden gegeven door de parametervoorstelling

(1) $$\vec{x} = \vec{p}(\lambda) + \mu\vec{a}(\lambda).$$

$\vec{x} = \vec{p}(\lambda)$ stelt een richtkromme van het oppervlak voor.

Laat een ruimtekromme k gegeven zijn als snijlijn van twee oppervlakken:

(2) $$f(x_1,x_2,x_3) = 0\ , \qquad g(x_1,x_2,x_3) = 0.$$

Beschouw een lijn l met de parametervoorstelling

(3) $$\vec{x} = \vec{q} + \lambda\vec{b}.$$

De voorwaarde, opdat l en k een punt gemeen hebben, vindt men, door (3) in (2) te substitueren en daarna λ te elimineren. Er ontstaat dan een betrekking tussen $\vec{q}$ en $\vec{b}$.

De ruimtekromme k kan ook gegeven zijn door een parametervoorstelling:

(4) $$\vec{x} = \vec{v}(\mu).$$

Nu vinden wij de voorwaarde, opdat l en k een punt gemeen hebben, door uit

$$\vec{q} + \lambda\vec{b} = \vec{v}(\mu)$$

λ en μ te elimineren. Er ontstaat weer een betrekking tussen $\vec{q}$ en $\vec{b}$.

Laat nu drie richtkrommen k_1,k_2,k_3 gegeven zijn. Door te eisen, dat l deze drie krommen snijdt, vinden wij drie betrekkingen tussen $\vec{q}$ en $\vec{b}$. Uit deze betrekkingen kunnen wij de verhoudingen van b_1,b_2,b_3 elimineren, zodat een betrekking tussen q_1,q_2,q_3 overblijft. Vervangt men hierin q_1,q_2,q_3 door lopende coördinaten, dan vindt men de vergelijking van het regelvlak met k_1,k_2,k_3 als richtkrommen.

Een belangrijk bijzonder geval is, dat k_1 een rechte lijn is. Dan brengen wij door k_1 een veranderlijk vlak $\alpha + \lambda\beta = 0$. De snijpunten met k_2 en k_3 zijn $P(\lambda)$ en $Q(\lambda)$. De lijn PQ is

$$\vec{x} = \vec{p}(\lambda) + \mu(\vec{q}(\lambda) - \vec{p}(\lambda)).$$

Dit is al een parametervoorstelling van het gevraagde regelvlak. Door eliminatie van λ en μ vindt men de vergelijking van het oppervlak.

§ 31. Cylinders en kegels.

De algemene parametervoorstelling van een cylinder is

(5) $$\vec{x} = \vec{p}(\lambda) + \mu\vec{a}.$$

$\vec{x} = \vec{p}(\lambda)$ is een richtkromme.

De algemene parametervoorstelling van een kegel is

(6) $$\vec{x} = \vec{p} + \mu\vec{a}(\lambda).$$

$P(\vec{p})$ is de top van de kegel.

Laat gevraagd zijn de vergelijking van de kegel met top P en richtkromme (2). Wij substitueren in (2) $\vec{x} = \vec{p} + \mu\vec{a}$ en elimineren μ. In het resultaat substitueren wij $\vec{x}-\vec{p}$ voor $\vec{a}$. Zo ontstaat de gevraagde vergelijking.

§ 32. Omwentelingsoppervlakken.

Het geval, dat de omwentelingsas met de X_3-as samenvalt, is in § 17 behandeld. Laat nu de as gegeven zijn door $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a}$, en een richtkromme door (2). Een parallelcirkel is de doorsnijding van een vlak loodrecht op de as met een bol om P:

(7) $$\vec{a}.\vec{x} = c, \quad (\vec{x}-\vec{p})^2 = r^2.$$

Eliminatie van $\vec{x}$ uit (2) en (7) geeft $\varphi(r^2,c)=0$.
De gevraagde vergelijking is $\varphi((\vec{x}-\vec{p})^2, \vec{a}.\vec{x})=0$.

Hoofdstuk 8

Orthogonale invarianten van een kwadriek

§33. <u>De invarianten I_1 en I_2</u>. Stelling 1 uit §19 luidde: Door de coördinatentransformatie S gaat $\sum a_{ik} x_i x_k$ over in $\sum b_{ik} x_i' x_k'$, waarin $B=S^T AS$.

Hier is S een orthogonale matrix, dus $S^T=S^{-1}$. In §16, stelling 3 is bewezen, dat uit $B=S^{-1}AS$ volgt det $(B-\lambda I)=$ det $(A-\lambda I)$.

Nu is

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-(m_{11}+m_{22}+m_{33})\lambda + \det. A = 0.$$

Hierin stelt m_{ik} de minor van a_{ik} in A voor. Uit bovengenoemde stelling volgt nu:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=b_{11}+b_{22}+b_{33}$$

$$m_{11}+m_{22}+m_{33}=m_{11}'+m_{22}'+m_{33}'$$

$$\det. A = \det. B \text{ (§ 23, stelling 1).}$$

Wij stellen $a_{11}+a_{22}+a_{33}=I_1$, $m_{11}+m_{22}+m_{33}=I_2$.

<u>Stelling 1</u>. I_1 en I_2 zijn invariant bij coördinatentransformatie.

Vermenigvuldigt men alle a_{ik} met c, dan wordt I_1 met c en I_2 met c^2 vermenigvuldigd. De waarden van I_1 en I_2 hebben dus geen meetkundige betekenis; de vergelijkingen $I_1=0$ en $I_2=0$ wel.

§34. <u>Meetkundige betekenis van $I_1=0$.</u>

<u>Stelling 1</u>. Als de kegel $\sum a_{ik}x_i x_k=0$ drie onderling loodrechte beschrijvenden bevat, dan is $I_1=0$.

<u>Bewijs</u>. Neem de drie onderling loodrechte beschrijvenden als nieuwe coördinaatassen. De vergelijking van de kegel wordt $\sum b_{ik}x_i'x_k'=0$. Hieraan is voldaan door $x_1'=x_2'=0$, dus $b_{33}=0$. Evenzo blijkt $b_{11}=b_{22}=0$, dus $I_1=0$.

<u>Stelling 2.</u> Als $I_1=0$, dan bevat de kegel $\sum a_{ik}x_i x_k=0$ oneindig veel stellen van drie onderling loodrechte beschrijvenden.

<u>Bewijs</u>. Kies een willekeurige beschrijvende van de kegel als X_1'-as van een rechthoekig coördinatenstelsel. Laat de vergelijking op de nieuwe coördinaten zijn $\sum b_{ik}x_i'x_k'=0$; dan is $b_{11}=0$, $I_1=0$, dus $b_{22}+b_{33}=0$. De doorsnede van de kegel met het vlak $x_1'=0$ is $b_{22}x_2'^2+2b_{23}x_2'x_3'+b_{33}x_3'^2=0$. Daar $b_{22}+b_{33}=0$, stelt dit twee onderling loodrechte lijnen voor. Samen

met de X_1'-as vormen zij een stel van drie onderling loodrechte beschrijvenden.

Stelling 3. Bevat een kegel een stel van drie onderling loodrechte beschrijvenden, dan bevat hij oneindig veel zulke stellen.
Dit volgt uit stelling 1 en stelling 2.

§35. Meetkundige betekenis van $I_2=0$.

Stelling 1. Laat $\sum a_{ik}x_ix_k=0$ de vergelijking zijn van kegel K. De loodlijnen, in O opgericht op de raakvlakken van K, vormen een kegel K' met vergelijking $\sum m_{ik}x_ix_k=0$.
Bewijs. Het raakvlak in P aan K heeft de vergelijking $\sum a_{ik}p_ix_k=0$; hierbij is $\sum a_{ik}p_ip_k=0$. Voor een punt op de loodlijn geldt $x_k= =\lambda\sum a_{ik}p_i$, dus $p_i=\frac{1}{\lambda^3 \det A}\sum_k m_{ik}x_k$. (zie §7).

$$p_i=\mu\sum_k m_{ik}x_k.$$

Substitueer dit in $\sum a_{ik}p_ip_k=0$:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\sum_h m_{ih}x_h\sum_l m_{kl}x_l=0.$$

Nu is $\sum_i a_{ik}m_{ih}=0$ voor $k\neq h$ en det A voor $k=h$. Er komt dus

$$\det A\sum_{k,l} m_{kl}x_kx_l=0.$$

Stelling 2. Als de kegel K ($\sum a_{ik}x_ix_k=0$) drie onderling loodrechte raakvlakken heeft, dan is $I_2=0$.
Bewijs. K' heeft drie onderling loodrechte ribben, dus $m_{11}+m_{22}+m_{33}=0$.

Stelling 3. Als $I_2=0$, dan heeft K oneindig veel stellen van drie onderling loodrechte raakvlakken.
Bewijs. $m_{11}+m_{22}+m_{33}=0$, dus K' heeft oneindig veel stellen van drie onderling loodrechte beschrijvenden.
Stelling 4. Heeft een kegel een stel van drie onderling loodrechte raakvlakken, dan heeft hij oneindig veel zulke stellen.

Hoofdstuk 9

Projectieve meetkunde

§36. Oneigenlijke punten.

In de vlakke euclidische meetkunde geldt algemeen:
V I Door twee verschillende punten gaat een en slechts een rechte lijn, maar niet algemeen:
V II Twee verschillende rechte lijnen hebben een en slechts een punt gemeen.
Om II algemeen geldig te maken, voegen wij aan elke bundel evenwijdige lijnen een oneigenlijk punt toe. Bovendien beschouwen wij de verzame-

ling der oneigenlijke punten als de oneigenlijke rechte lijn. Door alle mogelijke gevallen na te gaan, ziet men gemakkelijk in, dat II nu algemeen geldt.

Evenzo voegen wij in de ruimte aan iedere schoof van evenwijdige lijnen (d.w.z. de verzameling van alle lijnen, die evenwijdig zijn met een gegeven lijn) een oneigenlijk punt toe. De oneigenlijke punten van alle lijnen in een vlak vormen de oneigenlijke rechte lijn van dat vlak. Hieruit volgt, dat de oneigenlijke rechten van evenwijdige vlakken samenvallen. Alle oneigenlijke punten vormen het oneigenlijke vlak. De volgende eigenschappen gelden nu algemeen:

R I. Door twee verschillende punten gaat een en slechts een rechte lijn.

R II. Door een lijn en een punt buiten die lijn gaat een en slechts een vlak.

R III. Een vlak en een lijn, die niet in dat vlak ligt, hebben een en slechts een punt gemeen.

R IV. Twee verschillende vlakken hebben een en slechts een lijn gemeen.

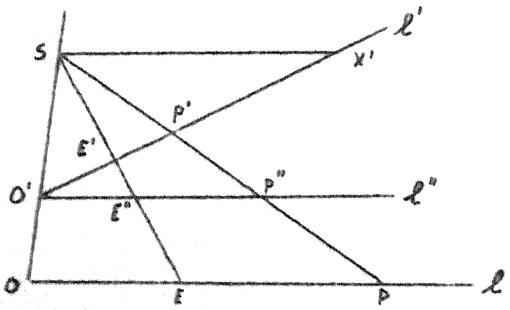
Ook dit ziet men gemakkelijk in door alle mogelijke gevallen na te gaan.

Laat x en y Cartesische coördinaten zijn. Stel $x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$, dan is een punt bepaald door de verhouding van x_0,x_1,x_2; deze heten daarom homogene coördinaten. Aan het oneigenlijke punt van de lijn $ax+by=0$ geven wij de homogene coördinaten $(0,b,-a)$. De lijn $ax+by+c=0$ heeft in homogene coördinaten de vergelijking $ax_1+bx_2+cx_0=0$; hieraan voldoet ook het oneigenlijke punt van die lijn. De vergelijking van de oneigenlijke lijn is $x_0=0$.

§37. Dubbelverhoudingen.

In het platte vlak projecteer ik de punten van l uit S op l'. Het oneigenlijke punt van l is X; de projectie van X is X'. Nu is

$$(1)\qquad \frac{OP}{OE}=\frac{O'P'}{O'E'}:\frac{X'P'}{X'E'}.$$



Bewijs. Trek l", door O', // l.

$$\frac{OP}{OE}=\frac{O'P''}{O'E''}.$$

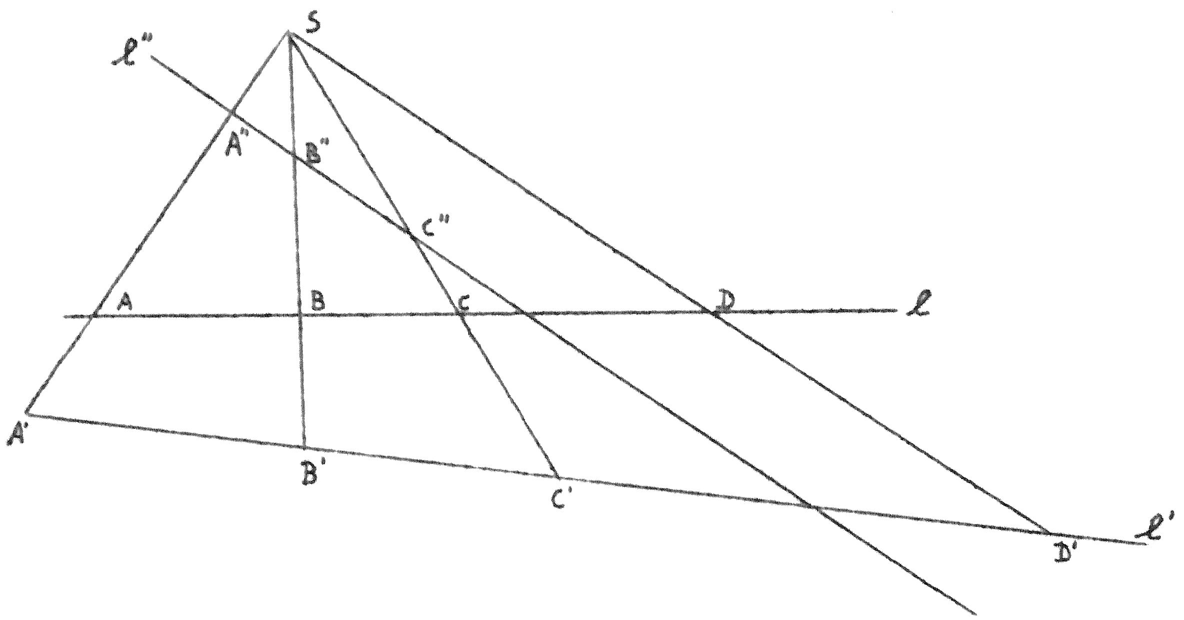
$$\frac{O'P''}{X'S}=\frac{O'P'}{X'P'}.$$

$$\frac{O'E''}{X'S}=\frac{O'E'}{X'E'}.$$

Door deling van de laatste twee formules vindt men het gevraagde.

Bepaling 1. Het rechterlid van (1) heet de dubbelverhouding van P',E',O',X' en wordt geschreven (P'E'O'X').

Stelling 1. De dubbelverhouding van vier punten is invariant bij centrale projectie.



Bewijs. Zie de figuur. Te bewijzen is: (ABCD)=(A'B'C'D').
Trek $l''/\!/ SD$. Volgens (1) is

$$(ABCD) = \frac{C''A''}{C''B''} \text{ en } (A'B'C'D') = \frac{C''A''}{C''B''} .$$

Bepaling 2. De dubbelverhouding van vier lijnen door een punt of van vier evenwijdige lijnen is gelijk aan de dubbelverhouding van de vier punten, waarin zij door een willekeurige lijn worden gesneden.

Bepaling 3. De dubbelverhouding van vier oneigenlijke punten A,B,C,D is gelijk aan de dubbelverhouding van de vier lijnen, die een willekeurig punt S met A,B,C,D verbinden.
Men ziet gemakkelijk in, dat deze dubbelverhouding niet afhangt van de keuze van S.

Stelling 2. Zijn de vergelijkingen van de lijnen a,b,l,m achtereenvolgens $l_1=0$, $l_2=0$, $\lambda_1 l_1+\mu_1 l_2=0$, $\lambda_2 l_1+\mu_2 l_2=0$, dan is $(lmab)=\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Bewijs. Geval 1. De lijnen gaan door een punt. Kies het coördinatenstelsel zo, dat de vergelijkingen van a en b zijn: $x=0$ en $y=0$, dus van l en m, $\lambda_1 x+\mu_1 y=0$ en $\lambda_2 x+\mu_2 y=0$. Door snijden met $y=1$ ontstaan de punten

$$L\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_1}, 1\right),\ M\left(-\frac{\mu_2}{\lambda_2}, 1\right),\ A(0,1),\ B \text{ (oneigenlijk)}.$$

$$(lmab)=(LMAB) = \frac{AL}{AM} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} .$$

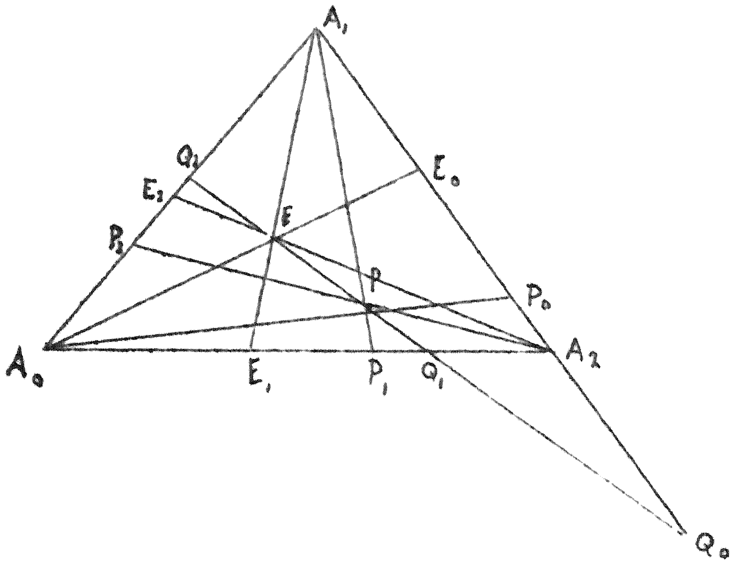
Geval 2. De lijnen zijn evenwijdig. Kies het coördinatenstelsel zo, dat de vergelijkingen van a,b,l,m zijn $y=0$, $y=1$, $\lambda_1 y+\mu_1(y-1)=0$, $\lambda_2 y+\mu_2(y-1)=0$. Snijd met $X=0$ en bereken de dubbelverhouding der snijpunten.

Geval 3. b is de oneigenlijke rechte. Kies het coördinatenstelsel zo, dat de vergelijkingen van a,b,l,m zijn $x_2=0$, $x_o=0$, $\lambda_1 x_2+\mu_1 x_o=0$,

$\lambda_2 x_2 + \mu_2 x_0 = 0$.
Bereken de dubbelverhouding der snijpunten met $x_1=0$.
Stelling 3. Zijn A,B,C,D vier punten van een lijn, dan is (ABCD)=(CDAB).
Bewijs. Direct uit bepaling 1.

§38. Driehoekscoördinaten.

Laat $A_0A_1A_2$ een driehoek zijn, E een punt buiten de zijden van die driehoek, en P een willekeurig punt. De projectie van E en P uit A_k op de overstaande zijde noemen wij E_k en P_k (k=0,1,2).



Stelling 1. $(P_0E_0A_1A_2)(P_1E_1A_2A_0)(P_2E_2A_0A_1)=1$.

Bewijs. PE snijdt A_1A_2 in Q_0, A_2A_0 in Q_1, A_0A_1 in Q_2.

Volgens §37, stelling 1, is

$$(P_0E_0A_1A_2) = (PEQ_2Q_1) = \frac{Q_2P}{Q_2E} : \frac{Q_1P}{Q_1E}.$$
$$(P_1E_1A_2A_0) = (PEQ_0Q_2) = \frac{Q_0P}{Q_0E} : \frac{Q_2P}{Q_2E}.$$
$$(P_2E_2A_0A_1) = (PEQ_1Q_0) = \frac{Q_1P}{Q_1E} : \frac{Q_0P}{Q_0E}.$$

Door vermenigvuldiging vindt men het gevraagde.

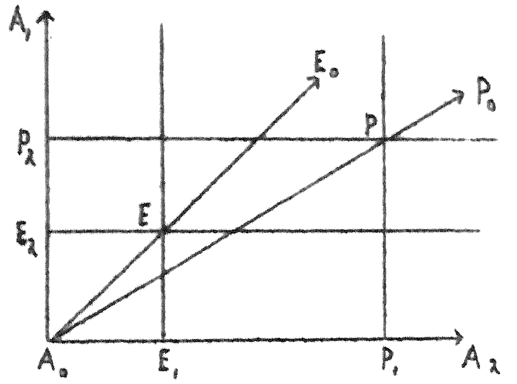
Wij nemen nu driehoek $A_0A_1A_2$ als coördinatendriehoek en E als eenheidspunt van het coördinatenstelsel $A_0A_1A_2E$. Uit stelling 1 volgt, dat men drie getallen p_0,p_1,p_2 kan vinden, die voldoen aan

$$(1) \qquad \frac{p_2}{p_1} = (P_0E_0A_1A_2),\ \frac{p_0}{p_2} = (P_1E_1A_2A_0),\ \frac{p_1}{p_0} = (P_2E_2A_0A_1).$$

Bepaling 1. Drie getallen p_0,p_1,p_2, die aan (1) voldoen, heten een stel coördinaten van P in het stelsel $A_0A_1A_2E$.

Opmerking 1. Door P is alleen de verhouding van p_0, p_1, p_2 bepaald. Men noemt deze coördinaten daarom homogene coördinaten.

Opmerking 2. Cartesische coördinaten zijn een bijzonder geval van driehoekscoördinaten. A_1 en A_2 zijn hier oneigenlijke punten en $p_0=1$. $p_1=(P_2E_2A_0A_1)=\frac{A_0P_2}{A_0E_2}$.



Evenzo voor p_2.

Wij zoeken nu het verband tussen de homogene Cartesische coördinaten (x_0, x_1, x_2) en de driehoekscoördinaten (x_0', x_1', x_2'). Ik noem A_1A_2 ook l_0, enz. Laat $a_ix_0+b_ix_1+c_ix_2=0$ de vergelijking van l_i zijn $(i=0,1,2)$.

Dan zijn de vergelijkingen van A_0E en A_0P:

$$(a_2e_0+b_2e_1+c_2e_2)(a_1x_0+b_1x_1+c_1x_2)-(a_1e_0+b_1e_1+c_1e_2)(a_2x_0+b_2x_1+c_2x_2)=0.$$

$$(a_2p_0+b_2p_1+c_2p_2)(a_1x_0+b_1x_1+c_1x_2)-(a_1p_0+b_1p_1+c_1p_2)(a_2x_0+b_2x_1+c_2x_2)=0.$$

Volgens §37, stelling 2, is dus

$$(A_0P,\ A_0E,\ l_1, l_2) =$$

$$= -\frac{a_1p_0+b_1p_1+c_1p_2}{a_2p_0+b_2p_1+c_2p_2} : -\frac{a_1e_0+b_1e_1+c_1e_2}{a_2e_0+b_2e_1+c_2e_2};$$

dezelfde dubbelverhouding is gelijk aan $(P_0E_0A_2A_1)=\frac{p_1'}{p_2'}$.

Stel ik $\frac{1}{a_ie_0+b_ie_1+c_ie_2}=f_i$, dan is

$$\begin{cases} \lambda p_0'=a_0p_0+b_0p_1+c_0p_2, \\ \lambda p_1'=a_1p_0+b_1p_1+c_1p_2, \\ \lambda p_2'=a_2p_0+b_2p_1+c_2p_2. \end{cases}$$

De coördinatentransformatie is dus homogeen lineair; $\lambda x'=Sx$. Daar ze een-eenduidig is, is det. $S\neq0$. $\mu x=S^{-1}x'$.

Stelling 2. De vergelijking van een rechte lijn in driehoekscoördinaten is homogeen lineair.

Bewijs. Voer in de vergelijking op homogene Cartesische coördinaten, $d_0x_0+d_1x_1+d_2x_2=0$, de coördinatentransformatie uit; dan ontstaat weer een homogene lineaire vergelijking.

Stelling 3. De vergelijking van PQ in driehoekscoördinaten is

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bewijs. De vergelijking stelt een rechte lijn voor, die door P en door Q gaat.

Stelling 4. De parametervoorstelling van PQ in driehoekscoördinaten is $x_i = \lambda p_i + \mu q_i$.

Bewijs. Opdat X op PQ ligt, moeten de rijen van de determinant uit stelling 3 afhankelijk zijn.

Stelling 5. Is $r_i = \lambda_1 p_i + \mu_1 q_i$, $s_i = \lambda_2 p_i + \mu_2 q_i$, dan is (PQRS) $= \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Bewijs. Laat T een punt buiten PQ zijn. De vergelijkingen van TP, TQ, TR zijn

$$l \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad m \equiv \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ of } \lambda_1 l + \mu_1 m = 0.$$

Evenzo is de vergelijking van TR, $\lambda_2 l + \mu_2 m = 0$.

Dus (PQRS) = (TP,TQ,TR,TS) $= \dfrac{\mu_1}{\lambda_1} : \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Stelling 6. Is $p_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 b_i$, $q_i = \lambda_2 a_i + \mu_2 b_i$, $r_i = \lambda_3 a_i + \mu_3 b_i$, $s_i = \lambda_4 a_i + \mu_4 b_i$, dan is

$$(PQRS) = \frac{\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3}{\lambda_2\mu_3 - \mu_2\lambda_3} : \frac{\lambda_1\mu_4 - \mu_1\lambda_4}{\lambda_2\mu_4 - \mu_2\lambda_4}.$$

Bewijs. Stel $\lambda_i\mu_k - \lambda_k\mu_i = \delta_{ik}$.

Uit $p_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 b_i$, $q_i = \lambda_2 a_i + \mu_2 b_i$ volgt

$\delta_{12} a_i = \mu_2 p_i - \mu_1 q_i$. $\delta_{12} b_i = -\lambda_2 p_i + \lambda_1 q_i$.

$r_i = \lambda_3 a_i + \mu_3 b_i = -\dfrac{\delta_{23}}{\delta_{12}} p_i + \dfrac{\delta_{13}}{\delta_{12}} q_i$

$s_i = \lambda_4 a_i + \mu_4 b_i = -\dfrac{\delta_{24}}{\delta_{12}} p_i + \dfrac{\delta_{14}}{\delta_{12}} q_i$.

$d = (PQRS) = \dfrac{\delta_{13}}{\delta_{23}} : \dfrac{\delta_{14}}{\delta_{24}}$ (stelling 5).

Opmerking. Is P=Q of (en) R=S, dan is d=1.
Is P=R of (en) Q=S, dan is d=0.
Is P=S of (en) Q=R, dan is $d=\infty$.

Vallen drie der punten samen, dan is d onbepaald.

§39. De zes waarden der dubbelverhouding. Harmonische paren.

Laat $r_i = \lambda_3 p_i + \mu_3 q_i$ en $s_i = \lambda_4 p_i + \mu_4 q_i$ zijn.

$(PQRS) = \frac{\mu_3}{\lambda_3} : \frac{\mu_4}{\lambda_4}$. Uit §38, stelling 6 volgt nu, dat

$(QPRS) = \frac{1}{d}$. $(PRQS) = 1-d$.

Vormen wij de 24 permutaties van de vier punten, dan ontstaan 24 dubbelverhoudingen, die vier aan vier gelijk zijn.

$(PQRS) = (RSPQ) = (QPSR) = (SRQP) = d.$
$(QPRS) = (RSQP) = (PQSR) = (SRPQ) = \frac{1}{d}.$
$(PRQS) = (QSPR) = (RPSQ) = (SQRP) = 1-d.$
$(PRSQ) = (SQPR) = (RPQS) = (QSRP) = \frac{1}{1-d}.$
$(QRPS) = (PSQR) = (RQSP) = (SPRQ) = \frac{d-1}{d}.$
$(RQPS) = (PSRQ) = (QRSP) = (SPQR) = \frac{d}{d-1}.$

Als twee der punten samenvallen, dus als $d=0$, 1 of ∞, dan zijn twee der zes waarden gelijk. Wij gaan nu na, of nog op andere wijze twee der zes waarden gelijk kunnen worden.

$d = \frac{1}{d}$ geeft $d = \pm 1$.

Bepaling 1. Als $(PQRS) = -1$, heten de puntenparen PQ en RS harmonisch.

De zes waarden zijn nu $-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$.

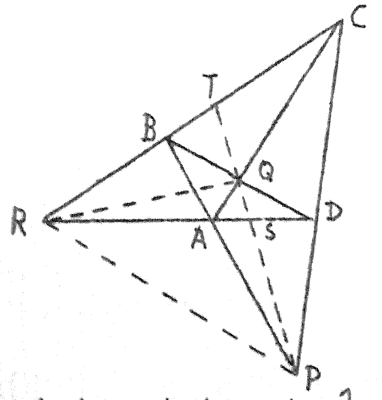
$d = \frac{1}{1-d}$ geeft $d = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. $d = 1-d$ geeft $d = \frac{1}{2}$.

De zes waarden zijn drie aan drie gelijk. Bij reële punten kan dit niet voorkomen.

$d = \frac{d-1}{d}$ geeft $d = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

$d = \frac{d}{d-1}$ geeft $d=0$ of $d=2$.

Bepaling 2. Een volledige vierhoek bestaat uit vier punten, waarvan geen drie op een lijn liggen, met hun zes verbindingslijnen. De drie snijpunten van overstaande zijden heten diagonaalpunten, de drie verbindingslijnen van diagonaalpunten heten diagonalen.



Stelling 1. Twee diagonalen van een volledige vierhoek liggen harmonisch met de twee zijden door hetzelfde diagonaalpunt.

Bewijs. Te bewijzen is:

$(QP, QR, QA, QD) = -1$, of $(SRAD) = -1$.

Projecteer uit P op CB en terug uit Q op AD.

$d = (SRAD) = (TRBC) = (SRDA) = \frac{1}{d}$.

$d \neq 1$, want $S \neq R$ en $A \neq D$, dus $d = -1$.

§40. Poolverwantschap bij kegelsneden.

De vergelijking van een kegelsnede γ op driehoekscoördinaten luidt:

(1) $f(x) \equiv a_{00}x_0^2+a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{02}x_0x_2+2a_{01}x_0x_1=0$

of $\sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x_ix_k=0$. $(a_{ik}=a_{ki})$.

De snijpunten van γ met de lijn $PQ(x_i=\lambda p_i+\mu q_i)$ volgen uit

$$\sum a_{ik}(\lambda p_i+\mu q_i)(\lambda p_k+\mu q_k)=0.$$

$$\lambda^2 \sum a_{ik}\, p_ip_k+2\lambda\mu\sum a_{ik}p_iq_k+\mu^2\sum a_{ik}q_iq_k=0.$$

(2) $\lambda^2 f(p) + 2\lambda\mu f(p;q) +\mu^2 f(q)=0$.

Hierin is $f(p;q)=\sum a_{ik}p_iq_k=\frac{1}{2}\sum p_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum q_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$.

Zijn S_1 en S_2 de snijpunten van PQ met γ, dan is $S_1=\lambda_1P+\mu_1Q$, $S_2=\lambda_2 P+\mu_2Q$, waarin $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ en $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ de wortels van (2) zijn. S_1S_2 is harmonisch met PQ, als $\frac{\mu_1}{\lambda_1} : \frac{\mu_2}{\lambda_2} =-1$, dus $\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} = 0$, dus $f(p;q)=0$.

Bepaling 1. P en Q heten poolverwant t.o.v. γ, als $f(p;q)=0$.

Stelling 1. Zijn P en Q verschillend en snijdt PQ de kegelsnede γ in twee verschillende punten S_1 en S_2, dan zijn P en Q dan en slechts dan poolverwant, als PQ harmonisch is met S_1S_2.

Stelling 2. De meetkundige plaats van de punten, die poolverwant zijn met P, is de rechte lijn $f(p;x)=0$.

Bepaling 2. Deze rechte lijn heet de poollijn van P.

Stelling 3. Ligt Q op de poollijn van P, dan ligt P op de poollijn van Q.

Bewijs. Dit volgt uit $f(q;p)=f(p;q)$.

Stelling 4. Ligt P op γ, dan is de poollijn van P tevens de raaklijn in P aan γ.

Bewijs. Als P op γ ligt, is in (2) $f(p)=0$. Een wortel van (2) is dus $\mu=0$. Er is een tweede wortel $\mu=0$, als $f(p;q)=0$. Dit is dus de voorwaarde, opdat Q op de raaklijn in P ligt. De vergelijking van de raaklijn is dus $f(p;x)=0$.

§ 41. Toepassingen van de pooltheorie.

I. PQ is een raaklijn aan γ, als de wortels van (2) gelijk zijn, dus als

$$f^2(p;q) - f(p)\,f(q) = 0.$$

De vergelijking

$$f^2(p;x) - f(p)\,f(x) = 0$$

stelt dus de beide raaklijnen uit P aan γ voor.

II. Laat P een punt zijn, dat niet op γ ligt; p de poollijn van P; Q een punt op p, maar niet op γ. De poollijn q van Q gaat door P en snijdt p in R. Driehoek PQR heeft de eigenschap, dat iedere zijde de poollijn is van het overstaande hoekpunt. Een dergelijke driehoek heet een <u>pooldriehoek</u> van γ.

Is de coördinatendriekhoek een pooldriehoek, dan heeft de vergelijking van γ de vorm

$$a_{oo}x_o^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 = 0.$$

III. De poollijn van een oneigenlijk punt A gaat door de middens van alle koorden, die γ afsnijdt op koorden door A, en door de raakpunten van de raaklijnen uit A. Deze koorden en raaklijnen zijn evenwijdig. De poollijn van A heet de <u>toegevoegde</u> <u>middellijn</u> van de richting, door A bepaald.

Alle middellijnen gaan door een punt, namelijk de pool M van de oneigenlijke rechte l.

Geval 1. l raakt niet aan γ. Dan is M een eigenlijk punt, het <u>middelpunt</u> van γ. Alle middellijnen gaan door M. γ heet een middelpuntskegelsnede.

Geval 2. l raakt aan γ. Dan is M een oneigenlijk punt, namelijk het raakpunt van l met γ. Alle middellijnen zijn evenwijdig. γ is een parabool.

<u>Middelpuntskegelsneden</u>. Laat M het middelpunt van γ zijn; A een oneigenlijk punt; a de toegevoegde middellijn, behorende bij de lijnen door A; B het oneigenlijke punt van a. MAB is een pooldriehoek van γ. MA en MB zijn <u>toegevoegde</u> <u>middellijnen</u> van γ, MA deelt de koorden, die evenwijdig zijn met MB, middendoor; MB deelt de koorden, die evenwijdig zijn met MA, middendoor.

Kiest men MA en MB als coördinatenassen (scheefhoekig coördinatenstelsel), dan wordt de vergelijking van γ :

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2=1.$$

De assenvergelijking is hiervan een bijzonder geval.

Wij bepalen nu de betrekking tussen de richtingscoefficienten van toegevoegde middellijnen bij ellips en hyperbool op hun eenvoudigste vergelijking bij cartesische coördinaten:

Ellips. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ of $b^2x_1^2+a^2x_2^2-a^2b^2x_0^2=0$.

Middellijn $y=mx$ met oneigenlijk punt $A(0,1,m)$.

Poollijn van A: $b^2x_1+a^2mx_2=0$, of $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$.

Richtingscoefficient $m'=-\frac{b^2}{a^2m}$.

(1) $$m\,m'=-\frac{b^2}{a^2}\,.$$

Hyperbool. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, of $b^2x_1^2-a^2x_2^2-a^2b^2x_0^2=0$.

Evenals bij de ellips vindt men: Zijn m en m' de richtingscoefficienten van toegevoegde middellijnen, dan is

(2) $$m\,m'=\frac{b^2}{a^2}\,.$$

Parabool. Alle middellijnen zijn evenwijdig. De as is een van de middellijnen.

$$y^2=2px \quad \text{of} \quad 2px_0x_1-x_2^2=0.$$

Stelsel evenwijdige koorden $y=mx+q$, met oneigenlijk punt $A(0,1,m)$.

Poollijn van A: $px_0-mx_2=0$, of $y=\frac{p}{m}$.

Ontaarde kegelsneden.

Laat γ ontaard zijn in l en m, die elkaar in S snijden. Kies de coördinatendriehoek zo, dat de vergelijking van γ wordt $x_1x_2=0$; dan is $S=(1,0,0)$. De poollijn van $P(p_0,p_1,p_2)$ is $p_1x_2+p_2x_1=0$, dus gaat door S. S is poolverwant met ieder punt. Van iedere pooldriehoek is S een hoekpunt. Is γ ontaard in twee in l samenvallende lijnen, dan kiezen wij het coördinatenstelsel zo, dat de vergelijking van γ wordt $x_2^2=0$.

De poollijn van $P(p_0,p_1,p_2)$ is $p_2x_2=0$, dus valt met l samen. Ligt P op l, dan is P poolverwant met ieder punt. Van iedere pooldriehoek liggen twee hoekpunten op l.

§42. Bundels kegelsneden.

Laat γ en δ twee kegelsneden zijn, die elkaar in vier punten, A,B,C,D snijden; en laat de vergelijkingen van γ en δ zijn $f(x)=0$ en $g(x)=0$. De vergelijking

(3) $$\lambda f(x)+\mu g(x)=0$$

stelt voor alle waarden van λ en μ (niet beide 0) een kegelsnede voor, die door A,B,C,D gaat. Omgekeerd wordt iedere kegelsnede door A,B,C,D voorgesteld door een vergelijking van de vorm (3).

Bewijs. Laat ε een kegelsnede zijn door A,B,C,D. Kies P op ε . Bepaal

λ_1 en μ_1 zo, dat de kegelsnede $\lambda_1 f(x)+\mu_1 g(x)=0$ door P gaat. Daar deze kegelsnede vijf punten met ε gemeen heeft, valt zij met ε samen.

Bepaling. Zijn $f(x)=0$ en $g(x)=0$ twee verschillende kegelsneden, dan vormen alle kegelsneden, voorgesteld door vergelijkingen van de vorm (3) een kegelsnedenbundel.

Opmerking. Deze bepaling is ook bruikbaar in het geval, dat de kegelsneden geen vier verschillende punten gemeen hebben, bijv. als zij elkaar raken. In het geval, dat de vier snijpunten A,B,C,D van γ en δ verschillend zijn, bevat de bundel drie ontaarde kegelsneden, namelijk de paren overstaande zijden van de volledige vierhoek ABCD.

Stelling. Zijn P,Q,R de dubbelpunten van de ontaarde kegelsneden uit een bundel met vier basispunten, dan is PQR een pooldriehoek van iedere kegelsnede uit de bundel.

Bewijs.(zie de figuur bij § 39, stelling 1, blz.52).

Volgens § 39, st.1, is (RSAD)=-1, dus R en S zijn poolverwant t.o.v. iedere kegelsnede door A en D.

Evenzo is (RTBC)=-1, dus R en T zijn poolverwant t.o.v. iedere kegelsnede door B en C.

PQ(=ST) is dus de poollijn van R t.o.v. iedere kegelsnede door A,B,C,D.

Evenzo bewijst men, dat RQ de poollijn van P is en dat RP de poollijn van Q is.

Kiest men PQR als coördinatendriehoek, dan wordt de vergelijking van de bundel:

(4) $\quad (\lambda a_{00}+\mu b_{00})x_0^2+(\lambda a_{11}+\mu b_{11})x_1^2+(\lambda a_{22}+\mu b_{22})x_2^2=0.$

Ik beschouw nog enkele bijzondere gevallen.

I. γ en δ raken elkaar in een punt en hebben nog twee verschillende punten gemeen. Kies A_0 in het raakpunt en A_1,A_2 in de snijpunten. De vergelijking van γ luidt dan

$$a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0.$$

De raaklijn in O_0 is $a_{01}x_1+a_{02}x_2=0$.

Kiezen wij het eenheidspunt op deze raaklijn, dan wordt haar vergelijking $x_1-x_2=0$, dus $a_{02}=-a_{01}$. De vergelijking van γ is nu $a_{01}(x_0x_1-x_0x_2)+a_{12}x_1x_2=0$.

Evenzo luidt die van δ $\quad b_{01}(x_0x_1-x_0x_2)+b_{12}x_1x_2=0$.

De vergelijking van de bundel is dus:

(5) $$\lambda x_0(x_1-x_2) + \mu x_1x_2=0.$$

De ontaarde kegelsneden uit de bundel zijn:

$$x_0(x_1-x_2)=0 \text{ en } x_1x_2=0.$$

Er is geen gemeenschappelijke pooldriehoek.

II. De kegelsneden raken elkaar in twee punten. Kies deze als A_o en A_1, en kies A_2 in het snijpunt van de gemeenschappelijke raaklijnen in A_o en A_2. De vergelijkingen van γ en δ worden:

$$2a_{o1}x_ox_1 + a_{22}x_2^2=0, \quad 2b_{o1}x_ox_1 + b_{22}x_2^2=0,$$

dus de bundelvergelijking is

$$(6) \qquad 2\lambda x_ox_1 + \mu x_2^2 = 0.$$

Ontaardingen: $x_ox_1 = 0$ en de dubbellijn $x_2^2=0$.
Er zijn oneindig veel gemeenschappelijke pooldriehoeken.

III. Drie snijpunten van γ en δ vallen samen. Kies A_o in het raakpunt, A_1 in het snijpunt, en breng daarna, als onder II, de vergelijking van γ op de vorm $2a_{o1}x_ox_1+a_{22}x_2^2=0$. Kies bovendien het eenheidspunt op γ, zodat de vergelijking wordt $x_ox_1-x_2^2=0$.
De vergelijking van δ is $2b_{o1}x_ox_1+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2=0$. Door eliminatie van x_1 vindt men

$$2b_{12}x_2^3+(2b_{o1}+b_{22})x_ox_2^2=0.$$

Drie snijpunten vallen in A_o samen, als $2b_{o1}+b_{22}=0$.
De vergelijking van δ is dus $2b_{12}x_1x_2+2b_{o1}(x_ox_1-x_2^2)=0$.
De bundelvergelijking luidt dus:

$$(7) \qquad 2\lambda x_1x_2 + \mu(x_ox_1-x_2^2) = 0.$$

Er is slechts een ontaarding $x_1x_2=0$, en geen gemeenschappelijke pooldriehoek.
De kegelsnede γ en de osculatiecirkel aan γ in een punt P van γ, behoren tot een bundel van deze soort.