STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958-003

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. R. Timman

22 januari 1958

Iteratiemethoden ter berekening van trillingsvraagstukken

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1958-003

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr R. Timman

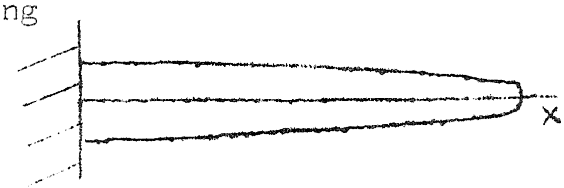
22 januari 1958

Iteratiemethoden ter berekening van trillingsvraagstukken

1. Inleiding.

De berekening van trillingsvraagstukken is een onderwerp, dat uitermate geschikt is om in "de elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit" opgenomen te worden. Deze betiteling moet dan zo worden geïnterpreteerd, dat de aanschouwelijke, op fysische redeneringen gebaseerde opzet van de berekeningen als "elementair", de zuivere berekeningsmethode, zoals die door de mathematicus hieruit wordt geabstraheerd, heeft, van oudsher in het gedachtenleven van de mathematici de betiteling "hoger" gekregen.

Als "elementair" probleem wordt gesteld het berekenen van de eigentrillingen van een balk, die aan een zijde is ingeklemd, aan de andere zijde vrij is. De massaverdeling over de balk is gegeven.



De vergelijking, die de beweging van de balk weergeeft, wordt verkregen door in een doorsnede te eisen, dat het moment, dat door het deel van de balk rechts van de doorsnede wordt uitgeoefend, evenwicht maakt met de elastische krachten in de doorsnede. Hierbij worden voor een trillend systeem de massakrachten van de afzonderlijke delen als krachten meegeteld.

Laat dus de coordinaat in lengterichting van de balk (lengte l) met x aangeduid worden, de belasting van de balk zij $q(x)$, waarbij $q(x)$ in eindig veel punten discontinu kan zijn.

Voor een doorsnede x is dan het moment van het buitenste deel van de belasting

$$\int_x^l q(\xi)(\xi - x)\,d\xi \ .$$

Is I het traagheidsmoment in de balk en E de elasticiteitsmodulus van het materiaal, dan kan men afleiden, dat het moment van de elastische krachten wordt gegeven door

$$\frac{EI}{\rho}$$

waarbij ρ de kromming van de elastische lijn van de balk is. Noemen wij deze lijn $y(x)$, dan geldt voor kleine doorbuigingen:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

zodat de doorbuigingslijn wordt gegeven door

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \int_x^l q(\xi)(\xi - x)\,d\xi\,. \qquad (1)$$

Indien de balk trilt, dan wordt de belasting $q(x)$ geleverd door de massakrachten

$$q(x) = m(x)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

als $m(x)$ de massaverdeling over de balk voorstelt.
Door (1) twee keer naar x te differentiëren, krijgen wij de partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,EI\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(x)\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.$$

Indien de trillingen zuiver harmonisch zijn, schrijven wij

$$y(x,t) = e^{i\nu t}\,z(x)$$

zodat de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2}{dx^2}\,EI\,\frac{d^2z}{dx^2} = -\,\nu^2 m(x) z \qquad (2)$$

ontstaat.
Aan het vrije uiteinde is het moment en de dwarskracht nul, dus geldt daar

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \qquad \text{(dynamische randvoorwaarden)}$$

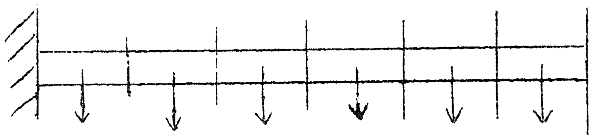
$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0.$$

Bij de inklemming is $z=0$ en tevens is de doorbuigingslijn horizontaal $\frac{dz}{dx} = 0$ (geometrische randvoorwaarden).

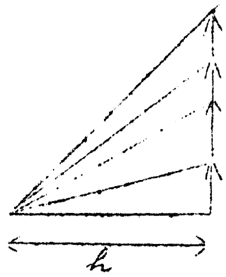
2. Grafische oplossingsmethoden.

In de practijk bestaan al sinds lang vele grafische en numerieke methoden ter bepaling van de doorbuigingslijnen van balken onder gegeven belasting.

Als grafische methode geven wij het volgende voorschrift:



Verdeel de balk in een aantal delen (n) en vervang de belasting op elk deel door een geconcentreerde kracht K_i.
Neem een pool aan en stel de krachten samen en verbind de pool met de eindpunten van de achtereenvolgende resultanten.



Construeer daarna een gebroken lijn, waarvan de samenstellende lijnen evenwijdig zijn met de lijnen uit het verkregen pooldiagram.

Dit geeft de momentenlijn, zoals gemakkelijk is te zien. Immers de achtereenvolgende ordinaten worden voorgesteld door:

$$\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} K_j = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{k}(k-i+1)K_i$$

hetgeen een benadering is voor de integraal $\int_0^x (x-\xi)m(\xi)d\xi$.

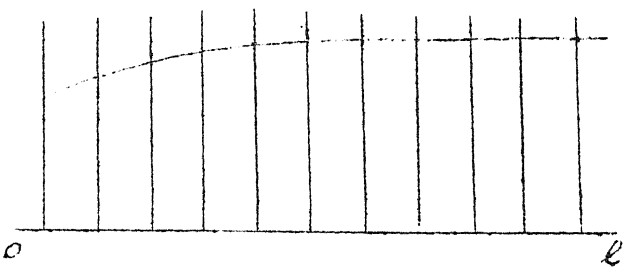
Beschouwen wij nu de verkregen momentenlijn, vermenigvuldigd met de eventueel variabele EI van de staaf als nieuwe "belastinglijn" en herhalen de constructie, dan verkrijgen wij de doorbuigingslijn van de staaf bij de aangenomen belastingsverdeling.

Dit procédé is het uitgangspunt voor een constructief iteratieproces voor het bepalen van de eigen trillingsvorm van de staaf. Neem een bepaalde trillingsvorm aan, vermenigvuldig deze met de massaverdeling en pas de constructie toe.

Indien de verkregen kromme affien is met het origineel is het een trillingsvorm en de affiniteitsfactor hangt samen met de frequentie.

Indien dit nog niet is bereikt kan met het proces herhalen, net zolang tot de krommen niet meer te onderscheiden zijn. Deze gra-

fische methode is afkomstig van Stodola. Er zijn uiteraard vele varianten op.
Mathematisch gesproken betekent de methode, dat uitgegaan wordt van de voorstelling van de trillingsvorm door een eindig aantal parameters, in dit geval de ordinaten in de deelpunten.
De belastingsfunctie $q(x) = m(x)z(x)$ wordt voorgesteld als lineaire samenstelling van een aantal driehoeksfuncties.



3. De methode van Ritz-Galerkin.

Een meer consequente uitwerking, die direct gebaseerd is op de voorstelling (3) is de methode van Ritz-Galerkin, waarbij de trillingsvorm wordt aangenomen in de vorm

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, f_i(x) \qquad (1)$$

en de functies $f_i(x)$ niet slechts over een deelgebied $\neq 0$ zijn, maar tevoren als functies over het gehele interval $0 \leq x \leq l$ worden ingevoerd. Dikwijls worden hiervoor polynomen gekozen, die aan de randvoorwaarden voldoen.
Substitutie in de differentiaalvergelijking (1.2) geeft nu een identiteit

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\frac{d^2}{dx^2} EI \, f_i''\right) + \nu^2 \sum_{i=1}^{n} q_i \, m(x) \, f_i(x) = 0$$

waaraan voor alle waarden van x moet zijn voldaan.

Aangezien dit in het algemeen niet vervuld zal kunnen worden, berust de methode van Galerkin erop, dat men de fout beschouwt:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \left\{ (EI \, f_i'')'' + \nu^2 \, m(x) f_i \right\}$$

en stelt dat met $f_i(x)$ als gewichtsfunctie de integralen

$$\int_0^l \varepsilon(x) \, f_i(x) dx = 0$$

moeten zijn. Dit levert n vergelijkingen voor de n onbekenden q_i met ν^2 als parameter.
Een mechanische interpretatie van deze methode berust op het principe van Rayleigh.
Het principe van Rayleigh kan geformuleerd worden als:
Indien een mechanisch systeem een vrije trilling uitvoert, is de verdeling van de kinetische en potentiële energie zodanig, dat hun quotiënt minimaal is. Dit quotiënt levert het kwadraat van de frequentie.
Beschouwen wij weer de trillende balk.
De kinetische energie is, als $y(x,t)=z(x)\cos \nu t$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m(x) \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \nu^2 \int_0^l m(x) [z(x)]^2 dx \, . \, \sin^2 \nu t \, .$$

De potentiële energie wordt gegeven door

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 dx \cos^2 \nu t \, .$$

Het principe van Rayleigh volgt dan direct uit het variatieprincipe van Hamilton.
Zij

$$\Phi = T - V$$

dan is de beweging zodanig, dat de integraal

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi \, (x,y,y',\dots) dt$$

extreem is voor alle toegelaten variatiefuncties $\delta \dot{y}$, die voor $t=t_0$ en $t=t_1$ identiek nul zijn in x.
Beschouwen wij dus stationnaire trillingen, dan moeten t_0 en t_1 twee doorgangen door de evenwichtsstand zijn, zodat wij vinden

$$\delta \left[\nu^2 \int_0^l m(x) z(x)^2 dx - \int_0^l EI \left(\frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 dx \right] = 0.$$

Invullen van de approximatie

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \, f_i(x)$$

levert dan het minimaalprobleem van de integraal:

$$\nu^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i q_j \int_0^l m\, f_i\, f_j\, dx - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_i q_j \int_0^l EI\, f_i'' f_j'' dx = 0,$$

Door partiële integratie, kan men, als f_i en f_j aan de randvoorwaarden voldoen de integralen

$$\int_0^l EI\, f_i''\, f_j''\, dx \quad \text{en} \quad \int_0^l f_i\, (EI\, f_i'')''\, dx$$

in elkaar omvormen.

4. Mathematische theorie.

Het probleem van de eigentrillingen is dus teruggevoerd tot de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$(EI\, f'')'' = \lambda\, m\, f$$

met homogene randvoorwaarden.

Dit kan alleen voor zekere waarden van λ, die eigenwaarden worden genoemd. Het is equivalent met het minimaal maken van de integraal

$$\int (EIf'')f\, dx = \int EI(f'')^2 dx$$

met als nevenvoorwaarde

$$\int mf^2 dx = \text{const.}$$

In de abstracte theorie beschouwen wij alle reële functies $f(x)$ die voor $0 \leqq x \leqq 1$ kwadratisch integreerbaar zijn.

We definiëren als inwendig product (f,g) van twee van zulke functies

$$(f,g) = \int_0^1 fg\, dx.$$

Dit bestaat zeker, omdat steeds

$$\int_0^1 fg\, dx \leqq \left(\int f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1) Blijkbaar geldt

$$(\alpha f, g) = \alpha (f, g)$$

voor alle getallen α.

2) $(f_1+f_2,g) = (f_1,g) + (f_2,g)$

3) $(f,g) = (g,f)$

4) $(f,f) > 0$ voor $f \neq 0$.

Wij noemen $(f,f)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 f^2 dx)^{\frac{1}{2}} = \|f\|$ de norm van de functie f.
De ruimte heet compleet, indien voor iedere rij functies $f_n(x)$ uit de voorwaarde $\|f_n - f_m\| \longrightarrow 0$ voor $n,m \longrightarrow \infty$ het bestaan volgt van een functie f, zodat $\|f-f_n\| \longrightarrow 0$ voor $n \to \infty$.

De functies f(x), die aan de randvoorwaarden voldoen, en die met uitzondering van een eindig aantal punten onbeperkt differentieerbaar zijn, vormen blijkbaar ook een Hilbert ruimte.
De differentiaaloperator

$$L(f) = (EIf'')''$$

is een lineaire operator, d.w.z.

$$L(\alpha f) = \alpha L\, f$$

$$L(f_1+f_2) = Lf_1 + Lf_2 \ .$$

Verder is zij begrensd, d.w.z. er bestaat een getal $M \geqslant 0$ zodanig dat

$$\|Lf\| \leqq M \|f\|$$

voor alle f uit de beschouwde klasse.
Wij nemen in het vervolg m=1 en als norm dus $(\int_0^1 f^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Met kleine wijzigingen geldt de theorie ook voor positieve functies m.
De lineaire transformatie is zelf-geadjungeerd, indien

$$(L\,f,g) = (f,Lg)$$

voor alle f en g.
Blijkbaar is de hier beschouwde L zelf-geadjungeerd en begrensd.
Bovendien is $(Lf,f) \geqq 0$ voor alle f. De transformatie is dus ook positief.
Voor deze transformaties gelden nu de volgende stellingen:

1) Er bestaat tenminste één eigenwaarde, d.w.z. een getal λ, zodat een functie f bestaat met

$$Lf = \lambda f.$$

f heet een eigenfunctie, behorende bij λ.

2) De eigenwaarden zijn reëel.

3) Twee eigenfuncties, behorende bij verschillende eigenwaarden, zijn orthogonaal.

4) Indien L positief is, zijn alle eigenwaarden positief.

5)
$$|\lambda_n| = \max \frac{(Lf,f)}{\|f\|^2}$$
voor alle f met $\|f\| \neq 0$ en $(f,\varphi_1)=(f,\varphi_2)\dots(f,\varphi_{n-1})=0$, waarbij $\varphi_1,\dots\varphi_{n-1}$ de eerste (n-1) eigenfuncties zijn.

6) Als $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ de reeks eigenfuncties is, geldt voor een functie f uit de ruimte
$$Lf = \sum \lambda_n \alpha_n \varphi_n$$
waarbij
$$\alpha_n = (f, \varphi_n),$$
en met $\beta_n=(g, \varphi_n)$

geldt
$$(Lf,g) = \sum \lambda_n \alpha_n \beta_n \ .$$

Wij kunnen dus een functie f uit de ruimte in een reeks van eigenfuncties ontwikkelen.
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \ .$$
Hieruit volgt direct een iteratieproces.

Laat λ_1 de grootste eigenwaarde zijn, dan geldt
$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \varphi_n = \lambda_1 \left\{ \alpha_1 \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \alpha_n \varphi_n \right\}$$
en
$$L^k f = \lambda_1 \left\{ \alpha_1 \varphi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \alpha_n \varphi_n \right\} .$$
Indien alle eigenwaarden ongelijk zijn, gaat $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \rightarrow 0$ en wij houden alleen de eerste eigenfunctie over.