STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1959 - 004

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

A.H.M. Levelt

21 maart 1959

Een hypergeometrische identiteit

1959

ZW 1959-004

Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

door

A.H.M. Levelt

21 maart 1959

Een hypergeometrische identiteit

1. Inleiding.

Men zou het vermoeden van F. Morley:

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad (n \text{ geheel } \geqslant 0)$$

kunnen beschouwen als het begin van een speciale ontwikkeling in de theorie der gegeneraliseerde hypergeometrische reeksen, die erop gericht is deze reeksen in bizondere gevallen voor te stellen door meer elementaire functies. Onder een (gegeneraliseerde) hypergeometrische reeks (functie) verstaat men een reeks van het type

$$(2)\qquad {}_nF_{n-1}\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_n;x \\ b_1,\ldots,b_{n-1}\end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_n)_k}{k!(b_1)_k\cdots(b_{n-1})_k}\, x^k,$$

waarin n een natuurlijk getal is, $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_{n-1}$, x complexe getallen zijn, geen der b's gelijk aan 0 of een negatief geheel getal, en $(a)_k$ gedefinieerd is door

$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$ als k een natuurlijk getal is,

$(a)_k = 1$ als $k=0$.

Voor de convergentie van (2) is voldoende voorwaarde $|x| < 1$. De reeks (2) kan ook nog convergeren voor waarden van x met $|x|=1$.

In deze notatie luidt de formule (1)

$$(3)\qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix} -2n,-2n,-2n;1 \\ 1\ ,\ 1\end{matrix}\right] = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3}\ .$$

Voor n=2 gebruiken we ook de notatie

$$F(a,b;c;x)\left(= {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b;x \\ c \end{matrix}\right]\right).$$

In deze voordracht zullen 5 verschillende bewijzen worden gegeven voor (1) of enigszins gegeneraliseerde identiteiten. Afgezien van het historisch eerste bewijs (paragraaf 2), zijn slechts bewijzen gekozen, waarvan de methoden ook in andere gevallen toepasbaar zijn, en tezamen een overzicht bieden van de in deze tak van wiskunde gebruikelijke methoden. Voor andere (of analoge) bewijzen wordt nog verwezen naar [6], [7], [8], [9] en [10].
Een overzicht van resultaten en methoden vindt men in [1].

2. Het bewijs van Dixon [2] voor de formule

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} .$$

Dixon merkt op dat het linkerlid S van (4) gelijk is aan de coëfficient van $y^o z^o$ in de ontwikkeling naar machten van y en z van

$$(y-y^{-1})^{2n}(z-z^{-1})^{2n}(yz-y^{-1}z^{-1})^{2n},$$

en dus ook gelijk aan de coëfficient van $e^{0.i\theta}\, e^{0.i\varphi}$ in de fourier-ontwikkeling van

$$(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^{2n}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^{2n}(e^{i(\theta+\varphi)}-e^{-i(\theta+\varphi)})^{2n}.$$

Bijgevolg is

$$S = \frac{(-1)^n 4^{3n}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta \, \sin^{2n}\varphi \, \sin^{2n}(\theta+\varphi) d\theta d\varphi .$$

We passen nu de binomiaalformule toe op $\sin^{2n}(\theta+\varphi) = (\sin\theta \cos\varphi + \cos\theta \sin\varphi)^{2n}$, en vinden

$$S = \frac{(-1)^n 4^{3n}}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{2n+k}\theta \, \cos^{2n-k}\theta \, \sin^{4n-k}\varphi \cos^k\varphi \, d\theta d\varphi.$$

Door gebruik te maken van de formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}x \, \sin^{n-1}x \, dx = \tfrac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}m)\, \Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma(\frac{1}{2}(m+n))}$$

([3], p.256), kan men dit herleiden tot

$$S = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n)!} F(-n, n+\tfrac{1}{2}; -2n+\tfrac{1}{2}; 1).$$

Nu is

$$F(-n, n+\tfrac{1}{2}; -2n+\tfrac{1}{2}; 1) = \frac{(-3n)_n}{(-2n+\tfrac{1}{2})_n}$$

(Zie b.v. [1], p.3), en zo vinden we tenslotte

$$S = (-1)^n \frac{(4n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n)!} \frac{(-3n)_n}{(-2n+\tfrac{1}{2})_n} = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} .$$

3. <u>Het bewijs van MacMahon ([4], Vol.I, p.121) voor de formule</u>

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{(n!)^3} .$$

Dit bewijs is een toepassing van het zogenaamde "Master theorem" van MacMahon ([4], Vol.I, p.97), dat als volgt luidt:
Zij $A=(a_{ij})$ een $n \times n$ matrix en $x_1, \ldots, x_n$ onbepaalden. Laat $X_1, \ldots, X_n$ gedefinieerd zijn door

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ;$$

dan is de coëfficient van $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ in $X_1^{c_1} \ldots X_n^{c_n}$ (c_i geheel, ≥ 0) gelijk aan de coëfficient van $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ in de ontwikkeling van

$$(6) \qquad |(1-a_1x_1) \ldots\ldots (1-a_nx_n)|^{-1} .$$

(Het produkt is symbolisch: men moet $a_i a_j \ldots a_l$ vervangen door de symmetrische onderdeterminant van A gevormd uit de i-de, j-de, ..., l-de rij en kolom).

Wij passen dit theorema toe met $n=3$ en

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

en zoeken de coëfficient van $x_1^m x_2^m x_3^m$ in de ontwikkeling van

$X_1^m X_2^m X_3^m = (x_3-x_2)^m (x_1-x_3)^m (x_2-x_1)^m$. Deze coëfficient is, zoals men gemakkelijk nagaat, juist

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}^3 ,$$

terwijl (6) in ons geval gelijk is aan

$$\frac{1}{1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^l .$$

In het rechterlid zoeken we de coëfficient van $x_1^m x_2^m x_3^m$. Het is duidelijk dat deze coëfficient slechts ongelijk nul is, wanneer $m=2n$ (n geheel $\geqslant 0$), en dan gevonden wordt als coëfficient van $x_1^{2n} x_2^{2n} x_3^{2n}$ in $(-1)^{3n}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)^{3n}$. Deze coëfficient is $(-1)^{3n} \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Het boven geformuleerde "Master theorem" kan, anders dan in [4], als volgt bewezen worden. De coëfficient van $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ in $X_1^{c_1} \ldots X_n^{c_n}$ kan geschreven worden in de vorm van een n-voudige, complexe integraal,

$$(7) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{X_1^{c_1} \ldots X_n^{c_n}}{x_1^{c_1+1} \ldots x_n^{c_n+1}} \, dx_1 \ldots dx_n ,$$

waarbij x_i $(i=1,\ldots,n)$ eenmaal de cirkel $C_i = \{x_i \,|\, |x_i|=1\}$ doorloopt in positieve richting. Een voortbrengende functie voor deze coëfficienten is

$$F(z) = F(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{c_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{c_n=0}^{\infty} z_1^{c_1} \ldots z_n^{c_n}$$

$$(8) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{X_1^{c_1} \ldots X_n^{c_n}}{x_1^{c_1+1} \ldots x_n^{c_n+1}} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{dx_1 \ldots dx_n}{(x_1-z_1X_1)(x_2-z_2X_2)\ldots(x_n-z_nX_n)} .$$

De verwisseling van sommaties en integraties is gemakkelijk te rechtvaardigen, wanneer men $|z_i| \leqslant \frac{1}{2na}$ $(i=1,\ldots,n)$ neemt met $a = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Het laatste lid van (8) is analytisch in ieder der

z_i, wanneer $|z_i| \leq \frac{1}{2na}$ is, bovendien is dan de matrix

$$(9) \qquad B(z) = \begin{pmatrix} 1-a_{11}z_1 & -a_{12}z_2 \ldots & -a_{1n}z_n \\ -a_{21}z_1 & 1-a_{22}z_2 \ldots & -a_{2n}z_n \\ - - - - & - - - - & - - - - \\ -a_{n1}z_1 & -a_{n2}z_2 \ldots & 1-a_{nn}z_n \end{pmatrix}$$

niet singulier. We gaan in het laatste lid van (8) op nieuwe integratievariabelen $y_1,\ldots,y_n$ over, gedefinieerd door

$$(10) \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = B(z) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Aangezien

$$|y_i - x_i| = |-a_{i1}z_1x_1 - \ldots - a_{in}z_nx_n| \leq \tfrac{1}{2} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

is, doorlopen $y_1,\ldots,y_n$ gesloten wegen, wanneer x_i eenmaal C_i doorloopt, waarbij y_i eenmaal om de oorsprong loopt, maar y_j $(j \neq i)$ niet om de oorsprong loopt. Voor $y_i (i=1,\ldots,n)$ kunnen we dus een weg W_i nemen die éénmaal in positieve richting om de oorsprong loopt. We vinden

$$(11) \qquad F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int \frac{\det B^{-1}(z)}{y_1 \ldots y_n} \, dy_1 \ldots dy_n = \frac{1}{\det B(z)}.$$

Tenslotte gaat men gemakkelijk na dat

$$\det B(z) = |(1-a_1z_1)\ldots(1-a_nz_n)|,$$

waarin het rechterlid de boven beschreven symbolische uitdrukking is.

4. Het bewijs van Watson ([5] en [1], p.13) voor de formule

$$(12) \qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c & ; 1 \\ & 1+a-b, & 1+a-c & \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)\Gamma(1+a-b-c)}.$$

Bewijs. Dit bewijs maakt gebruik van de formules van Gauss

$$(13) \qquad F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (\mathrm{Re}(c-a-b) > 0),$$

en Kummer

$$(14) \qquad F(a,b;1+a-b;-1) = \frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)} \quad (\mathrm{Re}\ b < \tfrac{1}{2}),$$

die hier niet worden bewezen, maar waarvoor naar de literatuur wordt verwezen ([1] p.2 en p.9).

Eenvoudigheidshalve nemen we aan dat a,b en c niet-negatief zijn en dat $1+\frac{1}{2}a-b-c > 0$ is. De reeks (12) is dan absoluut convergent. Dan geldt voor $n \geq 0$ vanwege (13)

$$F(b+n,c+n;1+a+2n;1) = \frac{\Gamma(1+a+2n)\Gamma(1+a-b-c)}{\Gamma(1+a-b+n)\Gamma(1+a-c+n)},$$

en dus

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{(1+a-b)\Gamma(1+a-c)}\; {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c & ; 1 \\ & 1+a-b, & 1+a-c & \end{matrix}\right] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,\Gamma(c+n)}{n!\,\Gamma(1+a-b+n)\,\Gamma(1+a-c+n)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)\,\Gamma(c+n)}{n!\,\Gamma(1+a+2n)\,\Gamma(1+a-b-c)}\; F(b+n,\ c+n;\ 1+a+2n;1) =$$

$$(15) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n+m)\,\Gamma(c+n+m)}{n!m!\,\Gamma(1+a+2n+m)\,\Gamma(1+a-b-c)} =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)}{n!(p-n)!\,\Gamma(1+a+n+p)\,\Gamma(1+a-b-c)} =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)}{p!\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+a+p)}\; F(a,-p;1+a+p;-1) =$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+p)\,\Gamma(c+p)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a)}{p!\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a+p)} =$$

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)}\; F(b,c;1+\tfrac{1}{2}a;1) =$$

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-b-c)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)},$$

waarmee de formule bewezen is. De verandering der sommatievolgorde is geoorloofd daar alle termen in (15) positief zijn.

5. Een bewijs door volledige induktie van de formule

$$(16)\qquad {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c & ; & 1 \\ 1+a-b, & 1+a-c & \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\,\Gamma(1+a-b)\,\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b-c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a-c)\Gamma(1+a-b-c)}$$

wanneer $-c$ een natuurlijk getal is of 0.

Neem aan dat de formule (16) bewezen is voor $-c=0,1,2,\ldots,n-1$ $(n \geq 1)$. We zullen nu het bewijs leveren voor $-c=n$. Vanwege de symmetrie in b en c is de formule juist voor $b=0,1,\ldots,n-1$. Wanneer $c=-n$ kunnen we de formule ook schrijven in de vorm

$$(17)\qquad (1+a-b)_n\; {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & -n & ; & 1 \\ 1+a-b, & 1+a+n & \end{matrix}\right] = \frac{(1+a)_n(1+\frac{1}{2}a-b)_n}{(1+\frac{1}{2}a)_n}\,.$$

Beide leden zijn polynomen in b van de graad n, die gelijke waarde hebben voor $-b=0,1,\ldots,n-1$. Wanneer we voor nog een waarde van b de gelijkheid kunnen aantonen dan zijn de polynomen identiek. Voor $b=a+n$ gaat (17) over in

$$\frac{(a)_n(a+n)_n(-n)_n}{n!\,(1+a+n)_n} = \frac{(1+a)_n(1-\frac{1}{2}a-n)_n}{(1+\frac{1}{2}a)_n}\,,$$

waarvan men de juistheid gemakkelijk inziet.

Tenslotte blijkt de juistheid van (16) voor $c=0$ onmiddellijk.

6. Een algemenere identiteit, verkregen met behulp van een Wronski-determinant.

We gaan uit van de hypergeometrische differentiaalvergelijking in de vorm

$$x(1-x)y'' + \left\{c-(a+b+1)x\right\}y' - aby = 0$$

(accenten duiden differentiëren naar x aan).
Hiervan zijn

$$y_1(x) = F(a,b;c;x) \text{ en } y_2(x)=x^{1-c}F(a+1-c,b+1-c;2-c;x)$$

oplossingen. ([3], p.283 en p.286; [1], p.1). Bij deze oplossingen behoort de determinant Δ van Wronski, gedefinieerd door

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\,.$$

$\Delta(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\Delta' = \frac{(a+b+1)x-c}{x(1-x)}\,\Delta,$$

welke de oplossing

(18) $\qquad \Delta = \alpha\, x^{-c}(1-x)^{c-a-b-1} \qquad$ (α willekeurige constante)

heeft. Anderzijds vindt men uit de definitie van Δ en de reeksontwikkelingen voor y_1 en y_2

(19) $$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n(a+1-c)_m(b+1-c)_m}{n!(c)_n m!(2-c)_m}(1-c+m-n)x^{n+m-c}.$$

Hieruit volgt, dat $\alpha = 1-c$ is.
Vergelijkt men de coëfficient van x^{N-c} in de beide voorstellingen (18) en (19) van Δ, dan vindt men

$$(-1)^N\binom{c-a-b-1}{N} = \sum_{n+m=N} \frac{(a)_n(b)_n(a+1-c)_m(b+1-c)_m}{n!(c)_n m!(2-c)_m}(1-c+m-n),$$

waaruit men de volgende hypergeometrische identiteit kan afleiden

$$_5F_4\left[\begin{matrix} a, b, \frac{1}{2}c+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}N, c-N-1, -N\ ;\ 1 \\ c, \frac{1}{2}c-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}N, c-a-N, c-b-N \end{matrix}\right] = \frac{(a+b-c+1)_N(1-c)_N}{(a+1-c)_N(b+1-c)_N}.$$

Stellen we hierin $c=1+d+N$, dan vinden we de bekende identiteit ([1], p.25,(3)).

(20) $$_5F_4\left[\begin{matrix} d, 1+\frac{1}{2}d, a, b, -N\ ;\ 1 \\ \frac{1}{2}d, 1+d-a, 1+d-b, 1+d+N \end{matrix}\right] = \frac{(1+d)_N(1+d-a-b)_N}{(1+d-a)_N(1+d-b)_N},$$

waaruit (16) volgt door $a=\frac{1}{2}d$ te nemen.

Literatuur

[1] W.N. Bailey, Generalized hypergeometric series. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics No 32.

[2] A.C. Dixon, On the sum of the cubes of the coefficients in a certain expansion by the binomial theorem. Messenger of Math.XX (1890-1891),p.79-80.

[3] Whittaker and Watson, A course of modern analysis, 4-th edition.

[4] P. MacMahon, Combinatory Analysis, Vol.I & II, Cambridge University Press (1915).

[5] G.N. Watson, Dixon's theorem on generalized hypergeometric functions. Proc.London Math.Soc.(2), 22(1924), p. XXXII-XXXIII.

[6] F. Morley, On the series $1+(\frac{p}{1})^3+(\frac{p(p+1)}{1\cdot 2})^3+\ldots$. Proc. London Math.Soc.(1), 34(1902), p.397-402.

[7] H.W. Richmond, The sum of the cubes of the coefficients in $(1-x)^{2n}$. Messenger of Math.XXI (1891-1892), p.77-78.

[8] W. Ljunggren, Et elementaert bevis for en formel av A.C. Dixon. Norsk Mat.Tidsskr.29 (1947),p.35-38.

[9] T.B. Staver, Om summasjon av potenser av binomialkoeffisientene. Norsk Mat.Tidsskr.29 (1947), p.97-103.

[10] O. Kolberg, Et bevis for Dixons formel. Nordisk Mat.Tidskr.5 (1957), p.87-90.