STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 73 (M 37)

Toetsing van de gelijkheid van een aantal gemiddelden of een aantal regressiecoëfficiënten als toepassing van de grondstelling der variantieanalyse.

Mevr. G. Klerk-Grobben.

Verder bestaat de te toetsen hypothese uit nog ℓ onderling en van (1.1) onafhankelijke lineaire relaties tussen $\mu_1,\dots,\mu_n$:

$$
(1.2) \qquad
\begin{array}{l}
L_{k+1}(\mu_1,\dots,\mu_n) = 0 \\
\vdots \\
L_{k+\ell}(\mu_1,\dots,\mu_n) = 0 \; .
\end{array}
$$

Als toetsingsgrootheid voor de toetsing der hypothese nemen we:

$$F = \frac{k}{\ell}\,\frac{Q_r - Q_a}{Q_a} \; ,$$

waarin Q_a de waarde is van $\sum_{i=1}^{n} (w_i - \mu_i)^2$, wanneer we hierin op grond van de waarnemingen $w_1,\dots,w_n$ de kleinste kwadraten schattingen voor $\mu_1,\dots,\mu_n$, welke voldoen aan (1.1) substitueren, terwijl Q_r de waarde van $\sum_{i=1}^{n} (w_i - \mu_i)^2$ is, wanneer we de kleinste kwadraatschattingen voor $\mu_1,\dots,\mu_n$, welke aan (1.1) én (1.2) voldoen, invullen.

Beschouwen we niet alleen de gevonden waarden $w_1,\dots,w_n$, maar de verzameling van alle waarden, die $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ kunnen aannemen, dan bezitten ook de grootheden Q_a en Q_r en dus F een waarschijnlijkheidsverdeling. Is de te toetsen hypothese vervuld dan is $\underline{F}$ verdeeld als de F van Snedecor met ℓ en k vrijheidsgraden. Is de hypothese niet vervuld, dan zullen de grotere waarden van F een grotere waarschijnlijkheid bezitten. Als kritieke zône bij de toetsing gebruiken we daarom de eenzijdige zône:

$$\underline{F} \geqslant F_0 \; ,$$

waarin F_0, behorende bij een bepaalde onbetrouwbaarheidsdrempel ε, opgezocht kan worden in tabellen van de F-verdeling met ℓ en k vrijheidsgraden (zie b.v. [3] of [4]). De beschreven toets is een λ-toets in de zin van Neyman (zie [2], hoofdstuk 5).

Een bewijs van bovenstaande stelling is o.a. te vinden bij Mann [1] hoofdstuk 4.

2. Toetsing van de gelijkheid van een aantal gemiddelden.

Bij deze toetsing zullen we voor de grootheden $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n$ een nieuwe notatie invoeren, nl.:

$$
\begin{array}{l}
\underline{y}_{11}, \underline{y}_{12}, \dots, \underline{y}_{1n_1} \; ; \\
\underline{y}_{21}, \underline{y}_{22}, \dots, \underline{y}_{2n_2} \; ; \\
\vdots \\
\underline{y}_{s1}, \underline{y}_{s2}, \dots, \underline{y}_{sn_s} \; .
\end{array}
$$

Van deze grootheden is gegeven, dat hun verwachtingen voldoen aan de volgende $\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)$ onafhankelijke lineaire relaties:

$$
(2.1)\qquad
\begin{array}{ll}
E\underline{y}_{1j} = \mu_1; & j = 1,\ldots,n_1 \\
E\underline{y}_{2j} = \mu_2; & j = 1,\ldots,n_2 \\
\vdots & \\
E\underline{y}_{sj} = \mu_s; & j = 1,\ldots,n_s.
\end{array}
$$

De te toetsen hypothese legt aan de verwachtingen nog s-1 van (2.1) onafhankelijke lineaire restricties op:

$$(2.2)\qquad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_s.$$

De grootheden $\underline{Q}_a$ en $\underline{Q}_r$ worden nu:

$$\underline{Q}_a = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\underline{y}_{ij}-\bar{\underline{y}}_i)^2,$$

waarin

$$\bar{\underline{y}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\underline{y}_{ij} \quad (i = 1,\ldots,s)$$

de kleinste kwadratenschatting voor $\mu_i (i = 1,\ldots,s)$ is, welke aan (2.1) voldoet, en

$$\underline{Q}_r = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\underline{y}_{ij}-\bar{\underline{y}})^2,$$

waarin

$$\bar{\underline{y}} = \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}\underline{y}_{ij}}{\sum_i n_i}$$

de kleinste kwadratenschatting voor $\mu_i (1 = 1,\ldots,s)$ is, welke aan (2.1) en (2.2) voldoet. Hieruit vinden we:

$$\underline{Q}_r - \underline{Q}_a = \sum_{i=1}^{s} n_i\bar{\underline{y}}_i^2 - \bar{\underline{y}}^2\sum n_i .$$

De toetsingsgrootheid is dus:

$$\boxed{\underline{F} = \frac{\sum_i(n_i-1)}{s-1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{s} n_i\bar{\underline{y}}_i^2 - \bar{\underline{y}}^2\sum n_i}{\sum_i\sum_j(\underline{y}_{ij}-\bar{\underline{y}}_i)^2}}$$

onder de te toetsen hypothese verdeeld als de F van Snedecor met s-1 en $\sum_i(n_i-1)$ vrijheidsgraden.

Opmerking: Is s = 2, vergelijken we dus de gemiddelden van twee steekproeven, dan is de bovengebruikte toetsingsgrootheid $\underline{F}$ het kwadraat van de toetsingsgrootheid $\underline{t}$, welke we bij toetsing van de gelijkheid van twee gemiddelden met behulp van de toets van Student gebruiken. Bovenstaande toetsing is dus op te vatten als een generalisatie voor meer steekproeven van de toets van Student voor twee steekproeven. Dezelfde opmerking kunnen we maken bij de volgende toepassing.

3. Toetsing van de gelijkheid van een aantal regressiecoëfficiënten.

Voor de grootheden $\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_n$ gebruiken we ook hier de notatie:

$$\begin{array}{l} \underline{y}_{11},\ldots,\underline{y}_{1n_1} \\ \underline{y}_{21},\ldots,\underline{y}_{2n_2} \\ \vdots \\ \underline{y}_{s1},\ldots,\underline{y}_{sn_s}. \end{array}$$

Van de verwachtingen van deze grootheden is nu gegeven, dat ze voldoen aan de relaties:

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{array}{ll} E\underline{y}_{1j} = \beta_1 \xi_{1j} + \alpha_1 & (j = 1,\ldots,n_1) \\ \vdots & \\ E\underline{y}_{sj} = \beta_s \xi_{sj} + \alpha_s & (j = 1,\ldots,n_s) \end{array}$$

waarin de β's en α's onbekende parameters zijn, maar de waarden ξ_{ij} $(j = 1,\ldots,n_i;\ i = 1,\ldots,s)$ exact bekend zijn. Deze betrekkingen vormen $\sum_{i=1}^{s}(n_i-2)$ onafhankelijke relaties tussen de grootheden $E\underline{y}_{ij}$ $(j = 1,\ldots,n_i;\ i = 1,\ldots,s)$. De te toetsen hypothese zegt:

$$\text{(3.2)}\qquad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_s (=\beta),$$

wat neerkomt op nog (s-1), van (2.1) onafhankelijke, relaties tussen de grootheden $E\underline{y}_{ij}$.

De kleinste kwadratenschattingen voor β_i en α_i, alleen gelet op (3.1), zijn

$$\text{voor } \beta_i: \quad \underline{b}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(\xi_{ij}-\bar{\xi}_i)\underline{y}_{ij}}{\sum_j (\xi_{ij}-\bar{\xi}_i)^2} \qquad (i = 1,\ldots,s),$$

$$\text{voor } \alpha_i: \quad \underline{a}_i = \bar{\underline{y}}_i - \underline{b}_i\bar{\xi}_i \qquad (i = 1,\ldots,s),$$

waarin

$$\bar{\underline{y}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_j \underline{y}_{ij} \quad \text{en} \quad \bar{\xi}_i = \frac{1}{n_i}\sum_j \xi_{ij}.$$

Gelet op (3.1) en (3.2) gaan deze schattingen over in:

$$\text{voor } \beta_i: \quad \underline{b} = \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\xi_{ij}-\bar{\xi}_i)\underline{y}_{ij}}{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\xi_{ij}-\bar{\xi}_i)^2},$$

$$\text{voor } \alpha_i: \quad \underline{a}_i = \bar{\underline{y}}_i - \underline{b}\bar{\xi}_i \qquad (i = 1,\ldots,s).$$

Ter vereenvoudiging zullen we in de volgende formules

$$\boxed{K_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n_i} (\xi_{ij} - \bar{\xi}_i)^2}$$

substitueren. Voor de grootheden $\underline{Q}_a$ en $\underline{Q}_{r_2}$ volgt nu:

$$\underline{Q}_a = \sum_i \sum_j (\underline{y}_{ij} - \underline{b}_i \xi_{ij} - \underline{a}_i)^2 =$$

$$= \sum_i \sum_j \underline{y}_{ij} - \bar{\underline{y}}_i - \underline{b}_i(\xi_{ij} - \bar{\xi}_i)^{\ 2} =$$

$$= \sum_i \sum_j (\underline{y}_{ij} - \bar{\underline{y}}_i)^2 - \sum_i \underline{b}_i^2 K_i$$

en

$$\underline{Q}_r = \sum_i \sum_j \underline{y}_{ij} - \bar{\underline{y}}_i - \underline{b}(\xi_{ij} - \bar{\xi}_i)^{\ 2}$$

en dus

$$\underline{Q}_r - \underline{Q}_a = \sum_i b_i^2 K_i - \underline{b}^2 \sum_i K_i$$

zodat de toetsingsgrootheid overgaat in

$$\boxed{\underline{F} = \frac{\sum_i (n_i - 2)}{s-1} \cdot \frac{\sum \underline{b}_i^2 K_i - \underline{b}^2 \sum_i K_i}{\sum_i \sum_j (\underline{y}_{ij} - \bar{\underline{y}}_i)^2 - \sum_i \underline{b}_i^2 K_i}}$$

welke dus onder de te toetsen hypothese verdeeld is als de F van Snedecor met $(s-1)$ en $\sum_i (n_i - 2)$ vrijheidsgraden.

Litteratuur

[1] H.B. Mann, Analysis and design of experiments analysis of variance and analysis of variance designs. Dover Publications, Inc., New York 1949.

[2] J. Neyman, First course in probability and statistics. Henry Holt and Co., New York 1950. Hoofdstuk 5.

[3] R.A. Fisher and F. Yates, Statistical Tables for Biological agricultural and medical research, 3d Ed., Oliver & Boyd, London 1949 Table V.

[4] A.M. Mood, Introduction to the theory of Statistics, Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London, 1950, hoofdstuk 13 (regressietheorie), pp. 426-427 (tabel F-verdeling).