STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-005

Nummeringsprobleem van S. Dockx

W. Peremans en J. Kemperman

1949

Rapport ZW; 1949-005.

Nummeringsprobleem van S. Dockx.

door W. Peremans en J. Kemperman.

Gegeven is een oneindige rij vierkanten $V_1, V_2, \dots$. Het vierkant V_m wordt verdeeld in $4m^2$ hokjes. Voor $m = 1,2,3,4$ is de verdeling in het onderstaande schema aangegeven (voor $m > 4$ is de verdeling analoog)

1: 0	2: 0
4: 0	3: 0

V_1

6: 0	7: −1	8: −1	9: 0
5: 1	11: 0	12: 0	10: 1
18: −1	20: 0	19: 0	13: −1
17: 0	16: 1	15: 1	14: 0

V_2

23: 0	24: −1	25: −2	26: −2	27: −1	28: 0
22: 1	32: 0	33: −1	34: −1	35: 0	29: 1
21: 2	31: 1	37: 0	38: 0	36: 1	30: 2
48: −2	54: −1	56: 0	55: 0	49: −1	39: −2
47: −1	53: 0	52: 1	51: 1	50: 0	40: −1
46: 0	45: 1	44: 2	43: 2	42: 1	41: 0

V_3

60: 0	61: −1	62: −2	63: −3	64: −3	65: −2	66: −1	67: 0
59: 1	73: 0	74: −1	75: −2	76: −2	77: −1	78: 0	68: 1
58: 2	72: 1	82: 0	83: −1	84: −1	85: 0	79: 1	69: 2
57: 3	71: 2	81: 1	87: 0	88: 0	86: 1	80: 2	70: 3
102: −3	112: −2	118: −1	120: 0	119: 0	113: −1	103: −2	89: −3
101: −2	111: −1	117: 0	116: 1	115: 1	114: 0	104: −1	90: −2
100: −1	110: 0	109: 1	108: 2	107: 2	106: 1	105: 0	91: −1
99: 0	98: 1	97: 2	96: 3	95: 3	94: 2	93: 1	92: 0

V_4

Elk hokje krijgt een rangnummer n, dat in de figuur in de linkerbovenhoek van ieder hokje geplaatst is. Verder wordt volgens een voorschrift, dat door de figuur voldoende duidelijk tot uitdrukking wordt gebracht, in elk hokje een geheel getal f(n) geplaatst. Gevraagd wordt f(n) expliciet in n uit te drukken.

De oplossing luidt als volgt:
De veranderlijken n, k, m, p, r en s nemen alleen natuurlijke getallen (1,2,3,...) als waarden aan; de veranderlijken i en j nemen alleen de waarden 0 en 1 aan.

$$a_k = \frac{2}{3}\, k\, (k+1)(2k+1)$$

$$r = \min_{a_k \geq n} k$$

$$i = \left[\frac{a_r - n}{2r^2} \right]$$

$$p = a_r - n + 1 - 2\, i\, r^2$$

$$s = \min_{2m^2 \geq p} m$$

$$j = \left[\frac{2s^2 - p}{2s - 1} \right]$$

$$f(n) = (-1)^{i+j} \left\{ 2\, s^2 - p + 1 - j(2s-1) - s \right\}$$

<u>Bewijs</u>.

We bepalen eerst het nummer r van het vierkant V_r, waar het rangnummer n in voorkomt. Het hoogste rangnummer a_k in V_k luidt als volgt:

$$a_k = \sum_{t=1}^{k} (2t)^2 = \frac{2}{3}\, k\, (k+1)\, (2k+1)$$

dus is r het kleinste natuurlijke getal waarvoor $a_r \geq n$ is:

$$r = \min_{a_k \geq n} k.$$

We bepalen nu of n zich in een hokje van het onderste helft of van de bovenste helft van zijn vierkant bevindt. Het totale aantal hokjes in V_r is $4\, r^2$, dus

als $0 \leq a_r - n \leq 2\, r^2 - 1$, ligt n in de onderste helft,
als $2\, r^2 \leq a_r - n \leq 4\, r^2 - 1$, " n " " bovenste " .

Dan is $i = \left[\frac{a_r - n}{2\, r^2} \right]$ resp. 0 of 1.

We nummeren nu de hokjes in elke vierkanthelft opnieuw en wel in omgekeerde volgorde als in de oorspronkelijke nummering en telkens in elke vierkanthelft opnieuw beginnend bij één. Dit nummer noemen we p. Dan is voor de onderste helft $p = a_r - n + 1$, voor de bovenste helft $p = a_r - n + 1 - 2\,r^2$; algemeen dus

$$p = a_r - n + 1 - 2\,i\,r^2.$$

We merken op dat het verloop der f-waarden in de bovenste helft precies tegengesteld is aan dat van de onderste helft, m.a.w. dat bij een zelfde waarde van p in de bovenste helft f(p) tegengesteld is aan de overeenkomstige f(p) in de onderste helft. We kunnen ons dus tot de onderste helft beperken, mits we het eindresultaat nog met $(-1)^i$ vermenigvuldigen.

De rangnummers p doorlopen nu diverse "schillen" in de vierkanthelft; we willen het nummer s van de schil bepalen waar p in ligt. Het aantal hokjes in de t$^{\underline{e}}$ schil is $4\,t-2$; het hoogste nummer in de m$^{\underline{e}}$ schil is:

$$\sum_{t=1}^{m}(4\,t-2) = 2\,m^2$$

dus is s het kleinste natuurlijke getal, waarvoor $2\,s^2 \geqslant p$ is:

$$s = \min_{2m^2 \geqslant p} m$$

We gaan nu na, of een rangnummer zich in de rechter of de linkerhelft van zijn schil bevindt. Het totale aantal hokjes in de s$^{\underline{e}}$ schil is $4\,s-2$. Op geheel analoge wijze als tevoren voor i vinden we nu voor

$$j = \left[\frac{2\,s^2-p}{2\,s-1}\right]$$

dat als $j = 0$ is, het hokje in de rechterhelft, als $j = 1$ is, in de linkerhelft ligt (in de bovenste helft natuurlijk juist omgekeerd).

Ook geheel analoog constateren we, dat we ons tot de rechterhelft kunnen beperken, mits we het eindresultaat met $(-1)^j$ vermenigvuldigen, en voeren we een nieuw rangnummer q in elke schil in, dat voldoet aan de formule:

$$q = 2\,s^2 - p + 1 - j\,(2\,s-1)$$

We beschouwen dus nu het waardeverloop in de s$^{\underline{e}}$ schil in het rechterbenedenkwadrant. Daar doorloopt f een lineaire functie van q, die bij $q = 1$ de waarde $-s+1$ aanneemt, dus is $f = q - s$. Algemeen geldt dus

$$f(n) = (-1)^{i+j}\left\{2\,s^2 - p + 1 - j(2\,s-1) - s\right\}$$

hetgeen te bewijzen was.

Ter vereenvoudiging van de practische berekening van de functie f(n) volgt hier nog een tabel van de waarden van a_k voor alle $k \leqslant 100$.

Tabel van de waarden van $a_k = \frac{2}{3} k(k+1)(2k+1)$ voor alle $k \leqslant 100$.

k	a_k	k	a_k	k	a_k	k	a_k	k	a_k
1	4	21	13244	41	95284	61	310124	81	721764
2	20	22	15180	42	102340	62	325500	82	748660
3	56	23	17296	43	109736	63	341376	83	776216
4	120	24	19600	44	117480	64	357760	84	804440
5	220	25	22100	45	125580	65	374660	85	833340
6	364	26	24804	46	134044	66	392084	86	862924
7	560	27	27720	47	142880	67	410040	87	893200
8	816	28	30856	48	152096	68	428596	88	924176
9	1140	29	34220	49	161700	69	447580	89	955860
10	1540	30	37820	50	171700	70	467180	90	988260
11	2024	31	41664	51	182104	71	487344	91	1021384
12	2600	32	45760	52	192920	72	508080	92	1055240
13	3276	33	50116	53	204156	73	529396	93	1089836
14	4060	34	54740	54	215820	74	551300	94	1125180
15	4960	35	59640	55	227920	75	573800	95	1161280
16	5984	36	64824	56	240464	76	596904	96	1198144
17	7140	37	70300	57	253460	77	620620	97	1235780
18	8436	38	76076	58	266916	78	644956	98	1274196
19	9880	39	82160	59	280840	79	669920	99	1313400
20	11480	40	88560	60	295240	80	695520	100	1353400