STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-021

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

De invloed van kettingreacties op de schadeverdelingsfunctie

Prof.dr. C. Campagne

1956-021

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr C. Campagne

28 november 1956

De invloed van kettingreacties op de schadeverdelingsfunctie

1. Inleiding.

Bij de berekening van de schadeverdelingsfunctie voor een verzekeringsportefeuille wordt, voor zo ver ons bekend, in het algemeen niet of te weinig rekening gehouden met de mogelijkheid van het optreden van kettingreacties. Over het algemeen wordt verondersteld dat de verzekerde risico's onafhankelijk zijn en ook indien een afhankelijkheid wordt geïntroduceerd - bijvoorbeeld bij het Polya-Eggenberger-proces - dan wordt toch een slecht aan de werkelijkheid beantwoordend model verkregen, omdat de mogelijkheid van het optreden van kettingreacties genegeerd wordt.

Onder een kettingreactie verstaan wij in dit verband een proces, waarbij één door de verzekering gedekte gebeurtenis bij een bepaald verzekerd object een aantal van dergelijke gebeurtenissen bij andere verzekerde objecten veroorzaakt, die elk weer aanleiding geven tot soortgelijke gebeurtenissen bij weer andere objecten, enz., enz. Voorbeelden hiervan vindt men in de ziekteverzekering bij besmettelijke ziekten, in de levensverzekering bij epidemieën, waardoor de in het algemeen onafhankelijk te achten sterftekansen afhankelijk worden en in de brandverzekering bij conflagratie .

Wij willen nu onderzoeken hoe de schadeverdelingsfunctie verandert indien men niet van onafhankelijke doch van afhankelijke risico's uitgaat,door expliciet rekening te houden met de mogelijkheid van kettingreacties. We gaan uit van een portefeuille met N verzekerde objecten, allen met de eenheid als verzekerd kapitaal en gelijke onderlinge afhankelijkheidsgraad. Verder veronderstellen we dat het risico alternatief is, d.w.z. dat elke gebeurtenis een totaal verlies van het betreffende object veroorzaakt. Uiteraard zou men een gecompliceerder model kunnen construeren met verschillende onderlinge afhankelijkheidsgraden en verzekerde kapitalen, maar wij menen dat de ingevoerde vereenvoudigingen geen wezenlijke beperking van het probleem betekenen.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

2. Genererende functies.

Aan onze beschouwingen over kettingreacties willen wij een kort overzicht van de daarbij gebruikte eigenschappen van genererende functies vooraf laten gaan.[1]

Als de stochastische variabele X uitsluitend niet-negatieve gehele waarden aanneemt en $Pr(X=j)=p_j$ voor $j=0,1,2,\ldots$ dan verstaat men onder de genererende functie (g.f.) van X de reeks:

$$P(s) = p_o + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots$$

Wegens $P(1) = p_o + p_1 + p_2 + \ldots = 1$ convergeert deze reeks in ieder geval absoluut voor $|s| \leq 1$.

Voorbeelden:

a. Als X het aantal successen voorstelt bij een serie van n experimenten, met telkens een kans $p=1-q$ op succes, dan is

$$Pr(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \tag{1}$$

en de g.f. van de binomiaalverdeling is dus:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} s^j = (ps + q)^n. \tag{2}$$

b. Bij grote waarden van n en kleine waarden van p gaat de binomiaalverdeling over in de Poisson-verdeling, met

$$Pr(X=j) = e^{-np} \frac{(np)^j}{j!} \tag{3}$$

en g.f.

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-np} \frac{(np)^j}{j!} s^j = e^{-np+nps}. \tag{4}$$

Als $P(s)$ de g.f. van X is dan geldt:

$$E(X) = P'(1) \tag{5}$$

$$Var(X) = P''(1) + P'(1) - \left\{P'(1)\right\}^2. \tag{6}$$

Zeer belangrijk is in dit verband de volgende stelling:
De g.f. van de som van een aantal onderling onafhankelijke stochastische variabelen is gelijk aan het product van de genererende functies der afzonderlijke variabelen.

----

1) zie b.v. W. Feller: An introductio
applications. New York, John Wiley

Is dus $A(s)$ de g.f. van X en $B(s)$ die van Y dan is de g.f. van $X+Y$:

$$C(s) = A(s).B(s).$$

De coëfficient van s^r in $C(s)$, d.i. $Pr(X+Y=r)$, wordt:

$$\left.\begin{aligned} c_r &= a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_r b_0 , \\ c_r &= \sum_{i+j=r} a_i b_j . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

De rij $\{c_r\}$ noemt men de <u>convolutie</u> van de rijen $\{a_r\}$ en $\{b_r\}$ en wordt aangeduid door:

$$\{c_r\} = \{a_r\} * \{b_r\}.$$

Is in het bijzonder $\{a_r\} = \{b_r\}$ dan geldt:

$$c_r = \sum_{i+j=r} a_i a_j . \qquad (8)$$

Voor de som van meer dan twee variabelen gelden analoge beschouwingen; hierbij is het van belang dat de convolutie een associatieve en commutatieve operatie blijkt te zijn.

Tenslotte nog een stelling over de g.f. van een samengestelde verdeling: <u>Als de stochastische variabelen X_1, X_2 enz. onderling onafhankelijk zijn en allen $f(s) = \sum f_j s^j$ als g.f. hebben, terwijl N een stochastische variabele is, die onafhankelijk is van X_k voor elke waarde van k en $g(s) = \sum g_j s^j$ als g.f. heeft, dan heeft de samengestelde variabele $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ de samengestelde functie $g\{f(s)\}$ als g.f.</u>

<u>Bewijs</u>:

$$Pr(S_N = j) = \sum_n Pr(N=n) \,.\, Pr(S_N = j \mid N=n)$$

$$= \sum_n g_n . Pr(S_n = j) .$$

Volgens de voorgaande stelling heeft $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ als g.f. $\{f(s)\}^n$ en dus geldt:

$$Pr(S_N = j) = \sum_n g_n \times (\text{de coëfficiënt van } s^j \text{ uit } f^n(s)) =$$

$$= \text{de coëfficiënt van } s^j \text{ uit } \sum_n g_n f^n(s) =$$

$$= \text{de coëfficiënt van } s^j \text{ uit } g\{f(s)\} . \qquad \text{q.e.d.}$$

Uit deze stelling volgt nog met behulp van formule (5):

$$E(S_N) = \left[\frac{d}{ds}\, g(f(s))\right]_{s=1} = g'\{f(1)\}\ f'(1) = g'(1)f'(1),$$

$$E(S_N) = E(N) \,.\, E(X_1). \qquad (9)$$

3. De kettingreactie.

We gaan uit van één oorspronkelijke gebeurtenis, die in eerste instantie X_1 dergelijke gebeurtenissen veroorzaakt. Het aantal gebeurtenissen van de eerste generatie, X_1, is een stochastische variabele met als g.f.

$$P_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k.$$

We veronderstellen dat elke gebeurtenis van de eerste generatie weer aanleiding geeft tot een aantal gebeurtenissen van de tweede generatie, waarbij deze aantallen onafhankelijk van elkaar zijn en allen $P_1(s)$ als g.f. hebben. Het totaal aantal gebeurtenissen van de tweede generatie, X_2, is dus de som van X_1 onafhankelijke stochastische variabelen, die allen $P_1(s)$ als g.f. hebben. Volgens de laatste stelling van § 2 heeft X_2 dus als g.f.

$$P_2(s) = P_1\{P_1(s)\} .$$

De gebeurtenissen van de tweede generatie veroorzaken elk weer, onafhankelijk van elkaar, een aantal gebeurtenissen van de derde generatie. Het totaal aantal dezer gebeurtenissen, X_3, is de som van X_2 onafhankelijke stochastische variabelen met $P_1(s)$ als g.f. De g.f. van X_3 is dus:

$$P_3(s) = P_2\{P_1(s)\} = P_1\left[P_1\left\{ P_1(s)\right\}\right].$$

Zo voortgaande blijkt dat het totaal aantal gebeurtenissen van de n-de generatie, X_n, de som is van X_{n-1} onafhankelijke stochastische variabelen met elk $P_1(s)$ als g.f. De g.f. van X_n is dus:

$$P_n(s) = P_{n-1}\left\{P_1(s)\right\} = P_1\left[P_1(P_1(\ldots P_1(s))\ldots)\right]. \qquad (10)$$

Volledigheidshalve geven we het aantal oorspronkelijke gebeurtenissen aan met X_o, waarbij dus $X_o=1$ en de g.f. van X_o is $P_o(s)=s$.

Stellen we $E(X_1) = \delta$ dan geldt: $\delta = P_1'(1) = \sum k\, a_k$. Uit formule (9) volgt voor de samengestelde variabele X_2:

$$E(X_2) = E(X_1).E(X_1) = \delta^2.$$

Door middel van algemene inductie met behulp van formule (10) blijkt:

$$E(X_n) = \delta^n . \qquad (11)$$

Door de voorgaande formules is, bij geven $P_1(s)$, de g.f. en de verwachte waarde van X_n voor elke n volledig bepaald. Het gaat ons echter minder om de afzonderlijke generaties dan om het totaal aantal gebeurtenissen bij één kettingreactie. Stellen we deze laatste stochastische variabele voor door X dan is:

$$X = 1 + X_1 + X_2 + \ldots. \qquad (12)$$

Hieruit volgt: $$E(X) = 1 + \delta + \delta^2 + \ldots. = \frac{1}{1-\delta} \qquad 0 \leq \delta < 1. \qquad (13)$$

Bij het bepalen van de g.f. van X doet zich de moeilijkheid voor, dat de aantallen gebeurtenissen der afzonderlijke generaties $-X_1, X_2$, enz.- onderling afhankelijk zijn, zodat de voorlaatste stelling van § 2 niet kan worden toegepast. We volgen daarom een andere methode, waarbij we gebruik maken van de bestaande afhankelijkheid. We stellen het totaal aantal gebeurtenissen tot en met de n-de generatie van één kettingreactie voor door S_n. Dan is dus:

$$S_n = X_o + X_1 + \ldots + X_n .$$

Als nu $Q_n(s)$ de g.f. van S_n is, dan geldt voor $n \geqq 0$:

$$Q_{n+1}(s) = s.P_1 \left\{ Q_n(s) \right\}. \qquad (14)$$

Bewijs:

$$Pr(S_{n+1}=j) = \sum^k Pr(X_1=k)\ Pr(S_{n+1}=j \mid X_1=k) =$$
$$= \sum^k a_k.Pr(S_{n+1}-1=j-1 \mid X_1=k).$$

Als $X_1=k$ dan is $S_{n+1}-1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n+1}$ het totaal aantal gebeurtenissen tot en met de n-de generatie bij k kettingreacties; $S_{n+1}-1$ is dan de som van k onderling onafhankelijke stochastische variabelen, die allen $Q_n(s)$ als g.f. hebben; de g.f. van $S_{n+1}-1$ is dan $Q_n^{\,k}(s)$ en dus is:

$$Pr(S_{n+1}=j) = \sum^k a_k x \text{ (de coëfficiënt van } s^{j-1} \text{ in } Q_n^{\,k}(s)) =$$
$$= \sum^k a_k x \text{ (de coëfficiënt van } s^{j} \text{ in } s.Q_n^{\,k}(s)) =$$
$$= \text{de coëfficiënt van } s^j \text{ in } s.\sum^k a_k.Q_n^{\,k}(s) =$$
$$= \text{de coëfficiënt van } s^j \text{ in } s.P_1\left\{Q_n(s)\right\}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Nu is: $Q_o(s) = s$ en volgens (14) vinden we dus:

$$Q_1(s) = s\ P_1(s)$$
$$Q_2(s) = s\ P_1\left\{s\ P_1(s)\right\} \qquad \text{enz.}$$

Voor de g.f. van X vinden we, wegens $X = \lim_{n=\infty} S_n$:

$$Q(s) = \lim_{n=\infty} Q_n(s). \qquad (15)$$

Blijkbaar moet Q(s) voldoen aan de betrekking

$$Q(s) = s.P_1 \left\{ Q(s) \right\}. \tag{16}$$

Dat de limietovergang in formule (15) betekenis heeft moge blijken uit het volgende betoog. Uit $X = X_o + X_1 + \ldots = n$ volgt, gezien de bijzondere eigenschappen der variabelen X_j dat $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \ldots = 0$ en dus is voor elke gehele waarde van $k \geqq n$: $S_k = X_o + \ldots + X_k = n$. Is omgekeerd voor zekere gehele waarde van $k \geqq n$ voldaan aan
$S_k = X_o + \ldots + X_k = n$ dan is weer $X_n = X_{n+1} = X_{n+2} = \ldots = 0$
en dus ook $X = X_o + X_1 + \ldots = n$. Dus geldt voor elke $k \geqq n$:

$$\begin{aligned} Pr(X=n) &= Pr(S_k=n) = \\ &= \text{de coëfficiënt van } s^n \text{ in } Q_k(s). \end{aligned}$$

In de rij $Q_k(s)$ is dus, te beginnen met $Q_n(s)$, de coëfficiënt van s^n constant en de rij $Q_k(s)$ heeft dus inderdaad een limiet.

Bij gegeven $P_1(s)$ is de functie $Q(s)$ volledig bepaald door de formules (14) en (15). Voor de berekening van de coëfficiënten van $Q(s)$ zijn deze formules echter minder geschikt.
Stellen we:

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j s^j \tag{16a}$$

dan geldt voor $n \geqq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = Pr(X=n+1) &= \sum k \; Pr(X_1=k).Pr(X=n+1 \mid X_1=k) = \\ &= \sum k \; Pr(X_1=k).Pr(X-1=n \mid X_1=k) \; . \end{aligned}$$

Als $X_1=k$ dan is $X-1=X_1+X_2+\ldots$ het totaal aantal gebeurtenissen bij k kettingreacties en dus gelijk aan de som van k onderling onafhankelijke stochastische variabelen, die allen Q(s) als g.f. hebben: de g.f. van X-1 is dan $Q^k(s)$ en dus geldt:

$$\alpha_{n+1} = \sum k \; a_k x \text{ (de coëfficiënt van } s^n \text{ in } Q^k(s))$$

$$\alpha_{n+1} = \sum k \; a_k . \alpha_n^{(k)} \tag{17}$$

Hierin stelt $\alpha_n^{(k)}$ de n-de term voor van de k-voudige convolutie van de rij $\{\alpha_j\}$ met zichzelf; $\alpha_n^{(k)}$ is dus de kans, dat het totaal aantal gebeurtenissen bij k kettingreacties gelijk is aan n. Voor $\alpha_n^{(k)}$ geldt de recurrente betrekking:

$$\alpha_n^{(k)} = \sum_0^n j \cdot \alpha_j \alpha_{n-j}^{(k-1)}. \tag{17a}$$

Met behulp van de formules (17) en (17a) kunnen we de getallen α_j berekenen, indien de getallen a_k, dus de functie $P_1(s)$, gegeven zijn. Bedenken we dat $\alpha_o^{(0)}=1$ en $\alpha_1^{(0)}=\alpha_2^{(0)}=\ldots=0$ - immers géén kettingreactie, dan ook géén gebeurtenis - terwijl verder $\alpha_n^{(k)}=0$ voor $k>n$ - daar bij k kettingreacties het totaal aantal gebeurtenissen minstens k is, dan vinden we:

$$\alpha_o = 0$$

$$\alpha_1 = a_o$$

$$\alpha_2 = a_1\alpha_1$$

$$\alpha_3 = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^{(2)} \qquad \alpha_2^{(2)}=\alpha_1^2$$

$$\alpha_4 = a_1\alpha_3 + a_2\alpha_3^{(2)} + a_3\alpha_3^{(3)} \qquad \alpha_3^{(2)}=2\alpha_1\alpha_2;\ \alpha_3^{(3)}=\alpha_1^3$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n+1}=a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^{(2)}+\ldots+a_n\alpha_n^{(n)}.$$

Opmerkingen:

1. De formules (16) en (17) kunnen uit elkaar afgeleid worden; immers het rechterlid van (17): $\sum_k a_k\alpha_n^{(k)}$ stelt voor de coëfficiënt van s^n in $\sum_k a_k Q^k(s) = P_1\{Q(s)\}$, d.i. de coëfficiënt van s^{n+1} in $s\,P_1\{Q(s)\}$ zodat uit (17) volgt: $Q(s) = s\,P_1\{Q(s)\}$ d.i. (16). De omgekeerde redenering verloopt geheel analoog.

2. De formules (17) en (17a) werden eerst in een later stadium van dit onderzoek gevonden. In eerste instantie werden de getallen α_j dan ook op andere wijze berekend, namelijk met behulp van de ARMAC, waarbij werd uitgegaan van de formules (14) en (15). De resultaten van deze berekeningen met de ARMAC gaven ons aanleiding tot het zoeken naar een andere berekeningsmethode, waarbij wij tot de formules (17) en (17a) kwamen.

4. Het totaal aantal gebeurtenissen per jaar.

We willen nu de stochastische variabele K, het totaal aantal kettingreacties per jaar, aan een nadere beschouwing onderwerpen. Veronderstellen we dat we het jaar kunnen verdelen in een groot aantal kleine tijdselementen Δt, zodanig dat in één tijdselement hoogstens één kettingreactie kan optreden en wel met vaste waarschijnlijkheid $p.\Delta t$, onafhankelijk van wat er in de andere tijdselementen gebeurt, dan voldoet K aan de Poisson-verdeling met Np als middelwaarde. De g.f. van K is dan:

$$P(s) = \sum_{o}^{\infty} p_k.s^k \quad \text{waarin: } p_k = e^{-Np}\frac{(Np)^k}{k!} \qquad (18)$$

Bedenken we dat de g.f. van X, het aantal gebeurtenissen bij één kettingreactie, voorgesteld wordt door

$$Q(s) = \sum_{1}^{\infty j} \alpha_j s^j$$

dan heeft, volgens de laatste stelling van § 2, de samengestelde variabele Y, die het totaal aantal gebeurtenissen per jaar voorstelt, als g.f.:

$$\begin{aligned} R(s) &= P\{Q(s)\} = \\ &= p_o + p_1\, Q(s) + p_2\, Q^2(s) + \ldots . \end{aligned} \tag{19}$$

Stellen we:

$$R(s) = \sum r_j s^j \tag{20}$$

dan volgt uit formule (19):

$$\begin{aligned} r_o &= p_o \\ r_1 &= p_1 \alpha_1 \\ r_2 &= p_1\alpha_2 + p_2\alpha_2^{(2)} \\ r_3 &= p_1\alpha_3 + p_2\alpha_3^{(2)} + p_3\alpha_3^{(3)} \\ &\vdots \\ r_j &= p_1\alpha_j + p_2\alpha_j^{(2)} + \ldots + p_j\alpha_j^{(j)}. \end{aligned} \tag{21}$$

We kunnen formule (21) ook als volgt afleiden:

$$\begin{aligned} r_j &= Pr\,(Y = j) = \\ &= \sum^{n} Pr(K=n)\ .\ Pr\,(Y=j \mid K=n) = \\ &= \sum^{n} p_n .\ \alpha_j^{(n)}, \end{aligned}$$

waarin weer $\alpha_j^{(n)}$ de j-de coëfficiënt voorstelt van de n-voudige convolutie van de rij $\{\alpha_j\}$ met zichzelf, dus de kans dat het totaal aantal gebeurtenissen bij n kettingreacties gelijk is aan j.

Met behulp van formule (21) kunnen we de kansen $r_j = Pr(Y=j)$ berekenen als de waarden p_n en $\alpha_j^{(n)}$ bekend zijn. Door de getallen r_j is de verdeling van de stochastische variabele Y volledig bepaald. In het bijzonder is:

$$\left.\begin{aligned} &Pr(Y \geqq j) = r_j + r_{j+1} + \ldots . \\ \text{en}\quad &Pr(Y < j) = r_o + r_1 + \ldots + r_{j-1} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Formule (22) levert ons de verdelingsfunctie van het aantal gebeurtenissen in een jaar; daar we alternatief risico verondersteld hebben, betekent elke gebeurtenis een schade van een eenheid en Y stelt dus de totale jaarschade voor, zodat (22) ons tevens de schadeverdelingsfunctie levert voor het door ons gekozen model van een verzekeringsportefeuille. Om de invloed van de invoering der kettingreacties te onderzoeken moeten we de door (22) gedefiniëerde schadeverdelingsfunctie vergelijken met degene die optreedt bij een portefeuille met onafhankelijke risico's, doch dezelfde gemiddelde jaarschade als in het afhankelijke geval. Is p' de branduitbrekingskans voor deze portefeuille en N' het aantal verzekerde objecten, alle met de eenheid als verzekerd kapitaal, en veronderstellen we weer dat het risico alternatief is, dan voldoet de jaarschade Y' van die portefeuille aan de Poissonverdeling met N'p' als gemiddelde waarde. Uit de eis:

$$E(Y') = E(Y)$$

volgt wegens $\quad E(Y) = E(K).E(X) = \frac{Np}{1-\delta} \qquad (23)$

dat moet gelden: $\quad N'p' = \frac{Np}{1-\delta}. \qquad (24)$

Dan is: $\quad Pr(Y'=j) = p'_j = e^{-N'p'} \frac{(N'p')^j}{j!} \qquad (25)$

We dienen dus de verdeling van de variabele Y, bepaald door de formules (21) en (22), te vergelijken met de verdeling van Y', die gedefiniëerd wordt door de formules (24) en (25). We zullen dit in de volgende paragraaf met enkele numeriekevoorbeelden demonstreren.

Tot slot van deze paragraaf willen we de variantie van Y uitdrukken in E(Y), $E(X_1) = \delta$ en $Var(X_1) = \lambda^2$. Volgens (6) is:

$$Var(Y) = R''(1) + R'(1) - \{R'(1)\}^2 =$$
$$= R''(1) + \frac{Np}{1-\delta} - \frac{(Np)^2}{(1-\delta)^2} \quad \text{wegens } R'(1) = E(Y)$$

Nu is:

$$R(s) = P\{Q(s)\} = e^{-Np+Np.Q(s)} \qquad \text{(vergelijk (4))}$$

$$R'(s) = Np.Q'(s).R(s)$$

$$R''(s) = Np\{Q''(s)R(s) + Np.Q'^2(s)R(s)\}.$$

Hieruit volgt: $R''(1) = Np.Q''(1) + \frac{(Np)^2}{(1-\delta)^2}$ wegens $Q'(1) = E(X) = \frac{1}{1-\delta}$.

Dus wordt: $\quad Var(Y) = Np.Q''(1) + \frac{Np}{1-\delta}.$

Volgens (16) geldt:

$$Q(s) = s.P_1\{Q(s)\}$$

en dus is: $\quad Q'(s) = P_1\{Q(s)\} + s\,P_1'\{Q(s)\}\;Q'(s)$

$$Q''(s) = 2\,P_1'\{Q(s)\}\,Q'(s) + s\,P_1''\{Q(s)\}\,Q'^2(s) + s\,P_1'\{Q(s)\}\,Q''(s).$$

Hieruit volgt: $$Q''(1) = \frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{P_1''(1)}{(1-\delta)^2} + \delta\, Q''(1),$$

$$Q''(1) = \frac{2\delta}{(1-\delta)^2} + \frac{P_1''(1)}{(1-\delta)^3} = \frac{2\delta-2\delta^2+P_1''(1)}{(1-\delta)^3}.$$

Nu is volgens (6): $$\mathrm{Var}\,(X_1) = P_1''(1) + P_1'(1) - P_1'^2(1)$$

$$\lambda^2 = P_1''(1) + \delta - \delta^2$$

of: $$P_1''(1) = \lambda^2 - \delta + \delta^2.$$

Dus wordt: $$Q''(1) = \frac{\lambda^2+\delta-\delta^2}{(1-\delta)^3}.$$

We vinden dus: $$\mathrm{Var}(Y) = \frac{Np}{1-\delta}\left\{\frac{\lambda^2+\delta-\delta^2}{(1-\delta)^2} + 1\right\},$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y)\,\frac{\lambda^2+1-\delta}{(1-\delta)^2} \qquad (26)$$

5. Numerieke voorbeelden.

Wij willen de voorgaande theorie thans toepassen op een drietal modellen, waarbij de functie $P_1(s)$, waardoor de kettingreactie geheel wordt bepaald, als volgt is gekozen:

I. $P_1(s)=0{,}98125 + 0{,}01\, s + 0{,}005\, s^2 + 0{,}0025\, s^3 + 0{,}00125\, s^4$.

II. $P_1(s)=0{,}98 + 0{,}005\, s + 0{,}005\, s^2 + 0{,}005\, s^3 + 0{,}005\, s^4$.

III. $P_1(s)=0{,}80 + 0{,}05\, s + 0{,}05\, s^2 + 0{,}05\, s^3 + 0{,}05\, s^4$.

Bij deze modellen bestaat de eerste generatie dus uit hoogstens vier gebeurtenissen, dus $x_1 \leq 4$. Van de belangrijkste, op de kettingreactie betrekking hebbende grootheden zijn de door ons berekende waarden in onderstaande tabellen vermeld:

	I	II	III
$E(x_1)=\delta$	0,0325	0,05	0,5
$E(x)$	1,0336	1,0526	2,0
$\frac{\mathrm{Var}(Y)}{E(Y)}$	1,1098	1,2161	7,0

j	I $10^5.\alpha_j$	II $10^5.\alpha_j$	III $10^3.\alpha_j$
1	98125	98000	800
2	981	490	40
3	492	483	34
4	251	478	31
5	130	475	29
6	12	23	12
7	6	21	10
8	2	17	9
9	1	10	7
10		1	5
11		1	4
12		1	3
13			3
14			2
15			2
16			2
17			1
18			1
19			1
20			1
21			1
22			1
23			1

Deze drie modellen van de kettingreactie passen we toe op de volgende portefeuilles:

a. Een portefeuille met $E(K)=1$, dus gemiddeld één kettingreactie per jaar. Voor de gemiddelde jaarschade $E(Y)=E(K).E(X)$ vinden we in dit geval achtereenvolgens: 1,0336; 1,0526 en 2,0.

b. Een portefeuille met $E(K)=10$. De drie waarden van $E(Y)$ zijn hier: 10,336; 10,526 en 20,0.

c. Een portefeuille met $E(K)=30$. Voor $E(Y)$ vinden we in dit geval respectievelijk: 31,008; 31,579 en 60,0.

Voor deze negen gevallen hebben wij de kansen $Pr(Y \geq j)$ berekend voor waarden van $j \geq E(Y)$. Ter vergelijking hebben wij voor elk geval tevens de overeenkomstige kansen $Pr(Y' \geq j)$ berekend voor een portefeuille met onafhankelijke risico's en dezelfde gemiddelde jaarschade

E(Y')=E(Y). De resultaten zijn weergegeven in de volgende tabellen.

	Ia. E(Y)=1,0336		IIa. E(Y)=1,0526		IIIa. E(Y)=2,0	
j.	Pr(Y ≥ j) x 10^3	Pr(Y' ≥ j) x 10^3	Pr(Y ≥ j) x 10^3	Pr(Y' ≥ j) x 10^3	Pr(Y ≥ j) x 10^3	Pr(Y' ≥ j) x 10^3
1	632	644	632	651	632	865
2	271	277	272	284	337	594
3	90	87	93	90	205	323
4	27	21	32	22	149	143
5	8	4	13	5	116	53
6	3	1	6	1	89	17
7	1		3		70	5
8			1		57	1
9					47	
10					38	
15					15	
20					5	
25					1	

	Ib. E(Y)=10,336		IIb. E(Y)=10,526	
j	Pr(Y ≥ j) x 10^3	Pr(Y' ≥ j) x 10^3	Pr(Y ≥ j) x 10^3	Pr(Y' ≥ j) x 10^3
11	454	459	469	482
12	343	342	362	364
13	247	241	268	261
14	170	161	191	177
15	113	102	132	114
16	72	61	89	69
17	44	35	58	40
18	26	19	37	22
19	15	10	23	12
20	8	5	14	6
21	.4	2	9	3
22	2	1	5	1
23	1		3	1
24	1		2	
25			1	
26			1	

	IIIb. E(Y)=20	
j	Pr(Y ≥ j)	Pr(Y' ≥ j)
21	372	441
22	339	356
23	308	279
24	279	213
25	253	157
26	229	112
27	207	78
28	186	52
29	167	34
30	149	22
31	133	13
32	118	8
33	104	5
34	91	3
35	80	1
40	39	
45	17	
50	5	
55	1	

j	Ib. E(Y)=31,008		IIc. E(Y)=31,579	
	Pr(Y⩾j) x 10^3	Pr(Y'⩾j) x 10^3	Pr(Y⩾j) x 10^3	Pr(Y'⩾j) x 10^3
31	519	524	550	565
32	451	453	485	494
33	385	384	422	424
34	324	319	361	356
35	267	259	304	294
36	216	207	253	238
37	172	161	207	188
38	135	124	167	146
39	104	93	133	111
40	79	68	104	83
41	59	49	81	61
42	43	34	62	43
43	31	24	46	30
44	22	16	35	21
45	15	11	26	14
46	11	7	19	9
47	7	4	13	6
48	5	3	10	4
49	3	2	7	2
50	2	1	5	1
51	1	1	3	1
52	1		2	1
53	1		1	
54			1	
55			1	

j	IIIc. E(Y)=60	
	Pr(Y⩾j) x 10^3	Pr(Y'⩾j) x 10^3
61	409	466
62	389	415
63	370	366
64	351	320
65	332	276
66	314	236
67	296	199
68	279	166
69	262	137
70	246	112
71	231	90
72	216	72
73	202	57
74	188	44
75	175	34
76	162	26
77	150	20
78	139	15
79	128	11
80	118	8
81	108	6
82	99	4
83	90	3
84	82	2
85	74	1
86	67	1
87	60	1
88	54	
89	48	
90	43	
100	11	
110	1	

Uit deze berekeningen blijkt: $Pr\{Y \geq j\} > Pr\{Y' \geq j\}$ voor $j \geq E\{Y\}+3$. De toename van de overschrijdingskansen is het grootst bij model III, waarbij de kettingreactie het meest intens is. In het algemeen kunnen wij concluderen, dat bij een portefeuille, waarin kettingreacties kunnen optreden, de kans dat de schade de beschikbare middelen zal overtreffen aanmerkelijk groter is dan bij één overeenkomstige portefeuille met onafhankelijke risico's, zodat met de invloed van deze kettingreacties terdege rekening moet worden gehouden.