STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 13

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950,4.

Incomp.

J.G.van der Coput en S.C.van Veen.

1950

Gebruik makend van een tweetal stellingen, waarvan we het bewijs nu achterwege laten, wordt een zeer algemene methode aangegeven om zekere gehele functies $f(z)$ asymptotisch te ontwikkelen voor grote waarden van z. De aangegeven resultaten zijn voornamelijk ontleend aan publicaties van W.B. Ford, C.V. Newson, H.K. Hughes, e.a. Aan het eind van deze syllabus is een literatuurlijst opgenomen.

Theorema I. Zij $g(w)$ een functie van de complexe veranderlijke $w = u + iv$, die op eindig vele polen na overal eenduidig en regulier is. Zij k een vast natuurlijk getal; we veronderstellen, dat bij elk paar reele getallen ε en μ_0 met $\varepsilon > 0$ een positieve constante K te vinden is met

$$(1) \qquad |g(u+iv)| \leq K\, e^{(k\pi+\varepsilon)|v|}$$

voor $u \geqq \mu_0$ en $|w|$ voldoende groot.

Tenslotte nemen we aan, dat de machtreeks

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\, z^n = f(z)$$

een oneindige convergentiestraal heeft, en dus een gehele functie $f(z)$ voorstelt.

Wanneer l een natuurlijk getal voorstelt, en μ een complex getal met $R_e(\mu)$ voldoende groot, dan geldt

$$(3) \qquad f(z) = \int_{-\mu}^{-\mu+\infty} g(w) \left[(-1)^{k+1}\right] z^{w} \frac{\sin k\pi w}{\sin \pi w}\, dw - \sum_{n=1}^{l} g(-n)\, z^{-n} + \xi(z,l) - \sum r_m$$

Hierin verloopt voor de integraal de integratieweg evenwijdig met de reele as en geldt voor elk bestaanbaar getal $\delta > 0$ dat

$$(4) \qquad \lim_{|z|\to\infty} z^{l}\, \xi(z,l) = 0$$

wanneer z in de sector $\left|\arg\left[(-1)^{k+1} z\right]\right| \leqq \pi - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat. Verder is r_m het residu in de m^{de} pool van $g(w)$ voor de functie

$$\frac{\pi g(w)\left[(-1)^{k+1} z\right]^{w}}{e^{\pm k\pi i w}\, \sin \pi w}$$

met + resp. −, als de pool beneden resp. boven de integratieweg ligt.

Opm. Indien één der polen van $g(w)$ een geheel getal is, dan vervalt de overeenkomstige term $g(n)\, z^n$ in (2) of (3). Theorema I is van C.V. Newson [2] (dat de correctieterm afkomstig van de polen van $g(w)$ juist de aangegeven residuen zijn is bewezen door H.K. Hughes [3]). Het bewijs van theorema I laten we nu achterwege.

Theorema II. Zij u_0 een zeker negatief reeel getal en zij $P(w)= P(u+iv)$ in het halfvlak $u \geq u_0$ eenduidig regulier op eindig vele polen na. Neem aan dat voor zekere constante c en voor elke $\delta > 0$ geldt

(5) $$\lim_{|w| \to \infty} P(w) = c$$

wanneer w in de sector $|\arg w| < \frac{\pi}{2} - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat. Dan volgt voor elke $\delta > 0$

(6) $$\lim_{|z| \to \infty} e^{-z} \int_{\xi}^{\xi+\infty} \frac{P(w) z^{w-1}}{\Gamma(w)} \, dw = c$$

wanneer z in de sector $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat. Hierbij is ξ een willekeurig vast gekozen punt in het halfvlak $u \geq u_0$. De integratieweg in de integraal (6) vermijdt de polen van $P(w)$ en loopt op den duur evenwijdig met de reele as.

Opm. We passen theorema II allen toe voor het geval c = 0. Voor het bewijs zie Ford [1] blz. 38-47.

Theorema III. Zij $H(w)= H(u+iv)$ een in het gehele complexe w-vlak op eindig vele polen na reguliere functie. Neem aan, dat de constanten $c_0, c_1, c_2, \dots$ zodanig te vinden zijn, dat voor elk der waarden $s = 0,1,2,\dots$ de functie $\delta(w,s)$ gedefinieerd door

(7) $$H(w)= \frac{c_0}{\Gamma(w+1)} + \frac{c_1}{\Gamma(w+2)} + \dots + \frac{c_s + \delta(w,s)}{\Gamma(w+s+1)}$$

voor elke $\delta > 0$ voldoet aan

(8) $$\lim_{|w| \to \infty} \delta(w,s) = 0$$

als w op willekeurige wijze in de sector $|\arg w| < \frac{\pi}{2} - \delta$ naar oneindig gaat. Laat verder bij elk reeel getal u_0 en bij elke $\varepsilon > 0$ een constante $M > 0$ bestaan met

(9) $$|H(u+iv)| < M e^{(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)|v|}$$

voor $u \geq u_0$ en $|w|$ voldoende groot.

Beschouw nu de functie

(10) $$F(z)= \int_{-\lambda}^{-\lambda+\infty} H(w) \, z^w \, dw$$

waarin λ een complex getal voorstelt, en de integratieweg de polen van $H(w)$ vermijdt en op den duur evenwijsig met de reele as loopt.

Zij N een willekeurig positief bestaanbaar getal. Dan geldt voor $R_e \lambda$ voldoende groot en voor elke $\delta > 0$

(11) $$F(z) = e^z \left[\sum_{n=0}^{s} c_n z^{-n} + z^{-s} \varrho(z,s) \right]$$

en

(12) $F(z) = z^{-N}\eta(z,s) + \rho$

waarin voor $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ geldt

(13) $\lim\limits_{|z|\to\infty} \xi(z,s) = 0$

als z op willekeurige wijze naar oneindig gaat, en waarin voor $|\arg z| \geq \frac{\pi}{2} + \delta$

(14) $\lim\limits_{|z|\to\infty} \eta(z,s) = 0$

als z op willekeurige wijze in deze sector naar oneindig gaat mits het argument beneden een zekere grens blijft.

De grootheid ρ is voor $\arg z > \frac{\pi}{2}$ gelijk aan $2\pi i$ vermenigvuldigd met de som van de residuen van $H(w)\, z^w$ in de boven de integratieweg van de integraal (10) gelegen polen van $H(w)$. Analoog is voor $\arg z < -\frac{\pi}{2}$ de grootheid ρ gelijk aan de negatieve som van de met $2\pi i$ vermenigvuldigde residuen van $H(w)z^w$ in de polen van $H(w)$ beneden de integratieweg.

Opm. Bij elk paar getallen ε en u_0 met $\varepsilon > 0$ is een positieve constante K te vinden met

(15) $\left| \frac{1}{\Gamma(u+iv)} \right| \leq K\, e^{(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)|v|}$

voor $u \geq u_0$. Het eenvoudige bewijs van (15) vindt U bij Ford [1] blz. 61 (het bewijs aldaar is niet helemaal correct, maar is gemakkelijk exact te maken). Met (15) blijkt, dat de voorwaarden (7)-(8) resp. (9) nauw samenhangen.

Bewijs. Zij δ de bij (14) vooraf gegeven positieve grootheid en zij $\varepsilon < \delta$. Wegens (9) volgt dan uit een door J.G. van der Corput bewezen stelling [1)], waarin we $w_0 = A = -\lambda$ stellen, dat voor $\arg z \geq \frac{\pi}{2} + \delta$

(16) $F(z) = \rho + \int_{-\lambda}^{-\lambda+\infty} H(w)\, z^w\, dw$

Nu is voor $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$

$$|z^{-\lambda+iv}| = |z|^{-\lambda_1} \exp\left(-(v-\lambda_2)\arg z\right)$$

en wegens (9) volgt nu voor $\arg z \geq \frac{\pi}{2} + \delta$ en voor $w = -\lambda + iv$ met $v > 0$

$$|H(w)z^w| < M|z|^{-\lambda_1}\, e^{\lambda_2 \arg z} \exp((\varepsilon - \delta)|v|)$$

---

1) "Toepassing van de theorie der complexe veranderlijken", Stelling 2 (Syllabus college asympt. ontw. Maart 1950).

waarin $\varepsilon - \delta < 0$. Voor λ_1 voldoende groot, en $\arg z \geqq \frac{\pi}{2} + \delta$ volgt nu uit (16) de op (12) en (14) betrekking hebbende bewering van Theorema III. Analoog volgt het geval $\arg z \leqq -\frac{\pi}{2} - \delta$.

Om de bewering (11) te bewijzen substitueren we (7) in (10) en vinden

$$F(z) = \sum_{n=0}^{s} c_n \int_{-\lambda}^{-\lambda+i\infty} \frac{z^w\,dw}{\Gamma(w+n+1)} + \int_{-\lambda}^{-\lambda+\infty} \frac{\delta(w,s)z^w dw}{\Gamma(w+s+1)}$$

In de n^{de} integraal stellen we $w' = w - n$

$$(17) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{s} c_n z^{-n} \int_{-\lambda+n}^{-\lambda+n+\infty} \frac{z^w\,dw}{\Gamma(w+1)} + z^{-s} \int_{-\lambda+s+1}^{-\lambda+s+1+\infty} \frac{\delta(w-s-1,s)z^{w-1}dw}{\Gamma(w)}$$

We passen nu voor $\mu = \lambda - n$ en $k=1$ theorema I toe op de Maclaurinontwikkeling van e^z

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = e^z$$

Aan voorwaarde (1) van Theorema I is immers voldaan wegens eigenschap (15) van de Γ-functie. Uit theorema I volgt nu voor $R_e\lambda$ voldoende groot en voor $n = 0,1,2,\ldots s$

$$(18) \qquad e^z = \int_{-\lambda+n}^{-\lambda+n+\infty} \frac{z^w\,dw}{\Gamma(w+1)} + \sum_{m=1}^{s-n} \frac{z^{-m}}{\Gamma(1-m)} + \xi(z,s-m)$$

waarin geldt voor elk positief getal η

$$\lim_{|z|\to\infty} \xi(z,s-n).z^{s-n} = 0$$

als z in de sector $|\arg z| \leq \pi - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat. De som in het rechterlid van (18) is nul. Nu volgt uit (17) en (18)

$$(19) \qquad F(z) = \sum_{n=0}^{s} c_n e^z z^{-n} + \theta(z,s) + z^{-s} \int_{-\lambda+s+1}^{-\lambda+s+1+\infty} \frac{\delta(w-s-1,s)z^{w-1}\,dw}{\Gamma(w)}$$

waarin geldt voor elk bestaanbare getal $\eta > 0$

$$(20) \qquad \lim_{|z|\to\infty} z^s\,\theta(z,s) = 0$$

als z in de sector $|\arg z| < \pi - \eta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

Wegens (8) volgt de toepassing van theorema II voor het speciale geval $c = 0$, dat voor elke constante $\delta > 0$ geldt

$$(21) \qquad \lim_{|z|\to\infty} e^{-z} \int_{-\lambda+s+1}^{-\lambda+s+1+\infty} \frac{\delta(w-s-1,s)z^{w-1}}{\Gamma(w)}\,dw = 0$$

als z in de sector $|\arg z| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

Uit (19), (20) (met $\eta \leqq \frac{\pi}{2} + \delta$) en (22) volgt nu de bewering van theorema III welke op (11) betrekking heeft.

<u>Theorema IV</u>. Zij $g(w)$ een gehele functie van de complexe veranderlijke $w = u + iv$. Zij α een positief bestaanbaar getal; we veronderstellen dat bij elk paar reele getallen u_0 en ε met $\varepsilon > 0$ een positieve constante K te vinden is met

$$(22)\qquad |g(u+iv)| < K\, e^{(\alpha \frac{\pi}{2} + \varepsilon)|v|}$$

voor $u \geq u_0$. Neem verder aan, dat de complexe constanten t, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ te vinden zijn, zodanig dat voor $s = 0,1,2,\ldots$ geldt

$$(23)\qquad g(w) = \frac{c_0}{\Gamma(\alpha w+t)} + \frac{c_1}{\Gamma(\alpha w+t+1)} + \ldots + \frac{c_s + \delta(w,s)}{\Gamma(\alpha w+t+s)}$$

waarin voor elke reele constante $\delta > 0$ voldaan is aan

$$(24)\qquad \lim_{|w| \to \infty} \delta(w,s) = 0$$

als w in de sector $|\arg w| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

Laat tenslotte de machtreeks

$$(25)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\, z^n = f(z)$$

een gehele functie $f(z)$ voorstellen. Zij l een natuurlijk getal en zij

$$(26)\qquad \psi = \left| \alpha - 4\left[\frac{\alpha+2}{4}\right] \right| \cdot \frac{\pi}{2},$$

waarin $\left[\frac{\alpha+2}{4}\right]$ het grootste gehele getal $\leq \frac{\alpha+2}{4}$ voorstelt. Dan geldt voor elke bestaanbare $\delta > 0$ in elk der sectoren

$$(27)\qquad |\arg z| \leq \psi - \delta\ ;\ -\pi + \delta \leq \arg z \leq -\psi - \delta\ ;\ \psi + \delta \leq \arg z \leq +\pi - \delta$$

de volgende ontwikkeling $(s = 0,1,2,\ldots)$

$$(28)\qquad f(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\mu} y_\mu^{1-t} e^{y_\mu} \left[\sum_{n=0}^{s} c_n y_\mu^{-n} + y_\mu^{-s} \xi_\mu(z,s) \right] - \sum_{m=1}^{l} g(-m) z^{-m} + \eta(z,l) z^{-l}$$

waarin

$$y_\mu = z^{\frac{1}{\alpha}} e^{\frac{2\pi i \mu}{\alpha}}$$

en waarin de som $\sum_\mu$ wordt uitgestrekt over de gehele waarden μ met $|\arg y_\mu| = \left|\frac{\arg z + 2\pi\mu}{\alpha}\right| < \frac{\pi}{2}$. Verder geldt

$$(29)\qquad \lim_{|z| \to \infty} \xi_\mu(z,s) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{|z| \to \infty} \eta(z,l) = 0$$

als z in een der sectoren (27) op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

<u>Opm.</u> Door uit te sluiten dat $\arg z = \pm\psi$ kan in de sector $|\arg z| < \pi$ nooit gelden $\left|\frac{\arg z + 2\pi\mu}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$. In de som (28) treden voor $|\arg z| < \psi$

juist de gehele waarden μ op met $|\mu| < \frac{\alpha}{4}$. In de sector $-\pi < \arg z < -\psi$ vervalt de kleinste dezer waarden μ en in de sector $\psi < \arg z < \pi$ de grootste van deze gehele waarden .

<u>Bewijs</u>. Zij k een oneven natuurlijk getal met $k \gtrless \frac{\alpha}{2}$. Wegens (22) kunnen we nu theorema I toepassen en vinden dan

$$(30) \qquad f(z) = \int_{-\mu}^{-\mu+i\infty} g(w)\, z^w \frac{\sin k\pi w}{\sin \pi w}\, dw + \sum_{m=1}^{l} g(-m) z^{-m} + \eta(z,1) z^{-l}$$

waarin l een natuurlijk getal is en μ een complex getal voorstelt met $R_e \mu$ voldoende groot. Verder geldt

$$\lim_{|z|\to\infty} \eta(z,1) = 0$$

wanneer z in de sector $|\arg z| < \pi - \delta$ op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

Voor $k = 2p+1$ geldt

$$\frac{\sin k\pi w}{\sin \pi w} = \sum_{\mu=-p}^{p} e^{2\pi i \mu w}$$

en de integraal in (30) is dus een som $\sum_{\mu=-p}^{p} h_\mu(z)$ van integralen

$$h_\mu(z) = \int_{-\mu}^{-\mu+\infty} g(w)\, (z\, e^{2\pi i \mu})^w\, dw$$

In deze laatste integraal stellen we $\alpha w + t = w' + 1$ en vinden dan voor $\lambda = \alpha\mu - t + 1$

$$(31) \qquad h_\mu(z) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\lambda}^{-\lambda+\infty} g\left(\frac{w-t+1}{\alpha}\right) y_\mu^{\,w-t-1}\, dw$$

We passen nu theorema III toe. Uit (23) volgt vooreerst

$$g\left(\frac{w-t+1}{\alpha}\right) = \frac{c_0}{\Gamma(w+1)} + \frac{c_1}{\Gamma(w+2)} + \dots + \frac{c_s + \delta_1(w,s)}{\Gamma(w+s+1)}$$

waarin $\delta_1(w,s)$ aan dezelfde eigenschap (24) voldoet als $\delta(w,s)$. Verder is wegens (22) voor $H(w) = g\left(\frac{w-t+1}{\alpha}\right)$ aan voorwaarde (9) van theorema III voldaan. Toepassing van theorema III levert nu voor $R_e \mu$ en dus $R_e \lambda$ voldoende groot en voor elk reeel getal $\varepsilon > 0$

$$(32) \qquad h_\mu(z) = \frac{1}{\alpha} y_\mu^{\,1-t} e^{y_\mu} \left\{ \sum_{n=0}^{s} c_n y_\mu^{-n} + z^{-s} \xi_\mu(z,s) \right\}$$

voor de sector $|\arg y_\mu| = \left|\frac{\arg z + 2\pi\mu}{\alpha}\right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ en

$$(33) \qquad h_\mu(z) = \eta_1(z,1)\, z^{-1}$$

voor de sector $|\arg y_\mu| = \left|\frac{\arg z + 2\pi\mu}{\alpha}\right| > \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

zodanig dat geldt

$$\lim_{|z|\to\infty} \eta_1(z,1) = 0 \qquad \text{en} \lim_{|z|\to\infty} \xi_\mu(z,s) = 0$$

wanneer z in de bijbehorende sector op willekeurige wijze naar oneindig gaat.

De bewering van theorema IV volgt nu door de integraal in (30) te vervangen door de som $\sum_{\mu=-p}^{p} h_\mu(z)$ waarna we voor $h_\mu(z)$ de formules (32) en (33) toepassen.

Opm. Wijzigen we de redenering uit het bewijs van theorema IV in die zin dat we voor k een even natuurlijk getal $\geq \frac{\alpha}{2}$ kiezen, dan vinden we bovendien dat voor $\psi \neq \pi$ formule (28) ook geldt in een zekere sector met de negatieve reele as als bissectrice, waarbij voor z reeel < 0 geldt $\arg z = +\pi$.

[1]. W.B. Ford, The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series, Michigan 1936.

[2]. C.V. Newson, On the character of certain entire functions in distant portions of the plane, Am.Journ.Math. 60 (1938), 561-572.

[3]. H.K. Hughes, On a theorem of Newson, Bull.Am.Math.Soc. 49 (1943), 288-292.

[4]. C.G. Fry and H.K. Hughes, Asymptotic developments of certain integral functions, Duke Math.Journ. 9 (1942) 792-802.

[5]. H.K. Hughes, On the asymptotic expansions of entire functions defined by Maclaurin series, Bull.Am.Math.Soc. 50 (1944), 425-430.

[6]. H.K. Hughes, The asymptotic developments of a class of entire functions, Bull.Am.Math.Soc. 51 (1945), 456-461.

Toepassing van de residuenstelling van Cauchy.

Het deel van deze § is de volgende stelling te bewijzen.

Stelling. Zij k geheel $\geqq 2$. Beschouw twee bestaanbare getallen a en b met $a < b$ en beschouw de in het $w = u + iv$- vlak gelegen verticale strook $a \leqq u \leqq b$. In die strook zij f(w), afgezien van een eindig aantal singuliere punten, eenwaardig en amalytisch. Hierbij worde aangenomen dat f(w) op de rand van de strook analytisch is en dat bij geschikt gekozen positieve constante ε het product $|v|^{1+\varepsilon} e^{-\pi k|v|} f(w)$ tot nul nadert, als w op de rand of in het inwendige van de strook naar het oneindige gaat.

De som $\sum_n (-1)^{kn} f(n)$, uitgestrekt over de gehele tussen a en b gelegen getallen n, waarbij de eventuele singuliere punten van f(w) buiten beschouwing blijven, is dangelijk aan

$$\sum_{h=1}^{k-1} \int_a^b e^{(2h-k)\pi i w} f(w)\, dw - \sum_s r(s)$$

$$+ \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \left\{ \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w) f(w)\, dw \right.$$

$$\left. - \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w) f(w)\, dw \right\}.$$

De integralen van a naar b worden uitgestrekt langs een weg, die alle in de genoemde strook gelegen singuliere punten van f(w) vermijdt; de som $\sum_s$ wordt uitgestrekt over de in de genoemde strook gelegen singuliere punten van f(w), waarbij r(s) het residu van $f(w)\, e^{\pm \pi i (k-1) w} \dfrac{\pi}{\sin \pi w}$ in s voorstelt; hierin wordt het plus of minteken genomen, al naar gelang s boven of beneden deze integratieweg ligt; verder is

$$(1) \qquad P_{kh} = (2\pi i)^{1-k} (-)^{h-1} \frac{(k-1)!}{(k-h-1)!\,(h-1)!}$$

en

$$g_{k,r}(w) = \int_w^{w \pm i\infty} e^{\pi r i t} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^k dt$$

waarin het plus of minteken genomen wordt al naar gelang w boven of beneden de bestaanbare as ligt.

Voor het bewijs leid ik eerst de volgende hulpstelling af.

J zij een gesloten Jordankromme, die geen enkel geheel getal bevat en de bestaanbare as in twee en slechts twee punten a en b $(a < b)$ snijdt. Is f(w) op en binnen J eenwaardig en analytisch, dan is voor elk geheel getal $k \geqq 2$

(2) $$\int_{\tilde{J}} f(w)\, e^{\pi i w} \frac{\pi}{\sin \pi w}\, dw = \int_{\tilde{J}} f_k(w)\, e^{\pi i k w} \left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^k dw,$$

waarin

(3) $$f_k(w) = \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}\, e^{-2h\pi i w} \int_{w_h}^{w} e^{2h\pi i t} f(t)\, dt$$

gesteld is; hierin stellen w_h willekeurige op of binnen J gelegen punten voor.

Opm. Zoals uit het bewijs tevens blijkt, geldt de bewering ook, indien J een Jordanweg voorstelt, die in het oneindige begint en in het oneindige eindigt en geen enkel geheel getal bevat, als maar de functie f(w) op J eenwaardig en analytisch is en elk product

$$f_{h+1}(w)\, e^{\pi i h w} \left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^h \qquad (h = 1,2,\dots,k-1)$$

tot nul nadert, indien het op J gelegen punt w naar het oneindige gaat.

Bewijs van de hulpstelling.

Uit (3) volgt

$$\begin{aligned} &2\pi i (k-1) f_k(w) + f_k'(w) \\ &= 2\pi i \sum_{h=1}^{k-2} (k-1-h)\, P_{kh}\, e^{-2h\pi i w} \int_{w_h}^{w} e^{2h\pi i t} f(t)\, dt \\ &\quad + f(w) \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}. \end{aligned}$$

De laatste som is blijkens de definitie (1) van P_{kh} gelijk aan

$$(2\pi i)^{1-k} (k-1)(1-1)^{k-2} = \frac{1}{2\pi i} \text{ of } 0,$$

al naar gelang k gelijk aan of groter dan 2 is. Wegens (1) is verder

$$2\pi i (k-1-h)\, P_{kh} = (k-1)\, P_{k-1,h}.$$

Aldus vinden we voor iedere gehele $k \geqq 2$

$$2\pi i\, f_k(w) + \frac{1}{k-1} f_k'(w) = f_{k-1}(w),$$

indien $f_1(w) = \dfrac{f(w)}{2\pi i}$ gesteld wordt.

Hieruit volgt

$$\frac{1}{k-1}\,\frac{d}{dw}\left\{ f_k\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^{k-1}\right\}$$

$$= \left(f_{k-1} - 2\pi i f_k\right) e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k-1} + \pi i f_k\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k-1}$$

$$- f_k\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k}\left(e^{\pi i w} - i\sin\pi w\right)$$

$$= f_{k-1}\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k-1} - f_k\, e^{\pi i k w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k}.$$

Indien f(w) op en binnen de gesloten Jordankromme J eenwaardig en analytisch is, dan is dat ook met $f_k(w)$ het geval en integratie over J vinden we dan

$$(4)\quad \int_J f_k(w)\, e^{\pi i k w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k} dw = \int_J f_{k-1}(w)\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k-1} dw.$$

Zo doorgaand vinden we voor dit antwoord de waarde

$$\int_J f_1(w)\, e^{\pi i w}\,\frac{\pi}{\sin\pi w}\, dw,$$

waarmede in dit geval wegens $f_1(w)= f(w)$ de bewering aangetoond is.

Gelden de voorwaarden van de opmerking, dan vindt men wederom (4) terug omdat dan

$$f_k(w)\, e^{\pi i(k-1)w}\left(\frac{\pi}{\sin\pi w}\right)^{k-1}$$

volgens veronderstelling tot nul nadert, indien het op J gelegen punt w naar het oneindige gaat. Op die manier blijkt de bewering ook in dit geval te gelden.

Ten slotte zullen wij nog bewijzen:
Gelden de voorwaarden van hulpstelling 1, dan is

$$(5)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_J f(w)\, e^{\pi i w}\,\frac{\pi}{\sin\pi w}\, dw$$

$$= \sum_{h=1}^{k-1}\int_a^b e^{2h\pi i w} f(w)\, dw + \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}\int_J e^{2h\pi i w}\, g_{k,k-2h}(w)\, f(w)\, dw$$

Immers wegens

(6) $$g'_{k2}(w) = -e^{\pi 2 i w}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^k$$

en (3) is het linkerlid van (4) te schrijven in de gedaante

(7) $$-\sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}\int_J g'_{k,k-2h}(w)\int_{w_h}^{w} e^{2h\pi i t} f(t)\,dt$$

Passert een op J gelegen punt w het punt b, dan maakt $g_{k,k-2h}(w)$ een sprong $Q_{kh}(b)$, die gelijk is aan

$$Q_{kh}(b) = \int_b^{b+i\infty} e^{\pi(k-2h)it}\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^k dt - \int_b^{b-i\infty} = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}.$$

Partiële integratie van (7) over J levert

$$\int_J f_k(w)\, e^{\pi i k w}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^k dw =$$
$$= \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}\left\{Q_{kh}(b)\int_{w_h}^{b} e^{2h\pi i t} f(t)\,dt - Q_{kh}(a)\int_{w_h}^{a} e^{2h\pi i t} f(t)\,dt\right\}$$
$$+ \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh}\int_J g_{k,k-2h}(w)\, e^{2h\pi i w} f(w)\,dw.$$

Formule (5) is dus bewezen, indien aangetoond wordt

(8) $$Q_{kh}(b) = P_{kh}^{-1},$$

want de laatste formule geldt dan ook met a in plaats van b.

Bij het bewijs van deze formule mag ik $1 \leqq h \leqq \frac{k}{2}$ veronderstellen, want wordt h door k-h vervangen, dan wordt zo wel P_{kh} als Q_{kh} met $(-1)^k$ vermenigvuldigd (in Q_{kh} kieze men daarbij -t als integratievariabele). De te bewijzen formule is voor k = 2 evident wegens

$$Q_{21} = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^2 dw = -\Big|_{b-i\infty}^{b+i\infty} \pi \cot \pi w = 2\pi i = P_{21}^{-1}.$$

Bij het bewijs van formule (8) mag ik derhalve $k \geqq 3$ veronderstellen en aannemen dat de formule met k-1 in plaats van k reeds bewezen is. Uit

$$\frac{d}{dt}\, e^{r\pi i t}\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^{k-1} =$$
$$= (k-1+r)\pi i\, e^{r\pi i t}\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^{k-1} - (k-1)\, e^{(r+1)\pi i t}\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^{k}$$

volgt voor r = k - 1 - 2h, bij integratie van b - i ∞ naar b + i ∞

$$Q_{kh} = \frac{k-1-h}{k-1} \; 2\pi i \; Q_{k-1,h} .$$

Wegens $h \leq \frac{1}{2}k$ is h zeker $\leq k-1$, zodat het gevonden antwoord gelijk is aan

$$\frac{k-1-h}{k-1} \cdot 2\pi i \; P^{-1}_{k-1,h} = P^{-1}_{kh} .$$

Hiermede is formule (8) en dus ook formule (5) bewezen.

Vervangen we in deze formule f(w) door $e^{-\pi i k w}$ f(w), dan vinden we

$$\frac{1}{2\pi i} \int_J f(w) e^{(1-k)\pi i w} \frac{\pi}{\sin \pi w} dw$$

$$= \sum_{h=1}^{k-1} \int_a^b e^{(2h-k)\pi i w} f(w) dw$$

$$+ \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \int_J e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w) f(w) dw .$$

We gaan dit resultaat toepassen op de gesloten Jordankromme J, gevormd door de omtrek van de rechthoek met de hoekpunten $a-iq$, $b-iq$, $b+ip$ en $a+ip$ (p en q positief), waaraan verticale lussen toegevoegd worden om de singuliere punten van de functie f(w) buiten te sluiten. Bij het bewijs van onze stelling zullen we voorlopig aannemen, dat de integratieweg die de punten a en b verbindt, zo gekozen wordt dat alle in de genoemde strook $a \leq u \leq b$ gelegen singuliere punten van f(w) beneden die integratieweg liggen. De bij een singulier punt s behorende lus ligt (evenals s) beneden de beschouwde integratieweg, die a en b verbindt.

Het linkerlid van het gevonden resultaat is gelijk aan de som $\sum(-)^{kn}$ f(n), uitgestrekt over de gehele tussen a en b gelegen getallen n, indien de eventuele gehele getallen n die met een singulier punt w van f(w) samenvallen buiten beschouwing blijven. In het rechterlid van het gevonden resultaat laten we p en q beide onbegrensd aangroeien. Wegens

$$(9) \quad g_{k,k-2h}(w) = O\left(e^{-\pi(k-2h)v - \pi k|v|}\right)$$

naderen de bijdragen van de hortizontale zijden van de beschouwde rechthoek tot nul en naderen de bijdragen van de verticale zijden in die rechthoek tot de bijdragen van de verticalen $a-i\infty$, $a+i\infty$ en $b-i\infty$, $b+i\infty$. Het bewijs is dus geleverd, als aangetoond wordt dat de lus L, die bij het singuliere punt s van f(w) behoort en in het punt $s-i\infty$ begint en eindigt, - r(s) als bijdrage levert. Die bijdrage is

$$(10)\qquad -\sum_{h=1}^{k-1} P_{hk} \int_L e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w)\, f(w)\, dw,$$

waarbij L in positieve zin wordt doorlopen.

In het speciale geval, dat alle in de strook $a \leqq u \leqq b$ gelegen singuliere punten van f gelegen zijn beneden de integratieweg, die a en b verbindt, is het bewijs dus geleverd, als we maar kunnen aantonen dat de bijdrage (10) gelijk is aan -r(s), dus gelijk is aan

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L f(w)\, e^{(1-k)\pi i w}\,\frac{\pi}{\sin \pi w}\, dw.$$

We zullen laten zien, dat deze laatste integraal met behulp van de aan de hulpstelling toegevoegde opmerking kan worden behandeld, als daarin J = L gesteld wordt en als daarin verder f(w) vervangen wordt door $F(w)= f(w)e^{-k\pi i w}$. De functie

$$F_{h+1}(w) = \sum_{g=1}^{h} P_{h+1,g}\, e^{-2g\pi i w} \int_{w_g}^{w} e^{(2g-k)\pi i t} f(t)\, dt \qquad (h=1,\dots,k-1)$$

bezit de eigenschap, dat het product

$$F_{h+1}(w)\, e^{\pi i h w} \left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^h$$

uit te drukken is als een lineair compositum van termen van de gedaante

$$(11)\qquad e^{(h-2g)\pi i w}\left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^h \int_{w_g}^{w} e^{(2g-k)\pi i t} f(t)\, dt \qquad (1\leqq g \leqq h \leqq k-1).$$

Omdat volgens veronderstelling

$$|v|^{1+\varepsilon} e^{-\pi k |v|} f(w)$$

op L begrensd is, is de laatstegenoemde integraal waarin $t = x - iy$ gesteld wordt, hoogstens van dezelfde orde als

$$\int_1^{|v|} e^{2g\pi y}\, y^{-1-\varepsilon}\, dy,$$

(12) dus hoogstens van de orde $e^{2g\pi|v|}\,|v|^{-1-\varepsilon}$, waaruit blijkt, dat uitdrukking (11) hoogstens van dezelfde orde is als $|v|^{-1-\varepsilon}$. Hieruit blijkt, dat elk der uitdrukkingen (11) tot 0 nadert indien het op L gelegen punt w naar het oneindige gaat. Aldus hebben we aangetoond,

dat de voorwaarden van de aan de hulpstelling toegevoegde opmerking vervuld zijn, indien daarin J door L en f(w) door F(w) vervangen wordt. Volgens die hulpstelling is dan r(s) gelijk aan

$$\int_L F_k(w)\, e^{\pi i k w} \left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^k dw$$

$$= \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \int_L e^{(k-2h)\pi i w} \left(\frac{\pi}{\sin \pi w}\right)^k dw \int_{w_h}^{w} e^{(2h-k)\pi i t} f(t)\,dt$$

$$= -\sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \int_L J'_{k,k-2h}(w)\,dw \int_{w_h}^{w} e^{(2h-k)\pi i t} f(t)\,dt$$

wegens (6), en deze uitdrukking gaat afgezien van het teken door partiële integratie over in (10); de stoktermen vallen nl. weg, omdat wegens (9) en (12)

$$J_{k,k-2h}(w) \int_{w_h}^{w} e^{(2h-k)\pi i t} f(t)\,dt$$

hoogstens van dezelfde orde is als

$$e^{-2h\pi|v| + (2h-k)\pi|v| + \pi k|v|}\, |v|^{-1-\varepsilon} = |v|^{-1-\varepsilon}.$$

Hiermede is de te bewijzen stelling aangetoond in het speciale geval, dat de in de strook $a \leqq u \leqq b$ gelegen singuliere punten van f(w) alle gelegen zijn boven de gekozen integratieweg, die a en b verbindt. Laten we nu het geval behandelen dat in genoemde strook een singulier punt s boven die integratieweg gelegen is. Door uitstulping van die integratieweg kunnen we een nieuwe integratieweg krijgen, waar s beneden ligt. Wordt de oude integratieweg door de nieuwe vervangen, dan wordt de som

$$\sum_{h=1}^{k-1} \int_a^b e^{(2h-k)\pi i w} f(w)\,dw$$

verminderd met het residu in s van de functie

$$2\pi i \sum_{h=1}^{k-1} e^{(2h-k)\pi i w} f(w) = \frac{\pi}{\sin \pi w} f(w) \left(e^{(k-1)\pi i w} - e^{-(k-1)\pi i w}\right)$$

Tegelijkertijd wordt de bijdrage r(s) volgens definitie met datzelfde bedrag verminderd. Bij genoemde uitstulping van de integratieweg verandert dus de in de bewering voorkomende uitdrukking niet van waarde. Door een eindig aantal van dergelijke uitstulpingen aan te brengen, krijgen we een integratieweg, waar alle in de strook $a \leqq u \leqq b$ gelegen singuliere punten van f(w) beneden liggen. Aangezien de bewering voor deze laatste integratieweg aangetoond is, geldt ze algemeen.

Het voorgaande gaan wij toepassen voor het bewijs van het volgende:

<u>Theorema 2.</u> Zij $\mu = \mu_1 - i\mu_2$ een complex getal met μ_1 niet geheel en $\geqq 0$. Zij $g(w) = g(u+iv)$ in het halfvlak $\mu \geqq \mu_1$ een eenduidige en analytische functie met uitzondering van een eindig aantal polen rechts van de lijn $w = \mu_1 + iv$. Laten verder de reele getallen l, m, K en ε met K en ε positief bestaan zodanig, dat de ongelijkheid

$$(1) \quad |g(u+iv)| < K|v|^{-1-\varepsilon} e^{l\pi|u| + m\pi|v|}$$

geldt voor $\mu \geqq \mu_1$ en voor $|w|$ voldoende groot. Laat tenslotte de machtreeks

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n = f(z)$$

een gehele functie f(z) voorstellen.

Wanneer k een geheel getal $\geqq$ m en $\geqq 2$ voorstelt, dan volgt voor $|\arg z| \leqq (k-m)\pi$, dat

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{kn} g(n) z^n = \sum_{0 < n < \mu_1} (-1)^{kn} g(-n) z^{-n} - \sum_s r(s) + \int_{-\mu}^{-\mu+\infty} \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w} g(w) z^w dw + \xi(\mu_1, z)$$

mits voor de aangegeven waarden z de integraal in het rechterlid convergeert en aldaar een reguliere functie voorstelt. Voor zekere positieve constante K_1 geldt voor $|\arg z| \leqq (k-m)\pi$

$$(4) \quad |\xi(\mu_1, z)| < K_1 |z|^{-\mu_1}$$

De integraal in (3) wordt uitgestrekt langs een integratieweg, gelegen in het beschouwde halfvlak die de polen van g(w) vermijdt en op den duur evenwijdig loopt met de reele as. De som $\sum_s r(s)$ wordt uitgestrekt over de polen van g(w) gelegen in het halfvlak $\mu > \mu_1$, en wel is r(s) het residu van

$$(5) \quad e^{\pm\pi i(k-1)w} \frac{\pi}{\sin \pi w} g(w) z^w ,$$

waarbij het plus- of minteken wordt gekozen al naar gelang s boven of beneden de integratieweg ligt.

<u>Opm.</u> Als een pool s van g(w) samenvalt met een gehele waarde $> -\mu_1$ dan dient de corresponderende term $(-1)^{ks} g(s) z^s$ in (3) te worden weggelaten.

Bewijs: Wegens (1) geldt voor $u \geq \mu_1$, $|w|$ voldoende groot en $|\arg z| \leq (k-m)\pi$ dat

(6) $\left|g(w)z^w\right| = \left|g(u+iv)\right| \, |z|^{\mu} e^{-v \arg z}$

$< K|v|^{-1-\varepsilon} e^{l\pi|u| + m\pi|v|} |z|^{\mu} e^{(k-m)\pi|v|}$

$< K|v|^{-1-\varepsilon} |z|^{\mu} e^{l\pi|u|} e^{k\pi|v|}$.

Hieruit volgt voor

(7) $K_2 = K \operatorname*{Max}_{-\mu_1 \leq \mu \leq 0} \left(e^{l\pi|u|} |z|^{\mu} \right)$

dat in het gebied $|\arg z| \leq (k-m)\pi$, $0 < |z| < e^{-l\pi}$ is voldaan aan

(8) $\left|g(w)z^w\right| < K_2 |v|^{-1-\varepsilon} e^{k\pi|v|}$

We passen nu een stelling toe, bewezen door J.G. v.d. Corput in de syllabus "Toepassing van de residuenstelling van Cauchy" (Maart 1950) en wel kiezen we hierin $f(w) = g(w)z^w$, $a = -\mu_1$, $b = N + \frac{1}{2}$, waarin N een dusdanig groot natuurlijk getal voorstelt, dat alle polen van $g(w)$ liggen in de strook $a < u < b$.
In verband met (8) is voor $|\arg z| \leq (k-m)\pi$ en $0 < |z| < e^{-l\pi}$ aan de voorwaarden van deze stelling voldaan. We vinden

(9) $$\sum_{a<n<b} (-1)^{kn} g(n) z^n = \int_a^b \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w} g(w) z^w dw - \sum_s r^*(s)$$
$$- \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w) g(w) z^w dw$$
$$+ \sum_{h=1}^{k-1} P_{kh} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{(2h-k)\pi i w} g_{k,k-2h}(w) g(w) z^w dw$$

De integraal van a naar b wordt uitgestrekt langs een weg gelegen in het beschouwde halfvlak $\mu \geq \mu_1$, welke de polen van $g(w)$ vermijdt. De som $\sum_s r^*(s)$ wordt uitgestrekt over de polen van $g(w)$ en wel is $r^*(s)$ het residu van (5), waarbij het plus- of minteken wordt gekozen alnaargelang de pool boven of beneden de juist genoemde integratieweg ligt. De nauwkeurige waarden van de constanten P_{kh} zijn voor het bewijs van Theorema 2 niet van belang. Verder geldt in (9)

(10) $$g_{kr}(w) = \int_w^{w \pm i\infty} e^{\pi r i t} \left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^k dt$$

waarin het plus- of minteken genomen wordt alnaargelang w boven of beneden de reële as ligt.

Zij in (10) w een complex getal getal met positief imaginair deel . Dan kunnen we (10) schrijven volgens

(11)
$$g_{k,r}(u+iv) = i\int_0^\infty \exp \pi ri(u+iv+iy)\left(\frac{\pi}{\sin\pi(u+iv+iy)}\right)^k dy$$

Nu is voor $v \geqq 0$ en $y \geqq 0$

$$\begin{aligned}|\sin\pi(u+iv+iy)| &= |\sin\pi u \operatorname{Ch}\pi(v+y)+i\cos\pi y \operatorname{Sh}\pi(v+y)| \\ &\geqq |\sin\pi u|\,|\operatorname{Ch}\pi v\operatorname{Ch}\pi y + \operatorname{Sh}\pi v \operatorname{Sh}\pi y| \\ &\geqq |\sin\pi u|\operatorname{Ch}\pi v.\operatorname{Ch}\pi y\end{aligned}$$

en dus volgt uit (11) voor $v \geqq 0$

$$|g_{k,r}(u+iv)| \leqq \frac{e^{-\pi rv}}{(|\sin\pi u|\operatorname{Ch}\pi v)^k}\int_0^\infty e^{-\pi ry}\left(\frac{\pi}{\operatorname{Ch}\pi y}\right)^k dy$$

en analoog volgt voor $v \leqq 0$

$$|g_{k,r}(u+iv)| \leqq \frac{e^{-\pi rv}}{(|\sin\pi u|\operatorname{Ch}\pi v)^k}\int_0^\infty e^{+\pi ry}\left(\frac{\pi}{\operatorname{Ch}\pi y}\right)^k dy$$

en dus geldt voor zekere positieve constante K_3, dat

(12)
$$|g_{k,r}(u+iv)| < \frac{K_3\, e^{-\pi rv}}{(|\sin\pi u|\operatorname{Ch}\pi v)^k}$$

voor $r = -k+1, -k+2, \dots, k-1$

Voor de integraal

(13)
$$I_r(\alpha,z) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{-r\pi iw} g_{k,r}(w)\, g(w) z^w\, dw$$

waarin α een reëel getal voorstelt, geldt wegens (6) en (12)

(14)
$$|I_r(\alpha,z)| < \frac{K_4 |z|^\alpha e^{l\pi|\alpha|}}{|\sin\pi\alpha)^k}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{k\pi|v|}}{(\operatorname{Ch}\pi v)^k}\frac{dv}{|v|^{1+\varepsilon}}$$

met $K_4 = KK_3$ voor r geheel met $|r| \leqq k-1$, $\alpha \geqq -\mu_1$ en $|\arg z| \leqq (k-m)\pi$
Voor deze waarden r en α en in de sector $|\arg z| \leqq (k-m)\pi$ is dus voo. niet gehele waarden α de functie $I_r(\alpha,z)$ een reguliere functie van z en dus in het bijzonder ook de integralen voorkomend in de sommen u. het rechterlid van (9). Wegens (14) convergeren de laatste k-1 integralen in (9) naar nul als $|z| < e^{-l\pi}$ en als $b = N + \frac{1}{2}$ tot oneindig nadert. Dan volgt uit (9) voor $|z| < e^{-l\pi}$ en $|\arg z| \leqq (k-m)\pi$ dat

$$\sum_{-\mu_1<n<\infty}(-1)^{kn} g(n) z^n = \int_{-\mu_1}^{\infty}\frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin\pi w} g(w) z^w dw - \sum r^*(s) - \sum_{h=1}^{k-1} P_{k,h}\, I_{k-2h}(-\mu_1,z)$$

Voor de aangegeven waarden z volgt hieruit door verschuiving van de integratieweg in de eerste integraal van het rechterlid

$$(15)\qquad \sum_{-\mu_1<n<\infty} (-1)^{kn}\, g(n)\, z^n = \int_{-\mu}^{-\mu+\infty} \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) e^w\, dw - \sum r(s) - \sum_{h=1}^{k-1} P_{k,h} I_{k-2h}(-\mu_1, z) + \int_{-\mu_1}^{-\mu_1+i\mu_2} \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) z^w dw$$

waarin r(s) juist de betekenis heeft aangegeven in de formulering van Theorema 2. In de sector $|\arg z| \leq (k-m)\pi$ en voor $z \neq 0$ zijn alle in (15) voorkomende termen reguliere functies van z en wegens het principe van analytische voortzetting volgt formule (3) voor deze waarden z. Voor de restterm

$$\xi_1(\mu, z) = -\sum_{h=1}^{k-1} P_{k,h} I_{k-2h}(-\mu_1, z) + \int_{-\mu_1}^{-\mu_1+i\mu_2} \frac{\sin(k-1)\pi w}{\sin \pi w}\, g(w) z^w\, dw$$

geldt in verband met (14) juist de schatting (4), mits μ_1 niet geheel is.

Mei 1950

Over het asymptotisch karakter van een integraal, waarvan de integrand een product van twee factoren is.

De opgave is onder algemene voorwaarden voor grote positieve ω het asymptotisch karakter te bepalen voor integralen van de gedaante

$$I = \int_a^b u(x)\ v(x)\ dx,$$

waarin de integreerbare functies u en v en ook de grenzen van ω mogen afhangen; daarbij veronderstellen we $a<b$, waarbij $a=-\infty$ en $b=+\infty$ zijn mag.

Stelling 1.

Zij U een getal, dat wel van ω, maar niet van x mag afhangen. Als bij elk positief getal ε twee (eventueel van ω afhankelijke) getallen α en β met $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ en

$$\left|\int_a^\alpha (u(x)\ -U)\ v(x)\ dx\right| < \varepsilon \quad \text{en} \quad \left|\int_\beta^b (u(x)\ -U) v(x)\ dx\right| < \varepsilon$$

gevonden kunnen worden, zodanig dat u(x) -U bij onbegrensd aangroeiende ω in het interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ uniform in x tot nul nadert, terwijl

$$\int_\alpha^\beta |v(x)|\ dx$$

een begrensde functie van ω voorstelt, dan nadert I-L bij onbegrensd aangroeiende ω tot nul. Hier is

$$L = U \int_a^b v(x)\ dx$$

Immers

$$(1)\quad I - L = \int_a^\alpha (u(x)-U)v(x)dx + \int_\beta^b (u(x)-U)v(x)dx + \int_\alpha^\beta (u(x)-U)v(x)dx$$

en bij onbegrensd aangroeiende ω nadert de laatste term tot nul. Voor voldoend grote ω is dus $|I-L|<3\varepsilon$, waarmede het bewijs geleverd is. Voorbeeld. Indien de van ω onafhankelijke functie f(t) voor $0 \leqq t \leqq 1$ van begrensde variatie is, dan is

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega^{-1}}{\sqrt{\log\omega}} \int_0^1 f(t) \sqrt{\log \frac{2}{t}} \left(\frac{\sin\omega t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2} f(0+)$$

Immers de substitutie $\omega t=x$ voert de uitdrukking, waarvan de limiet moet worden bepaald, over in

$$\int_0^\omega u(x)v(x)dx, \text{ waarin } u(x) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\log\frac{2\omega}{x}}{\log\omega}} \text{ en } v(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2};$$

zijn α en β positieve getallen met $\alpha<\beta$, die niet van ω afhangen, dan nadert u(x) bij onbegrensd aangroeiende ω in het interval $\alpha \leqq x \leqq \beta$ tot f(0+) en wel uniform in x. Dus I-L nadert tot nul, waarbij

$$L = f(0+)\int_0^\omega \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

nadert tot

$$f(0+)\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,f(0+)$$

In stelling 1 is de onaangename voorwaarde opgenomen dat $|v(t)|$ integreerbaar is van α naar β en bij integratie een begrensde functie van ω oplevert. Vervangen wij deze voorwaarde door de mindereisende conditie, dat

$$\int_\alpha^\beta v(t)\,dt$$

een ω begrensde functie van ω voorstelt, dan moeten wij, om zeker te zijn, dat I-L bij onbegrensd aangroeiende ω tot nul nadert, nog een extra-voorwaarde invoeren. Dit zullen we op 2 verschillende manieren doen.

Stelling 2.

Zij U een getal, dat wèl van ω, maar niet van x mag afhangen. Stel bij elk positief getal ε zijn twee (eventueel van ω afhankelijke) getallen α en β met $a < \alpha < \beta < b$ en

$$\left|\int_\alpha^a (u(x)-U)v(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{en}$$

$$\left|\int_\beta^\beta (u(x)-U)v(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

te vinden, zodanig dat u(x) in het interval $\alpha \leq x \leq \beta$ continu differentieerbaar is, dat $\int_\alpha^\beta v(t)\,dt$ een begrensde functie van ω voorstelt en tenslotte dat bij onbegrensd aangroeiende ω · $\{u(\alpha)-U\}\int_\alpha^\beta v(x)\,dx$

~~$u(\alpha)-U$~~ en $\int_\alpha^\beta u'(x)\,dx \int_x^\beta v(t)\,dt$ tot nul naderen. Dan is $I-L \to 0$ voor $\omega \to \infty$

Immers de laatste term in (1) gaat door partiële integratie over in

$$-(u(\alpha)-U)\int_\alpha^\beta v(t)\,dt + \int_\alpha^\beta u'(s)\,ds \int_s^\beta v(t)\,dt$$

Voorbeeld. Indien μ een vast positief getal < 1 voorstelt, dan is

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega^\mu}{\sqrt{\log\omega}} \int_0^1 \sqrt{\log\frac{2}{t}}\; e^{i\omega t}\, t^{\mu-1}\,dt = e^{\frac{1}{2}\pi i\mu}\,\Gamma(\mu).$$

Want de uitdrukking waarvan de limiet moet worden bepaald, gaat door de transformatie $\omega t = x$ over in

$$\int_0^\omega u(x)v(x)\,dx, \quad \text{waarin } u(x) = \sqrt{\frac{\log\frac{2\omega}{x}}{\log\omega}} \text{ en } v(x) = e^{ix}\,x^{\mu-1}.$$

Stellen α en β twee positieve van ω onafhankelijke getallen met voor, dan is voor $\alpha \leq x \leq \beta$

(2) $$\left|\int_x^\beta v(x)\,dx\right| \leq c,$$

waarin c onafhankelijk van ω is. Uit de monotomie van de functie u(x)