Statistische Afdeling
van het
Mathematisch Centrum,
Amsterdam

Leiding: Prof. Dr D.van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Dr J.Hemelrijk Jr

Rapport S 84

Eerste rapport over de vergelijking van voedingsbodems voor coli-bacteriën

door

Ph.van Elteren

April 1952

1. Inleiding.

De in dit verslag besproken experimenten vormen een voorbereidend onderzoek, verband houdende met het vaststellen van normvoorschriften voor leidingwater. De experimenten werden onder leiding van Ir K.W.H.Leeflang verricht op de laboratoria van het P.W.N. (Provinciaal Waterleidingbedrijf van Noord Holland).

Het betrof hier de keuze van een geschikte voedingsbodem voor het bacteriologische gedeelte van de normvoorschriften. Voor dit doel werd een aantal watermonsters onderzocht op de aanwezigheid van colibacteriën volgens de zogenaamde verdunningsmethode.

Bij een onderzoek volgens de verdunningsmethode (zie [1] [1])) worden een aantal monsters van het te onderzoeken water geënt op een voor de ontwikkeling van colibacteriën gunstige voedingsbodem. Bij deze ontwikkeling treedt een gisting op. Wordt er gisting waargenomen, dan beslist men tot aanwezigheid van coli, zo er geen gisting optreedt neemt men aan dat het watermonster coli-vrij was.

Men neemt gewoonlijk drie <u>even grote</u> groepen monsters. De monsters van één groep bevatten een bepaald volume van het te onderzoeken water; wij noemen dit volume het <u>monstervolume</u>. De drie monstervolumina vormen gewoonlijk een meetkundige reeks, waarvan de reden de "verdunningsfactor" genoemd wordt. Men verkrijgt de drie groepen monsters, door van het te onderzoeken water drie porties te nemen en deze in verschillende mate met gedestilleerd water te verdunnen, zodanig dat de concentraties van het oorspronkelijke water een meetkundige reeks gaan vormen. Uit ieder van de verkregen "oplossingen" wordt dan een aantal monsters van gelijke inhoud genomen.

Het onderhavige onderzoek bestond uit verdunningsexperimenten, verricht op diverse watersoorten met een aantal voor normvoorschriften in aanmerking komende voedingsbodems.

Wij zullen hieronder in § 2 een overzicht geven van het waarnemingsmateriaal en in § 3 uiteenzetten welke vragen ons hierbij gesteld werden. In § 4 wordt de algemene opzet van de statistische analyse besproken, in § 5, 6 en 7 volgt het onderzoek naar diverse hoedanigheden van de voedingsbodems, terwijl in § 8 de voornaamste conclusies worden samengevat.

[1]) Cijfers tussen tekstaken [ ] verwijzen naar de literatuurlijst.

2. Waarnemingsmateriaal.

De monsters waren genomen uit de volgende watersoorten:

Nummer	Herkomst	Datum van monstername
1	Nieuwe Maas Rotterdam	23/1/1951
2	" " "	30/1/1951
3	Voorfiltraat "	13/2/1951
4	" "	20/2/1951
5	Delft Haarlem Noord	31/1/1951
6	" " "	7/2/1951
7	Loenerveense plas	20/2/1951

Er werden steeds 20 monsters genomen met de volgende monstervolumina:

Watersoort Nummer	Monstervolumina in cm^3		
1	0,1	0,05	0,025
2	0,04	0,02	0,01
3	1	0,5	0,25
4	1	0,5	0,25
5	5.10^{-4}	$2,5.10^{-4}$	$1,25.10^{-4}$
6	$5,10^{-4}$	$2,5.10^{-4}$	$1,25.10^{-4}$
7	2	1	0,5

De grootte van de gekozen monstervolumina hangt samen met de zuiverheid van de betrokken watersoort. De monstervolumina van het onderzochte water zijn kleiner naarmate men er meer coli in verwachtte.

Als voedingsbodems werden de volgende stoffen gebruikt:

I Glutaminezuur
II Mac Conkey N 1028
III Difco Mac Conkey Broth
IV Lactose-gal-brilliant groen
V Endo vlgs. Smit

bij alle watersoorten

en

VI Difco Endo Broth

alléén bij de watersoorten 6 en 7.

Omdat voedingsbodem VI slechts bij twee watersoorten werd toegepast, hebben wij deze stof bij onze statistische analyse buiten beschouwing gelaten.

In dit verslag worden de watersoorten met de nummers 1,2,...,7 en de voedingsbodems met de Romeinse cijfers I, II,...,VI, hierboven vermeld, aangeduid.

Van iedere watersoort werden 20 monsters van ieder der drie volumina geënt op ieder der vijf gebruikte voedingsbodems. Zowel 24 uur als 48 uur na het inzetten van de proef werd nagegaan in hoeveel van de 20 monsters gisting was opgetreden. Vervolgens werd op beide tijdstippen een bevestigend onderzoek verricht om vast te stellen of de gistingen te wijten waren aan coli-, aërogenes- of andere bacteriën.

3. Inhoud van de opdracht.

Ir Leeflang verzocht ons, om aan de hand van dit materiaal de gevoeligheid, de selectiviteit en de reactiesnelheid van de vijf voedingsbodems te vergelijken.

Een voedingsbodem A is gevoeliger dan een voedingsbodem B, als A bij een monster van hetzelfde volume uit hetzelfde water systematisch meer gistingen vertoont dan B.

Voedingsbodem A is selectiever dan B als van de bij A optredende gistingen (onder overigens dezelfde omstandigheden) volgens het bevestigend onderzoek een systematisch groter gedeelte dan bij B aan coli-bacteriën moet worden toegeschreven.

De reactiesnelheid van A is groter dan die van B, indien de gistingen bij A systematisch vroeger optreden dan bij B. In ons geval zal dit tot uiting komen in het feit, dat na 24 uur bij A een grotere fractie van het totaal aantal na 48 uur geconstateerde gistingen reeds is opgetreden dan bij B.

Uiteraard is het mogelijk, dat A ten aanzien van de ene watersoort b.v. gevoeliger is dan B doch t.a.v. een andere watersoort minder gevoelig. Wij hebben daarom de watersoorten verdeeld in groepen: rivierwater (watersoorten 1 en 2), voorfiltraat (watersoorten 3 en 4), slootwater (watersoorten 5 en 6) en resevoirwater (watersoort 7). In ieder dezer groepen afzonderlijk hebben wij de 5 voedingsbodems vergeleken met betrekking tot hun gevoeligheid, hun selectiviteit en hun reactiesnelheid.

4. Methode van het statistische onderzoek.

Het grootste gedeelte van de statistische analyse is verricht met behulp van de methode van de m rangschikkingen [1]) (Zie [2]). Bij de berekening van W werd een

---

1) Bijwijze van afkorting aangeduid als m.r.-methode.

correctie toegepast wegens het optreden van gelijken ([3] p.82, [4] p.29), terwijl verder voor de toetsing gebruik gemaakt werd van de z-benadering voor de verdeling van W.

"Elementen" in de zin van [2] zijn hier de voedingsbodems I t/m V, "waarnemers" zijn hier de diverse monstersoorten, ieder gekarakteriseerd door waternummer en monstervolume. De rangnummers zijn toegekend naar opklimmende grootte van uit het waarnemingsmateriaal bepaalde grootheden.

Wij hebben de resultaten van de toetsing verenigd in tabellen. Hierin komen voor: kolommen voor de aanduiding van de watergroepen (1,2),(3,4) etc., voor de aantallen rijen van de gebruikte schema's (m), de verkregen kolomtotalen voor ieder der watersoorten I t/m V, de overschrijdingskansen k en,zo k $\leq$ 0,05 is, de volgorden van de voedingsbodems geschat op grond van de volgorden der kolomtotalen. Bij deze volgorde wordt de in het beschouwde opzicht "beste" voedingsbodem vooropgeplaatst en betekent:

$\left\{\begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{V} \end{matrix}\right.$ De kolomtotalen bij I en V zijn gelijk of nagenoeg gelijk.

$\underbrace{\mathrm{IV,V,I}}$. De kolomtotalen bij IV, V en I verschillen slechts weinig en hun volgorde is: IV,V,I.

Men bedenke wel, dat slechts de overeenstemming in het hele rangnummerschema getoetst wordt, niet de verschillen tussen de kolommen twee aan twee. Men kan dus aan de gradaties in de verschillen tussen voedingsbodems niet teveel waarde hechten.

5. Gevoeligheid van de voedingsbodems.

Om de gevoeligheid der voedingsbodems te onderzoeken hebben wij gerangnummerd naar de aantallen monsters (uit 20), die gistingen vertoonden na 24 uur (tabel 1) en na 48 uur (tabel 2).

Tabel 1.

m.r.-methode toegepast op aantallen monsters uit 20, die gisting vertoonden na 24 uur.

Kolomtotalen van de voedingsbodems

Water-soorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	25,5	19	25,5	6	14	$< 10^{-4}$	{III, I} II V IV
(3,4)	6	16,5	22	28,5	7	16	$< 10^{-4}$	III II {I, V} IV
(5,6)	4	6,5	14,5	20	10,5	8,5	$\sim 10^{-4}$	III II IV,V,I
(7)	3	3,5	13	14	8,5	6	$\sim 5 \times 10^{-4}$	III II IV V I

Tabel 2.

m.r.-methode toegepast op aantallen monsters uit 20, die gisting vertoonden na 48 uur.

Kolomtotalen van de voedingsbodems

water-soorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	21	21,5	27,5	6,5	13,5	$< 10^{-4}$	III {I, II} V IV
(3,4)	6	19	21,5	27,5	7	15	3×10^{-4}	III II,I V IV
(5,6)	4	12,5	14,5	20	9	4	$< 10^{-4}$	III II,I IV V
(7)	3	6	12	13,5	10,5	3	$\sim 3,5 \times 10^{-3}$	III II IV I V

Bij de watersoorten 5 en 6 hebben wij de monsters van $1,25.10^{-4}$ cm^3 buiten beschouwing gelaten, omdat hierbij in geen enkele voedingsbodem gisting was opgetreden.

Wij concluderen, dat III de gevoeligste voedingsbodem is bij alle watersoorten, gevolgd door II. De voedingsbodem I is na 24 uur weinig gevoelig, doch na 48 uur iets beter. Zij schijnt bij het "reservoir-water" 7 minder gevoelig te zijn, dan bij de andere watersoorten. De voedingsbodems IV en V zijn over het algemeen het minst gevoelig, IV is wellicht in "reservoir-water" iets gevoeliger dan in minder zuiver water.

Wij hebben vervolgens nagegaan hoe het staat met de gevoeligheid t.a.v. B-coli in het bijzonder, door te rangnummeren naar het aantal gistingen dat blijkens het bevestigend onderzoek toegeschreven moet worden aan B. coli. (Tabellen 3 en 4.)

Tabel 3.

m.r.-methode toegepast op aantallen aan B.coli toe te schrijven gistingen na 24 uur.

		Kolomtotalen van de voedingsbodems						
water-soorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	22.5	19.5	27	6	15	$< 10^{-4}$	III I II V IV
(3,4)	6	18	22	27,5	7	15,5	$\sim 10^{-4}$	III II I,V IV
(5,6)	4	6,5	14.5	20	10.5	8.5	$\sim 10^{-4}$	III II IV,V,I
(7)	3	4	14	13	7.5	6.5	10^{-3}	II III IV V I

Tabel 4.

Als tabel 3, doch na 48 uur.

		Kolomtotalen van de voedingsbodems						
water-soorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	23	19	25.5	8	14.5	$2{,}0.10^{-3}$	III I II V IV
(3,4)	6	20	21	26	6.5	16.5	6.10^{-4}	III {II I} V IV
(5,6)	4	13	13.5	19.5	10	4	$\sim 4.10^{-4}$	III {II I} IV V
(7)	3	9	11	14	7	4	4.10^{-2}	III II I IV V

Het resultaat wijkt weinig af van de resultaten verkregen in de tabellen 1 en 2. Blijkbaar is III ook het meest gevoelig voor "coli-gistingen", gevolgd door II.

Wij hebben ook de gevoeligheid t.o.v. andere (niet coli-) bacteriën nagegaan, door te rangnummeren naar de aantallen gistingen, die blijkens het bevestigend onderzoek, niet aan B.coli toegeschreven worden. De aantallen dezer gistingen na 24 uur waren zo gering, dat we hierop geen analyse hebben toegepast. De resultaten na 48 uur zijn verenigd in tabel 5.

Tabel 5.

m.r.-methode toegepast op aantallen niet aan B.coli toegeschreven gistingen na 48 uur

		Kolomtotalen van de voedingsbodems						
Water-soorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	21	17	23.5	15.5	13	$\sim 0{,}25$	niet significant
(3,4)	6	12	19	25.5	17	16.5	$\sim 0{,}12$	" "
(5,6)	4	10.5	16.5	12.5	11	9.5	$\sim 0{,}3$	" "
(7)	3	5	12	10.5	13.5	4	$\sim 5.10^{-3}$	IV II III I V

Slechts bij watersoort 7 is het resultaat significant, de voedingsbodems IV, II en III blijken hier gevoeliger te zijn voor "andere" bacteriën, dan de voedingsbodems I en V.

De gevoeligheid t.a.v. "andere" bacteriën verschilt overigens weinig voor de diverse voedingsbodems. Wij merken op, dat grote gevoeligheid voor andere bacteriën, in tegenstelling tot gevoeligheid voor coli bacteriën, ongunstig is.

6. Selectiviteit der voedingsbodems.

Om de selectiviteit van de voedingsbodems te vergelijken hebben wij gerangnummerd naar de verhoudingen tussen de aantallen coli-gistingen en alle geconstateerde gistingen. Wij deden dit alleen met de gegevens na 48 uur, omdat, zoals in §5 gebleken is, de aantallen "andere" gistingen na 24 uur zeer vaak 0 waren, in welke gevallen genoemde verhouding steeds 1 is.(Zie tabel 6.)

Bij bepaalde monstersoorten trad in één of meer voedingsbodems geen enkele gisting, dus ook geen coli-gisting op. In deze gevallen zou genoemde verhouding onbepaald ($\frac{0}{0}$) worden. De met deze monstersoorten corresponderende rijen zijn bij de analyse weggelaten.

Tabel 6.

m.r.-methode toegepast op $\frac{n_1}{n_2}$

n_1= aantal aan B.coli toegeschreven gistingen na 48 u.
n_2= totaal aantal gistingen na 48 uur.

Watersoorten	m	I	II	III	IV	V	k	Volgorde
		Kolomtotalen van de voedingsbodems						
(1,2)	6	16	20	15.5	15	23.5	> 0.44 < 0.50	niet significant
(3,4)	6	24.5	19.5	18	9.5	18.5	0.10	" "
(5,6)	3	9	8	10	8.5	9.5	0.97	" "
(7)	3	13	6	8	4	14	3.10^{-3}	V I III II IV

Het blijkt, dat de selectiviteit van de voedingsbodems niet veel uiteenloopt, behalve bij watersoort 7, waar V en I selectiever zijn dan de drie andere voedingsbodems.

Wij hebben in § 5 gezien dat in het algemeen de aantallen niet aan coli toegeschreven gistingen, geconstateerd na 24 uur, dus opgetreden in de periode tussen 0 en 24 uur na enting, zeer klein zijn. Na 48 uur zijn deze aantallen aanzienlijk groter. Dit doet ons vermoeden, dat de selectiviteit van de voedingsbodems in de tweede periode van 24 uur na enting van de watermonsters aanzienlijk kleiner is dan in de eerste periode.

Wij hebben dit vermoeden getoetst met behulp van 2x2 tabellen (zie [5]), waarbij wij als categorieën gebruikten:

<u>a</u> { gistingen tussen 0 en 24 u. na enting
" " 24 " 48 u. " "

<u>b</u> { gistingen toegeschreven aan B.coli
" niet toegeschreven aan B.coli.

Als wij de kans dat een gisting, die tussen 0 en 24 uur optreedt, een coligisting is p_1 noemen, en de kans, dat een gisting, die tussen 24 en 48 uur optreedt een coligisting is p_2, dan toetsen wij op deze wijze de hypothese $p_1=p_2$.

Wij hebben deze toets uitgevoerd voor ieder van de voedingsbodems I t/m V en ieder van de watercombinaties (1,2),(3,4),(5,6) en (7). De resultaten zijn verenigd in tabel 7.

Het blijkt dat de verhouding tussen de aantallen coligistingen en gistingen zonder meer, in de periode 0 - 24 uur, nagenoeg in alle gevallen <u>significant</u> groter is dan in de periode 24 - 48 uur. Uitzonderingen zijn slechts de watersoort (5,6) bij de voedingsbodems I,II,IV en V en de watersoort 7 bij de voedingsbodems I en V. Hieruit volgt, dat de voedingsbodems in de eerste periode van 24 uur in het algemeen selectiever zijn, dan in de tweede periode.

Tabel 7.

Overschrijdingskanden van 2x2 tabellen voor toetsing van $p_1 = p_2$.

p_1= kans dat een gisting tussen 0 en 24u.coligisting is
p_2= " " " " " 24 en 48 u. " " .

Water-soorten	Voedingsbodems I		II		III		IV		V	
(1,2)	+	$< 10^{-4}$	+	$< 10^{-4}$	+	$< 10^{-4}$	+	0.018	+	8.10^{-4}
(3,4)	+	9.10^{-4}	+	7.10^{-4}	+	$< 10^{-4}$	+	5.10^{-3}	+	0.0026
(5,6)	(+)	0.6	(+)	0.49	+	0.01	(-)	0.22	(0)	1
(7)	0	1	+	$< 10^{-4}$	+	7.10^{-4}	+	2.10^{-4}	(+)	0.34

+ (resp. -) betekent: verhouding tussen aantallen coligistingen en alle gistingen tussen 0 en 24 uur is groter (resp. kleiner) dan dezelfde verhouding tussen 24 en 48 uur.
(+) resp. (-) als boven, doch resultaat niet significant.

7. **Reactiesnelheid der voedingsbodems.**

Om de reactiesnelheid van de voedingsbodems te vergelijken hebben wij gerangnummerd naar de grootheden vermeld boven tabel 8.

Tabel 8.

m.r.-methode toegepast op $\frac{m_1}{m_2}$.
m_1=aantal gistingen na 24 uur,
m_2=aantal gistingen na 48 uur.

Water-soorten	n	Kolomtotalen van de voedingsbodems I	II	III	IV	V	k	Volgorde
(1,2)	6	25	17.5	20	8	21.5	0.035	I,V, III,II IV
(3,4)	6	16	23	20.5	11	19.5	0.22	niet significant
(5,6)	3	4	10	13	9	9	0.20	niet significant
(7)	3	3.5	13	14	7	7.5	$2{,}7.10^{-3}$	III,II $\left\{\begin{matrix}V\\IV\end{matrix}\right.$ I

Ook hier zijn de rijen, waarin $m_1=m_2=0$, dus waarin een onbepaalde verhouding $\frac{m_1}{m_2}$ voorkwam, weggelaten.

Het resultaat is significant voor de watersoorten (1,2) en (7), doch de verkregen volgorden lopen sterk uiteen. Bij (1,2) is I de snelste, hoewel weinig verschillend van III en V, en IV de langzaamste, terwijl III en II de snelste voedingsbodems zijn.

√ bij watersoort (7) is I de langzaamste

8. Overzicht der conclusies.

1. Bij de vergelijking van de gevoeligheid van de diverse voedingsbodems verkregen wij veel duidelijker resultaten dan bij de vergelijking van selectiviteit en reactiesnelheid.

2. Het blijkt dat III in alle watersoorten de gevoeligste voedingsbodem is, II in nagenoeg alle watersoorten op een na de gevoeligste.

3. De selectiviteit der voedingsbodems is alleen duidelijk verschillend voor watersoort (7); hierbij zijn de voedingsbodems I en V de meest selectieve. Alle voedingsbodems zijn verder in de periode tussen 0 en 24 u. na enting der watermonsters selectiever, dan in de periode tussen 24 en 48 uur; bij de watercombinatie (5,6) bleek dit alleen voor voedingsbodem III, terwijl er voor de andere voedingsbodems geen reden was een verschil aan te nemen; bij watersoort (7) en voedingsbodem I was ook geen aanwijzing voor een verschil aanwezig.

4. Er bestaat in het algemeen niet veel verschil tussen de resultaten verkregen bij de diverse watersoorten, met uitzondering van watersoort (7). Ten eerste vinden wij bij watersoort (7) overal significante resultaten, terwijl dit bij de andere watersoorten alléén het geval is bij het onderzoek naar de gevoeligheid (voor (1,2) ook nog bij het onderzoek naar de reactiesnelheid). Bervolgens treden bij (7) ook afwijkingen in de volgorde op; voedingsbodem IV is over het algemeen de minst gevoelige, behalve bij watersoort (7), en voedingsbodem I is de snelste bij watersoort (1,2) doch de langzaamste bij watersoort (7).

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr.49
AMSTERDAM O.
Statistische Afdeling
S47 (M14)

Methode der m rangschikkingen [1])

Een duidelijk voorstelling van deze toetsingsmethode verkrijgt men door n elementen te beschouwen, die een bepaald kenmerk, eventueel in verschillende mate, bezitten. dit kenmerk wordt door m waarnemers beoordeeld en ieder van deze waarnemers rangschikt deze n elementen volgens zijn beoordeling naar opklimmende waardering. Op deze wijze ontstaan m rijen van rangschikkingen. We willen nu een maat aangeven voor de overeenstemming tussen deze rangschikkingen, m.a.w. een maat voor de overeenstemming tussen de m beoordelingen. De hypothese H_0 , die met deze methode getoetst kan worden, houdt in dat er geen overeenstemming tussen de waarnemers bestaat; precieser gezegd, dat alle rangschikkingen onafhankelijk van elkaar op toevallige wijze zijn ontstaan. Dit is b.v. het geval, als het betrokken kenmerk in werkelijkheid voor alle elementen dezelfde waarde bezit.

We kunnen de afleiding voor de maat van overeenstemming het eenvoudigst geven aan de hand van een voorbeeld.

elementen	A	B	C	D	E	F
rangnummers toegekend door waarnemer a	5	4	1	6	3	2
b	2	3	1	5	6	4
c	4	1	6	3	2	5
d	4	3	2	5	1	6
	15	11	10	19	12	17

De som van alle rangnummers is $\frac{1}{2} n m(n+1)$. Onder de hypothese H_0 is het theoretische gemiddelde van iedere kolom: $\frac{1}{2} m(n+1)$

We beschouwen nu de afwijkingen van dit gemiddelde. In ons voorbeeld is het theoretisch kolomgemiddelde gelijk aan 14. De afwijkingen daarvan zijn

$$1 \quad -3 \quad -4 \quad 5 \quad -2 \quad 3$$

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid

De som der kwadraten van deze afwijkingen noemen wij S.
In ons voorbeeld is S = 64.
Als alle m rangschikkingen gelijk zijn wordt het maximum van S bereikt.
Dit maximum is $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$.
We definiëren nu als <u>coëfficiënt van overeenstemming</u>

$$W = \frac{12\ S}{m^2(n^3-n)}$$

In ons voorbeeld is $W = \frac{12 \times 64}{16 \times 210} = 0{,}229$.
W varieert dus tussen 0 en 1.

De verdeling van $\underline{S}$ onder de hypothese H_0 is exact berekend voor een aantal waarden van n en m [1] , terwijl voor grote m en n benaderingen bekend zijn.

De meest gebruikelijke benaderingen zijn de volgende.

1°. De χ^2-benadering:

$\chi_r^2 = m(n-1)\underline{W} = \frac{12\ \underline{S}}{mn(n+1)}$ heeft voor $m \to \infty$ een χ^2-verdeling met n-1 vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg. 36-37).

2°. De z-benadering:

$\underline{V} = (m-1)\frac{\underline{W}}{1-\underline{W}}$ is bij benadering verdeeld als $\underline{F} = e^{2\underline{z}}$

($\underline{F}$ is de $\underline{F}$ van Snedecor, $\underline{z}$ de $\underline{z}$ van Fisher) met

$\nu_1 = n-1-\frac{2}{m}$

$\nu_2 = (m-1)\,\nu_1$ vrijheidsgraden ([1] pg. 84 [2] pg.33-36).

Met behulp van de verdelingen van $\underline{S}$ of $\underline{W}$ onder de hypothese H_0, kan deze hypothese getoetst worden, waarbij H_0 verworpen wordt als $\underline{W}$ waarden dichtbij 1 (resp. $\underline{S}$ dichtbij $\frac{1}{12} m^2(n^3-n)$) aanneemt, de kritieke zône is dus van de vorm $W \geq W_0$ (resp. $S \geq S_0$).

Het kan voorkomen dat de waarnemers geen onderscheid ontdekken in de mate waarin verschillende elementen het kenmerk bezitten. Ze geven deze elementen dan gelijke rangnummers.

Veronderstel, dat door een waarnemer geen onderscheid wordt gemaakt tussen de elementen, die de rangnummers 3 t/m 6 moeten dragen. Dan wordt als rangnummer van ieder van deze elementen het gemiddelde van de rangnummers $\frac{1}{4}(3 + 4 + 5 + 6) = 4\frac{1}{2}$ gebruikt.

Daar het maximum van $\underline{S}$ nu verandert, moeten wij een correctie op de formule voor $\underline{W}$ toepassen. Deze vindt men in [1] (pg.82) en [2] (pg. 28-30). Eveneens veranderen dan de formules voor de χ^2-benadering ([1] pg. 86, [2] pg. 37) en voor de z-benadering ([1] pg. 86 [2] pg. 34), doch deze correcties zijn van weinig betekenis, tenzij het aantal gelijken groot is.

Literatuur: [1] M.G.Kendall, Rank correlation methods, London 1948, Hoofdstuk 6, pag. 80.

Tabel van de verdelingsfunctie van S voor:

$n = 3 \quad m = 2$ t/m 10

$n = 4 \quad m = 2$ t/m 6

$n = 5 \quad m = 3$

op pag. 146-149.

Tabel van de waarden van S, waarvan de overschrijdingskansen onder de hypothese H_o gelijk zijn aan 0,05 of 0,01, berekend met behulp van de z-benadering voor:

$n = 3 \quad m = 8,9,10,12,14,15,16,18,20$

$n = 4 \quad m = 4,5,6,8,10,15,20$

$n = 5$ t/m $7 \quad m = 3,4,5,6,8,10,15,20$

op pag. 150.

[2] Ph.van Elteren, Methode der m rangschikkingen, Cursus "Parametervrije Methoden", Hoofdstuk II, Rapport S 59, Mathematisch Centrum (1951), Blz. 18-45.

ATHEMATISCH CENTRUM,
de Boerhaavestr. 49,
msterdam-O.

tatistische Afdeling.
S 53 (M 23).

Toetsing van de hypothese $p_1 = p_2$ met behulp van een 2 x 2-tabel[1].

Wij beschouwen twee reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment van de ene reeks één van de twee resultaten A of $\bar{A}$ (non-A) heeft en ieder experiment van de tweede reeks één van de beide resultaten B of $\bar{B}$ (hierbij kan A=B zijn). Daarbij wordt ondersteld, dat bij ieder der experimenten van de ene reeks de kans op A gelijk aan p_1 (en dus de kans op $\bar{A}$ gelijk aan $1-p_1$) is en bij ieder der experimenten van de tweede reeks de kans op B gelijk aan p_2 (en dus de kans op $\bar{B}$ gelijk aan $1-p_2$). De te toetsen hypothese luidt nu:

$$H_0: \ p_1 = p_2.$$

Indien de eerste reeks uit n en de tweede reeks uit m waarnemingen bestaat, waaronder n_1 (resp. m_1) maal A (resp. B) voorkomt, kunnen deze gegevens in de volgende 2 x 2-tabel worden samengevat:

	A resp. B	$\bar{A}$ resp. $\bar{B}$	totaal
eerste reeks	n_1	$n-n_1$	n
tweede reeks	m_1	$m-m_1$	m
totaal	r	n+m-r	n+m

Als toetsingsgrootheid wordt n_1, het aantal malen A in de eerste reeks waarnemingen, gebruikt. Indien H_0 juist is bezit deze grootheid onder de voorwaarde, dat r de bij het experiment gevonden waarde aanneemt, de volgende waarschijnlijkheidsverdeling: de kans, dat een bepaalde waarde n_1 aangenomen wordt, is gelijk aan:

$$\frac{\binom{n}{n_1}\binom{m}{m_1}}{\binom{n+m}{r}}$$

Als kritieke zône worden de waarden van n_1 met de kleinste waarschijnlijkheden bijeengezocht, tot de gekozen betrouwbaarheidsdrempel het toevoegen van een nieuwe waarde verhindert (bij éénzijdige toetsing bestaat de kritieke zône uitsluitend uit grote of uitsluitend uit kleine waarden van n_1).

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

De overschrijdingskans, behorende bij de gevonden waarde van n_1, is gedefiniëerd als de som van alle waarschijnlijkheden van bovenstaande verdeling, die hoogstens gelijk aan de waarschijnlijkheid van de gevonden waarde zijn (bij éénzijdige toetsing echter gelijk aan de som van de waarschijnlijkheden van alle waarden die groter of gelijk aan de gevondene, of van alle waarden, die kleiner of gelijk aan de gevondene zijn). Deze exacte toetsingsmethode voor H_0 is afkomstig van R.A. Fisher.

Indien n en m zo groot zijn, dat deze exacte berekening te omslachtig wordt, maakt men gebruik van de volgende benadering:

Gemiddelde en spreiding van de grootheid n_1 zijn (indien H_0 juist is):

$$\frac{nr}{n+m} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{\frac{nmrs}{(n+m)^2(n+m-1)}} \qquad (s = n + m - r)$$

Men gebruikt dan in plaats van de exacte waarschijnlijkheidsverdeling van n_1 de normale verdeling met hetzelfde gemiddelde en dezelfde spreiding en in plaats van de gevonden waarde van n_1 neemt men het getal, dat $\frac{1}{2}$ dichter bij het gemiddelde ligt dan deze gevonden waarde (dit laatste is de z.g. "continuïteitscorrectie", die bij toenemende n en m weldra verwaarloosd kan worden). Met behulp van de benadering gaat men dan verder te werk als boven beschreven, daarbij gebruik makende van een tabel van de normale verdeling.

<u>Litteratuur</u>:

R.A.Fisher, Statistical Methods for Research Workers, London 1948, p. 96. <u>Opmerking</u>: Fisher gebruikt hier de éénzijdige overschrijdingskans.

J.Hemelrijk, Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, Vacantiecursus Mathematisch Centrum, Amsterdam 1950, § 4.

Litteratuur.

[1] **Ph.van Elteren** (1951)
Over bacteriologisch wateronderzoek volgens de verdunningsmethode.
Overzichtsrapport S 57 (O 2).
Mathematisch Centrum, Statistische Afdeling.

[2] Methoden der m rangschikkingen.
Memorandum S 47 (M 14)
Mathematisch Centrum, Statistische Afdeling.
(Toegevoegd aan dit rapport.)

[3] **M.G.Kendall** (1948)
Rank correlation methods
Ch.Griffin&Co Ltd. London.

[4] **Ph. van Elteren** (1951)
Methode van de m rangschikkingen.
Cursus Parametervrije methoden, hoofdstuk II.
Mathematisch Centrum, Statistische Afdeling.

[5] Toetsing van de hypothese $p_1=p_2$ met behulp van een 2 x 2 tabel.
Memorandum S 53 (M23)
Mathematisch Centrum, Statistische Afdeling.
(Toegevoegd aan dit rapport.)