

Stichting
MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
Amsterdam

R 178

Berekening van Schijnbare Specifieke Geleidingsvermogens
bij het Voorkomen van Lagen van
Verskillende Geleidbaarheid

J. Berghuis

1952

BEREKENING VAN SCHIJNBARE SPECIFIEKE GELEIDINGS-
VERMOGENS BIJ HET VOORKOMEN VAN LAGEN VAN VER-
SCHILLENDE GELEIDBAARHEID.

J. Berghuis

Rapport R 178

van de

Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

1 9 5 2 .

Berekening van schijnbare specifieke geleidingsver-
mogens bij het voorkomen van lagen van verschillende
geleidbaarheid.

1. Inleiding.

Bij schrijven nr 2-385 d.d. 9 Juni 1952 van de Dienst der Zuiderzeewerken werd ons verzocht de berekening uit te voeren verbonden aan de oplossing van de potentiaalvergelijking bij het voorkomen van lagen van verschillende geleidbaarheid.

Het probleem is het volgende:

Op de bodem van het IJsselmeer worden 2 electroden aangebracht, waardoor een bekende stroom wordt gestuurd. De bodem bestaat uit een aantal lagen van verschillende geleidbaarheid, welke grensvlakken horizontaal gedacht kunnen worden. De diepten der grensvlakken en de specifieke geleidingsvermogens der lagen bepalen het potentiaalverschil $\Delta \varphi$ hetwelk zal optreden tussen 2 meetelectroden, eveneens op de bodem aangebracht en wel zijn de afstanden tot de eerste electroden en de meetelectroden en tussen de meetelectroden zelf allen gelijk. Alle electroden liggen op een rechte.

Dit rapport bevat allereerst de methode om dit potentiaalprobleem op te lossen en wel in principe voor willekeurig veel lagen.

Daarna zullen de numerieke resultaten voor de vier gevraagde profielen gegeven worden.

Literatuur, betreffende dit onderwerp (o.a.):

- (1.1) J.N. Hummel, Der scheinbare spezifische Widerstand.
Zeitschrift für Geophysik 5 Jahrg. 89 Nr 3/4.
- (1.2) J.N. Hummel, Der scheinbare spezifische Widerstand bei vier planparallelen Schichten.
Zeitschrift für Geophysik, 5 Jahrg.

2. Oplossingsmethode in het geval van een puntvormige bron.

Denkt men zich op het grensvlak van 2 lagen een puntvormige bron. De bron wordt als oorsprong van een rotatie-symmetrisch coördinatenstelsel genomen, zodanig, dat het grensvlak, waarin de bron zich bevindt, het coördinatenvlak $z = 0$ vormt. De andere coördinaten zijn r en φ . De potentiaal in de i° laag zij $\varphi_i(r, z)$, het specifieke geleidingsvermogen σ_i en de z -coördinaat van het grensvlak met de $(i+1)^{\circ}$ laag zij $z = z_i$.

De vergelijking, waar elke $\varphi_i(r, z)$ aan moet voldoen, is

$$\varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \varphi_{zz} = 0 \quad (2.1)$$

met de voorwaarden, indien $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ is gesteld:

$$\varphi(r, z) \sim 1/R \quad \text{als } R \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{als } R \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

en op het i° grensvlak

$$\varphi_i(r, z_i) = \varphi_{i+1}(r, z_i) \quad (2.4)$$

$$\sigma_i \frac{\partial \varphi_i(r, z_i)}{\partial z} = \sigma_{i+1} \frac{\partial \varphi_{i+1}(r, z_i)}{\partial z} \quad (2.5)$$

De vergelijkingen (2.4) en (2.5) moeten voldaan worden voor elke waarde van r .

Zoals bekend zijn $\frac{1}{R}$, $J_0(\lambda r)e^{\lambda z}$ en $J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}$, waarbij λ een willekeurige parameter is, oplossingen van (2.1).

Men probeer met behulp van deze oplossingen van (2.1) de potentiaal-functie $\varphi_i(r, z)$ te schrijven als:

$$\varphi_i(r, z) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \{ f_i^+(\lambda) e^{\lambda z} + f_i^-(\lambda) e^{-\lambda z} \} d\lambda, \quad i^2 \neq 1, \quad (2.6)$$

en

$$\varphi_i(r, z) = \frac{1}{R} + \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \{ f_i^+(\lambda) e^{\lambda z} + f_i^-(\lambda) e^{-\lambda z} \} d\lambda, \quad i^2 = 1. \quad (2.7)$$

Verder kan men nog gebruikmaken van de volgende formules:

$$i = -1 \quad \text{dan is} \quad \frac{1}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{\lambda z} d\lambda, \quad (2.8)$$

$$i = +1 \quad \text{dan is} \quad \frac{1}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (2.9)$$

De $f_i^+(\lambda)$ en $f_i^-(\lambda)$ zijn functies van λ , niet van r en z . Men kan deze functies in principe vinden op de volgende wijze:

Twee der lagen, bijv. de n° en m° , moeten zich tot in het oneindige uitstrekken. Zij $n > 0$, en dus $m < 0$, dan geldt in verband met de eis (2.3) $f_n^+(\lambda) \equiv 0$ en $f_m^-(\lambda) \equiv 0$.

De voorwaarden (2.4) en (2.5) geven dan het middel om $f_i^+(\lambda)$ en $f_i^-(\lambda)$ uit te drukken in de $f_{i+1}^+(\lambda)$ en $f_{i+1}^-(\lambda)$, dus in de $f_n^-(\lambda)$. Uiteindelijk houdt men dan een vergelijking over, met behulp waarvan de $f_n^-(\lambda)$ als functie van λ , σ_i en z_i is te vinden.

Deze methode gaat dus op bij elk aantal lagen. Daarbij worden de uitdrukkingen steeds ingewikkelder.

3. Het gevraagde probleem (5 lagen).

Aanwezig zijn vijf lagen, van bovenaf gezien water, klei, zand, rots en ander gesteente. De lucht boven het water heeft een specifieke weer-

stand gelijk aan oneindig. Op een rechte lijn in het grensvlak water, klei, zijn 4 elektroden met onderlinge afstand a aangebracht, de twee binnenste zijn meetelektroden. Door de twee buitenste wordt een stroom ter sterkte I gestuurd.

lucht	-----	
water	-----	σ_1
klei	-----	σ_2
zand	-----	σ_3
rots	-----	σ_4
a.gest.	-----	σ_5

$\Delta\varphi$ zij het veroorzaakte potentiaalverschil tussen de meetelektroden. Kiest men een der stroomelektroden als oorsprong van het coördinatenstelsel (r, z, δ) (zie vorige §), dan geldt

$$\Delta\varphi = 2 \left[\varphi_1(a, 0) - \varphi_1(2a, 0) \right] \quad (3.1)$$

Duidelijk is dat de stroomsterkte I en de sterkte van de puntvormige bron evenredig zijn. Het verband tussen het schijnbare specifieke geleidingsvermogen σ_a en potentiaal en stroomsterkte is volgens Hummel zie (1.1) pag. 92

$$1/\sigma_a = 2\pi a \frac{\Delta\varphi}{I} \quad (3.2)$$

Aangezien tot nu toe gerekend is met een bron van eenheidssterkte, dient nog de bijbehorende stroomsterkte I' bepaald te worden. Splits die stroomsterkten in twee delen

$$I' = I_1 + I_2 \quad (3.3)$$

1 en 2 hebben betrekking op de betreffende laag.

Stel om de bron een bol met straal ϵ , zijn nu w_1 en w_2 de respectievelijke stroomdichtheden op die bol in de twee lagen, dan gelden

$$I_1 = 2\pi \epsilon^2 w_1 \text{ met } w_1 = -\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = -\frac{\sigma_1}{\epsilon^2}$$

$$I_2 = 2\pi \epsilon^2 w_2 \text{ met } w_2 = -\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = -\frac{\sigma_2}{\epsilon^2}$$

dus
$$I = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)$$

En hieruit volgt weer in verband met (3.2)

$$\frac{1}{\sigma_a} = \rho_a = \frac{a \Delta\varphi}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (3.3)$$

De uitdrukking voor $\varphi_1(r, z)$ is volgens § 2 nu te vinden:

Stel:
$$s_i = 1 + \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} \quad (3.4)$$

$$t_i = 1 - \frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} \quad (3.5)$$

dan is

$$\varphi_1(a, 0) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda a) \frac{S(\lambda)}{N(\lambda)} d\lambda \quad (3.6)$$

waarin

$$S(\lambda) = s_1 (1 + e^{2\lambda z_1}) \left\{ s_2 s_3 s_4 + s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda z_4} + s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda z_3} + \right. \\ \left. + t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda z_2} + s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3)} + t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2)} \right. \\ \left. + t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2)} + t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2)} \right\}.$$

en

$$N(\lambda) = s_1 s_2 s_3 s_4 + t_1 s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda z_4} + t_1 s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda z_3} + t_1 t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda z_2} \\ - t_1 s_2 s_3 s_4 e^{2\lambda z_1} + s_1 s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3)} + s_1 t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2)} \\ - s_1 s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_1)} + s_1 t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2)} - \\ - s_1 s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_1)} - s_1 t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda(z_2 - z_1)} + \\ + t_1 t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2)} - t_1 s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 - z_1)} \\ - t_1 t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2 - z_1)} - t_1 t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2 - z_1)} - \\ - s_1 t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2 - z_1)}.$$

4. Het verband met de spiegelingmethode.

Beziat men thans de integrand (3.6) nader, dan ziet men voor grote waarden van λ is $\frac{S(\lambda)}{N(\lambda)} \sim 1$ en dus convergeert de integraal op het karakter van $J_0(\lambda a)$.

Gebruikmakend van de formules (2.9) krijgt men echter een interessant resultaat.

Ontwikkel namelijk $\frac{S(\lambda)}{N(\lambda)}$ naar afdalende machten van e-machten van λ , dan krijgt men na enig rekenen:

$$\varphi_1(a) = \frac{1}{a} + 2 \frac{\sigma_2 t_4}{\sigma_1 s_1 s_4 \sqrt{a^2 + 4z_4^2}} + 2 \frac{\sigma_2 t_3}{\sigma_1 s_1 s_3 \sqrt{a^2 + 4z_3^2}} + 2 \frac{\sigma_2 t_2}{\sigma_1 s_1 s_2 \sqrt{a^2 + 4z_2^2}} \\ + \frac{2}{s_1 \sqrt{a^2 + 4z_1^2}} + \frac{2 t_4}{s_4 \sqrt{a^2 + 4(z_4 - z_1)^2}} + \frac{2 t_3}{s_3 \sqrt{a^2 + 4(z_3 - z_1)^2}} + \frac{2 t_2}{s_2 \sqrt{a^2 + 4(z_2 - z_1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2 \sigma_2 t_2 t_3 t_4}{\sigma_1 s_1 s_2 s_3 s_4 \sqrt{a^2 + 4(z_4 - z_3 + z_2)^2}} + \frac{2 t_3 t_4}{s_1 s_3 s_4 \sqrt{a^2 + 4(z_4 - z_3 - z_1)^2}} + \\
 & + \frac{2 t_2 t_4}{s_1 s_2 s_4 \sqrt{a^2 + 4(z_4 - z_2 - z_1)^2}} + \frac{2 t_2 t_3}{s_1 s_2 s_3 \sqrt{a^2 + 4(z_3 - z_2 - z_1)^2}} + \\
 & + \frac{2 t_2 t_3 t_4}{s_2 s_3 s_4 \sqrt{a^2 + 4(z_4 - z_3 + z_2 - z_1)^2}} - \frac{1}{s_1 s_2 s_3 s_4} \int_0^\infty \frac{S_1(\lambda) N_1(\lambda)}{s_1 s_2 s_3 s_4 + N_1(\lambda)} J_0(\lambda a) d\lambda .
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

waarin

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} S_1(\lambda) = & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda z_4} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda z_3} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda z_2} + \\
 & + s_2 s_3 s_4 e^{2\lambda z_1} + s_1 s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_1)} + s_1 s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_1)} + \\
 & + s_1 t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda(z_2 - z_1)} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2)} + s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 - z_1)} \\
 & + t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2 - z_1)} + t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2 - z_1)}
 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
 N_1(\lambda) = & t_1 s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda z_4} + t_1 s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda z_3} + t_1 t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda z_2} + \\
 & - t_1 s_2 s_3 s_4 e^{2\lambda z_1} + s_1 s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3)} + s_1 t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2)} - \\
 & - s_1 s_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_1)} + s_1 t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2)} - s_1 s_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_1)} - \\
 & - s_1 t_2 s_3 s_4 e^{-2\lambda(z_2 - z_1)} + t_1 t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2)} - t_1 s_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 - z_1)} \\
 & - t_1 t_2 s_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_2 - z_1)} - t_1 t_2 t_3 s_4 e^{-2\lambda(z_3 - z_2 - z_1)} - \\
 & - s_1 t_2 t_3 t_4 e^{-2\lambda(z_4 - z_3 + z_2 - z_1)} .
 \end{aligned}$$

Interessant is nu, dat de eerste termen in het rechterlid van (4.1) termen van die reeksontwikkeling zijn, welke men verkrijgt door het spiegelingprincipe toe te passen. Men heeft hier dus een zeker aantal termen van die reeksontwikkeling medegenomen en voor de rest een integraaluitdrukking gevonden. De integrand van deze integraal gaat exponen-

tieel naar nul als λ naar oneindig gaat.

5. Het vierlagenprobleem.

De $\varphi_1(a)$ is direct af te leiden uit (4.1) door $\sigma_4 = \sigma_5$ te stellen, dus $t_4 = 0$ en $s_4 = 2$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) = & \frac{1}{a} + \frac{2}{s_1 \sqrt{a^2 + 4z_1^2}} + \frac{2 \sigma_2' t_2}{\sigma_1 s_1 s_2 \sqrt{a^2 + 4z_2^2}} + \frac{2 \sigma_2' t_3}{\sigma_1 s_1 s_3 \sqrt{a^2 + 4z_3^2}} + \\ & + \frac{2 t_2}{s_2 \sqrt{a^2 + 4(z_1 - z_2)^2}} + \frac{2 t_3}{s_3 \sqrt{a^2 + 4(z_1 - z_3)^2}} + \frac{2 t_2 t_3}{s_1 s_2 s_3 \sqrt{a^2 + 4(z_1 + z_2 - z_3)^2}} - \\ & - \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \int_0^{\infty} \frac{T_1(\lambda) N_1(\lambda)}{s_1 s_2 s_3 + N_1(\lambda)} J_0(\lambda a) d\lambda, \end{aligned} \quad (4.2)$$

waarin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} T_1(\lambda) = & s_2 s_3 e^{2\lambda z_1} + \frac{\sigma_2'}{\sigma_1} t_2 s_3 e^{-2\lambda z_2} + \frac{\sigma_2'}{\sigma_1} s_2 t_3 e^{-2\lambda z_3} \\ & + s_1 t_2 s_3 e^{2\lambda(z_1 - z_2)} + s_1 s_2 t_3 e^{2\lambda(z_1 - z_3)} + t_2 t_3 e^{2\lambda(z_1 + z_2 - z_3)}, \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} N_1(\lambda) = & - t_1 s_2 s_3 e^{2\lambda z_1} + t_1 t_2 s_3 e^{2\lambda z_2} + t_1 s_2 t_3 e^{2\lambda z_3} - s_1 t_2 s_3 e^{2\lambda(z_1 - z_2)} \\ & - s_1 s_2 t_3 e^{2\lambda(z_1 - z_3)} + s_1 t_2 t_3 e^{2\lambda(z_2 - z_3)} - t_1 t_2 t_3 e^{2\lambda(z_1 + z_2 - z_3)}. \end{aligned}$$

6. Numerieke resultaten.

Overeenkomstig het bovengenoemd schrijven werden de volgende profielen berekend:

<u>Profiel I.</u>	H.Haven	(rood)
van 0 -	2 m	12,5 Ω m.
2 -	10 m	4,3 Ω m.
10 -	214 m	248,0 Ω m.
214 -	∞ m	4,6 Ω m.

H=Harderwijk.

Electroden op zeebodem,
dus 2 m. diep.

<u>Profiel II.</u>	H. meer	(blauw)
van 0 -	3 m	12,5 Ω m.
3 -	7 m	4,2 Ω m.
7 -	200 m	14,5 Ω m.
200 -	∞ m	4,6 Ω m.

Electroden op zeebodem,
dus 3 m. diep.

Profiel III. Kom 1. (zwart)

van	0 - 6 m	11,5 Ω m.	
	6 - 13 m	2,4 Ω m.	Electroden op zeebodem,
	13 - 38 m	14,5 Ω m.	dus 6 m. diep.
	38 - 300 m	3,4 Ω m.	
	300 - ∞ m	0,9 Ω m.	

Profiel IV. Kom 2 (zwart)

van	0 - 6 m	11,5 Ω m.	
	6 - 13 m	2,4 Ω m.	Electroden op zeebodem,
	13 - 38 m	14,5 Ω m.	dus 6 m. diep.
	38 - 300 m	3,4 Ω m.	(6 m = 6 m. onder gem.peil
	300 - ∞ m	40,0 Ω m.	IJsselmeer).

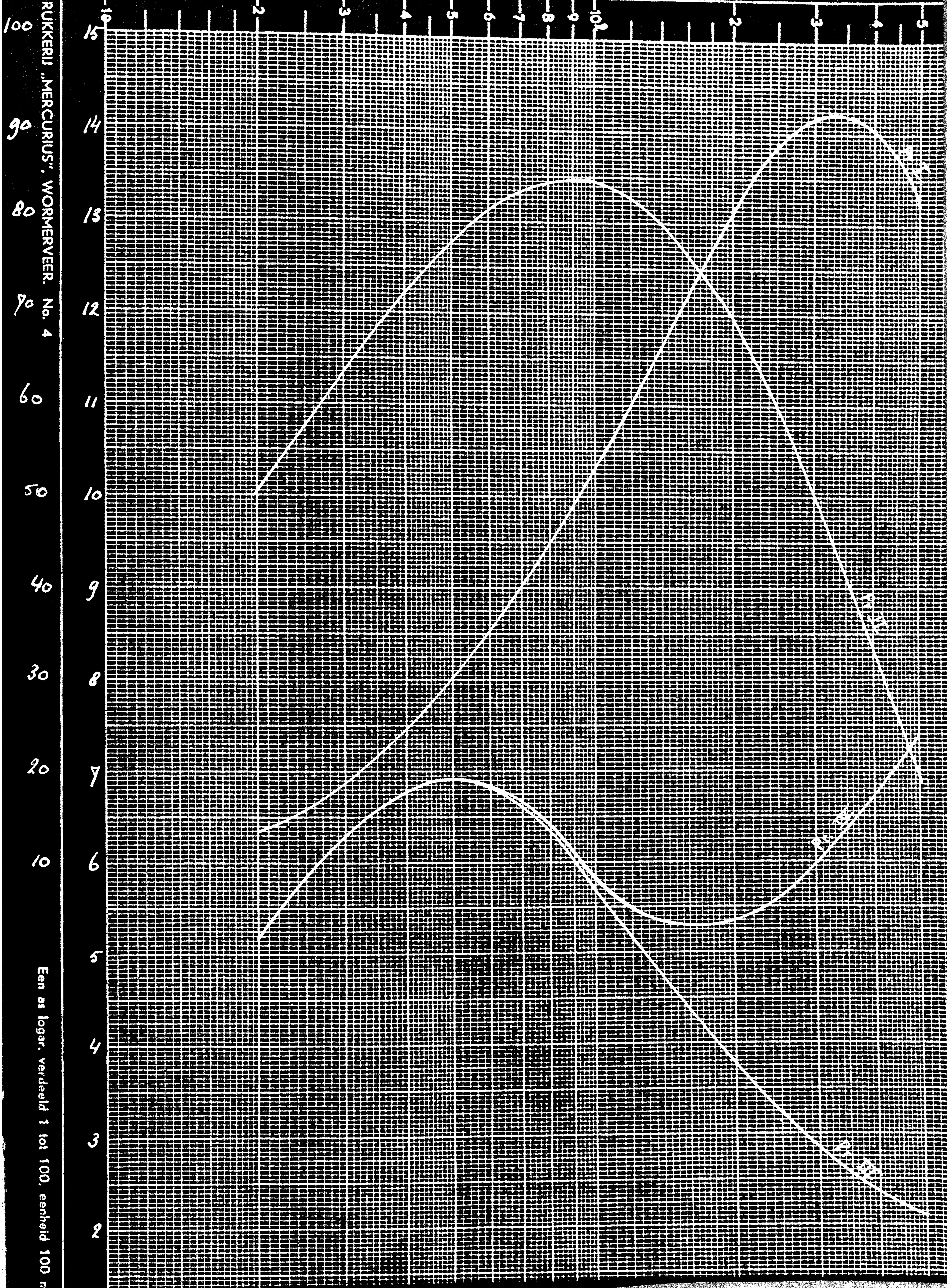
De resultaten der berekeningen zijn weergegeven in de volgende tabel, met behulp waarvan de bijbehorende grafiek is getekend.

TABEL I

ρ_a

a	Profiel I	II	III	IV
25	16.07	10.77	5.848	5.850
40			6.77	6.78
50	30.14	12.78	6.923	6.942
80		13.43		6.45
100	53.11	13.46	5.698	5.845
120		13.28		
150				5.30
200	81.40	11.99	3.75	5.354
300	91.8			
400	90.3			
500	82.4	6.95	2.11	7.39

I
 ρ_a ↓
II III IV
 ρ_a ρ_a →



Een as logar. verdeeld 1 tot 100, eenheid 100 r