STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 51

Omhullende reeksen I

Prof.dr. J.G. van der Corput

februari 1968

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Verantwoording

Deze publicatie is het resultaat van de werkzaamheden van de werkgroep "Neutrices" onder leiding van Prof.dr. J.G. van der Corput. Deze groep bestaat verder uit de heren J. Nuis, T.M.T. Coolen en N.M. Temme, allen werkzaam op de afdeling Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum. Het doel van deze groep is een onderzoek te verrichten naar de toepassingen van de neutrixrekening, in het bijzonder op het gebied van de convergente en asymptotische reeksontwikkelingen van enkel- en meervoudige integralen. Het onderzoek is uiteengevallen in drie delen, nl. de omhullende reeksen, de residuenrekening en de neutrixcalculus. Er zijn drie verschillende soorten van omhullende reeksen nl. met majorant, met asymptotische majorant en met gegeneraliseerde majorant. De omhullende reeksen met majorant leveren steeds een numerieke bovengrens voor de verkregen restterm. De omhullende reeksen met asymptotische of gegeneraliseerde majorant geven slechts een bovengrens voor de orde van grootte van de optredende restterm en kunnen dus met succes in de asymptotiek toegepast worden. De theorie van de omhullende reeksen wordt ontwikkeld zonder dat daarin residuen of neutrices optreden. Het rapport "Omhullende reeksen I" zal worden gevolgd door een publicatie "Omhullende reeksen II".

Het begrip "residu", dat een totaal andere betekenis heeft dan het gelijknamige begrip in de complexe functietheorie, heeft, analoog als in genoemde theorie, de eigenschap dat onder bepaalde voorwaarden een enkel- of meervoudige integraal met bestaanbare of complexe integratievariabelen gelijk is aan of asymptotisch gelijk is aan de som van een eindig aantal residuen. Ook in de residuenrekening komen nog geen neutrices voor.

Het onderzoek in zijn totaliteit wordt overkoepeld door de neutrices die nodig (en ook in staat) zijn om aan het geheel de gewenste algemeenheid te geven.

§1. Definitie van omhullende reeksen

Omhullende reeksen hebben de volgende taak. Zij een klasse $\mathfrak{F}$ van functies gegeven die elk een reeksontwikkeling bezitten. Stel dat voor elke in zulk een reeksontwikkeling optredende restterm een numerieke bovengrens bekend is; hieronder wordt verstaan een bovengrens voor de absolute waarde van de restterm. Uitgaande van de tot $\mathfrak{F}$ behorende functies vormt men nieuwe functies door toepassing van bepaalde operaties, zoals optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, integratie of sommatie, vorming van functies van functies, enz. Onder bepaalde voorwaarden kan men voor elk der aldus geconstrueerde functies een nieuwe reeksontwikkeling vinden, waarin wederom voor elke restterm een numerieke bovengrens bekend is. Dat de optelling en aftrekking operaties met deze eigenschap zijn, is evident, want als van twee functies f en g reeksontwikkelingen bekend zijn met numerieke bovengrens van de resttermen, dan is dat ook het geval met $f + g$ en $f - g$. Voor het product fg wordt het probleem reeds moeilijk en als men verder gaat, komt er van de berekening van een numerieke bovengrens voor de restterm weinig terecht. Afgezien van de allereenvoudigste gevallen zijn de vereiste calculaties onoverzichtelijk, de gevonden reeksontwikkelingen gecompliceerd en de gevonden bovengrens zó groot dat de methode voor de toepassingen praktisch onbruikbaar is.

Een analoog verschijnsel treedt op in de asymptotiek. Daar beperkt men zich tot orderelaties. Dit betekent dat men daar niet een numerieke bovengrens verlangt, maar dat men reeds tevreden is als men een bovengrens kent voor de orde van grootte van de restterm.

Het doel van de omhullende reeksen is het bedoelde onderzoek te vereenvoudigen, zowel buiten als binnen de asymptotiek.

Onthullingen over omhullingen, althans in de eenvoudigste vorm, komen reeds voor in de werken van Cauchy, Scott, Watson en Polya-Szegö [1]. Volgens die auteurs wordt een getal s omhuld door een formele reeks $a_0 + a_1 + \dots$, als voor elk geheel getal $q \geq 0$ de ongelijkheid

[1] G. Polya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, p. 26, Springer, Berlin, 1925.

$$|s - \sum_{k=0}^{q-1} a_k| \leq a_q$$

geldt. Volgens deze opvatting wordt dus een getal door een formele reeks omhuld dan en alleen dan als iedere restterm een fractie van de eerstvolgende verwaarloosde term is.

Dit idee levert een aantal eenvoudige en nuttige resultaten, maar heeft het nadeel dat reeds bij de aftrekking moeilijkheden optreden. Het verschil van twee omhulde getallen is - in het algemeen - zelf niet omhuld. Anders gezegd: als s omhuld wordt door $a_0 + a_1 + \dots$, terwijl t omhuld wordt door $b_0 + b_1 + \dots$, dan wordt $s - t$ in het algemeen niet omhuld door $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + \dots$. In verband met het feit dat deze keuze van omhulling voor de toepassingen te beperkt is, heb ik in 1951 een uitbreiding [2)] ingevoerd, volgens welke een complex getal s door een formele reeks $a_0 + a_1 + \dots$ met majorant $A_0 + A_1 + \dots$ omhuld wordt als voor elk geheel getal $q \geq 0$ de ongelijkheden

$$|a_q| \leq A_q \quad \text{en} \quad |s - \sum_{k=0}^{q-1} a_k| \leq A_q$$

gelden.

Bij gebruik van dit omhullingsbegrip treden een aantal operaties op die, op omhulde getallen toegepast, wederom omhulde getallen opleveren. Dit is bijv. het geval met de aftrekking. Immers als s omhuld wordt door $a_0 + a_1 + \dots$ met majorant $A_0 + A_1 + \dots$ en als verder t omhuld wordt door $b_0 + b_1 + \dots$ met majorant $B_0 + B_1 + \dots$, dan wordt $s - t$ omhuld door $(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) + \dots$ met majorant $(A_0 + B_0) + (A_1 + B_1) + \dots$.

In verband echter met het feit dat ook dit omhullingsbegrip voor de toepassingen nog te beperkt blijkt te zijn, worden in dit artikel drie verschillende soorten van omhullingen ingevoerd, omhullingen met een

---

2) Asymptotic Expansions, Lectures given at National Bureau of Standards, Los Angeles, California, 1951 and 1952.

majorant in de gebruikelijke zin, omhullingen met een asymptotische majorant en tenslotte omhullingen met een gegeneraliseerde majorant. In deze paragraaf beperken we ons tot omhullende reeksen met een majorant in de gebruikelijke zin van het woord. Daartoe worden formele reeksen van de gedaante

$$\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h = \sum_{|h|\geq p} \alpha_{h_1,\ldots,h_m} u_1^{h_1} \ldots u_m^{h_m} \tag{1.1}$$

ingevoerd. Hierin is $h = (h_1, \ldots, h_m)$ een m-tupel, gevormd door m gehele getallen ≥ 0; de som $h_1 + \ldots + h_m$ der componenten wordt met $|h|$ aangeduid. Verder is $u = (u_1, \ldots, u_m)$ een m-tupel gevormd door m complexe getallen, terwijl u^h een afkorting voor $u_1^{h_1} \ldots u_m^{h_m}$ is. Tenslotte stelt p een gegeven geheel getal ≥ 0 voor, terwijl de coëfficiënten $\alpha_h = \alpha_{h_1,\ldots,h_m}$ complexe getallen aanduiden.
Een formele reeks $\sum_{|h|\geq p} A_h u^h$ heet een majorant van $\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h$, als $|\alpha_h| \leq A_h$ is voor elk m-tupel h met gehele componenten ≥ 0 en met eigenschap $|h| \geq p$. In een majorant is dus iedere coëfficiënt ≥ 0, maar het is niet nodig dat de termen zelf ≥ 0 zijn.

Zij $\mathfrak{U}$ een verzameling gevormd door m-tupels $u = (u_1, \ldots, u_m)$ met complexe componenten. Zij $f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)$ een complex-waardige functie van u in $\mathfrak{U}$ waarbij het mogelijk is een formele reeks $\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h$ met majorant $\sum_{|h|\geq p} A_h u^h$ te vinden, zodanig dat voor elk geheel getal $q \geq p$ en voor elk element u van $\mathfrak{U}$ de ongelijkheid

$$\left|f(u) - \sum_{p\leq|h|<q} \alpha_h u^h\right| \leq \sum_{|h|=q} A_h |u^h| \tag{1.2}$$

geldt. In deze formule wordt steeds aangenomen dat elke in de reeks $\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h$ optredende coëfficiënt onafhankelijk van u is, maar elke in de majorant voorkomende coëfficiënt A_h mag van u afhangen.
Als de ongelijkheden (1.2) gelden, dan zegt men dat f(u) in $\mathfrak{U}$ door $\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h$ met majorant $\sum_{|h|\geq p} A_h u^h$ omhuld wordt en men schrijft

$$f(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h, A_h) u^h \tag{1.3}$$

in $\mathfrak{U}$.

Voorbeeld 1. Voor elk in het complexe vlak op de rand van of buiten de cirkel met middelpunt 1 en straal 1 gelegen punt u is

$$\frac{1}{1-u} \prec \sum_{h\geq 0} (1,1)\, u^h, \tag{1.4}$$

want voor elk geheel getal $q \geq 0$ heeft men

$$\left|\frac{1}{1-u} - \sum_{0\leq h<q} u^h\right| = \left|\frac{u^q}{1-u}\right| \leq |u^q| = \sum_{h=q} |u^h|.$$

Voorbeeld 2. Indien $\varepsilon \leq \arg u \leq 2\pi - \varepsilon$ is, waarin $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$, dan is $|1 - u| \geq \sin \varepsilon$, dus

$$\left|\frac{1}{1-u} - \sum_{0\leq h<q} u^h\right| = \left|\frac{u^q}{1-u}\right| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon} |u^q|,$$

derhalve

$$\frac{1}{1-u} \prec \sum_{h\geq 0} \left(1,\frac{1}{\sin \varepsilon}\right) u^h.$$

Voorbeeld 3. Voor elke bestaanbare u is

$$\sin u \prec \sum_{h\geq 0} (\alpha_h, A_h)\, u^h \quad \text{en} \quad \cos u \prec \sum_{h\geq 0} (\beta_h, B_h)\, u^h, \tag{1.5}$$

waarin $\alpha_{2k+1} = \frac{(-)^k}{(2k+1)!}$; $\beta_{2k} = \frac{(-)^k}{(2k)!}$; $\alpha_{2k} = \beta_{2k+1} = 0$;

$$A_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!};\ B_{2k} = \frac{1}{(2k)!};\ A_{2k} = B_{2k+1} = \infty.$$

Immers men heeft

$$\left|\sin u - \sum_{0\leq h<q} \alpha_h u^h\right| = \left|\sin u - \sum_{0\leq k<\frac{q-1}{2}} \alpha_{2k+1} u^{2k+1}\right|$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{|u|^q}{q!} & \text{als } q \text{ oneven is} \\ \infty\, |u|^q & \text{als } q \text{ even is.} \end{cases}$$

Hieruit volgt de eerste der betrekkingen (1.5).

Het bewijs van de tweede relatie volgt op analoge manier.

Stel in $\mathfrak{U}$

(1.6) $$f(u) \prec \sum_{|h|\geq p'} (\alpha_h, A_h)\, u^h,$$

waarin p' geheel ≥ 1 is en stel $A_h = 0$ (dus ook $\alpha_h = 0$ wegens $|\alpha_h| \leq A_h$) voor elk m-tupel h met $|h| = p' - 1$. Dan stellen

$$\sum_{|h|\geq p'} \alpha_h\, u^h \quad \text{en} \quad \sum_{|h|\geq p'-1} \alpha_h\, u^h$$

een zelfde formele reeks voor en evenzo

$$\sum_{|h|\geq p'} A_h\, u^h \quad \text{en} \quad \sum_{|h|\geq p'-1} A_h\, u^h,$$

maar de vraag rijst of relatie (1.6) blijft gelden, als daarin p' door p'-1 vervangen wordt. Dit is niet het geval, tenzij f(u) in $\mathfrak{U}$ identiek nul is, omdat uit

$$f(u) \prec \sum_{|h|\geq p'-1} (\alpha_h, A_h)\, u^h,$$

wegens (1.2) toegepast met $p = q = p'-1$, zou volgen

$$|f(u)| \leq \sum_{|h|=p'-1} A_h\, |u^h| = 0, \text{ dus } f(u) = 0.$$

De verklaring van dit verschijnsel berust op het feit dat de betekenis van (1.6) afhangt van de keuze van p', zodat men geen zekerheid heeft dat deze betekenis dezelfde blijft als p' door p'-1 vervangen wordt. Dit fenomeen wordt nader toegelicht door de volgende stelling, die onmiddellijk uit de omhullingsdefinitie volgt.

Stelling 1.1. Stel p en p' zijn twee gehele getallen met $p' > p$. Stel (1.6) geldt. Stel $\alpha_h = 0$ voor elk m-tupel h met gehele componenten ≥ 0 en met $p \leq |h| < p'$. Formule (1.3) geldt dan en alleen dan als de ongelijkheden

(1.7) $$|f(u)| \leq \sum_{|h|=q} A_h\, |u^h|$$

voor ieder punt u van $\mathfrak{U}$ en voor elk geheel getal q met $p \leq q < p'$ gelden.

Terecht vraagt men zich af wat het nut is van ongelijkheden, zoals (1.4) inhoudt. Wat voor zin heeft het $\frac{1}{1-u}$ te vervangen door de som $\sum_{0\le h<q} u^h$ met de opmerking dat voor bepaalde waarden van u de gemaakte fout absoluut hoogstens gelijk is aan $|u^q|$. Immers als $|u| > 1$ is, dan is, speciaal bij grote waarden van q, de gemaakte fout in absolute waarde veel groter dan het getal $\frac{1}{1-u}$ zelf. Hoe vreemd het misschien ook moge klinken, toch kunnen dergelijke ongelijkheden zeer nuttig zijn. Bij voorbeeld, als ω positief is, vindt men, op dezelfde manier als waarmede (1.4) aangetoond is, voor $u \geq 0$

$$\frac{1}{\omega+u} = \sum_{0\le h<q} \frac{(-)^h\, u^h}{\omega^{h+1}} + \theta\, \frac{u^q}{\omega^{q+1}}\ , \tag{1.8}$$

waarin het van u afhankelijke getal θ absoluut genomen ≤ 1 is; derhalve

$$(1.9)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\omega+u}\,du &= \sum_{0\le h<q} \frac{(-)^h}{\omega^{h+1}} \int_0^\infty u^h\, e^{-u}\, du + \frac{\theta'}{\omega^{q+1}} \int_0^\infty u^q\, e^{-u}\, du \\ &= \sum_{0\le h<q} \frac{(-)^h\, h!}{\omega^{h+1}} + \theta'\, \frac{q!}{\omega^{q+1}}\ , \end{aligned}\right.$$

waarin $|\theta'| \leq 1$. Dus de restterm is een fractie van de eerst-verwaarloosde term.

Hoe kan men zulk een scherp, praktisch onverbeterbaar resultaat vinden met behulp van formule (1.8) die voor grote positieve waarden van u, bij voorbeeld voor $u = 1000\,\omega$ een zo slechte benadering levert dat ze ridicuul genoemd kan worden? Het integratieinterval bestaat uit twee delen, het dominante deel in de buurt van de oorsprong en het bijkomstige deel waarin de integratievariabele u groot, dus de factor e^{-u} klein is. Formule (1.9) geldt in beide gedeelten, in het dominante deel met een scherpe, in het bijkomstige deel met een ruwe benadering, maar in deze laatste benadering wordt, dankzij de factor e^{-u}, de gemaakte fout zó sterk naar beneden gedrukt, dat als eindresultaat toch het scherpe resultaat (1.9) te voorschijn komt.

Thans komt het volgende probleem aan de orde. Als van een functie $f(u)$ in $\mathfrak{A}$ het omhullingsgedrag bekend is, d.w.z. als (1.3) in $\mathfrak{A}$ geldt met bekende coëfficiënten α_h en A_h, is het dan mogelijk voor het rechterlid van (1.2) een numerieke bovengrens van eenvoudige gedaante aan te geven, die overal in $\mathfrak{A}$ geldt?

Laten we eerst het geval behandelen dat er een positief getal ρ bestaat zódanig dat $\sum_{|h|\geq p} A_h u^h$ voor $0 \leq u_\mu \leq \rho$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ convergeert en een functie $\Phi(u_1, \ldots, u_m)$ met bovengrens b voorstelt. Voor de termen met $|h| = q$ is

$$|u^h| = |u_1^{h_1} u_2^{h_2} \ldots u_m^{h_m}| \leq (|u_1| + \ldots + |u_m|)^q,$$

dus

$$\sum_{|h|=q} A_h|u^h| \leq (|u_1| + \ldots + |u_m|)^q \rho^{-q} \sum_{|h|=q} A_h \rho^{h_1+\ldots+h_m}.$$

De laatste som is $\leq \Phi(\rho, \ldots, \rho) \leq b$, zodat in dit geval

$$\sum_{|h|=q} A_h|u^h| \leq b\, \rho^{-q} (|u_1|+ \ldots + |u_m|)^q. \tag{1.10}$$

Om een algemener resultaat te vinden, stellen we $A_h = \Omega_h B_h$, waarin het van h afhankelijke positieve getal Ω_h zó groot gekozen wordt dat

$$\sum_{|h|\geq p} B_h|u^h| \tag{1.11}$$

bij geschikt gekozen positieve ρ voor $0 \leq u_\mu \leq \rho$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ een functie met bovengrens b voorstelt. Dan is het linkerlid van (1.10) hoogstens gelijk aan

$$(\max_{|h|=q} \Omega_h) \sum_{|h|=q} B_h |u^h|,$$

waarin de som, volgens het bovenstaande, hoogstens gelijk is aan het rechterlid van (1.10). Op die manier krijgt men

Stelling 1.2. Als (1.3) in $\mathfrak{U}$ geldt met $A_h = \Omega_h B_h$, waarin de positieve getallen Ω_h zó groot gekozen worden dat $\sum_{|h|\geq p} B_h |u^h|$ bij geschikt gekozen positieve ρ voor $0 \leq u_\mu \leq \rho$ $(1 \leq \mu \leq m)$ een functie met bovengrens b voorstelt, dan is $\sum_{|h|=q} A_h |u^h|$ voor elk geheel getal $q \geq p$ hoogstens gelijk aan

$$(1.12) \qquad b\rho^{-q} (|u_1| + \ldots + |u_m|)^q \max_{|h|=q} \Omega_h .$$

Om misverstand te voorkomen wordt thans de volgende kwestie aangeroerd. Als (1.3) in $\mathfrak{U}$ geldt, als l een positief geheel getal $< m$ voorstelt en als $\hat{u}_h$ $(l < h \leq m)$ complexe getallen aanduiden, geldt dan

$$(1.13) \quad f(u_1,\ldots,u_l,\hat{u}_{l+1},\ldots,\hat{u}_m) < \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h, A_h)\, u_1^{h_1}\ldots u_l^{h_l}\, \hat{u}_{l+1}^{h_{l+1}}\ldots \hat{u}_m^{h_m}$$

voor de tot $\mathfrak{U}$ behorende m-tupels $(u_1, \ldots, u_l, \hat{u}_{l+1}, \ldots, \hat{u}_m)$?
Die vraag is onvolledig gesteld. In formule (1.3) worden de termen $\alpha_h u^h$ en $A_h u^h$ gerangschikt naar de waarden van $|h| = h_1 + \ldots + h_m$, zodat termen met dezelfde waarde van $|h|$ samengevoegd worden. Welke rangschikking wordt in (1.13) bedoeld? Gebruikt men in (1.13) dezelfde rangschikking, d.w.z. worden de termen wederom naar $h_1 + \ldots + h_m$ gerangschikt, dan blijft formule (1.2), die uit (1.3) volgt, gelden als u_h $(l < h \leq m)$ door $\hat{u}_h$ vervangen wordt, zodat dan (1.13) inderdaad geldt. Maar men kan ook als volgt redeneren. De getallen $\hat{u}_h$ $(l < h \leq m)$ zijn constant, zodat het linkerlid van (1.13) een functie van de l variabelen $u_1, \ldots, u_l$ is. Bij deze beschouwingswijze is het plausibel de termen te rangschikken naar $h_1 + \ldots + h_l$, terwijl $\hat{u}_h$ $(l < h \leq m)$ als constanten, dus van de graad nul beschouwd worden. Bij deze afspraak heeft men geen zekerheid dat (1.13) uit (1.3) volgt. Beschouw bij voorbeeld het geval

$$p = 0;\ f(u_1,u_2) = \alpha + \beta u_1;\ A_{h_1h_2} = \infty \text{ voor } h_1 + h_2 \geq 2.$$

Wegens

$$\sum_{h_1+h_2\geq 0} A_{h_1h_2} u_1^{h_1} u_2^{h_2} = A_{00} + (A_{10}u_1 + A_{01}u_2) + \sum_{h_1+h_2\geq 2} A_{h_1h_2} u_1^{h_1} u_2^{h_2}$$

is (1.3) equivalent met

$$(1.14) \qquad |\alpha + \beta u_1| \leq A_{00}; \; |\beta u_1| \leq A_{10}|u_1| + A_{01}|u_2|.$$

Wegens

$$\sum_{h_1+h_2 \geq 0} A_{h_1 h_2} u_1^{h_1} \hat{u}_2^{h_2} = (A_{00} + A_{01}\hat{u}_2) + A_{10}u_1 + \sum_{h_1+h_2 \geq 2} A_{h_1 h_2} u_1^{h_1} \hat{u}_2^{h_2}$$

is

$$f(u_1, \hat{u}_2) \prec \sum_{|h| \geq p} (\alpha_h, A_h) u_1^{h_1} \hat{u}_2^{h_2}$$

equivalent met

$$(1.15) \qquad |\alpha + \beta u_1| \leq |A_{00} + A_{01}\hat{u}_2|; \; |\beta u_1| \leq A_{10}|u_1|.$$

Het is duidelijk dat (1.15) niet uit (1.14) volgt, want als men $A_{01}\hat{u}_2 = - A_{00}$ kiest, dan is (1.14) equivalent met

$$|\alpha + \beta u_1| \leq A_{00} \; ; \quad |\beta u_1| \leq A_{10} \, |u_1| + A_{00},$$

terwijl (1.15) equivalent is met

$$\alpha + \beta u_1 = 0 \; ; \quad |\beta u_1| \leq A_{10} \, |u_1|.$$

Aldus komt men tot het volgende povere resultaat. In formule (1.3) mag men een of meer van de variabelen u_μ $(1 \leq \mu \leq m)$ door een constante waarde $\hat{u}_\mu$ vervangen, als de rangschikking der termen dezelfde blijft. Verandert de rangschikking, dan weet men niet of de genoemde substitutie geoorloofd is. Gelukkig zal in §3 bewezen worden dat onder zeer algemene voorwaarden een of meer der variabelen u_μ $(1 \leq \mu \leq m)$ aan bepaalde substituties onderworpen kunnen worden, waarbij de volgorde der termen wel verandert, terwijl toch voor de nieuwe variabelen de corresponderende omhullingsrelatie geldt.

Resumerende vatten we deze paragraaf als volgt samen. Men gaat uit van een klasse $\mathfrak{F}$ van functies f(u), waarvan het omhullingsgedrag bekend is, d.w.z. functies die voldoen aan omhullingsrelaties van de gedaante (1.3), met bekende coëfficiënten α_h en A_h ($|h| \geq p$). Op deze functies worden bepaalde operaties toegepast, die wederom functies met gegeven omhullingsgedrag opleveren. Op die nieuwe functies worden wederom operaties met deze eigenschap toegepast. Zo gaat men door. Zij $\mathfrak{F}^*$ die klasse van alle functies die men op die manier krijgt, zodat van elke tot $\mathfrak{F}^*$ behorende functie het omhullingsgedrag bekend is. Dit betekent dat voor elk dezer functies een reeks te vinden is zodanig dat elke restterm in die reeks in absolute waarde een numeriek bekende bovengrens bezit. Voor die functies beschikt men dus over numerieke benaderingen, soms heel scherp, soms heel onnauwkeurig.

De hoofdtaak van de methode is een uitgebreide verzameling operaties te vinden die, op functies met bekend omhullingsgedrag toegepast, wederom functies opleveren, waarvan het omhullingsgedrag bekend is. Dit artikel beperkt zich tot operaties zoals vermenigvuldiging met een constante, optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, substitutie, vorming van impliciete functies, constructie van functies met behulp van reeksen, oplossingen van lineair homogene differentiaalsystemen. Die lijst kan en moet uitgebreid worden (in het bijzonder betreffende operatoren, die in de theorie van differentiaalvergelijkingen optreden), opdat de theorie een groot gedeelte van de analyse bestrijkt. De bedoeling van deze publicatie is bescheidener. Zij legt de grondslagen van de theorie, in het bijzonder met het doel asymptotische ontwikkelingen voor bepaalde enkel- of meervoudige integralen of voor bepaalde enkel- of meervoudige sommen af te leiden.

§2. Bewerkingen die, toegepast op functies met bekend omhullingsgedrag, wederom functies met bekend omhullingsgedrag opleveren

Op een aantal functies $f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)$ worden enkele operaties toegepast, namelijk vermenigvuldiging met een van u onafhankelijk getal, optelling, aftrekking en vermenigvuldiging van twee of meer factoren. Aangenomen wordt dat van de genoemde functies $f(u)$ het omhullingsgedrag bekend is. Dit betekent dat elk dezer functies aan een omhullingsrelatie van de gedaante (1.3) voldoet, waarvan de coëfficiënten α_h en A_h bekend zijn. De bedoeling van deze paragraaf is te laten zien dat de genoemde bewerkingen, op functies met bekend omhullingsgedrag toegepast, functies opleveren waarvan het omhullingsgedrag wederom bekend is.

Stelling 2.1 (vermenigvuldiging met een constante). Uit

$$f(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h, A_h)\, u^h \tag{2.1}$$

in $\mathfrak{A}$ volgt voor ieder van u onafhankelijk getal η

$$\eta f(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\eta\alpha_h, |\eta|\, A_h)\, u^h$$

in $\mathfrak{A}$.

Deze stelling volgt onmiddellijk uit de definitie van omhullende reeksen. Evenzo de volgende stelling:

Stelling 2.2 (som- en verschilstelling). Uit (2.1) en

$$g(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\beta_h, B_h)\, u^h \tag{2.2}$$

in $\mathfrak{A}$ volgt

$$f(u) + g(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h+\beta_h, A_h+B_h)\, u^h$$

in $\mathfrak{A}$ en

$$f(u) - g(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h-\beta_h, A_h+B_h)\, u^h$$

in $\mathfrak{A}$.

<u>Opmerking</u>: In de omhullingsrelaties (2.1) en (2.2) treedt hetzelfde getal p op. Als (2.2) vervangen wordt door

$$g(u) \prec \sum_{|h|\geq p'} (\beta_h, B_h)\, u^h$$

in $\mathfrak{U}$, waarin $p' \geq p$, dan leert stelling 1.1, dat relatie (2.2) geldt als de coëfficiënten B_h ($p \leq |h| < p'$) zó gekozen worden dat voor elk punt u in $\mathfrak{U}$ en voor elke gehele q met $p \leq q < p'$ de ongelijkheden

$$|g(u)| \leq \sum_{|h|=q} B_h\, |u^h|$$

gelden. Dankzij deze kunstgreep kan de som- en verschilstelling toch op de functies f(u) en g(u) worden toegepast.

In de volgende twee stellingen treden positieve, van h afhankelijke getallen Λ_h op, die voor elk paar m-tupels $h = (h_1, \ldots, h_m)$ en $l = (l_1, \ldots, l_m)$ met gehele componenten ≥ 0 aan de ongelijkheid

$$\Lambda_h\, \Lambda_l \leq \Lambda_{h+l} \tag{2.3}$$

voldoen, waarin $h + l = (h_1 + l_1, \ldots, h_m + l_m)$. In vele gevallen wordt $\Lambda_h = 1$ gekozen.

<u>Stelling 2.3 (product-stelling)</u>. Als de voorwaarde (2.3) geldt, dan volgt uit

$$f(u) \prec \sum_{|h|\geq p} (\alpha_h, \Lambda_h A_h)u^h \quad \text{en} \quad g(u) \prec \sum_{|h|\geq p'} (\beta_h, \Lambda_h B_h)u^h \tag{2.4}$$

de relatie

$$f(u)g(u) \prec \sum_{|l|\geq p+p'} (\gamma_l, \Lambda_l \Gamma_l)\, u^l$$

in $\mathfrak{U}$, waarin γ_l gedefinieerd wordt door de formele betrekking

$$\sum_{|l|\geq p+p'} \gamma_l u^l = \Big(\sum_{|h|\geq p} \alpha_h u^h\Big)\Big(\sum_{|k|\geq p'} \beta_k u^k\Big). \tag{2.5}$$

Dit betekent dat de coëfficiënt van u^l in de formele ontwikkeling van het rechterlid van (2.5) naar machten van $u_1, u_2, \ldots, u_m$ gelijk is aan γ_l.

De coëfficiënt Γ_l wordt gedefinieerd door de formele betrekking

$$(2.6) \qquad \sum_{|l| \geq p+p'} \Gamma_l u^l = \Big(\sum_{|h| \geq p} A_h u^h\Big)\Big(\sum_{|k| \geq p'} B_k u^k\Big).$$

<u>Opmerking</u>: In verband met het feit dat (2.6) uit (2.5) ontstaat door α_h, β_k, γ_l te vervangen door de hoofdletters A_h, B_k, Γ_l, noemt men (2.6) de met (2.5) corresponderende kapitale relatie. Dus γ_l wordt gedefinieerd door formule (2.5), terwijl Γ_l door de corresponderende, kapitale relatie gedefinieerd wordt.

Uit de eerste der betrekkingen (2.4) blijkt dat de coëfficiënten van de majorant met $\Lambda_h A_h$ zijn aangeduid, zodat gegeven is

$$|\alpha_h| \leq \Lambda_h A_h$$

voor elk m-tupel h met gehele componenten ≥ 0 en met $|h| \geq p$; men heeft dus niet $|\alpha_h| \leq A_h$, zoals men misschien verwachten zou.

<u>Bewijs</u>. Uit (2.4) volgt voor ieder geheel getal $q \geq p + p'$

$$(2.7) \qquad f(u) = \sum_{p \leq |h| < q-p'} \alpha_h u^h + \theta_1 \sum_{|h| = q-p'} \Lambda_h A_h |u^h|;$$

in dit bewijs stellen $\theta_1, \ldots, \theta_u$ geschikt gekozen getallen voor, waarvan de absolute waarden ≤ 1 zijn.

Uit (2.4) volgt ook voor elk m-tupel h met gehele componenten ≥ 0 en met $|h| < q-p'$

$$(2.8) \qquad g(u) = \sum_{p' \leq |k| < q-|h|} \beta_k u^k + \theta_2 \sum_{|k| = q-|h|} \Lambda_k B_k |u^k|.$$

Het bijzondere geval $|h| = q-p'$ levert

$$(2.9) \qquad g(u) = \theta_3 \sum_{|k| = p'} \Lambda_k B_k |u^k|.$$

Uit (2.7), (2.8) en (2.9) volgt dus

$$(2.10)\quad f(u)g(u) = \sum_{p\le|h|<q-p'} \alpha_h u^h \{ \sum_{p'\le|k|<q-|h|} \beta_k u^k +$$

$$+ \theta_2 \sum_{|k|=q-|h|} \Lambda_k B_k |u^k| \} +$$

$$+ \theta_4 \sum_{|h|=q-p';|k|=p'} \Lambda_h \Lambda_k A_h B_k |u^{h+k}|.$$

Hierin is

$$\sum_{p\le|h|<q-p'} \alpha_h u^h \sum_{p'\le|k|<q-|h|} \beta_k u^k = \sum_{\substack{p\le|h|<q-p' \\ |k|\ge p';|h+k|<q}} \alpha_h \beta_k u^{h+k} =$$

$$= \sum_{p+p'\le|l|<q} \gamma_l u^l$$

wegens de definitie van de coëfficiënten γ_l. Hiermede zijn de termen afgehandeld die in het rechterlid van (2.10) voorkomen en niet in de restterm worden opgenomen.

Verder moet nog worden onderzocht de bijdrage

$$\sum_{p\le|h|<q-p'} \alpha_h u^h \theta_2 \sum_{|k|=q-|h|} \Lambda_k B_k |u^k|$$

die wegens $|\alpha_h| \le \Lambda_h A_h$ en $|\theta_2| \le 1$ in absolute waarde hoogstens gelijk is aan

$$\sum_{\substack{|h|+|k|=q \\ p\le|h|<q-p' \\ p'\le|k|}} \Lambda_h \Lambda_k A_h B_k |u^{h+k}| = \sum_{\substack{|l|=q \\ p\le|h|<q-p'}} \Lambda_l \Gamma_l |u^l|.$$

Tenslotte komt nog aan de beurt de bijdrage

$$\sum_{|h|=q-p';|k|=p'} \Lambda_h \Lambda_k A_h B_k |u^{h+k}| = \sum_{\substack{|l|=q \\ |h|=q-p'}} \Lambda_l \Gamma_l |u^l|,$$

zodat de som van de twee laatstgenoemde bijdragen

$$\le \sum_{\substack{|l|=q \\ |h|\ge p;|k|\ge p'}} \Lambda_l \Gamma_l |u^l|$$

is. Dit voltooit het bewijs.

Door herhaalde toepassing van de product-stelling krijgt men

Stelling 2.4 (gegeneraliseerde product-stelling). Als voor $\nu = 1, \ldots, n$

$$f_\nu(u) \prec \sum_{|h| \geq p_\nu} (\alpha_{\nu h}, \Lambda_h A_{\nu h})\, u^h$$

in $\mathfrak{A}$, waarin de coëfficiënten Λ_h aan voorwaarde (2.3) voldoen, dan is bij elke keuze van de gehele getallen $k_\nu \geq 0$ $(1 \leq \nu \leq n)$

$$f^k(u) = \prod_{\nu=1}^{n} f_\nu^{k_\nu}(u) \prec \sum_{|l| \geq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu p_\nu} (\delta_{lk}, \Lambda_l \Delta_{lk})\, u^l,$$

waarin de coëfficiënten δ_{lk} gedefinieerd worden door de formele ontwikkeling

$$\sum_{|l| \geq \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu p_\nu} \delta_{lk} u^l = \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{|h| \geq p_\nu} \alpha_{\nu h} u^h \Big)^{k_\nu}, \tag{2.11}$$

terwijl de coëfficiënten Δ_{lk} gedefinieerd worden door de kapitale ontwikkeling die met (2.11) correspondeert.
Door hierin $p_\nu = 1$ $(1 \leq \nu \leq n)$ te kiezen vindt men:

Als voor $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$f_\nu(u) \prec \sum_{|h| \geq 1} (\alpha_{\nu h}, \Lambda_h A_{\nu h})\, u^h \tag{2.12}$$

in $\mathfrak{A}$, dan is bij elke keuze van de gehele getallen $k_\nu \geq 0$ $(1 \leq \nu \leq n)$

$$f^k(u) = \prod_{\nu=1}^{n} f_\nu^{k_\nu}(u) \prec \sum_{|l| \geq |k|} (\delta_{lk}, \Lambda_l \Delta_{lk})\, u^l \tag{2.13}$$

in $\mathfrak{A}$.

§3. Substitutie

Stel de complex-waardige functie $f(u,v)$ is gedefinieerd voor elk element $u = (u_1, \ldots, u_m)$ van een verzameling $\mathfrak{A}$ en voor elk element $v = (v_1, \ldots, v_n)$ van een verzameling $\mathfrak{B}$. Stel verder dat van deze functie $f(u,v)$ het omhullingsgedrag in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ vastgelegd is door een relatie van de gedaante

$$(3.1) \qquad f(u,v) \prec \sum_{|h|+|k|\geq p} (\alpha_{hk}, \Lambda_h \, \Omega_{|h|+|k|} \, A_{hk}) u^h v^k,$$

waarin p een geheel getal ≥ 0 is en waarin Λ_h en $\Omega_{|h|+|k|}$ positief zijn. De bedoeling hiervan is dat bij elke keuze van het gehele getal $q \geq p$ de ongelijkheid

$$(3.2) \qquad \left| f(u,v) - \sum_{p\leq|h|+|k|<q} \alpha_{hk} u^h v^k \right| \leq \sum_{|h|+|k|=q} \Lambda_h \, \Omega_q \, A_{hk} \, |u^h \, v^k|$$

geldt voor ieder element u van $\mathfrak{A}$ en voor ieder element v van $\mathfrak{B}$ en dat bovendien steeds

$$(3.3) \qquad |\alpha_{hk}| \leq \Lambda_h \, \Omega_{|h|+|k|} \, A_{hk}$$

is. Anders gezegd: de termen worden gerangschikt naar $|h|+|k|$.

De vraag die gesteld wordt luidt als volgt: Indien $v_\nu(u)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ complex-waardige functies van $u = (u_1, \ldots, u_m)$ in $\mathfrak{A}$ zijn zodanig dat $v(u) = (v_1(u), \ldots, v_n(u))$ voor elk punt u van $\mathfrak{A}$ tot de verzameling $\mathfrak{B}$ behoort en dat in $\mathfrak{A}$ omhullingsrelaties van de gedaante

$$(3.4) \qquad v_\nu(u) \prec \sum_{|h|\geq 1} (\beta_{\nu h}, \Lambda_h \, B_{\nu h}) u^h \quad (\nu = 1,2,\ldots,n)$$

gelden, onder welke voorwaarden stelt dan

$$f(u,v(u)) = f(u_1, \ldots, u_m, v_1(u), \ldots, v_n(u))$$

in $\mathfrak{A}$ een functie van u voor, waarvan het omhullingsgedrag bekend is? Hiermede wordt bedoeld dat in $\mathfrak{A}$ de relatie

$$(3.5) \qquad f(u,v(u)) \prec \sum_{|h|\geq p} (\gamma_h, \Lambda_h \, \Omega_{|h|} \, \Gamma_h) u^h$$

geldt, waarin de coëfficiënten γ_h bepaald worden door de formele ontwikkeling

$$(3.6) \qquad \sum_{|h|\geq p} \gamma_h u^h = \sum_{|h|+|k|\geq p} \alpha_{hk} u^h \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \beta_{\nu l} u^l \Big)^{k_\nu}$$

en waarin de coëfficiënten Γ_h door de corresponderende kapitale relatie bepaald worden.

Het antwoord op deze vraag wordt gegeven in de volgende stelling welke een substitutiestelling genoemd wordt omdat ze ons in staat stelt onder algemene voorwaarden in omhullingsrelaties zoals (3.1) in de plaats van de onafhankelijke variabelen v_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) functies $v_\nu(u)$ van u te substitueren.

Stelling 3.1 (Substitutiestelling). Stel

$$(3.7) \qquad \Lambda_h \Lambda_{h'} \leq \Lambda_{h+h'}$$

voor elk paar m-tupels h en h' met gehele componenten ≥ 0. Stel verder dat Ω_q voor elk geheel getal $q \geq p$ een positief monotoon niet-afnemende functie van q is. Dan geldt, onder de hierboven geformuleerde voorwaarden (3.1) en (3.4), formule (3.5), waarbij γ_h en Γ_h op de hierboven aangegeven manier bepaald worden.

Opmerking 1. Uit (3.7) volgt $\Lambda_0 \Lambda_0 \leq \Lambda_0$ dus $\Lambda_0 \leq 1$. Uit het bewijs blijkt dat de substitutiestelling blijft gelden als in het rechterlid van (3.1) Λ_h voor h = 0 door 1 vervangen wordt. Dit betekent dat de substitutiestelling blijft gelden als (3.1) vervangen wordt door de minder eisende conditie

$$(3.8) \quad f(u,v) < \sum_{|k|\geq p} (\alpha_{0k}, \Omega_{|k|} A_{0k}) v^k + \sum_{\substack{|h|+|k|\geq p \\ |h|>0}} (\alpha_{hk}, \Lambda_h \Omega_{|h|+|k|} A_{hk}) u^h v^k.$$

Opmerking 2. Worden de formele ontwikkelingen

$$\prod_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \beta_{\nu l}\, u^{l} \Big)^{k_\nu} = \sum_{|h'|\geq |k|} \delta_{h'k}\, u^{h'}$$

en de corresponderende kapitale relaties ingevoerd, dan volgt uit (3.6) de formele ontwikkeling

$$\sum_{|l|\geq p} \gamma_l\, u^l = \sum_{|h|+|k|\geq p} \alpha_{hk}\, u^h \sum_{|h'|\geq |k|} \delta_{h'k}\, u^{h'}$$

$$= \sum_{|l|\geq p} u^l \sum_{\substack{|h|+|h'|=|l| \\ |k|\leq |h'|;\ |h|+|k|\geq p}} \alpha_{hk}\, \delta_{h'k}.$$

Voor elk m-tupel l met gehele componenten ≥ 0 en met $|l| \geq p$ vindt men dus

$$\gamma_l = \sum_{\substack{|h|+|h'|=|l| \\ |k|\leq |h'|;\ |h|+|k|\geq p}} \alpha_{hk}\, \delta_{h'k}. \tag{3.9}$$

Via de corresponderende kapitale relaties vindt men een dergelijke uitdrukking voor Γ_l.

Bewijs: Uit (3.1) volgt (3.2) voor elk geheel getal $q \geq p$, voor elk element u van $\mathfrak{A}$ en voor elk element v van $\mathfrak{B}$. Deze formule (3.2) blijft gelden als daarin v_ν $(1 \leq \nu \leq n)$ door $v_\nu(u)$ vervangen wordt, waarin u een willekeurig element van $\mathfrak{A}$ voorstelt; dit is zo, omdat dan $(v_1(u), \ldots, v_n(u))$ tot $\mathfrak{B}$ behoort. Dus

$$\Big| f(u,v(u)) - \sum_{p\leq |h|+|k|<q} \alpha_{hk}\, u^h\, v^k(u) \Big| \leq I, \tag{3.10}$$

waarin

$$I = \Omega_q \sum_{p\leq |h|+|k|=q} \Lambda_h\, A_{hk}\, |u^h\, v^k(u)|. \tag{3.11}$$

In verband met de tweede helft van stelling 2.4 (met $f_\nu = v_\nu$) volgt uit (3.4) na vermenigvuldigen met $\alpha_{hk}\, u^h$ en sommeren over $|h| + |k|$

$$\Big| \sum_{p\leq |h|+|k|<q} \alpha_{hk}\, u^h\, v^k(u) - II \Big| \leq III, \tag{3.12}$$

waarin

$$(3.13)\qquad II = \sum_{p\le|h|+|k|<q} \alpha_{hk}\, u^{h} \sum_{|k|\le|h'|<q-|h|} \delta_{h'k}\, u^{h'}$$

en

$$(3.14)\qquad III = \sum_{p\le|h|+|k|<q} \Lambda_h\, \Omega_{|h|+|k|}\, A_{hk}\, |u^{h}| \sum_{|h'|=q-|h|} \Lambda_{h'} \Delta_{h'k} |u^{h'}|.$$

Het is voldoende te bewijzen dat

$$(3.15)\qquad II = \sum_{p\le|l|<q} \gamma_l\, v^{l},$$

$$(3.16)\qquad III \le \sum_{p\le|h|+|k|<|h|+|h'|=q} \Lambda_h \Lambda_{h'} \Omega_{|h|+|k|} A_{hk} \Delta_{h'k} |u^{h+h'}|$$

en

$$(3.17)\qquad I \le \Omega_q \sum_{p\le|h|+|k|=|h|+|h'|=q} \Lambda_h \Lambda_{h'} A_{hk} \Delta_{h'k} |u^{h+h'}|$$

is, waarin (in verband met opmerking 1) Λ_h voor $h = 0$ door 1 vervangen mag worden. Immers uit (3.16) en (3.17) volgt

$$I + III \le \sum_{p\le|h|+|k|\le|h|+|h'|=q} \Lambda_h \Lambda_{h'} \Omega_{|h|+|k|} A_{hk} \Delta_{h'k} |u^{h+h'}|.$$

Wegens $|k| \le |h'|$ en wegens de monotonie van $\Omega_{|h|+|k|}$ is

$$\Omega_{|h|+|k|} \le \Omega_{|h|+|h'|} = \Omega_{|l|},$$

als $l = h + h'$ gesteld wordt, zodat uit formule (3.7) volgt (die ook geldt als Λ_h voor $h = 0$ door 1 vervangen wordt)

$$I + III \le \sum_{|l|=q} \Lambda_l\, \Omega_{|l|}\, |u^{l}| \sum_{\substack{|h|+|h'|=|l| \\ |k|\le|h'|}} A_{hk}\, \Delta_{h'k}$$

$$= \sum_{|l|=q} \Lambda_l\, \Omega_{|l|}\, \Gamma_l\, |u^{l}|$$

wegens de kapitale relatie, corresponderend met (3.9).

In verband met (3.15), (3.16) en (3.17) volgt dus uit (3.10) en (3.12)

$$|f(u,v(u)) - \sum_{p\le|l|<q} \gamma_l v^l| \le I + III \le \sum_{|l|=q} \Lambda_l \, \Omega_{|l|} \, \Gamma_l \, |u^l|,$$

waarmede de gevraagde betrekking (3.5) bewezen is.

Bewijs van formule (3.15). Wegens (3.13) is

$$II = \sum_{p\le|h|+|k|\le|h|+|h'|<q} \alpha_{hk} \, \delta_{h'k} \, u^{h+h'} =$$

$$= \sum_{p\le|l|<q} u^l \sum_{\substack{|h|+|h'|=|l| \\ |k|\le|h'|\,;\,|h|+|k|\ge p}} \alpha_{hk} \, \delta_{h'k} = \sum_{p\le|l|<q} \gamma_l \, u^l$$

wegens (3.9).

Bewijs van formule (3.16). In de kapitale relatie corresponderende met (3.9) komen alleen de termen met $|h'| \ge |k|$ in aanmerking, omdat de coëfficiënten $\Delta_{h'k}$ met $|h'| < |k|$ niet optreden. Wegens de monotonie van $\Omega_{|h|+|k|}$ mag men dus $\Omega_{|h|+|k|} \le \Omega_{|h|+|h'|}$ veronderstellen, dus

$$III \le \sum_{p\le|h|+|k|\le|h|+|h'|=q} \Lambda_{h'+h} \, \Omega_{|h|+|h'|} \, |u^{h'+h}| \, A_{hk} \, \Delta_{h'k}$$

$$= \sum_{|l|=q} \Lambda_l \, \Omega_{|l|} \, |u^l| \sum_{\substack{|h|+|h'|=|l| \\ p\le|h|+|k|\,;\,|k|\le|h'|}} A_{hk} \, \Delta_{h'k}$$

$$= \sum_{|l|=q} \Lambda_l \, \Omega_{|l|} \, \Gamma_l \, |u^l|$$

wegens de met (3.9) corresponderende kapitale relatie.

Bewijs van formule (3.17). Volgens (3.11) is het voldoende te bewijzen dat

$$(3.18) \quad \sum_{p\le|h|+|k|=q} \Lambda_h A_{hk} |u^h v^k(u)| \le \sum_{p\le|h|+|k|=|h|+|h'|=q} \Lambda_h \Lambda_{h'} A_{hk} \Delta_{h'k} |u^{h+h'}|.$$

In verband met formule (3.4) geldt (2.13), met $f(u) = v(u)$, waaruit bij de keuze $q = |k|$ volgt

$$|v^k(u)| \leq \sum_{|h'|=|k|} \Lambda_{h'}\Delta_{h'k}|u^{h'}|,$$

dus het linkerlid van (3.18) is

$$\leq \sum_{p\leq|h|+|k|=q} \Lambda_h A_{hk} \sum_{|h'|=|k|} \Lambda_{h'}\Delta_{h'k} |u^{h+h'}|.$$

Hiermede is het bewijs van de substitutiestelling voltooid.

Beschouw het bijzondere geval van de substitutiestelling dat men verkrijgt door f(u,v) onafhankelijk van u te kiezen. Dan gaat (3.1), als daarin, in overeenstemming met opmerking 1, Λ_h voor h = 0 door 1 vervangen wordt, over in

$$(3.19) \qquad f(v_1,\dots,v_n) = f(v) \prec \sum_{|k|\geq p} (\alpha_k, \Omega_{|k|} A_k)v^k,$$

waarin p geheel ≥ 1 is en $\Omega_{|k|}$ een positieve monotoon niet-afnemende functie van $|k|$ voorstelt. Als $v_\nu(u)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ in $\mathfrak{A}$ omhuld wordt op de in (3.4) aangegeven manier met eigenschap (3.7), dan is

$$(3.20) \qquad f(v_1(u),\dots,v_n(u)) = f(v(u)) \prec \sum_{|h|\geq p} (\gamma_h, \Lambda_h \Omega_{|h|} \Gamma_h)u^h$$

waarin de coëfficiënten γ_h en Γ_h bepaald worden door de formele ontwikkeling

$$(3.21) \qquad \sum_{|h|\geq p} \gamma_h u^h = \sum_{|k|\geq p} \alpha_k \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \beta_{\nu l} u^l\Big)^{k_\nu}$$

en door de corresponderende kapitale relatie.
Op die manier krijgt men

<u>Stelling 3.2 (Speciale substitutiestelling)</u>. Als (3.19) geldt, waarin p geheel ≥ 1 is en waarin $\Omega_{|k|}$ een positieve monotoon niet-afnemende functie van $|k|$ voorstelt en als (3.4) geldt, waarin Λ_h eigenschap (3.7) bezit, dan geldt (3.20), waarin de coëfficiënten γ_h en Γ_h door de formele ontwikkeling (3.21) en de corresponderende kapitale ontwikkeling bepaald zijn.

§4. Impliciete functies

Het doel van deze paragraaf is te laten zien dat impliciete functies, gedefinieerd door middel van functies met bekend omhullingsgedrag, eveneens een bekend omhullingsgedrag bezitten. Stel van n functies $f_\nu(u,v)$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ is voor elk tot een verzameling $\mathfrak{A}$ behorend m-tupel $u = (u_1, \dots, u_m)$ en voor elk tot een verzameling $\mathfrak{B}$ behorend m-tupel $v = (v_1, \dots, v_n)$ het omhullingsgedrag bepaald door

$$(4.1) \qquad f_\nu(u,v) \prec \sum_{|h|+|k|\geq 1} (\alpha_{\nu hk}, A_{\nu hk}) u^h v^k \quad (\nu = 1,2,\dots,n),$$

waarin de coëfficiënten $\alpha_{\nu hk}$ en $A_{\nu hk}$ bekend zijn.
We beperken ons tot functies $z = z(u)$ op $\mathfrak{A}$ met waarden in $\mathfrak{B}$, die impliciet gegeven worden door relaties van de vorm

$$(4.2) \qquad f_\nu(u,z(u)) = z_\nu(u) \quad (\nu = 1,2,\dots,n).$$

De vraag is of het omhullingsgedrag van $z(u)$ bekend is. We zullen zien dat dit het geval is, als voldaan is aan de voorwaarden

$$(4.3) \qquad A_{\nu 0k} = 0 \text{ voor } 1 \leq \nu \leq n \text{ en } |k| = 1.$$

Wegens $|\alpha_{\nu hk}| \leq A_{\nu hk}$ is dan ook

$$(4.4) \qquad \alpha_{\nu 0k} = 0 \text{ voor } 1 \leq \nu \leq n \text{ en } |k| = 1.$$

Stelling 4.1. Onder de genoemde voorwaarden voldoet de impliciete functie $z(u)$ aan de omhullingsrelatie

$$(4.5) \qquad z_\nu(u) \prec \sum_{|h|\geq 1} (\gamma_{\nu h}, \Gamma_{\nu h}) u^h \quad (\nu = 1,2,\dots,n),$$

waarin de coëfficiënten $\gamma_{\nu h}$ en $\Gamma_{\nu h}$ bepaald worden door de formele ontwikkeling

$$(4.6) \qquad \sum_{|l|\geq 1} \gamma_l u^l = \sum_{|h|+|k|\geq 1} \alpha_{\nu hk} u^h \prod_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \gamma_{\sigma l} u^l \Big)^{k_\sigma}$$

en door de corresponderende kapitale relatie.
Het bewijs valt in drie delen uiteen.

Eerste deel: De coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ worden door de formele ontwikkeling (4.6) ondubbelzinnig bepaald. Op eenzelfde manier toont men aan dat de coëfficiënten $\Gamma_{\nu l}$ door de met (4.6) corresponderende kapitale relatie vastgelegd zijn.

Bewijs: De bijdrage tot het rechterlid van (4.6) geleverd door de termen van de eerste graad in $u_1, \ldots, u_m$ is gelijk aan

$$\sum_{|h|+|k|=1} \alpha_{\nu hk} u^h \prod_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \gamma_{\sigma l} u^l \Big)^{k_\sigma} = \sum_{|h|=1} \alpha_{\nu h0} u^h$$

wegens (4.4). Deze bijdrage is gelijk aan de bijdrage tot het linkerlid van (4.6) geleverd door de termen van de eerste graad in $u_1, \ldots, u_m$ dan en alleen dan als voor elk m-tupel l met $|l| = 1$

$$\gamma_{\nu l} = \alpha_{\nu l0} \quad (1 \leq \nu \leq n) \tag{4.7}$$

is. Deze coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ zijn dus ondubbelzinnig vastgelegd.

Dit benuttend merken we op dat de bijdrage tot het linkerlid van (4.6) geleverd door de termen van de tweede graad in $u_1, \ldots, u_m$ bekend zijn, zo dat volgens (4.6) de coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ met $|l| = 2$ ondubbelzinnig vastgelegd zijn. Zo doorgaande vindt men dat de coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ voor elk m-tupel l met $|l| \geq 1$ door (4.6) ondubbelzinnig bepaald zijn.

Tweede deel: Als voor elk m-tupel l met gehele componenten ≥ 0 en voor elk n-tupel k met gehele componenten ≥ 0 en met $|l| \geq |k| \geq 1$ de coëfficiënten β_{lk} en B_{lk} bepaald worden door de formele ontwikkeling

$$\sum_{|l|\geq|k|} \beta_{lk} u^l = \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \gamma_{\nu l} u^l \Big)^{k_\nu} \tag{4.8}$$

en door de corresponderende kapitale relatie, dan geldt voor elk m-tupel h' met gehele componenten ≥ 0 en met $|h'| \geq 1$ de formule

$$\gamma_{\nu h'} = \sum\nolimits_1 \alpha_{\nu hk} \beta_{lk} \tag{4.9}$$

en de corresponderende kapitale relatie; bij gegeven m-tupel $h' \neq 0$ met gehele componenten ≥ 0 wordt de som $\sum_1$ uitgestrekt over de m-tupels h en l en de n-tupels k, met gehele componenten ≥ 0 en met de eigenschap

$$h + l = h'; \ |h| + |k| \geq 1; \ |l| \geq |k|. \tag{4.10}$$

Bewijs: Men heeft wegens (4.6) en (4.8)

$$\sum_{|l|\geq 1} \gamma_{\nu l}\, u^l = \sum_{|h|+|k|\geq 1} \alpha_{\nu hk}\, u^h \prod_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \gamma_{\sigma l}\, u^l \Big)^{k_\sigma}$$

$$= \sum_{|h|+|k|\geq 1} \alpha_{\nu hk} \sum_{|l|\geq |k|} \beta_{lk}\, u^{h+l}$$

$$= \sum_{|h'|\geq 1} u^{h'} \sum\nolimits_1 \alpha_{\nu hk}\, \beta_{lk}.$$

Dit geeft de gevraagde betrekking (4.9).

Derde (en laatste) deel van het bewijs: Aangezien uit de definities (4.6) en (4.7) volgt $|\gamma_{\nu l}| \leq \Gamma_{\nu l}$, is het voldoende aan te tonen dat voor elk geheel getal $q \geq 1$ de ongelijkheden

$$(4.11) \qquad \Big|z_\nu - \sum_{1\leq |h| < q} \gamma_{\nu h}\, u^h\Big| \leq \sum_{|h|=q} \Gamma_{\nu h}\, |u^h| \qquad (1 \leq \nu \leq n)$$

gelden. Deze ongelijkheden zijn evident voor $q = 1$, want uit (4.1) en (4.2) volgt

$$(4.12) \begin{cases} |z_\nu| = |f_\nu(u,z)| \leq \displaystyle\sum_{|h|+|k|=1} A_{\nu hk}\, |u^h z^k| \\ \quad = \displaystyle\sum_{|h|=1} A_{\nu h0}\, |u^h| = \sum_{|h|=1} \Gamma_{\nu h}\, |u^h| \end{cases}$$

wegens (4.3) en (4.7). In het bewijs mogen we dus aannemen dat $q \geq 2$ is en dat (4.11) met q vervangen door q-1 reeds bewezen is. Dan is

$$(4.13) \qquad z_\nu = \sum_{1\leq |h| < q-1} \gamma_{\nu h}\, u^h + \theta_1 \sum_{|h|=q-1} \Gamma_{\nu h}\, |u^h|.$$

In dit bewijs stellen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$ geschikt gekozen complexe getallen met absolute waarden ≤ 1 voor.

Volgens de gegeneraliseerde productstelling (stelling 2.4) volgt uit (4.13) voor elk n-tupel k met gehele componenten ≥ 0 en met $|k| \geq 1$

$$(4.14) \qquad z^k = \sum_{|k|\leq |l| < q} \beta_{lk}\, u^l + \theta_2 \sum_{|l|=q} B_{lk}\, |u^l|;$$

hierin stellen β_{lk} en B_{lk} de in (4.8) ingevoerde coëfficiënten voor.
Wegens (4.1) is

$$f_\nu(u,v) = \sum_{1\leq|h|+|k|<q} \alpha_{\nu hk}\, u^h v^k + \theta_3 \sum_{|h|+|k|=q} A_{\nu hk}\, |u^h v^k|.$$

Deze formule geldt in het bijzonder voor $v = z$, dus

$$(4.15) \quad z_\nu = f_\nu(u,z) = \sum_{1\leq|h|+|k|<q} \alpha_{\nu hk} u^h z^k + \theta_4 \sum_{|h|+|k|=q} A_{\nu hk} |u^h z^k|.$$

Volgens (4.14), toegepast met $q = |k|$, dus met $\sum_{|k|\leq|l|<q} = 0$, is de laatste som voorkomende in het rechterlid van (4.15) hoogstens gelijk aan

$$(4.16) \quad \sum_{|h|+|k|=q} A_{\nu hk} |u^h| \sum_{|l|=|k|} B_{lk} |u^l| = \sum_{|h'|=q} |u^{h'}| \sum\nolimits_2 A_{\nu hk}\, B_{lk}.$$

Bij gegeven m-tupel h' met gehele componenten ≥ 0 wordt de som $\sum_2$ uitgestrekt over de m-tupels h en l en de n-tupels k, met gehele componenten ≥ 0 en met de eigenschappen

$$(4.17) \qquad h + l = h'; \quad |l| = |k|.$$

Past men (4.14) toe met $q - |h|$ in plaats van q, dan vindt men wegens $|\alpha_{\nu hk}| \leq A_{\nu hk}$

$$(4.18) \quad \sum_{1\leq|h|+|k|<q} \alpha_{\nu hk} u^h z^k = \sum_{1\leq|h|+|k|\leq|h|+|l|<q} \alpha_{\nu hk} \beta_{lk} u^{h+l}$$

$$+ \theta_5 \sum_{\substack{1\leq|h|+|k|<q \\ |l|=q-|h|}} A_{\nu hk} B_{lk} |u^{h+l}|.$$

De eerste som in het rechterlid is

$$\sum_{1\leq|h'|<q} u^{h'} \sum\nolimits_1 \alpha_{\nu hk}\, \beta_{lk} = \sum_{1\leq|h'|<q} \gamma_{\nu h'}\, u^{h'}$$

wegens (4.9). De laatste in het rechterlid van (4.18) optredende som is

$$\sum_{|h'|=q} |u^{h'}| \sum\nolimits_3 A_{\nu hk}\, B_{lk};$$

bij gegeven m-tupel h' met gehele componenten ≥ 0 en met $|h'| = q$ wordt $\sum_3$ uitgestrekt over de m-tupels h en l en de n-tupels k, met gehele componenten ≥ 0, met de eigenschap

$$h + l = h'; \quad |h| + |k| \geq 1; \quad |k| < |l|.$$

Voor elk m-tupel h' met gehele componenten ≥ 0 en met $|h'| = q$ is

$$\textstyle\sum_2 + \sum_3 = \sum_1,$$

omdat de relaties (4.17) impliceren

$$|h| + |k| = |h| + |l| = |h'| \geq 1.$$

Dus uit (4.15), (4.16) en (4.18) volgt

$$z_\nu = \sum_{1 \leq |h'| < q} \gamma_{\nu h'} u^{h'} + \theta_6 \sum_{|h'| = q} |u^{h'}| \textstyle\sum_1 A_{\nu hk} B_{lk},$$

waarin $\sum_1$ volgens (4.9) gelijk is aan $\Gamma_{\nu h'}$. Hiermede is de gevraagde ongelijkheid (4.11) bewezen.

Opmerking. Uit (4.6) volgt dat $\gamma_{\nu l}$ geschreven kan worden als een lineaire combinatie $\psi(\alpha_{\sigma hk})$ van producten van de gedaante $\alpha_{\sigma_1 h_1 k_1} \cdots \alpha_{\sigma_r h_r k_r}$ met coëfficiënten ≥ 0 en ook $\Gamma_{\nu l} = \psi(A_{\sigma hk})$.
Voor elk getal $\rho \neq 0$ blijft de identiteit (4.6) gelden, als u, $\gamma_{\nu l}$ en $\alpha_{\nu hk}$ door $\rho^{-1} u$, $\rho^{l} \gamma_{\nu l}$ en $\rho^{h} \alpha_{\nu hk}$ vervangen worden. Dus $\gamma_{\nu l}$ wordt met ρ^{l} vermenigvuldigd als elke coëfficiënt $\alpha_{\sigma hk}$ met ρ^{h} vermenigvuldigd wordt. Hieruit volgt, dat $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = |l|$.

Met behulp van bovenstaande stelling is het mogelijk, niet alleen een vergelijkingssysteem van de gedaante (4.2), maar ook het algemenere vergelijkingssysteem van de vorm

$$f_\nu(u,z) = \sum_{\tau=1}^{n} \sigma_{\nu\tau} z_\tau \tag{4.19}$$

te behandelen, waarbij de determinant Δ gevormd door de n^2 elementen $\sigma_{\nu\tau}$ $(1 \leq \nu \leq n;\ 1 \leq \tau \leq n)$ ongelijk aan nul is. Immers, als

$$\sum_{\tau=1}^{n} \sigma_{\nu\tau} v_\tau = v_\nu^{*} \qquad (1 \leq \nu \leq n) \tag{4.20}$$

gesteld wordt, dan kan men wegens $\Delta \neq 0$ schrijven

(4.21) $$v_\tau = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma^{*}_{\tau\nu}\, v^{*}_{\nu}.$$

Aangezien $v^k = \prod_{\nu=1}^{n} v_\nu^{k_\nu}$ voor iedere keuze der gehele getallen $k_\nu \geq 0$ een homogene veelterm in $v_1, \ldots, v_n$ van de graad $|k|$ is, is v^k ook een homogene veelterm in $v^{*}_1, \ldots, v^{*}_n$ van de graad $|k|$. De substitutie (4.20) (of, zo men wil, de substitutie (4.21)), voert (4.19) over in

(4.22) $$f^{*}_\nu(u,z^{*}) = z^{*}_\nu \qquad (1 \leq \nu \leq n),$$

waarbij

(4.23) $$f_\nu(u,v) = f^{*}_\nu(u,v^{*}) \text{ en } z_\tau = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma^{*}_{\tau\nu}\, z^{*}_\nu.$$

Volgens de voorgaande stelling (met f_ν en z_ν vervangen door f^{*}_ν en z^{*}_ν) is het omhullingsgedrag van de impliciete functie $z^{*}(u)$ bekend, zodat wegens (4.23) ook het omhullingsgedrag van z_τ $(1 \leq \tau \leq n)$ bekend is.

Deze beschouwing geeft een beter inzicht in de gestelde voorwaarden (4.3) en (4.4). Volgens voorwaarde (4.4) zijn in de omhullende reeks van $f_\nu(u,v)$ de coëfficiënten van v_τ $(1 \leq \tau \leq n)$ gelijk aan nul. Als aan die voorwaarde niet voldaan is, kan men in (4.2) die termen overbrengen naar het rechterlid, zodat dan het vergelijkingssysteem (4.2) de gedaante (4.19) aanneemt. De enige voorwaarde die dan gesteld wordt opdat de hier ontwikkelde methode toegepast kan worden is dat deze n^2 coëfficiënten een determinant $\Delta \neq 0$ vormen.

Het is mogelijk stelling 4.1 in een andere richting te generaliseren en wel door aan elk m-tupel h met gehele componenten ≥ 0 een positief getal Λ_h toe te voegen zodanig dat

(4.24) $$\Lambda_h\, \Lambda_l \leq \Lambda_{h+l}$$

voor elk paar m-tupels h en l met gehele componenten ≥ 0.

Stelling 4.2. Stel de voorwaarden van stelling 4.1 zijn vervuld, behalve dat conditie (4.1) vervangen wordt door de zwakkere voorwaarde

$$f_\nu(u,v) \prec \sum_{|h|+|k|\geq 1} (\alpha_{\nu hk}, \Lambda_h A_{\nu hk}) u^h v^k \quad (\nu = 1,2,\ldots,n),$$

waarin Λ_h aan (4.24) voldoet. Dan is

$$z_\nu(u) \prec \sum_{|h|\geq 1} (\gamma_{\nu h}, \Lambda_h \Gamma_{\nu h}) u^h \qquad (\nu = 1,2,\ldots,n).$$

Bewijs: Past men stelling 4.1 met $\Lambda_h A_{\nu hk}$ in plaats van $A_{\nu hk}$ toe, dan vindt men volgens de eerder in deze paragraaf gemaakte opmerking

$$z_\nu \prec \sum_{|l|\geq 1} (\gamma_{\nu h}, \psi(\Lambda_h A_{\sigma hk})) u^l,$$

waarin de coëfficiënt $\psi(\Lambda_h A_{\sigma hk})$ een lineaire combinatie (met coëfficiënten ≥ 0) is van producten van de gedaante

$$\Lambda_{h_1} \Lambda_{h_2} \cdots \Lambda_{h_r} A_{\sigma_1 h_1 k_1} \cdots A_{\sigma_r h_r k_r} \text{ met } h_1 + \ldots + h_r = |l|.$$

Door herhaalde toepassing van (4.24) krijgt men

$$\Lambda_{h_1} \Lambda_{h_2} \cdots \Lambda_{h_r} \leq \Lambda_{h_1+\ldots+h_r} = \Lambda_l,$$

dus

$$\psi(\Lambda_h A_{\sigma hk}) \leq \Lambda_l \, \psi(A_{\sigma hk}) = \Lambda_l \, \Gamma_l,$$

waarmede het gevraagde bewijs geleverd is.

§5. Differentiaalsystemen van de eerste orde

Beschouw een systeem van n gewone differentiaalvergelijkingen met onafhankelijk veranderlijke u en met n afhankelijke variabelen $v_1, \dots, v_n$ van de gedaante

$$\frac{dv_\nu}{du} = f_\nu(u,v) \qquad (1 \leq \nu \leq n), \tag{5.1}$$

waarin $v = (v_1, \dots, v_n)$. Laten we eerst het geval behandelen dat elk der n functies $f_\nu(u,v)$ een analytische functie van u, $v_1, \dots, v_n$ is in de oorsprong van de (1+n)-dimensionale ruimte. Het is bekend dat dan het differentiaalsysteem (5.1) in de omgeving van u = 0 één en slechts één oplossing $v(u) = (v_1(u), \dots, v_n(u))$ bezit met

$$v_\nu(0) = 0 \quad (1 \leq \nu \leq n). \tag{5.2}$$

De componenten $v_\nu(u)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ van die oplossing zijn in de omgeving van u = 0 analytische functies van u en worden daar dus voorgesteld door convergente reeksen van de gedaante

$$v_\nu(u) = \sum_{l \geq 1} \gamma_{\nu l}\, u^l. \tag{5.3}$$

De in deze reeksontwikkelingen optredende coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ worden als volgt ondubbelzinnig bepaald.

Wordt de in de omgeving van de in de (1+n)-dimensionale ruimte gelegen oorsprong analytische functie $f_\nu(u,v)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ voorgesteld door de convergente reeks

$$f_\nu(u,v) = \sum_{h \geq 0;\, |k| \geq 0} \alpha_{\nu hk}\, u^h v^k \quad (1 \leq \nu \leq n), \tag{5.4}$$

dan vindt men de coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ $(1 \leq \nu \leq n;\ |l| \geq 1)$ door beide leden van (5.3) formeel naar u te differentiëren, zodat men de formele ontwikkelingen

$$\sum_{l \geq 1} l\gamma_{\nu l}\, u^{l-1} = \sum_{h \geq 0;\, |k| \geq 0} \alpha_{\nu hk}\, u^h \prod_{\sigma=1}^{n} \Big(\sum_{l \geq 1} \gamma_{\sigma l}\, u^l \Big)^{k_\sigma} \tag{5.5}$$

$(\nu = 1, 2, \dots, n)$ krijgt. Beschouwt men aan weerskanten de termen van de nulde graad in u, dan vindt men

(5.6) $$\gamma_{\nu 1} = \alpha_{\nu 00} \qquad (1 \leq \nu \leq n).$$

Op die manier zijn de n coëfficiënten $\gamma_{\nu 1}$ bekend, zodat de termen van de eerste graad in de ontwikkeling van het rechterlid van (5.5) bekende coëfficiënten bezitten. Aldus vindt men met behulp van (5.5) $\gamma_{\nu 2}$ $(1 \leq \nu \leq n)$ als een veelterm $\psi_{\nu 2}(\alpha_{\sigma hk})$, met coëfficiënten ≥ 0, van de gegeven coëfficiënten $\alpha_{\sigma hk}$ $(1 \leq \sigma \leq n;\ h + |k| \leq 1)$. Zo doorgaande vindt men dat iedere coëfficiënt $\gamma_{\nu l}$ $(1 \leq \nu \leq n;\ l \geq 1)$ gelijk is aan een ondubbelzinnig bepaalde veelterm $\psi_{\nu l}(\alpha_{\sigma hk})$, met coëfficiënten ≥ 0, van gegeven coëfficiënten $\alpha_{\sigma hk}$ $(1 \leq \sigma \leq n;\ h + |k| \leq l-1)$.

Voor de opbouw van de theorie der differentiaalvergelijkingen is dit resultaat van belang, omdat daarop een groot aantal stellingen van die theorie steunen. Het is eveneens van belang om van genoemd resultaat een generalisatie af te leiden, waarin, in plaats van analytische functies, continue functies $f_\nu(u,v)$ met bekend omhullingsgedrag optreden.

Stelling 5.1. Zij $\mathfrak{A}$ een verzameling van complexe getallen u zodanig dat elk punt u van $\mathfrak{A}$ de eigenschap bezit dat $\mathfrak{A}$ het gehele lijnstuk (0,u) bevat. Zij $\mathfrak{B}$ een verzameling van n-tupels $v = (v_1, \ldots, v_n)$ gevormd door complexe getallen v_ν.

Zij $f_\nu(u,v)$ $(1 \leq \nu \leq n)$ een continue functie van u en v die voor elk punt u van $\mathfrak{A}$ en van elk punt v van $\mathfrak{B}$ aan de omhullingsrelatie

(5.7) $$f_\nu(u,v) \prec \sum_{h \geq 0;\, |k| \geq 0} (\alpha_{\nu hk}, A_{\nu hk}) u^h v^k$$

voldoet.

Als het differentiaalsysteem (5.1) in $\mathfrak{A}$ een oplossing v(u) met eigenschap (5.2) bezit, zodanig dat v(u) voor elk punt u van $\mathfrak{A}$ tot $\mathfrak{B}$ behoort, dan voldoet die oplossing aan de omhullingsrelatie

(5.8) $$v_\nu(u) \prec \sum_{l \geq 1} (\gamma_{\nu l}, \Gamma_{\nu l}) u^l$$

in $\mathfrak{A}$, waarin

(5.9) $$\gamma_{\nu l} = \psi_{\nu l}(\alpha_{\sigma hk}) \text{ en } \Gamma_{\nu l} = \psi_{\nu l}(A_{\sigma hk}),$$

waarin $\psi_{\nu l}(\alpha_{\sigma hk})$ de hierboven genoemde veelterm voorstelt.

Bewijs: Daar de coëfficiënten van $\psi_{\nu l}$ groter dan of gelijk aan nul zijn, volgt uit (5.9), dat $|\psi_{\nu l}| \leq \Gamma_{\nu l}$ is. Het is dus voldoende voor elk geheel getal $q \geq 1$ te bewijzen

(5.10) $$v_\nu(u) = \sum_{1 \leq h < q} \gamma_{\nu h} u^h + \theta_1 \Gamma_{\nu q} u^q \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

In dit bewijs stellen θ_1, θ_2, θ_3 geschikt gekozen getallen voor die in absolute waarden ≤ 1 zijn.

Formule (5.10) is evident voor $q = 1$. Immers omdat $f_\nu(u,v)$ aan de omhullingsrelatie (5.7) voldoet, is

$$|f_\nu(u,v)| \leq A_{\nu 00} = \Gamma_{\nu 1},$$

omdat (5.6) blijft gelden als $\gamma_{\nu 1}$ en $\alpha_{\nu 00}$ door $\Gamma_{\nu 1}$ en $A_{\nu 00}$ vervangen worden; op die manier vindt men dus

$$|v_\nu(u)| = \left|\int_0^u f_\nu(t,v(t))dt\right| \leq \Gamma_{\nu 1} |u|.$$

In het bewijs van (5.10) mag men dus veronderstellen dat $q \geq 2$ is en dat

$$v_\nu(u) = \sum_{1 \leq h < q-1} \gamma_{\nu h} u^h + \theta_2 \Gamma_{\nu,q-1} u^{q-1} \quad (1 \leq \nu \leq n).$$

Met de formele relatie (5.5) kunnen nu de coëfficiënten $\gamma_{\nu l}$ achtereenvolgens bepaald worden. Analoog aan het bewijs van de substitutiestelling (§3), vindt men

$$f_\nu(u,v(u)) = \sum_{0 \leq l < q-1} l\gamma_{\nu l} u^{l-1} + \theta_3 q\Gamma_{\nu q} u^{q-1} \quad (1 \leq \nu \leq n)$$

dus

$$v_\nu(u) = \int_0^u f_\nu(t,v(t))dt = \sum_{0 \leq l < q-1} \gamma_{\nu l} u^l + \theta_1 \Gamma_{\nu q} u^q,$$

waarmede de gevraagde betrekking (5.10) bewezen is.

§6. Toepassingen van de Maclaurin ontwikkeling

De Maclaurin ontwikkeling kan als volgt omschreven worden:
Als $f(t)$ op het lijnstuk dat de oorsprong met een punt $u \neq 0$ verbindt j maal ($j \geq 1$) continu differentieerbaar is naar t, dan is

$$(6.1)\qquad f(u) = \sum_{h=0}^{j-1} \frac{f^{(h)}(0)}{h!}\, u^h + \frac{u^j}{(j-1)!} \int_0^1 f^{(j)}(tu)(1-t)^{j-1}dt.$$

Deze identiteit is evident, want ze geldt voor $j = 1$ wegens

$$(6.2)\qquad f(u) - f(0) = u \int_0^1 f'(tu)dt$$

en verder is voor $1 \leq k \leq j-1$

$$\frac{u^h}{(h-1)!} \int_0^1 f^{(h)}(tu)(1-t)^{h-1}dt - \frac{u^{h+1}}{h!} \int_0^1 f^{(h+1)}(tu)(1-t)^h dt$$

$$= - \frac{u^h}{h!} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(f^{(h)}(tu)(1-t)^h\right)dt = \frac{u^h}{h!} f^{(h)}(0).$$

De gevraagde identiteit volgt dus uit (6.2) door sommatie over $h = 1, 2, \ldots, j-1$.

Stelling 6.1. Als $u \neq 0$ is en $f(t)$ op het lijnstuk dat de oorsprong met u verbindt (de oorsprong inbegrepen) j maal ($j \geq 0$) continu differentieerbaar is (j mag ∞ zijn) met

$$(6.3)\qquad \frac{1}{h!}\, f^{(h)}(t) \leq c_h \qquad (0 \leq h \leq j),$$

en als $c_h = \infty$ voor $h > j$ gesteld wordt, dan geldt de betrekking

$$(6.4)\qquad f(u) \prec \sum_{h \geq 0} \left(\frac{f^{(h)}(0)}{h!},\ c_h\right) u^h.$$

Bewijs: Uit (6.1) volgt voor iedere positieve gehele $q \leq j$

$$\left| f(u) - \sum_{h=0}^{q-1} \frac{f^{(h)}(0)}{h!}\, u^h \right| \leq q c_q\, |u|^q \int_0^1 (1-t)^{q-1}dt = c_q\, |u|^q.$$

Wegens $c_q = \infty$ voor $q > j$ geldt deze ongelijkheid ook voor $q > j$, als daarin $f^{(h)}(0)$ voor $h \geq j$ door willekeurige getallen vervangen worden. Voor $q = 0$ is het linkerlid wegens (6.3) (toegepast met $h = 0$) hoogstens gelijk aan het rechterlid.
Hiermede is (6.4) bewezen.

Stelling 6.2. Als $f(x_1, \ldots, x_m)$ op een lijnstuk, dat de oorsprong met een punt $u = (u_1, \ldots, u_m) \neq 0$ verbindt, q maal ($q \geq 0$) continu differentieerbaar is, dan is voor $0 \leq t \leq 1$

$$(6.5) \qquad \frac{1}{q!} \left(\frac{d}{dt}\right)^q f(tu) = \sum_{|h|=q} \frac{u^h}{h!} \frac{\partial^h}{\partial x^h} f(x)\bigg|_{x=tu}.$$

Het linkerlid is

$$\frac{1}{q!} \left(\frac{d}{dt}\right)^q f(tu_1, \ldots, tu_m)$$

en het rechterlid is de waarde die

$$\sum_{|h|=q} \frac{u_1^{h_1} \ldots u_m^{h_m}}{h_1! \ldots h_m!} \frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_m}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_m^{h_m}} f(x_1, \ldots, x_m)$$

aanneemt in het punt $x = (x_1, \ldots, x_m)$ met

$$x_\mu = tu_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Bewijs: De gevraagde identiteit (6.5) is evident voor $q = 0$. In het bewijs mag men dus aannemen dat $q \geq 1$ is en dat

$$(6.6) \qquad \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{q-1} f(tu) = \sum_{|k|=q-1} \frac{u^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x)\bigg|_{x=tu}.$$

Dan is

$$(6.7) \qquad \frac{1}{(q-1)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^q f(tu) = \sum_{|k|=q-1} \frac{u^k}{k!} \frac{d}{dt} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x)\bigg|_{x=tu}.$$

Wegens

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x)\Big|_{x=tu} = \sum_{\mu=1}^{m} u_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x)\Big|_{x=tu}$$

is het rechterlid van (6.7) gelijk aan

$$(6.8) \qquad \sum_{|k|=q-1}\sum_{\mu=1}^{m} \frac{u^k u_\mu}{k!}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x)\Big|_{x=tu} = \sum_{|k|=q-1;\,|l|=1} \frac{u^{k+l}}{k!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^{k+l}} f(x)\Big|_{x=tu},$$

waarin de laatste som uitgestrekt wordt over de paren m-tupels k en l met $|k| = q-1$ en $|l| = 1$. Het rechterlid van (6.8) is een lineaire combinatie van

$$(6.9) \qquad u^h \frac{\partial^h}{\partial x^h} f(x)\Big|_{x=tu},$$

waarin $|h| = |k| + |l| = q$. De coëfficiënt van (6.9) in deze lineaire combinatie is

$$(6.10) \qquad \sum_{\substack{|k|+|l|=|h| \\ |k|=q-1;\,|l|=1}} \frac{1}{k!}.$$

Deze som bestaat uit hoogstens m termen, omdat voor l alleen de m-tupels $(0, 0, \ldots, 0, 1_\mu, 0, \ldots, 0)$ met $1_\mu = 1$ in aanmerking komen. Het corresponderende m-tupel k met de eigenschap $|k| + |l| = |h|$ heeft dan de gedaante $(h_1, \ldots, h_{\mu-1}, h_\mu - 1, h_{\mu+1}, \ldots, h_m)$, zodat $\frac{1}{k!} = \frac{h_\mu}{h!}$ is. De som (6.10) is dus gelijk aan

$$\frac{1}{h!}\sum_{\mu=1}^{m} h_\mu = \frac{|h|}{h!} = \frac{q}{h!},$$

zodat het rechterlid van (6.8), dus ook het rechterlid van (6.7), gelijk is aan

$$q \sum_{|h|=q} \frac{u^h}{h!}\frac{\partial^h}{\partial x^h} f(x)\Big|_{x=tu}.$$

Dit levert de gevraagde betrekking (6.5).

De Maclaurin ontwikkeling (6.1) geldt voor een functie van één veranderlijke, maar kan met behulp van de voorgaande stelling gegeneraliseerd worden tot een relatie voor m variabelen. Uit (6.1) en (6.5) volgt namelijk

Stelling 6.3. Als $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ op het lijnstuk dat de oorsprong met een m-tupel $u = (u_1, \ldots, u_m) \neq 0$ verbindt, q maal ($q \geq 1$) continu partieel differentieerbaar is, dan is

$$(6.11) \qquad f(u) = \sum_{0 \leq |h| < q} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} u^h + q \sum_{|h|=q} \frac{u^h}{h!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^h f(x)}{\partial x^h} \right|_{x=tu} (1-t)^{q-1} dt.$$

Het doel van deze stelling, althans in de theorie van de omhullende reeksen, is de volgende bewering.

Stelling 6.4. Zij $\mathfrak{A}$ een verzameling van m-tupels zó dat elk element u van $\mathfrak{A}$ de eigenschap bezit dat $\mathfrak{A}$ het lijnstuk bevat dat u met de oorsprong verbindt. Stel $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ is j maal ($j \geq 0$) continu partieel differentieerbaar in $\mathfrak{A}$ naar $x_1, \ldots, x_m$.

Stel

$$(6.12) \qquad \frac{1}{h!} |f^{(h)}(x)| \leq c_h \quad (0 \leq |h| \leq j)$$

waarin het linkerlid een afkorting is voor de absolute waarde van

$$\frac{1}{h_1!\, h_2! \ldots h_m!} \frac{\partial^{h_1 + \ldots + h_m} f(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_m^{h_m}}.$$

Stel $c_h = \infty$ voor $|h| > j$. Dan is in $\mathfrak{A}$

$$(6.13) \qquad f(u) \prec \sum_{|h| \geq 0} \left(\frac{f^{(h)}(0)}{h!}, c_h\right) u^h.$$

Bewijs: Uit (6.11) en (6.12) volgt voor iedere gehele q met $1 \leq q \leq j$

$$(6.14) \qquad \left|f(u) - \sum_{0 \leq |h| < q} \frac{f^{(h)}(0)}{h!} u^h\right| \leq q \sum_{|h|=q} c_h |u^h| \int_0^1 (1-t)^{q-1} dt$$

$$= \sum_{|h|=q} c_h |u^h|.$$

Ongelijkheid (6.14) geldt ook voor $q > j$, omdat dan c_h voor $|h| = q$ oneindig groot is. Tenslotte volgt ongelijkheid (6.14) voor $q = 0$ uit (6.12), toegepast met $h = 0$ en $x = 0$. Hiermede is het gevraagde bewijs geleverd.

Stelling 6.5. Als $\mathfrak{A}$ de bol $|u_1|^2 + \ldots + |u_m|^2 \leq \rho^2$ met $\rho > 0$ voorstelt en als $f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)$ op de rand van en binnen die bol een analytische functie van $u_1, \ldots, u_m$ met bovengrens b aangeeft, dan is in $\mathfrak{A}$

$$f(u) \prec \sum_{|h| \geq 0} \left(\frac{f^{(h)}(0)}{h!}, b\rho^{-|h|}\right)u^h.$$

De bewering volgt uit de voorgaande stelling, omdat hier de ongelijkheden (6.12) met $c_h = b\rho^{-|h|}$ gelden.

Hier volgen enige eenvoudige toepassingen.

Stelling 6.6. Stel

$$v(u) \prec \sum_{|h| \geq 1} (\beta_h, B_h)u^h$$

in $\mathfrak{A}$. Dan is in $\mathfrak{A}$

$$e^{v(u)} \prec \sum_{|h| \geq 0} (\gamma_h, \lambda\Gamma_h)u^h, \tag{6.15}$$

waarin $\sum_{|h| \geq 0} \gamma_h u^h$ en $\sum_{|h| \geq 0} \Gamma_h u^h$ de formele ontwikkelingen naar machten van $u_1, \ldots, u_m$ van $e^{\sum_{|h| \geq 1} \beta_h u^h}$ en $e^{\sum_{|h| \geq 1} B_h u^h}$ voorstellen en waarin $\lambda = \max(e^{\mathrm{Re}\ v(u)}, 1)$ is.

Bewijs: De functie $f(v) = e^v$ voldoet voor elk punt t op het lijnsegment, dat de oorsprong met een punt $v \neq 0$ verbindt, aan de betrekking

$$|f^{(k)}(t)| = |e^t| \leq \lambda, \text{ waarin } \lambda = \max(e^{\mathrm{Re}\ v}, 1).$$

Uit stelling 6.1 volgt dus

$$e^v \prec \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{h!}, \frac{\lambda}{h!}\right) v^k.$$

Door de speciale substitutiestelling 3.2 toe te passen met

$$n = 1;\ v = v(u);\ f(v) = e^v - 1;\ p = 1;\ \alpha_k = \frac{1}{k!};\ \Omega_{|k|} = 1,\ A_k = \frac{\lambda}{k!}$$

krijgt men

$$e^{v(u)} - 1 \prec \sum_{|h|\geq 1} (\gamma_h, \lambda\Gamma_h) u^h. \tag{6.16}$$

Hierin worden de coëfficiënten γ_h en Γ_h bepaald door de formele ontwikkeling

$$\sum_{|h|\geq 1} \gamma_h u^h = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{|l|\geq 1} \beta_l u^l \Big)^k = e^{\sum_{|h|\geq 1} \beta_h u^h} - 1$$

en door de corresponderende kapitale relatie. Uit (6.16) volgt de gevraagde betrekking (6.15) omdat $1 = \gamma_0 \leq \lambda\Gamma_0$ is.

Voorbeeld 1. Als $\mathrm{Re}\ \kappa \geq 0$ is, dan is voor iedere positieve ω en voor iedere gehele $q \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\kappa u}{1+u} - \omega u} du = \sum_{h=0}^{q-1} (-)^h \frac{h!\gamma_h}{\omega^{h+1}} + \theta \frac{q!\Gamma_q}{\omega^{q+1}} \tag{6.17}$$

met $|\theta| \leq 1$. Hierin is $\gamma_{-1} = 0$; $\gamma_0 = 1$, terwijl de veeltermen γ_h $(h \geq 1)$ in κ bepaald worden door de teruglopende betrekking

$$h\gamma_h = (2h - 2 + \kappa)\gamma_{h-1} - (h - 2)\gamma_{h-2}. \tag{6.18}$$

Daarbij gaat γ_h over in Γ_h als κ door $|\kappa|$ vervangen wordt en bovendien elke in de veelterm voorkomende coëfficiënt door zijn modulus wordt vervangen, dus

$$\gamma_1 = \kappa;\ \Gamma_1 = |\kappa|;\ \gamma_2 = \kappa + \tfrac{1}{2}\kappa^2;\ \Gamma_2 = |\kappa| + \tfrac{1}{2}|\kappa|^2.$$

Bewijs: Vooreerst toont men aan dat de getallen γ_h $(h \geq 0)$ de coëfficiënten zijn in de convergente ontwikkeling

$$e^{-\frac{\kappa u}{1+u}} = \gamma_0 - \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 - \ldots, \tag{6.19}$$

geldig voor $|u| < 1$. Immers differentiatie naar u van beide leden geeft

$$\kappa e^{-\frac{\kappa u}{1+u}} = (1+u)^2 (\gamma_1 - 2\gamma_2 u + \ldots),$$

waaruit de terugloopbetrekking (6.18) volgt met $\gamma_{-1} = 0$; $\gamma_0 = 1$.

Men heeft

$$-\frac{\kappa u}{1+u} \prec \sum_{h\geq 1} ((-)^h \kappa, |\kappa|) u^h,$$

zodat volgens de voorgaande stelling

$$e^{-\frac{\kappa u}{1+u}} \prec \sum_{h\geq 0} ((-)^h \gamma_h, \Gamma_h) u^h.$$

Het linkerlid van (6.17) is dus voor elke gehele $q \geq 0$ gelijk aan

$$\int_0^\infty \{\sum_{h=0}^{q-1} (-)^h \gamma_h u^h + \theta' \Gamma_q u^q\} e^{-\omega u} du$$

(waarin $|\theta'| \leq 1$) en derhalve gelijk aan het rechterlid van (6.17).

Voorbeeld 2. Als Re $\kappa \leq 0$ is, dan is voor elke positieve ω en voor elke gehele $q \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\kappa u}{1+u} - \omega u} du = \sum_{h=0}^{q-1} (-)^h \frac{h!\gamma_h}{\omega^{h+1}} + \theta\, e^{-\mathrm{Re}\,\kappa} \frac{q!\Gamma_q}{\omega^{q+1}} \tag{6.20}$$

met $|\theta| \leq 1$. Indien $\omega > -$ Re κ is, kan de restterm vervangen worden door

$$\theta' \frac{q!\Gamma_q}{(\omega + \mathrm{Re}\,\kappa)^{q+1}}, \text{ waarin } |\theta'| \leq 1. \tag{6.21}$$

<u>Bewijs</u>: Het bewijs verloopt op dezelfde manier als in de voorgaande stelling, behalve dat nu de ongelijkheden

$$\max(1, e^{-\frac{\kappa u}{1+u}}) \leq e^{-\mathrm{Re}\,\kappa} \quad \text{en} \quad \leq e^{-u\,\mathrm{Re}\,\kappa}$$

benut worden. De bovengrens $e^{-\mathrm{Re}\,\kappa}$ levert (6.20) en de bovengrens $e^{-u\,\mathrm{Re}\,\kappa}$ levert (6.21) wegens

$$\int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\,\kappa + \omega)u}\, u^q\, du = \frac{q!}{(\omega + \mathrm{Re}\,\kappa)^{q+1}} .$$

§7. Binomium van Newton

De opgave is de functie $(1 + u)^{s+it}$, waarin s en t willekeurige bestaanbare getallen voorstellen en waarin u een willekeurig getal met $-\pi < \arg u < \pi$ aangeeft, te omhullen door de binomiaalontwikkeling $\sum_{h\geq 0} \binom{s + it}{h} u^h$ met een bepaalde majorant. In deze paragraaf worden twee stellingen afgeleid, waarin verschillende majoranten optreden. Voor sommige waarden van u, s, t en q geeft de eerste en voor de andere waarden van u, s, t en q geeft de tweede stelling het scherpste resultaat, zodat die twee stellingen elkaar aanvullen.

Stelling 7.1. Stel

$$(7.1) \qquad a = \max(1, |(1+u)^{it}|); \quad b_h = \max(1, |(1+u)^{s-h}|); \quad A_h = ab_h\left|\binom{s+it}{h}\right|$$

voor elk geheel getal $h \geq 0$. Men heeft

$$(7.2) \qquad (1 + u)^{s+it} < \sum_{h\geq 0} \left(\binom{s + it}{h}, A_h\right) u^h$$

als het exceptionele geval

$$(7.3) \qquad |\arg u| > \frac{\pi}{2}; \qquad |u| > |\cos \arg u|$$

buiten beschouwing gelaten wordt. In dit exceptionele geval geldt (7.2) als A_h voor $|h| \geq \max(0,s)$ vervangen wordt door

$$a|\sin \arg u|^{s-h} \left|\binom{s + it}{h}\right|.$$

Bewijs: Volgens de Maclaurin ontwikkeling van $(1 + u)^{s+it}$ heeft men voor elk getal $q \geq 0$

$$(7.4) \qquad (1+u)^{s+it} = \sum_{0\leq h<q} \binom{s+it}{h} u^h + q\binom{s+it}{q} \int_0^u (u-v)^{q-1}(1+v)^{s+it-q}dv.$$

Voor elk punt v op het lijnsegment (0,u) heeft men

$$(7.5) \qquad |(1+v)^{s+it-q}| = |(1+v)^{s-q}|e^{-t \arg(1+v)}.$$

Omdat arg(1+v) op het genoemde lijnsegment een monotone functie van v is, heeft men

$$(7.6) \qquad e^{-t \arg(1+v)} \leq \max(1, e^{-t \arg(1+u)}) = a,$$

zodat uit (7.5) volgt

$$(7.7) \qquad |(1+v)^{s+it-q}| \leq a|(1+v)^{s-q}| = a|1+v|^{s-q}.$$

Men heeft voor elk punt v op het lijnsegment (0,u)

$$|1+v|^{s-q} \leq \max(1, |1+u|^{s-q}) = b_q,$$

behalve als $s-q \leq 0$ is en het voetpunt van de uit -1 op het lijnsegment (0,v) neergelaten loodlijn tussen 0 en u ligt. In dit uitzonderingsgeval gelden de ongelijkheden (7.3) en is

$$|1+v|^{s-q} \leq |\sin \arg u|^{s-q},$$

omdat de lengte van de genoemde loodlijn gelijk is aan $|\sin \arg u|$.

Uit (7.7) volgt dus voor elk punt v van het lijnstuk (0,u)

$$(7.8) \qquad |(1+v)^{s+it-q}| \leq \max(1, |(1+u)^{it}|) \max(1, |(1+u)^{s-q}|) = ab_q,$$

behalve als het uitzonderingsgeval optreedt en tegelijkertijd $q-s \geq 0$ is. In dit laatste geval is

$$(7.9) \quad |(1+v)^{s+it-q}| \leq \max(1, |(1+u)^{it}|) \; |\sin \arg u|^{s-q} = a|\sin \arg u|^{s-q}.$$

Derhalve is de in (7.4) optredende restterm in absolute waarde

$$\leq q|\binom{s+it}{q}| \; ab_q \int_0^u |u-v|^{q-1}|dv| = |\binom{s+it}{q}| \; ab_q \; |u|^q,$$

behalve als het uitzonderingsgeval optreedt en tevens $q \geq s$ is; in dit geval is de in (7.4) optredende restterm in absolute waarde

$$\leq q|\binom{s+it}{q}|a|\sin \arg u|^{s-q} \int_0^u |u-v|^{q-1}|dv| = |\binom{s+it}{q}|a|\sin \arg u|^{s-q}|u|^q.$$

Hiermede is het bewijs van stelling 7.1 geleverd.

Het bovenstaand bewijs berust op de formule (7.4), maar naast die relatie beschikt men nog over een andere identiteit, namelijk de identiteit van Jacobi-Scheibner: Voor elk geheel positief getal q, voor elk complex getal s+it en voor iedere complexe u die niet ≤ -1 is, is

$$(7.10) \qquad (1+u)^{s+it} = \sum_{0\leq h<q} \binom{s+it}{q} u^h + q\binom{s+it}{q}(1+u)^{s+it} \int_0^u v^{q-1}(1+v)^{-s-it-1}dv.$$

Vergelijk E.T. Whittaker en G.N. Watson, A course of modern analysis; ex. 6 in chapter V.

Het bewijs van deze identiteit is eenvoudig. Voor $\sigma = s + it$ moet bewezen worden

$$1 = (1+u)^{-\sigma} \sum_{0\leq h<q} \binom{\sigma}{h} u^h + q\binom{\sigma}{q} \int_0^u v^{q-1}(1+v)^{-\sigma-1}dv.$$

Het rechterlid neemt voor $u = 0$ de waarde 1 aan en bezit een afgeleide naar u die gelijk is aan

$$(1+u)^{-\sigma-1} \sum_{0\leq h<q} \{-\sigma\binom{\sigma}{h} + (h+1)\binom{\sigma}{h+1} + h\binom{\sigma}{h}\}u^h = 0,$$

omdat de uitdrukking tussen accoladen de waarde

$$\binom{\sigma}{h} \{-\sigma + (\sigma-h) + h\} = 0$$

bezit.

Deze identiteit vormt de grondslag van het bewijs van de volgende stelling.

<u>Stelling 7.2</u>. Stel

$$(7.11) \quad a' = \max(1,|(1+u)^{-it}|);\ b' = \max(1,|(1+u)^{-s-1}|);$$

$$A_h' = a'b' \ |(1+u)^{s+it}| \ |\binom{s+it}{h}|.$$

Men heeft

(7.12) $$(1+u)^{s+it} < \sum_{h\geq 0} \left(\binom{s+it}{h}, A'_h\right)u^h,$$

behalve als het exceptionele geval (7.3) optreedt en tegelijkertijd $s \geq -1$ is. Treedt het exceptionele geval (7.3) op en is tegelijkertijd $s \geq -1$, dan geldt (7.12), als daarin A'_h door

$$a'|\sin \arg u|^{-s-1} \; |(1+u)^{s+it}| \; |\binom{s+it}{h}|$$

vervangen wordt.

Bewijs: Vervangt men in (7.8) s door q-s-1 en t door -t, dan vindt men voor elk punt v van het lijnsegment (0,u)

$$|(1+v)^{-s-1-it}| \leq \max(1,|(1+u)^{-it}|) \;\; \max(1,|(1+u)^{-s-1}|) = a'b'$$

wegens (7.11), behalve als het uitzonderingsgeval (7.3) optreedt en tevens $s + 1 \geq 0$ is. De restterm in (7.10) is dus in absolute waarde

$$\leq q|\binom{s+it}{q}|a'b'|(1+u)^{s+it}| \;\; \int_0^u |v|^{q-1}|dv| = a'b'|\binom{s+it}{q}| \; |(1+u)^{s+it}| \; |u|^q,$$

behalve als het exceptionele geval (7.3) optreedt en tevens $s \geq -1$ is. Als het uitzonderingsgeval (7.3) optreedt en tevens $s \geq -1$ is, dan is volgens (7.9)

$$|(1+v)^{-s-1-it}| \leq a'|\sin \arg u|^{-s-1},$$

zodat de restterm in (7.10) in absolute waarde

$$\leq a'|\binom{s+it}{q}| \; |\sin \arg u|^{-s-1} \; |(1+u)^{s+it}| \; |u|^q$$

is. Hiermede is het bewijs van stelling 7.2 geleverd.

Opmerking: In de toepassing van stelling 7.1 worden acht mogelijkheden onderscheiden. Vooreerst wordt het geval $|(1+u)^{it}| \leq 1$ onderscheiden van het geval $|(1+u)^{it}| \geq 1$, omdat in die stelling $\max(1,|(1+u)^{it}|)$ optreedt. Verder wordt het geval $|(1+u)^{s-h}| \leq 1$ onderscheiden van het geval $|(1+u)^{s-h}| \geq 1$. Tenslotte wordt een distinctie gemaakt al naar gelang het genoemde exceptionele geval wel dan niet optreedt.

Evenzo worden bij de toepassing van stelling 7.2 acht mogelijkheden onderscheiden, zodat in totaal een vrij groot aantal mogelijkheden in aanmerking komt. In elk van die mogelijkheden kan zowel stelling 7.1 als stelling 7.2 toegepast worden en, zoals in het begin van deze paragraaf reeds opgemerkt is, soms geeft stelling 7.1, soms geeft stelling 7.2 een scherpere benadering. Men moet dus de twee stellingen van deze paragraaf opvatten als een samenvatting van een groot aantal verschillende resultaten, waarvan de formulering,elk afzonderlijk genomen, wanhopig omslachtig zou worden.