Matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävän kerhon suunnittelu

Pro gradu-tutkielma

Teemu Espo

014023141

Helsingin yliopisto

Matematiikan laitos

Ohjaajat:

Matti Pauna

Juha Oikkonen

provided by Helsingin yliopiston digitaalinen arkisto

View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan aineenopettajan koulutusohjelma	

Tekijä – Författare – Author
Teemu Espo

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävän kerhon suunnittelu

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	3/2020	46+19

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Matematiikkaa ja filosofiaa pidetään usein varsin erilaisina oppiaineina. Näillä kahdella oppiaineella on kuitenkin paljon yhteistä, ja tämän opinnäytetyön keskeisimpänä tavoitteena on tuoda esille näitä yhteneväisyyksiä. Työssä suunnitellaan kerhomateriaali matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävälle, lukioikäisille suunnitellulle kerholle. Itse kerhoa ei tämän työn puitteissa toteutettu.

Työn ensimmäisen luvun johdannon jälkeen toisessa luvussa käydään läpi matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäviä teemoja. Näitä yhteisiä teemoja ovat näiden oppiaineiden yhteinen historia, keskinäinen vuorovaikutus ja yhteiset aihealueet. Matematiikalle ja filosofialle selkein, yhteinen aihealue on pätevä päättely. Pätevä päättely otettiin tässä työssä suunnitellun kerhomateriaalin harjoitustehtävien aiheeksi. Kerhomateriaaliin otettiin myös lyhyt katsaus työn ensimmäiseen lukuun kerätyistä matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävistä teemoista.

Työn kolmannessa luvussa käydään läpi pedagogiikkaa siitä, miten ja miksi matematiikkaa ja filosofiaa voi yhdistää. Käymme lisäksi läpi nykyisen lukion opetussuunnitelman matematiikan ja filosofian yhteisiä tavoitteita ja sisältöjä. Tutkimme myös mitä on olla matematiikassa kompetentti ja miten nämä vaatimukset käyvät yhteen matematiikan ja filosofian yhdistämisen tuomien etujen kanssa. Neljännessa luvussa esitellään työssä suunnitellun varsinaisen kerhomateriaalin rakentuminen ja kerhomateriaaliin otetut harjoitukset. Suunniteltu kerhomateriaali löytyy työn lopusta liitteinä.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
kerhomateriaali, matematiikka, filosofia, kehittämistutkimus, kompetenttius, pätevä päättely

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Helsingin yliopiston kirjasto, Kumpulan kampuksen kirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information
Työn ohjaajat: Matti Pauna ja Juha Oikkonen

Sisällysluettelo

Luku 1

Johdanto

Matematiikkaa käytetään enenevissä määrin lähes kaikissa tieteenaloissa. Matematiikka itse on sen sijaan pysynyt melko itsenäisenä oppialana. Matematiikan kehitykseen on kuitenkin vuosien varrella vaikuttanut monet filosofiset suuntaukset ja tieteenihanteet. Matematiikka ja filosofia ovat ainakin antiikin Kreikasta lähtien olleet hyvin toisiinsa kietoutuneita oppisuuntia. Monet filosofit ovat olleet matemaatikkoja ja matemaatikot filosofeja. Täten kehitykset filosofiassa ovat voineet muovata matematiikan kehitystä ja matematiikan kehitys ohjata filosofian kehitystä. Tunnettu filosofi ja matemaatikko Gottlob Frege on jopa väittänyt, että kaikki matematiikka olisi palautettavissa logiikan sääntöihin ja lakeihin, jolloin sen voitaisiin jopa ajatella olevan filosofiaa. Olihan logiikka pitkään yksinomaan filosofian osa-alue.

Matematiikan ja filosofian yhteisen historian tuntemus auttaa myös varsinaisten matematiikan aihepiirien oppimisessa (ks. alempaa). Matematiikan historian tuntemus sen itsensä vuoksi on myös monien aihetta tutkineiden, kuten matematiikan opetuksen professorin Uffe Thomas Jankvistin mukaan tavoiteltavaa (Jankvist 2014). Matematiikan historian tuntemus on myös osa (matematiikan) filosofiaa ja siten kuuluu tämän kerhon aihepiiriin.

Matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävää materiaalia löytyy kuitenkin internetistä melko vähän. Tässä työssä pyritään löytämään näille oppiaineille yhteisiä teemoja ja tavoitteita, ja luomaan uudenlainen, suomenkielinen kerhomateriaali näiden ympärille tekemällä eräänlainen kehittämistutkimus.

Tämä tutkielma on tutkimus, jossa suunnitellaan materiaali lukiossa toteutettavalle matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävälle kerholle.

Suunnitellussa kerhossa pyritään tuomaan esille matematiikan ja filosofian yhteistä historiaa ja korostamaan varsinkin logiikkaa ja pätevää päättelyä näitä yhdistävinä tekijöinä. Tavoitteena on saada oppilaat huomaamaan, että sekä matematiikka ja filosofia pyrkivät mahdollisimman tarkkaan tietoon tai varmuuteen ylipäänsä, ja että näiden aineiden ja niiden tavoitteiden ja periaatteiden ymmärtäminen voivat tukea toistensa oppimista.

Työn ensimmäisessä osiossa käydään läpi matematiikkaa ja filosofiaa aihealueina yhdistävää teoriaa ja historiaa. Tästä otetaan otteita varsinaiseen kerhomateriaaliin valaisevina esimerkkeinä. Toisessa osiossa tarkastellaan opetuksellisia teorioita matematiikan historian ja filosofian tuomisesta matematiikan opetukseen, tarkastellaan matematiikalle ja filosofialle yhteisiä tavoitteita opetussuunnitelmasta ja tarkastellaan mitä on olla matemaattisesti kompetentti.

Kolmannessa osiossa kuvaillaan kerhomateriaalin rakentumista ja sitä, miten ja miksi kerhomateriaali näyttää siltä miltä se näyttää. Käymme myös läpi materiaaliin päätyneet tehtävät ja miksi juuri niihin päädyttiin.

Varsinaisessa suunnitellussa materiaalissa käydään läpi erilaisia loogisia pulmia, joille oppilaiden on tarkoitus luoda matemaattiset todistukset käyttäen apuna tieteenfilosofian luomia varman tiedon ja deduktiivisen päättelyn periaatteita. Oppilaita opetetaan myös hyödyntämään taulukoita ja kuvia matemaattisen todistuksen apuvälineinä. Kerhon aiheet ovat pitkälle ja lyhyelle matematiikalle yhteisiä ja kerho suunnitellaan sopivaksi sekä lyhyen että pitkän matematiikan oppilaille.

Luku 2

Matematiikka ja filosofia yhteiselossa

Matematiikka ja filosofia ovat pitkään olleet monin tavoin läheisiä aloja. Matematiikka ja filosofia ovat kasvaneet ja kukoistaneet yhdessä, ja uudet suuntaukset ja löydöt toisessa ovat voineet vaikuttaa toiseen. Filosofia “tieteiden äitinä” tarkastelee luontaisesti myös matematiikkaa. Samanaikaisesti filosofiassa ihannoidaan matematiikan täsmällisyyttä ja pyritään samaan myös filosofian puolella.

2.1 Matematiikan ja filosofian yhteinen historia

Matematiikan ja filosofian yhteneväisyyksistä kertoo ennen kaikkea näiden yhteinen historia. Antiikin Kreikassa suurin osa ainakin tunnetuista matemaatikoista oli filosofeja ja filosofeista matemaatikkoja. Antiikin filosofiassa oli suosittua käsitellä filosofisia ongelmia erilaisten paradoksien tai muiden vastaavien pulmien kautta. Matematiikan tohtorin Jennifer Czocherin mukaan (matemaattisten) paradoxien käsitteleminen ja pohtiminen auttaa matematiikan, historian, logiikan ja filosofian oppimisessa (Czocher 2017).

2.1.1 Aristoteleen vaikutus filosofian ja matematiikan kehitykseen

Aristoteleen mukaan tiede on järjestelmä totuuksista, jotka voidaan jakaa kahteen ryhmään: aksioomeihin ja teoreemoihin (von Wright, 1968). On tärkeää huomata, että Aristoteles tarkoitti sanoilla aksiooma ja teoreema eri asioita, kuin mitä nykyään sanoilla tarkoitetaan muun muassa matematiikassa. Nämä Aristoteleen aksioomat ovat kyseisen tieteen pohjimmaisia totuuksia, joita ei voi johtaa mistään. Teoreemat sen sijaan ovat näistä aksioomista niin sanottujen syllogismien avulla päättelemällä johdettavissa olevia totuuksia. Näitä teoreemoja voidaan Aristoteleen mukaan johtaa aksioomista ja aksioomista johdetuista teoreemoista äärettömästi.

Aristoteles kuvaili myös tarkkaan, miten näistä aksioomista päädytään teoreemoihin (mm. von Wright, 1968). Tähän hän kehitti teorian syllogismeista. Syllogismit ovat päättelyä, jossa otetaan tarkasteltaviksi ryhmä premissejä (aksioomia) ja pyritään päättelemään niiden avulla jotain uutta eli saadaan hypoteesi (teoreema). Alla esimerkki Aristoteleen syllogismista (von Wright, 1968):

Jokainen eurooppalainen on valkoihoinen

Joku eurooppalainen on muhammettilainen

Joku valkoihoinen on muhamettilainen

Tätä pätevää päättelyä, jossa premisseistä seuraa välttämättä hypoteesi, Aristoteles kutsui deduktioksi (von Wright, 1968).

Tämä ajatus aksioomista, teoreemoista ja pätevästä päättelystä syllogismien kautta on ollut johtava käsitys tieteen ihanteesta aina 1800-luvulle asti ja muovannut myös sekä filosofian että matematiikan kehitystä (von Wright, 1968). Pyrittiin siis päättelyyn, jossa jos premissit ovat tosia niin seurauslause on pakosti totta. Täten lähtemällä hyvin yksinkertaisista totuuksista (premisseistä/aksioomeista) on ajan myötä rakennettu monimutkaisiakin systeemejä.

Aristoteleen kehittämän aksiomaattisen ajattelumallin ehkä tunnetuin soveltaja oli kreikkalainen matemaatikko Eukleides (von Wright, 1968). Eukleides kehitti ensimmäisen aksioomien teoriaan perustuvan systeemin, joka tunnetaan nykyään nimellä Eukleidinen geometria.

Aristoteleelle voidaan myös antaa kunnia yhä nykyään matematiikassa yleisesti käytettävien termien ‘muuttuja’ ja ‘vakio’ kehittämisestä. Aristoteles käytti näitä termejä syllogismeissaan esiintyvien erityyppisten sanojen luokittelussa. Sanat, joiden vaihtaminen toisiin ilman että päättelyn pätevyys muuttuu, Aristoteles luokitteli muuttujiksi, kun taas sanat joita ei voinut muuttaa päättelyn pätevyyttä muuttamatta hän luokitteli vakioiksi (von Wright, 1968).

2.1.2 1800-luvun looginen vallankumous

Aristoteleen syllogismeista voidaan kuitenkin sanoa, että lopullinen seurauslause ei tuo mitään uutta tietoa vaan että se kertoo sen mikä epäsuorasti on jo premissien kertomaa (von Wright, 1968). Tämä realisaatio johti 1800-luvun puolivälissä loogiseen vallankumoukseen, joka ylsi lähes jokaiselle tieteenalalle, ja aloitti filosofian ja matemaattisen logiikan uuden kasvupyrähdyksen (von Wright, 1968). Tässä uudessa tavassa tehdä tiedettä pyrittiin irtautumaan monista Aristoteleen opeista, kuten syllogismeista. Tästä ehkä merkittävin esimerkki oli siirtyminen Aristoteleen deduktiivisen päättelyn ihanteesta tieteellisen induktiivisen päättelyn käyttämiseen (von Wright, 1968). Tässä on hyväksytty, että tieteellinen tutkimus voi induktion kautta pyrkiä ”tarpeeksi todennäköiseen tietoon”, kunhan noudatamme tarkkaan määriteltyjä tieteellisyyden kriteerejä.

2.2 Matematiikan filosofia

Filosofit ovat pitkään pohtineet monia matematiikan erikoisuuksia, kuten mihin matemaattiset oliot viittaavat, onko niitä olemassa ja esimerkiksi millaista tutkimusta matematiikassa pitäisi suorittaa. Ei myöskään ole itsestäänselvää, onko matemaattiset entiteetit vain ihmismielen rakennelmia maailman hahmottamiseen vai ovatko ne olemassa ihmismielestä riippumatta eräänlaisina maailman rakennussääntöinä. Tällaista pohdintaa kutsutaan matematiikan filosofiaksi. Matematiikan filosofia on kuitenkin aihealueiltaan niin laaja ja vaikea ala, että siihen ei tämän työn puitteissa ruveta tarkemmin paneutumaan.

On tärkeää huomata, että matemaattinen totuus on eri asia kuin tieteenfilosofiassa määritelty tieteellinen totuus. Tieteenfilosofiassa määritellään totuutena hyvin todistettu, empiirisiin huomioihin perustuva koherentti väite, jota ei ole onnistuttu osoittamaan vääräksi (Kelley, 1988). Matemaattisilla totuuksilla sen sijaan usein tarkoitetaan suoraan aiemmista totuuksista tai määritelmistä johdettuja teorioita tai tuloksia (Kelley, 1988). Toisin sanoen tieteelliset todistukset ovat usein induktiiviseen päättelyyn perustuvia, siinä missä matemaattiset todistukset deduktiiviseen. Kerran todistettuja matemaattisia väitteitä harvemmin todistetaan vääräksi ellei koko aksiomaattinen systeemi ole viallinen. Tieteellinen tieto sen sijaan on teoriassa helpompi osoittaa vääräksi. Tätäkään tosin harvemmin tapahtuu, sillä tieteelliseltä tutkimukselta vaaditaan niin paljon eri kriteerejä, toistoja ja tarkkoja toimintatapoja että tieto on *lähes* varmaa.

2.3 Matemaattinen filosofia

Matematiikan vaikutus näkyy monessa filosofian osa-alueessa, mutta ehkä eniten kielenfilosofiassa ja tieteenfilosofiassa (poislukien tietenkin matematiikan filosofian). Tarskin, Carnapin ja Quinen mielestä semantiikka on logiikan ja filosofian rajamailla oleva tutkimusala, joka liittyy siten läheisesti myös matematiikkaan (von Wright, 1968). Matematiikkaa onkin usein käytetty myös muun muassa kielen rakenteiden mallintamiseen (mm. Kracht, 2003).

Näiden oppialojen vuorovaikutus menee siis myös tähän suuntaan matematiikan vaikuttaessa filosofian kehitykseen.

2.4 Logiikan ja pätevän (matemaattisen) päättelyn alkeita

Filosofiassa epistemologiassa ja tieteenfilosofiassa käsitellään paljon sitä, miten tehdä pätevää päättelyä ja argumentointia. Pätevä argumentointi ja johdonmukaisuus ovat oleellisessa osassa tieteen tekemisessä. Kaikista selkeimmät ja ”puhtaimmat” tapaukset, joissa hyödynnetään pätevän päättelyn ja argumentoinnin periaatteita löytyvät matematiikassa.

Suora todistus

Suorassa todistuksessa onnistutaan osoittamaan haluttu väite suoraan oletuksia ja määritelmiä käyttäen deduktiivista päättelyä käyttäen.

Epäsuora todistus

Matemaattisessa todistuksessa, jossa pyritään osoittamaan että jokin pitää *aina* paikkaansa, on hyvä tapa lähteä tätä osoittamaan vastaesimerkillä. Vastaesimerkki-todistuksessa osoitetaan usein, että vastakkainen tapaus on ristiriidassa jonkin tehdyistä oletuksista tai matemaattisista totuuksista, ja siten alkuperäinen väite pitää paikkaansa. Tästä yksinkertaisina esimerkkeinä tässä työssä suunnitellussa kerhomateriaalissa käytettävät harjoitukset (katso liitteet).

Matemaattinen induktiotodistus

Matemaattisessa induktiotodistuksessa todistetaan joukkoa tai väliä koskeva väite rekursion avulla. Tässä todistusmenetelmässä osoitetaan käymällä koko joukko läpi, että jokin väite pätee koko joukolle. Tällöin kyseessä on siis deduktiivinen, loogisesti pätevä päättely. On tärkeää huomata, että tämä on eri todistusmenetelmä kuin filosofian tunnilta tuttu induktiotodistus. Tässä toisessa induktiotodistuksessa pyritään yleisesti pätevään tietoon esimerkiksi aistihavaintojen avulla. Tämä ei kuitenkaan johda varmaan tietoon kuten matemaattinen induktiotodistus.

2.4.1 Yleisimmät konnektiivit ja niiden totuustaulut

Loogiset konnektiivit ovat tämän kerhon tehtävissä oleellisessa osassa. Näiden konnektiivien totuusarvoja kuvaavat niin sanotut totuustaulut. Nämä ovat taulukoita, joista näkee eri loogisten operaattoreiden totuusarvoja eri lähtöarvoilla. Totuusarvot saavat arvoja 0 ja 1 (tai filosofiassa tosi ja epätosi). Yleisimpiä konnektiiveja ovat negaatio (merkitään $\neg$), konjunktio ($\wedge$), disjunktio ($\vee$), implikaatio ($\Rightarrow$) ja ekvivalenssi ($\Leftrightarrow$). Kaikki nämä neljä konnektiivia ovat kaksipaikkaisia, eli ne ottavat kaksi eri totuusarvoa ja antavat niiden perusteella uuden totuusarvon.

Negaatio $\neg$

Olkoon A jokin totuusarvo. Negaatio $\neg A$ saa aina vastakkaisen arvon arvosta A. Negaatio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘ei’.

Konjunktio $\wedge$

Olkoot A ja B totuusarvoja joukosta $\{0,1\}$. Konjunktio $A \wedge B$ saa arvon 1 jos ja vain jos sekä A että B saa arvon 1. Konjunktio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘ja’.

Disjunktio ⋁

Disjunktio A⋁B saa arvon 1 jos kumpikaan arvoista A tai B saa arvon 1. Disjunktio A⋁B saa siis arvon 1 myös silloin, kun sekä A että B saavat arvon 1. Tällöin voidaan puhua myös inklusiivisesta disjunktiosta. Eksklusiiviseksi disjunktioksi kutsutaan disjunktiota A⋁B, joka saa arvon 0 kun A ja B saavat arvon 1. Disjunktio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘tai’.

Implikaatio ⇒

Implikaatio A ⇒ B saa arvon 0, kun A saa arvon 1 ja samanaikaisesti B saa arvon 0. Implikaatiossa A ⇒ B etujäsen A implikoi takajäsenen B, tai toisinsanoen B sisältyy A:han. Esimerkiksi väite “Jänis on nisäkäs” implikoi väitteen “Jänis on eläin”, jos oletetaan, että kaikki nisäkkäät ovat eläimiä. Implikaatio voidaan rinnastaa suomen kielen sanoihin ‘jos … niin’.

Ekvivalenssi ⇔

Ekvivalenssi A ⇔ B saa arvon 1 jos sekä A että B saavat saman arvon, eli joko molemmat saavat arvon 1 tai molemmat saavat arvon 0. Kaksi väitettä ovat siis ekvivalentteja jos ne pätevät aina täysin samaan aikaan. Tämä tarkoittaa myös sitä, että ekvivalentit väitteet seuraavat toisistaan. Jos toinen ekvivalenteista väitteistä pitää paikkaansa, niin tiedetään että myös toinen pitää paikkaansa. Ekvivalenssi voidaan rinnastaa suomen kielen sanoihin ‘jos ja vain jos’.

Alla on näiden yksinkertaisimpien loogisten operaattoreiden (kutsutaan myöskonnektiiveiksi) totuustaulu, joka löytyy myös kerhossa suunnitellusta oppilaiden materiaalista (liite 2.):

A	**B**	**¬A**	**A ⋀ B**	**A ⋁ B**	**A ⇒ B**	**A ⇔ B**
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kuva 2. Totuusarvotaulukossa operaattorit ¬ (ei), ⋀ (ja), ⋁ (tai), ⇒ (jos, niin) ja ⇔ (jos, ja vain jos) alkioiden A ja B eri arvoilla.

Totuusarvotaulukossa arvolla 1 tarkotetaan perinteisesti totuusarvoa 'tosi' ja arvolla 0 totuusarvoa 'epätosi'. Filosofiassa totuusarvoina käytetään usein vastaavasti merkintöjä 't' (‘tosi’) ja 'e' (‘epätosi’) ja englanninkielisessä kirjallisuudessa 't' (‘true’) ja 'f' (‘false’). Totuustaulut ovat esimerkki taulukosta, jonkalaisia oppilaat voivat tehdä kerhon pulmia ratkoessaan. Implikaation ja ekvivalenssin totuustaulut ovat osassa kerhon tehtävistä hyvin merkittävässä osassa.

Luku 3

Matematiikan ja filosofian yhdistämisen pedagogiikkaa

Matematiikan ja filosofian historian ja filosofian tuominen matematiikan opetukseen on monin tavoin suotavaa. Tässä luvussa käydään läpi mitä hyötyjä näin voidaan saavuttaa ja miten näin käytännössä voidaan tehdä. Tarkastelemme myös nykyistä, eli vuoden 2015, opetussuunnitelmaa ja etsimme sieltä matematiikalle ja filosofialle yhteisiä tavoitteita ja sisältöjä. Käymme myös läpi mitä tarkoittaa olla matematiikassa kompetentti ja miten nämä vaatimukset yhtenevät matematiikan ja filosofian yhdistämisen kanssa.

3.1 Matematiikan historian osaamisen tuomat edut matematiikan opetukselle

Tähän kerhoon kuuluu oleellisena osana matematiikan ja filosofian historian yhdistäminen matematiikan opetuksessa. Matematiikan historian tunteminen auttaa matematiikan opettamisessa sekä opettajaa itseään että heidän oppilaitaan useammalla tavalla (katso How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics: Reidar Mosvold, Arne Jakobsen, Uffe Thomas Jankvist, 2014). Mosvoldin, Jakobsenin ja Jankvistin mukaan matematiikan historian tuntemus tarjoaa opettajalle ideoita mahdollisista opetettavista teemoista ja pulmista. Matematiikan historiassa on paljon myös filosofisesti kiehtovia ja opettavaisia pulmia. Esimerkkejä tällaisista pulmista ovat muun muassa monet filosofien tutkimat paradoksit, kuten Zenonin paradoksit, ja monet matematiikan kehitystä ohjanneet ongelmat. Nämä matematiikan historiasta tutut ongelmat ovat myös usein käytännönläheisempiä ja täten oppilaille mielenkiintoisempia (Jankvist, 2014). Matematiikan tunneillahan usein kuulee oppilaiden sanovan että “ei tätä tuu ikinä tarvimaan mihinkään”, kun monet oppilaat pitävät varsinkin pitkää matematiikkaa turhanpäiväisenä heidän tuleville urilleen ja elämälleen. Matematiikan historian tuntemus auttaa myös opettajia saamaan oppitunneilleen muutakin kuin proseduraalisia, mekaanisia tehtäviä (Jankvist, 2014).

Toinen matematiikan historian tuntemisen etu opettajille on se, että tuntemalla tunnetuimmat ja yleisimmät harhakäsitykset ja esteet matematiikan oppimiselle, voi opettaja varautua ja ennaltaehkäistä näiden syntymistä (Jankvist, 2014). Hyvä opettaja tuntee paitsi oman aineensa niin myös itse opetuksen historiallisesti ongelmallisimmat aihealueet ja yleisimmät harhakäsitykset. Matematiikan historian tuntemalla opettaja voi myös käsitellä opetettaviaan aiheita useammasta eri näkökulmasta kuin vain nykyisten oppikirjojen ja muiden opettajien suosimista näkökulmista (Jankvist, 2014). Matematiikan opettajalle voi myös olla mielenkiintoista tutustua matematiikan historiaan.

3.2 Filosofian osaamisen tuomat edut matematiikan opetukselle

Matematiikan historian osaamisen hyödyntämisestä matematiikan opetuksessa löytyy kohtalaisesti tutkimusta ja artikkeleja (esimerkiksi Fauvel, Maanen 2002). Filosofian hyödyntämisestä matematiikan opettamisessa sen sijaan materiaalia löytyy vähemmän. Aiheesta on kuitenkin muun muassa ‘Science and Education’-lehden erikoispainokseen kirjoittanut Uffe Thomas Jankvist ja Steffen Møllegaard Iversen artikkelissaan ‘‘Whys’ and ‘Hows’ of Using Philosophy in Mathematics Education’. Jankvist ja Iversen käyvät artikkelissaan läpi aiheesta tehtyä tutkimusta ja keräävät syitä ja tapoja käyttää filosofiaa, erityisesti matematiikan filosofiaa, matematiikan opetuksen tukena.

Syyt käyttää filosofiaa matematiikan opettamisessa jaetaan usein kahteen kategoriaan: filosofia välineenä ja filosofia tavoitteena (Jankvist, 2014). Puhuttaessa filosofiasta välineenä matematiikan opetuksessa puhutaan yleensä matematiikan filosofian tuomista näkökulmista matemaattisen ajattelun tukena. Matematiikan aihealueet voivat aueta helpommin pohtimalla filosofisesti matematiikan olemusta ja sen eri käsitteitä (Jankvist, 2014). Oppilaille voi olla välillä vaikeuksia matematiikan abstraktimpien käsitteiden kanssa. Mekaanisten perustehtävien loputtomalla syötöllä tekeminen ei auta oppilaita hahmottamaan matematiikan aihealueita ja teorioita samalla tavalla kuin miten matematiikan filosofiaan tutustuminen voisi. Filosofian tutkiminen ylipäänsä voi myös auttaa oppilaita kehittämään heidän luovan ajattelemisen taitoja, mikä on jo itsessään ihailtavaa (Jankvist, 2014). Se voi myös saada oppilaita tottumaan avoimempiin kysymyksenasetteluihin kuin mitä oppilaille matematiikan tunnilla normaalisti tulee vastaan (Jankvist, 2014).

3.2.1 Filosofia välineenä

Yksi tärkeimpiä aiheita käytettäessä filosofiaa välineenä matematiikan opetuksessa on argumentaation taidot. Tällä tarkoitetaan tässä käytännössä taitoa tuottaa päteviä matemaattisia todistuksia. Argumentaatiotaidot ovat oleellinen osa filosofian opetuksessa, ja iso osa filosofian tunnilla opituista argumentaation perusperiaatteista pätee myös matematiikan oppitunnilla. Vuonna 2006 tehdyssä tutkimuksessa (Iversen, 2006) haastateltiin matematiikan ja filosofian opettajia, joiden oppilaat olivat tutkineet erilaisia matemaattisia ja filosofisia todistuksia. Näiden opettajien oppilaita oli muun muassa laitettu vertailemaan erilaisia matemaattisia ja filosofisia todistuksia minkä jälkeen heidät laitettiin pohtimaan näiden eri todistusten todistusmenetelmiä. Todistuksia tutkittiin käyttäen apuna kysymyksiä kuten: Mikä tekee todistuksesta todistuksen? Onko todistukset välttämättä tosia? Voiko mitä vain todistaa? Mikä on todistusten rooli matematiikassa? Haastatellut opettajat ja heitä haastatellut Iversen uskoivat, että filosofian tuominen mukaan matematiikan tunnille enenevissä määrin olisi suositeltavaa matematiikan syvemmälle oppimiselle. Tämä on esimerkki filosofian käyttämisestä välineenä matematiikan opetuksessa.

3.2.2 Filosofia tavoitteena

Jankvistin toinen syy tuoda filosofiaa matematiikan oppitunneille on filosofia tavoitteena. Tällä tarkoitetaan sitä, että filosofia (ts. matematiikan filosofia) on suoraan oppilaiden etujen mukaista tuoda mukaan matematiikan opetukseen. Matematiikan tunnilla käsiteltäviä mahdollisia filosofisia aiheita ovat muun muassa matemaattisten olioiden olemuksen ja matematiikan erikoisuuden oppiaineena pohtiminen, ja matematiikan filosofisten perusteiden tutkiminen. Ajateltaessa filosofiaa tavoitteena välineen sijaan ajatellaan, että näiden filosofisten aiheiden käsittely itsessään on tarpeellista sen sijaan että filosofiaa käytettäisiin vain syventääkseen oppilaiden matematiikan aihealueiden osaamista.
Rajanveto näiden kahden erottelun välillä ei kuitenkaan aina ole helppoa. Filosofinen pohdiskelu on oleellisessa osassa käytettäessä filosofiaa välineenä matematiikan opetuksessa. Tällöinhän siis harrastetaan ihan oikeaa filosofiaa. Filosofian toimivuus matematiikan opetuksen välineenä ei toisaalta ihmetytä, sillä onhan filosofia omana oppiaineenaankin hedelmällinen. Filosofian vahvuuksiin kuuluu nimenomaan eri aiheiden metatason tarkastelu ja syvempi pohdiskelu, joka johtaa aiheiden syvempään tuntemukseen.

3.3 Matematiikalle ja filosofialle yhteiset tavoitteet opetussuunnitelmassa

Lukion matematiikan ja filosofian opetussuunnitelmissa on joitain yhteneviä tavoitteita, joita pyritään tuomaan esille kerhossa. Filosofian opetussuunnitelman mukaan filosofian ensimmäisellä peruskurssilla oppilaiden tulee oppia arvioimaan väitteiden totuutta ja oppia perustelemaan väitteitään ja ymmärtää perusteluiden rakenteita. Tämä on tavoite, jossa logiikasta on suuresti hyötyä. Matematiikan opetussuunnitelmassa sen sijaan sanotaan suoraan tavoitteeksi tutustua logiikan alkeisiin ja todistusperiaatteisiin. Nämä tavoitteet voidaan kuitenkin selvästi yhdistää loogisia todistuksia harjoittelevaksi kerhoksi, jonka avulla oppilaat oppivat antamaan parempia ja selkeämpiä perusteluja väitteilleen hyödyntäen matemaattisia ja loogisia menetelmiä.

Alla suoria lainauksia nykyisestä lukion opetussuunnitelmasta (LOPS 2015):

Pitkän matematiikan valtakunnallisessa syventävässä kurssissa MAA11, Lukuteoria ja todistaminen (LOPS s. 135):

> Kurssin tavoitteena on, että opiskelija
>
> • perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista

Logiikka on tärkeä osa pätevää päättelyä ja todistusmenetelmiä. Logiikan osaaminen ja ymmärtäminen auttaa hahmottamaan, mikä tekee päättelystä pätevää ja milloin johtopäätös on oikeutettu. Tästä hyviä esimerkkejä ovat vastaesimerkin kautta todistus, joka perustuu suoraan loogiseen negaation käsitteeseen; ja joukko-oppiin ja logiikkaan perustuva induktiivinen päättely.

Matemaattinen todistus on myös yksinkertaisimpia ja loogisimpia todistamisen muotoja, ja toimii esimerkkinä pätevästä päättelystä muissakin oppiaineissa. Tämä pätee varsinkin luonnontieteille ja *filosofialle*, sillä luonnontieteet pyrkivät mahdollisimman varmaan tietoon. Filosofiassa sen sijaan on usein ihannoitu matematiikan menetelmien täsmällisyyttä ja loogisuutta.

Lyhyessä matematiikassa (LOPS s. 136):

> Opetuksen tavoitteet
>
> Matematiikan lyhyen oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija
>
> • osaa käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä
>
> • saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa ja rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen
>
> • hankkii sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille

Tämä ja seuraava oppimistavoite ovat monelle ehkä kaikista lyhyen matematiikan oppimistavoitteista kaikista oleellisimpia ja tärkeimpiä toteuttaa. Tämäkin tavoite voidaan tulkita logiikan ja pätevän päättelyn perusperiaatteiden ymmärtämisenä.

> • sisäistää matematiikan merkityksen välineenä, jolla ilmiöitä voidaan kuvata, selittää ja mallintaa ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä

Tämä tavoite on tässä gradussa suunniteltavan kerhon ideana ja kertoo tiivistetysti myös mitä moni muu oppimistavoite sanoo epäsuorasti. Tavoite siis yhtenee monen muun matematiikan oppimistavoitteen kanssa, mutta myös filosofian peruskurssin tavoitteen (ks. alla) kanssa.

> • kehittää käsitystään matemaattisen tiedon luonteesta ja sen loogisesta rakenteesta

Matemaattinen tieto on rakenteeltaan loogista, sillä logiikka on matematiikan pohjimmaisimpia periaatteita. Logiikan voidaan ajatella olevan eräänlaiset matematiikan pelisäännöt. Logiikan ja pätevän päättelyn ymmärtäminen on siis myös tämän oppimistavoitteen ytimessä.

- harjaantuu vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta

Tämä oppimistavoite sanoo periaatteessa, että pitää osata lukea ja tulkita muiden tuottamaa matemaattista tekstiä. Tähän päästään helpoiten oppimalla tuottamaan itse laadukasta ja selkeää matemaattista informaatiota ja oppimalla huomaamaan tällaisen informaation matemaattista ja loogista pätevyyttä.

- tutustuu matematiikan merkitykseen kulttuurin kehityksessä

Tähän oppimistavoitteeseen auttaa matematiikan historian tutkiminen ja matematiikan kehityksen vaikutuksen historian kulussa tarkkailu. Matematiikan kehityksellä on ollut suuri merkitys koko tieteen ja siten yhteiskunnan kehitykselle. Matemaattiset kehitykset ja vallankumoukset ovat pitkälti ohjanneet kaikenlaisen tutkimuksen periaatteiden ja ihanteiden kehitystä.

- osaa käyttää kuvioita, kaavioita ja malleja ajattelun apuna
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Nämä tavoitteet ovat kaikelle matematiikan tekemiselle yhteisiä aina tavallisimmista mekaanisista tehtävistä matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäviin kerhoihin.

Filosofiassa kurssilla FI1 (LOPS s. 162):

- oppii arvioimaan väitteiden totuutta sekä harjaantuu esittämään ja vaatimaan erilaisille mielipiteille ja väitteille perusteluja sekä hahmottamaan esitettyjen perustelujen rakennetta ja arvioimaan niiden pätevyyttä

Tämä tavoite on selvästi suoraan tekemisissä logiikan taitojen hallinnan kanssa. Väitteiden totuuden arvioiminen on toisin sanoen väitteen premissien ja premisseistä johtopäätökseen pääsemisen kyseenalaistamista. Esitettyjen perustelujen rakenteella voidaan tulkita tässä tarkoitettavan suoraan perustelujen loogista rakennetta.

Filosofian (peruskurssilla!) on siis selvästi hedelmällistä tarkastella loogisia rakenteita ja logiikan menetelmiä.

Lyhyessä matematiikassa on huomattavasti enemmän matemaattiseen todistukseen ja matematiikan luonteeseen viittaavia oppimistavoitteita. Nämä samat oppimistavoitteet periytyvät kuitenkin pitkällekin matematiikalle, sillä nämä ovat tavoitteita jotka ovat kaikista olennaisimpia matematiikan opiskelussa.

3.4 Pätevä päättely lukion oppikirjoissa

Pätevän päättelyn ja argumentoinnin ollessa oleellisissa osissa lukion filosofian ja matematiikan opetussuunnitelmissa on siitä reilusti ainesta myös näiden aineiden oppikirjoissa. Tässä opinnäytetyössä tarkastellaan näiden aiheiden esiintymistä filosofian kirjasarjassa 'Argumentti' ja pitkän matematiikan 'Tekijä'-kirjasarjassa. Aiheesta löytyi filosofian kurssikirjasta 'Argumentti 1 - Johdatus filosofiseen ajatteluun' ja pitkän matematiikan kirjasta 'Tekijä 11 - Lukuteoria ja todistaminen'.

Filosofian peruskurssin FI1 kirjassa 'Argumentti 1 - Johdatus filosofiseen ajatteluun'

Argumentti 1 -kirjan luku 3 on nimetty 'Filosofinen ajattelu'. Luvussa käsitellään pätevää päättelyä ja argumentointia. Oleellisimpina aiheina pätevän päättelyn osiossa ovat deduktiivinen ja induktiivinen päättely ja argumentaatiovirheet. Deduktiivisen ja induktiivisen päättelyn erottaminen on hyödyllinen taito matemaattisia todistuksia tehtäessä. Matematiikassa yritetään usein päätyä yleisiin totuuksiin. Tavalliseen filosofiasta tuttuun induktiiviseen päättelyyn pohjautuva todistus ei kuitenkaan ole matematiikassa riittävä todistus. Matematiikassa oleva induktio-todistus on kuitenkin eri asia, sillä siinä käydään periaatteessa koko joukko läpi rekursion avulla.

Matemaattisissa todistuksissa pyritäänkin aina päättelyyn deduktion kautta. Oppilaat saattavat kuitenkin usein yrittää käyttää tätä ei-deduktiivista, induktiivista päättelyä todistamaan matemaattisesti yleisesti pätevää teoriaa.

Argumentti 1:sen ‘Filosofinen ajattelu’ -luvun toisessa osiossa käsitellään argumentaatiovirheitä. Nämä eivät liity yhtä suoraan matemaattiseen päättelyyn kuin edellisen osion asiat, mutta tässä osiossa keskitytään enemmän niin sanottuun suulliseen tai toista ihmistä vastaan argumentoimiseen matemaattisen argumentoimisen sijaan. Näilläkin on kuitenkin paljon yhteistä, muun muassa tekniikoissaan. “Suullisessa” argumentoinnissa on kuitenkin paljon enemmän sille tyypillisiä argumentointivirheitä matemaattiselle päättelylle tyypillisten virheiden lisäksi. Matemaattisen päättelyn voidaankin ajatella olevan erikoistapaus filosofisesta päättelystä.

Pitkän matematiikan kirjassa ‘Tekijä 11 - Lukuteoria ja todistaminen’

‘Tekijä 11’ -kirjan ensimmäisessä luvussa käsitellään logiikan alkeita. Yksinkertaisimpien konnektiivien totuustaulut on esitelty alempana luvussa ‘Totuustaulut’. Tämän enempään tässä työssä ei kuitenkaan paneuduta varsinaiseen logiikkaan, vaan keskitymme pätevään päättelyyn.

Kirjan toisessa luvussa käydään läpi erilaisia todistusmenetelmiä. Kirjassa käydään läpi suora todistus, vastaesimerkki, epäsuora todistus ja matemaattinen induktio. Näistä kaikissa käytetään deduktiivista päättelyä.

3.5 Nissin ja Højgaardin matemaattisen kompetenssiuden määritelmä ja pätevä päättely

Mogens Niss ja Tomas Højgaard kehittivät vuoden 2002 artikkelissaan ‘Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark’ matemaattisen kompetenssiuden määritelmän. Niss ja Højgaard tarkensivat ja selvensivät käsitettään ja sen merkityksellisyyttä vuoden 2019 artikkelissaan ‘Mathematical competencies revisited‘. Tämä kompetenssiuden määritelmä on alkanut muovaamaan matematiikan opetuksen kehittämistä varsinkin Tanskassa (Niss, Højgaard 2019).

Nissin ja Højgaardin antavat kompetenssiudelle seuraavanlaisen määritelmän (raaka suomennos):

“*Kompetenssius on tietoon pohjautuva valmius toimia asianmukaisesti eri tilanteiden muodostamissa haasteissa*”.

(alkup. Competence is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations.) Ensinnäkin valmiudella tässä tarkoitetaan vain tietoista järkeen perustuvaa kognitiivista valmiutta, ei tunneperäistä, valinnaista valmiutta (Niss, Højgaard 2019). Toimimisella tässä tarkoitetaan sekä fyysisiä tekoja, että mentaalisia toimia kuten päätöksentekoa. Tekemättä jättäminen lasketaan myös asianmukaiseksi toimeksi.

Määritelmässä on oleellista myös se, että mahdollisten toimien tulee pohjautua tekijän hankkimaan alan tietoon. Ei myöskään ole tarpeeksi, että henkilö tietää miten tulisi toimia, vaan hänen täytyy olla valmis ryhtymään tarvittaviin toimiin. Haasteilla tässä tarkoitetaan kaikenlaisia haasteita aina tieteellisistä ja älyllisistä moraalisiin ja käytännön haasteisiin. Haaste on kuitenkin varsin subjektiivinen termi. Se mikä on haastavaa yhdelle ei välttämättä ole haastavaa toiselle. Myös se, mikä on asianmukainen toimi missäkin tilanteessa riippuu siitä keneltä kysytään. Eri toimien asianmukaisuus jää loppupeleissä yhteiskunnan ja muun muassa työnantajien määritettäväksi.

Yllä oleva määritelmä on Nissin ja Højgaardin yleinen määritelmä kompetenssiudelle. Tämän kompetenssiuden erikoistapaus 'matemaattinen kompetenssius' voidaan määritellä seuraavasti:

"*Matemaattinen kompetenssius on tietoon pohjautuva valmius toimia asianmukaisesti erilaisissa matemaattisissa haasteissa erilaisissa tilanteissa*".

Tässä matemaattisten haasteiden ei ole pakko olla itsessään matemaattisia, vaan tähän lasketaan myös haasteet, joista voi kummuta matemaattisia haasteita myöhemmin. Tässä työssä suunniteltavassa kerholla on yhtenä oleellisimpina tavoitteina nimenomaan parantaa kerhoon osallistuvien matemaattista kompetenssiutta, eli saada heidät soveltamaan matematiikkaa erinäisiin pulmiin, jotka eivät välttämättä suoraan vaikuta itsessään matemaattisilta. Niss Ja Højgaard määrittävät matemaattisen aktiviteetin vastaamisena kysymyksiin, jotka ovat joko itsessään matemaattisia tai jotka vaativat matemaattisia menetelmiä.

Tässä Nissin ja Højgaardin lähestymistavassa matemaattinen osaaminen määritellään siis matemattisen kompetenssiuden kautta sen sijaan, että se määriteltäisiin perinteiseen tapaan matematiikan aineosaamisen ja sen soveltamisen kautta. Tällä tavalla on etuna se, että määritelmä ottaa mukaan paremmin juuri tällaiset poikkitieteelliset ja matematiikan erinäistä soveltamista vaativat tehtävät. Kompetenssiuden käsitteen suosio on kasvanut räjähdysmäisesti (Niss, Højgaard 2019). Kompetenssiuden käsitteessä pidetäänkin oleellisena sitä, että oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyy mahdollisimman hyvin ja että oppilailta kysytään mahdollisimman moninaisia ja erilaisia menetelmiä vaativia kysymyksiä tavallisen mekaanisen laskemisen sijaan. Tämä matemaattinen ajattelutaito voi helposti auttaa käsittelemään poikkitieteellisiä ja täysin ei-matemaattisiakin aihealueita loogisemmin ja huolitellummin. Tämä viittaakin siihen, että tämän kerhon ynnä muiden sen tyylisten poikkitieteellisten opetusmenetelmien ja -tavoitteiden suosio ja tarve on kasvamassa.

3.5.1 Nissin ja Højgaardin kahdeksan eri matematiikan kompetenssia

Niss ja Højgaard (2019) määrittelevät kahdeksan eri käytännöllistä matemaattista kompetenssiä, joissa kompetenttius tekee ihmisestä matemaattisesti kompetentin. Niss Ja Højgaard jakaa nämä kahdeksan kompetenssiä seuraavaan kahteen raa'asti käännettyyn luokkaan: matemaattisiin kysymyksiin vastaaminen ja niiden esittäminen; sekä matemaattisen kielen ja matemaattisten konstruktioiden ja välineiden hallinta. Ihmisen tulee selvästi hallita kumpikin näistä puolista, jotta häntä voidaan kutsua *matemaattisesti kompetentiksi*.

Nissin ja Højgaardin kahdeksan erilaista matemaattista kompetenssiä ovat

1. matemaattisen ajattelun kompetenssi,
2. matemaattisen ongelmanhallinta kompetenssi,
3. matemaattisen mallintamisen kompetenssi,
4. matemaattisen päättelyn kompetenssi,
5. matemaattisen representaation kompetenssi,
6. matemaattisten symbolien ja formalismin kompetenssi,
7. matemaattisen kommunikaation kompetenssi ja
8. matemaattisten apuvälineiden kompetenssi.

Näistä kompetensseistä kompetenssit 1-4 luokitellaan matemaattisiin kysymyksiin vastaamisen kompetensseiksi ja kompetenssit 5-8 matematiikan kielien, apuvälineiden ja konstruktion kompetensseiksi.

Nissin ja Højgaardin mukaan nämä kahdeksan kompetenssiä kattavat kaiken matemaattisen oppimisen mitä on olemassa. Täten jos hallitset kaikki nämä kahdeksan kompetenssiä, olet matemaattisesti kompetentti. Tässä työssä suunnitellulla kerholla pyritään tekemään kerhon osallistujista kompetentimpiä ainakin osassa näitä kompetensseja.

Tässä työssä oleellisimpia näistä kompetensseistä ovat matemaattisen ajattelun kompetenssi, matemaattisen ongelmanratkaisun kompetenssi, matemaattisen päättelyn kompetenssi, matemaattisen kommunikaation kompetenssi ja matemaattisten apuvälineiden kompetenssi. Erityisesti näihin kompetensseihin pyrkiminen on tässä kerhossa oleellisimpia tavoitteita.

Matemaattisen ajattelun kompetenssissa on oleellista hahmottaa matemaattisten kysymysten luonnetta ja rakenteita. Näitä rakenteita on muun muassa matemaattisten kysymysten muotoilut, todistusten rakenteet ja mekanismit, ja näiden toisistaan erottaminen. Tämän kerhon tehtävissä kerholaisten tulee osata huomata millainen kyseinen ongelma on luonteeltaan, miten matematiikkaa tai logiikkaa voisi siinä soveltaa, ja osata soveltaa aiemmin matematiikassa ja filosofiassa oppimiaan logiikan ja pätevän päättelyn perusteita laajemmin.

Matemaattisen ongelmanhallinnan kompetenssissä tulee osata tunnistaa matemaattisia (tai matematiikkaa tarvitsevia) ongelmia, kehittää niihin ratkaisuja ja osata arvioida omia ratkaisujaan niihin. Työssä suunniteltavan kerhon kerholaisten on tarkoitus harjoittaa ongelmanratkaisua muotoilemalla kerhon tehtävissä esitettäviin pulmiin matemaattisia todistuksia, kiinnittäen erityistä huomiota todistusten rakenteeseen ja pätevyyteen. Kerholaisten on myös oleellista osata verrata tekemiensä todistusten loogisia rakenteita ja menetelmiä tavallisimpiin matemaattisiin todistuksiin ja matemaattisiin tehtäviin ylipäänsä.

Matemaattisen päättelyn kompetenssi on taito analysoida ja tuottaa argumentteja. Matemaattisessa päättelyssä kompetentti osaa tuottaa matemaattisiin pulmiin päteviä argumentteja, tehdä johtopäätöksiä niiden pohjalta ja osaa myös tunnistaa pätevän päättelyn epäpätevästä. Tämä kompetenttius on kaikissa ei-mekaanisissa tehtävissä ratkaiseva ja siten etenkin tämän kerhon tehtävissä. Tämän kerhon kerholaisten on tarkoitus oppia kompetenteimmaksi matemaattisessa päättelyssä tekemällä loogisia päättelyitä pätevää päättelyä vaativissa kerhon tehtävissä ja vertailemalla omia päättelyketjujaan muiden kerholaisten omiin ja malliratkaisuihin.

Matemaattisen kommunikaation kompetenssiin kuuluu kaikki kommunikointi matematiikassa, matematiikasta ja matematiikalla. Tämä tarkoittaa käytännössä tässä kerhossa paitsi kerhon tehtäviin ratkaisujen kirjoittamista, niin myös kerhon lopussa tehtävää ratkaisujen tarkastelua mahdollisesti ääneen. Tässä on oleellista osata muotoilla matemaattisia lauseita, osata muotoilla omat kysymyksensä ja vastauksensa matematiikasta, matemaattisista todistuksista ja matematiikan luonteesta ylipäänsä.

Tämän kerhon tehtävissä olevien loogisten muotojen hahmottaminen voi olla joillekin kerholaisille vaikeaa. Tämän takia kerholaisia neuvotaan hyödyntämään apuvälineitä/-taulukoita, kuten loogisia totuusarvotaulukoita, tehtävien ratkaisussa. Tällaisten ja monien muiden matemaattisten apuvälineiden hyödyntämisen taito on mitä Niss ja Højgaard kutsuvat matemaattisten apuvälineiden kompetenssiksi. Tähän kompetenssiin kuuluu kaikenlaisten fyysisten, piirrettyjen, digitaalisten yms matemaattisten apuvälineiden hyödyntämisen taidot. Tässä kompetentti tietää milloin näitä apuvälineitä kannattaa käyttää, millaisia apuvälineitä kannattaa käyttää missäkin tilanteessa ja osaa tietysti myös käyttää näitä apuvälineitä tehokkaasti.

Matemaattinen kompetenssi on oleellista osata erottaa matematiikan aineosaamisesta, ymmärtämisestä ja proseduraalisista taidoista.

Matemaattiseen kompetenssiuteen ei riitä se, että tuntee matematikan aihealueet, teoriat ja määritelmät. Ihmistä joka tietää teorioita ja määritelmiä ja osaa esimerkiksi lukea matemaattisia todistuksia ei voi sanoa varsin matemaattisesti kompetenssiksi ellei hän osaa myös itse tuottaa matematiikkaa. Ihmisellä ei kuitenkaan voi olla matemaattista aineosaamista olematta edes vähän kompetentti. Myöskään pelkät proseduraaliset taidot eivät riitä täyteen kompetenttiuteen (Niss, Højgaard 2019). Ei riitä että osaa tehdä matematiikkaa esimerkiksi suoraan toisen matematiikkaa tekevän perässä, vaan pitää ymmärtää mitä tekee, miksi tekee, ja osata tehdä itsenäisesti ja soveltaen. Matematiikan harrastamisen proseduraalinen taito on kuitenkin aineosaamisen tapaan osa täyttä kompetenttiutta.

Matemaattinen kompetenssius ei ole sama asia kuin matemaattinen ymmärrys (Niss, Højgaard 2019). Ihminen voi ymmärtää matematiikkaa ja osata lukea ja kuunnella sitä, ilman että osaa itse sitä tehdä. Tässä kompetenssiuden määritelmässä on oleellisessa osassa myös matematiikan aktiivinen tekeminen. Kompetenssius on niin sanotusti laajempi määritelmä kuin pelkkä ymmärrys. Täysi matemaattinen kompetenttius vaati matemaattista ymmärrystä ja jos ymmärrät matematiikkaa hyvin olet usein myös varsin matemaattisesti kompetentti.

Yllä käsitellyt kompetenssit ovat kerholle oleellisimpia, mutta loputkin Nissin ja Højgaardin matemaattisista kompetensseista ovat hyödyllisiä kerhon aihealueessa kuten matematiikassa yleensä. Niss ja Højgaard mainitsevatkin että nämä kahdeksan kompetenssia ovat kyllä erilisiä, mutta ne ovat myös osittain päällekkäisiä. Yksi matemattinen tekeminen voi vaatia osuvimman kompetenssin lisäksi useampaa eri kompetenssia, tai vaikka kaikkia niistä, avustavassa roolissa. On tärkeää huomata, että tämä kompetenssien teoria ei ole tutkimustulos, vaan se on *analyyttinen kehitysprojekti* (Niss, Højgaard 2011). Niss ja Højgaard eivät myöskään anna konkreettisia tapoja, miten käyttää näitä kategorisointeja ja heidän projektissaan antamia ideoita ja suosituksia. Tässä kerhossa onkin tarkoitus suunnitella juuri näitä konkreettisia ohjeita ja materiaaleja, joilla muun muassa Nissin ja Højgaardin kehittämiä ideoita sovelletaan.

3.5.2 Kompetenssin käsitteen tuomat edut matematiikan opetukselle

Niss ja Højgaard eivät suinkaan kehittäneet tätä kompetenssin käsitettään vain hienoksi ideaksi. Kompetenssin käsitteen avulla on helpompi kartoittaa matematiikan opetusta, sen kehitystä ja osa-alueita (Niss, Højgaard 2019). Opettajalle voi olla helpompi lähteä kehittämään omaa opetustaan tai tutkimaan eri opetusmenetelmien vaikutuksia oppilaiden osaamiseen (kompetenssiin) paneutumalla yksittäisiin kompetensseihin laajan matematiikan oppimisen käsitteen sijaan. Kompetenssit ovatkin eräänlaisia kirurgisia välineitä tarkastella matematiikan osaamista pienemmissä paloissa, tehden siitä helpompaa (Niss, Højgaard 2019). Kompetenssin käsitteen tuntemisella on myös käytännön etuja. Matematiikan kompetenssien tarkastelu voi helpottaa matematiikan opettajaa oppituntien ja kurssisuunnitelman suunnittelua (Niss, Højgaard 2019). Opettajan voi olla helpompi nähdä millaisia erilaisia opetusmetodeja ja välineitä hänen kannattaa käyttää, jos hän tuntee eri kompetenssit ja siten kaikki matematiikan osaamisen eri osa-alueet eikä vain pelkkää matematiikan aineosaamista ja mekaanista taitoa. Tämä saattaa myös auttaa opettajaa testaamaan oppilaiden syvällisempääkin osaamista ja hahmottamaan missä oppilaillaan olisi kenties vielä parannettavaa, auttaen opettajaa myös monipuolisempien ja tehokkaampien kokeiden suunnitellussa (Niss, Højgaard 2019).

Opettajan voi olla myös helpompi huomata ja puuttua oppilaidensa matematiikalle spesifeihin oppimisongelmiin ja matematiikka-ahdistukseen tuntemalla nimenomaan matematiikan eri kompetenssit (Niss, Højgaard 2019). Jos opettaja huomaa oppilaalla olevan ongelmia jonkin tietyn matematiikalle tyypillisen ominaisuuden kanssa, voi opettajalle olla helpompaa päästä ongelmaan kiinni, jos hän tietää mistä ongelmassa on kyse. Opettaja voi esimerkiksi huomata, että hänen eräs oppilas ei osaa käyttää matemaattisia apuvälineitä tai malleja tehtävänratkaisun apuna, tai että toinen oppilas ei ymmärrä teoriaa koska hänen matemaattisen ajattelun kompetenssi ei ole vahva. Opettajalle on myös hyvä tietää mitkä kompetenssit ovat missäkin matematiikan aihealueessa erityisen oleellisessa osassa (Niss, Højgaard 2019). Esimerkiksi logiikassa ja lukuteoriassa ovat muun muassa matemaattisen päättelyn kompetenssi ja mallintamisen kompetenssi erityisen tärkeässä osassa. Näin opettaja osaa tarkentaa opetustaan paremmin juuri kyseiselle aihealueelle sopivaksi. Myös tätä kerhoa suunnitellessa on ollut oleellista tietää, mitkä kompetenssit ovat kerhon aiheeseen liittyen oleellisessa osassa. Tämä on auttanut luomaan kerholle parempia ja osuvampia tehtäviä ja oppilaille pohdintoja. Kompetenssien tunteminen voi olla hyväksi myös itse oppilaille, parantaen heidän itsereflektion taitojaan. Itsereflektio saattaakin usein jäädä vähäiseksi varsinkin matematiikkaa opiskellessa, ihmisten keskittyessä liikaa varsinaiseen aineosaamiseen.

3.6 Jankvistin kolme tapaa tuoda matematiikan historiaa matematiikan opetukseen

Uffe Thomas Jankvist on tutkinut syitä sisällyttää matematiikan historiaa matematiikan opetukseen lisäksi myös tapoja, joilla sen käytännössä toteuttaa. Jankvist jakaa nämä tavat kolmeen kategoriaan: valaisevat tavat (“the illumination approaches”), moduulitavat (“the modules approaches”) ja historiaan pohjautuvat tavat (“the history-based approaches”) (Jankvist 2009). Kaikissa näistä tavoista on mahdollista tuoda historiaa mukaan opetukseen haluamansa verran aina hyvin pienestä sivuhuomiosta koko oppitunnin teemaksi.

3.6.1 Valaiseva tapa

Valaisevassa tavassa oppitunteihin tai niillä käytettäviin oppikirjoihin sisällytetään erikokoisia katsauksia matematiikan historiasta: sen kehittymisestä, oleellisista matemaatikoista ja heidän teorioistaan, erilaisista tärkeistä päivämääristä matematiikan kehityksessä tai vaikka mielenkiintoisia matemaattisia ongelmia matematiikan historiasta. Nämä katsaukset matematiikan historiaan ovat useimmiten pieniä huomioita kirjan marginaalissa tai muun tekstin välissä, muutaman lauseen huomioita matematiikan opettajan suusta tai vaikkapa erillisiä tarinoita matematiikan historiasta sisällytettynä oppitunnille.

Näitä historiallisia huomioita voi myös laajentaa isommaksikin kokonaisuudeksi otteina alkuperäisestä tekstistä, sen kirjoittajan tiedoilla ja huomioilla ja motivaatioilla. Suoraan alkuperäisiä lähteitä käytettäessä oppilaat joutuvat näkemään enemmän vaivaa tulkitakseen työtä ja sen motiiveja. Tällainen saa oppilaat kuitenkin usein paremmin sisäistämään aiheen kun he joutuvat tekemään isomman osan ajattelutyöstä itse.

Näitä isompia historiallisia kokonaisuuksia käytetään useimmiten tekstissä tai oppitunnilla prologina tai epilogina. Tässä työssä kehiteltävässä kerhossa tuodaan matematiikan ja filosofian yhteistä historiaa käyttämällä juuri tällaista valaisevaa tapaa tuomalla kerhon materiaalin alkuun lyhyt katsaus matematiikan ja filosofian yhteisestä historiasta johdatteluna kerhon aiheisiin.

3.6.2 Moduulitapa ja historiaan pohjautuvat tavat

Moduulitavalla tarkoitetaan valmiita kokonaisuuksia matematiikan historian tuomiseksi oppitunnille. Tällaisia kokonaisuuksia voi olla esimerkiksi matematiikan historiaa käsittelevät kurssit tai oppikirjat, tai erilaiset projektit tai kerhot. Tässä työssä suunniteltava kerho ei kuitenkaan ole varsinaisesti matematiikan historian kerho, vaan matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä kerho, jossa käytetään matematiikan (ja filosofian) historiaa valaisevana aloituksena.

Historiaan pohjautuvat tavat eroavat valaisevista tavoista ja moduulitavasta siinä, että historiaan pohjautuvassa tavassa ei tuoda historiaa suoraan mukaan opetukseen. Tässä lähestymistavassa itse matematiikan aihealueiden opetus suunnitellaan historiallisen taustan perusteella. Lähestymistavassa siis esitetään esimerkiksi eri teoriat niiden kehittämisjärjestyksessä eli kronologisessa järjestyksessä tai luodaan aiheen esitystapa samanlaiseksi kuin se on esimerkiksi teorian kehittäjän sitä kehittäessä ollut.

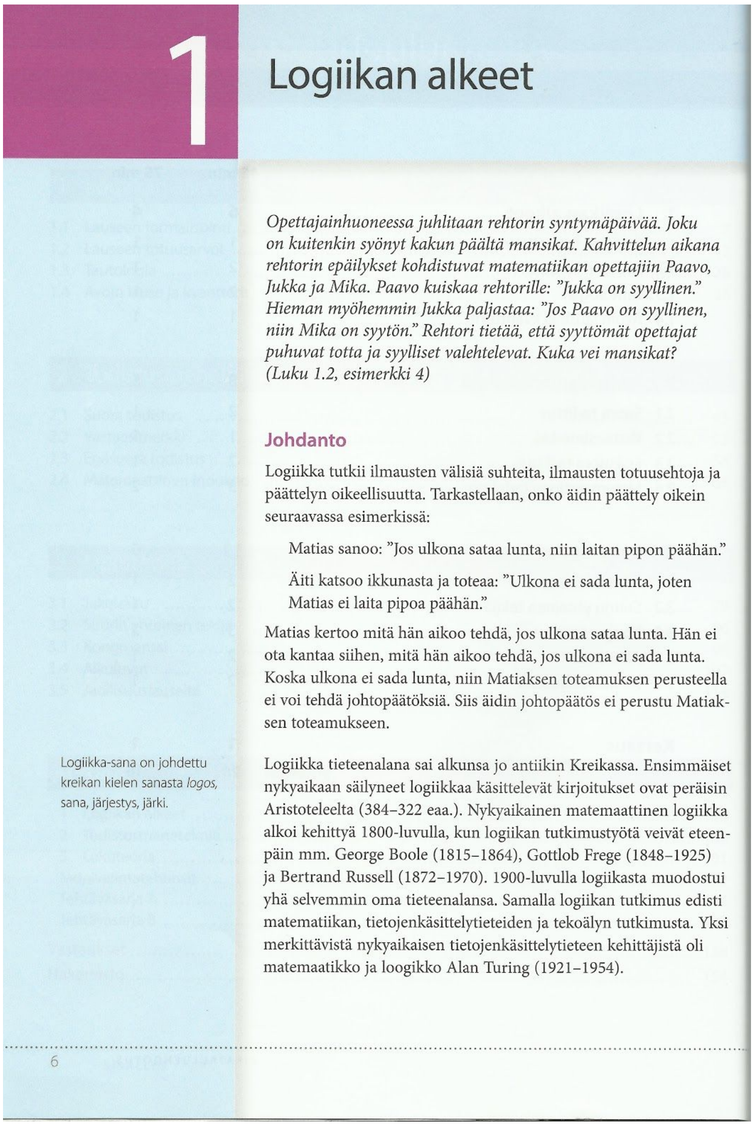
On toki mahdollista kehittää erilaisia tapoja kategorisoida tavat sisällyttää matematiikan historiaa matematiikan opetukseen. Nämä Jankvistin kehittämät kategoriat on kuitenkin ainakin Jankvistin mukaan käytettävä kaikkien eri lähtökohtien kategorisoimiseen. Muita tapoja luokitella tapoja sisällyttää matematiikan historiaa matematiikan opetukseen voi kuitenkin tehdä esimerkiksi luokittelemalla millaista historiaa opetuksessa käytetään, sen mukaan kuinka paljon historiaa käytetään tai millaisia materiaaleja opetuksessa käytetään.

3.7 Jankvistin kolme tapaa tuoda filosofiaa matematiikan opetukseen

Jankvist on tutkinut ja kehittänyt matematiikan historian matematiikan opetukseen sisällyttämisen lisäksi kategoriat myös (matematiikan) filosofian tuomiseksi mukaan matematiikan opetukseen. Nämä kategoriat ovat historian matematiikan opetukseen tuomisen kategorioita muistuttavasti valaiseva tapa, moduulitapa ja filosofiaan pohjautuva tapa (Jankvist 2014).

3.7.1 Valaiseva tapa

Valaisevassa tavassa filosofiaa tuodaan täydentävään rooliin matematiikan oppikirjoissa tai oppitunneilla. Tämä voi tarkoittaa erilaisia irrallisia otteita muun muassa eri teorioista tai opeista, tunnetuista filosofeista tai filosofisista teemoista muun opetuksen seassa. Filosofisia "makupaloja" voidaan käyttää maustamaan matematiikan teemoja. Tällaisesta makupalasta esimerkki alla.



1 Logiikan alkeet

Opettajainhuoneessa juhlitaan rehtorin syntymäpäivää. Joku on kuitenkin syönyt kakun päältä mansikat. Kahvittelun aikana rehtorin epäilykset kohdistuvat matematiikan opettajiin Paavo, Jukka ja Mika. Paavo kuiskaa rehtorille: "Jukka on syyllinen." Hieman myöhemmin Jukka paljastaa: "Jos Paavo on syyllinen, niin Mika on syytön." Rehtori tietää, että syyttömät opettajat puhuvat totta ja syylliset valehtelevat. Kuka vei mansikat? (Luku 1.2, esimerkki 4)

Johdanto

Logiikka tutkii ilmausten välisiä suhteita, ilmausten totuusehtoja ja päättelyn oikeellisuutta. Tarkastellaan, onko äidin päättely oikein seuraavassa esimerkissä:

> Matias sanoo: "Jos ulkona sataa lunta, niin laitan pipon päähän."
>
> Äiti katsoo ikkunasta ja toteaa: "Ulkona ei sada lunta, joten Matias ei laita pipoa päähän."

Matias kertoo mitä hän aikoo tehdä, jos ulkona sataa lunta. Hän ei ota kantaa siihen, mitä hän aikoo tehdä, jos ulkona ei sada lunta. Koska ulkona ei sada lunta, niin Matiaksen toteamuksen perusteella ei voi tehdä johtopäätöksiä. Siis äidin johtopäätös ei perustu Matiaksen toteamukseen.

Logiikka tieteenalana sai alkunsa jo antiikin Kreikassa. Ensimmäiset nykyaikaan säilyneet logiikkaa käsittelevät kirjoitukset ovat peräisin Aristoteleelta (384–322 eaa.). Nykyaikainen matemaattinen logiikka alkoi kehittyä 1800-luvulla, kun logiikan tutkimustyötä veivät eteenpäin mm. George Boole (1815–1864), Gottlob Frege (1848–1925) ja Bertrand Russell (1872–1970). 1900-luvulla logiikasta muodostui yhä selvemmin oma tieteenalansa. Samalla logiikan tutkimus edisti matematiikan, tietojenkäsittelytieteiden ja tekoälyn tutkimusta. Yksi merkittävistä nykyaikaisen tietojenkäsittelytieteen kehittäjistä oli matemaatikko ja loogikko Alan Turing (1921–1954).

Logiikka-sana on johdettu kreikan kielen sanasta *logos*, sana, järjestys, järki.

6

Kuva 1.

Kuva lukion matematiikan kirjasta 'Tekijä 11', jossa tuodaan osittain filosofista tietoa (kuvassa alhaalla oleva katsaus logiikan synnystä) valaisevaan tapaan osaksi matematiikan opetusta

Isompana esimerkkinä filosofian tuomisesta matematiikan tunnille on kun matemaattisia aiheita tai ongelmia esitetään filosofisesta näkökulmasta tai jopa jonkun filosofin esittämänä, kuten esimerkiksi tuttujen paradoksien käsittely tunnettujen filosofien pohdintojen kautta. Filosofeille tutuimpia matemaattisia aiheita ovat logiikka ja matematiikan filosofia.

3.7.2 Moduulitapa

Moduulitavassa filosofia ja matematiikkaa yhdistetään valmiiksi yhteneväksi kokonaisuudeksi, mahdollisesti sellaiseksi joka on valmis opettajalle käyttöönotettavaksi. Tällaisia ovat esimerkiksi lyhyet muutaman luennon pituiset katsaukset matematiikan filosofiaan, matemaattisen aiheen käsittelyyn filosofisesti tai vaikkapa lyhyinä matemaattis-filosofisina projekteina. Näitä moduuleja voidaan laajentaa aina kokonaisiksi filosofiaa huomioiviksi kursseiksi tai oppikirjoiksi. Tässä työssä suunniteltavan kerhon on tarkoitus olla eräänlainen matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä moduuli, jossa aiemmin mainitusti käytetään apuna myös matematiikan ja filosofian yhteistä historiaa valaisevan tavan periaatteella. Tässä siis toteutetaan matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä moduuli kerhon muodossa. Moduulitapa eroaa valaisevasta tavasta siinä, että filosofia otetaan koko kyseisen opetusmoduuliin oleelliseksi osaksi mukaan, sen sijaan että sitä käytettäisiin vain apuvälineenä tai sivuhuomiona.

3.7.3 Filosofiaan pohjautuva tapa

Filosofiaan pohjautuvassa tavassa annetaan (opettajan) filosofisen tiedon vaikuttaa kurssin suunnitteluun ja rakenteeseen. Tässä matematiikan aihealueiden käsittelyjärjestystä tai jopa itse käsittelytapaa muutetaan opettajan filosofiseen tietämykseen pohjautuen. Opettajan filosofia voi näkyä myös opettajan puheissa, kuten esimerkiksi se uskooko opettaja matemaattisen intuitionismiin. Matemaattisessa intuitionismissa ajatellaan, että matemaattiset objektit ja konstruktiot ovat vain ihmisen kehittämiä muihin tällaisiin ihmisen kehittämiin konstruktioihin perustuen. Tällöin ajatellessa opettajan vastaus oppilaiden kysymykseen matematiikan luonteesta ja sen muuttumattomuudesta voi vaihdella opettajan ja hänen filosofisten näkemystensä matematiikasta mukaan. Filosofiaan pohjautuvaa tapaa käytettäessä varsinaista filosofiaa ei usein tule oppilaille asti.

3.8 Oppiainerajat ylittävään opettamiseen liittyviä etuja ja ongelmia

Nyky-yhteiskunnassa informaatiota on saatavilla entistä enemmän ja enemmän. Tämä johtaa siihen että käsiteltävät aiheet ja ongelmat ovat yhä monimutkaisempia ja laaja-alaisempia. Monialainen opetus ja oppiminen voivat auttaa oppilaita hahmottamaan ja ymmärtämään laajempia kokonaisuuksia ja oppia pärjäämään näiden kanssa tulevilla urillaan (Iversen 2006). Erityisesti matematiikan esiintyminen eri tieteenaloilla on lisääntynyt merkittävästi, vaikka moni oppilas voi yhä pitää matematiikkaa edelleen irrallisena ja turhana tuleville urilleen. Matematiikan ylioppilastutkinnon arvosanalla on entistä isompi merkitys esimerkiksi korkeakouluvalinnoissa. Oppiaineet eivät ole oikeassa elämässä eroteltu oppiaineisiin ja kursseihin, vaan eri oppiaineiden aihealueet muodostavat eräänlaisen verkon, jonka kanssa oppilaiden tulee oppia pärjäämään.

3.9 Steffen Iversenin matematiikan ja filosofian yhdistämistä tutkiva tutkimus

Steffen Iversen tutki matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävää opetusta tanskalaisissa yläkouluissa (Iversen, 2006). Iversen haastatteli yläkoulun matematiikkaa, filosofiaa tai molempia oppiaineita opettavia opettajia ja kyseli heiltä ideoita ja ajatuksia siitä miten matematiikkaa ja filosofiaa voisi yhdistää yläkouluissa. Iversen ja hänen haastattelemansa opettajat päätyivät ehdottamaan pätevää päättelyä ja todistamista matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäväksi aihealueeksi. Iversen ideoi oppilaiden päättelykompetenttiuden kehittämistä antamalla heille tarkasteltavaksi esimerkkejä matemaattisista ja filosofisista todistuksesta ja vertailemalla todistusmenetelmiä näissä.

Tässä työssä suunnitellussa kerhossa päädyttiin suunnitteluvaiheessa Iversenin tutkimuksesta tietämättömänä samaan aihealueeseen, eli pätevään päättelyyn ja todistamiseen, matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävänä aiheena. Iversen haastatteli ja ideoi matematiikan ja filosofian yhdistämistä erilaisin menetelmin, kun taas tässä työssä suunnitellaan tähän konkreettinen materiaali harjoituksineen.

Luku 4

4. Kerhon tavoitteet ja toteutus

Tässä työssä suunniteltavan kerhon tavoitteet ovat moninaisia. Oleellisimpana tavoitteena on saada oppilaat ymmärtämään matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäviä tekijöitä, ja sitä millaiseen tietoon ja millä keinoin siihen matematiikassa pyritään. Toinen oleellinen tavoite on saada oppilaat ymmärtämään monialaisuuden etuja ja sitä miksi monialaisuus opinnoissa on tavoiteltavaa ja minkälaisiin asioihin oppilaat voivat tätä heidän elämässään soveltaa. Kerholla toivotaan olevan myös positiivisia vaikutuksia oppilaiden matematiikan ja filosofian aineosaamiseen. Kerhon ollessa vapaaehtoinen, on sen tarkoitus myös olla oppilaille mieluisa ja mieleenpainuva.

4.1 Kerhon kehitys ja mahdollinen toteutus

Tässä työssä suunniteltu kerhomateriaali käyttää Thomas Jankvistin käsitteellistämää valaisevaa tapaa tuoda matematiikan ja filosofian historiaa ja filosofiaa matematiikan opetukseen (ks. luvut 3.6.1 ja 3.7.1), sekä on esimerkki Jankvistin moduulitavasta tuoda filosofiaa matematiikan opetukseen (ks. luku 3.7.2).

Kerho-materiaali on suunniteltu toteutettavaksi lukio-ikäisille pitkän tai lyhyen matematiikan opiskelijoille noin 75-minuuttisena rupeamana. Materiaali on kolmeosainen. Kerholaisille jaetaan tässä työssä suunniteltu materiaali (liite 2.). Kerhonvetäjälle on suunniteltu oma materiaali (liite 1.), jossa on samat tehtävät ratkaisuineen ja vain kerhon vetäjille tarkoitettua tietoa. Kerholaisten ratkottua tehtäviä kerhonvetäjän mielestä riittävä aika, voi vetäjä jakaa oppilaille tehtävien malliratkaisut (liite 3.) tarkasteltaviksi.

Materiaali on suunniteltu matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäväksi lyhyeksi moduuliksi (katso luvut 2.6.2 ja 2.7.2), jossa käytetään matematiikan ja filosofian yhteistä historiaa matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävänä ja kerhon aihetta avaavana tekijänä. Kerhon aiheeksi on valittu matemaattisen argumentoinnin vahvistaminen filosofisen pohdinnan ja keskustelun keinoin.

Kerholaisten materiaalin alussa mennään teoriapuoleen. Materiaalin alussa oleva teoriaosuus kertoo lyhyesti matematiikan ja filosofian yhteisestä historiasta ja siitä miten matematiikan kehitys on vaikuttanut filosofisiin aatteisiin ja päinvastoin. Kerhonvetäjä voi itse kertoa aiheesta ollessaan itse perehtynyt asiaan syvemmin. Kerhonvetäjän materiaalista löytyy kuitenkin lyhyt perehdytys logiikan alkeisiin. Suunnitellussa materiaalissa (oppilaiden versiossa) oleva lyhyt katsaus on kuitenkin suunniteltu siten, että kerho on mielekäs myös toteutettavaksi ilman filosofian historiaa tuntevaa kerhonvetäjää. Materiaalin pohjustus eli teoriaosuus on tarkoitettu oppilaiden itse luettavaksi, ja on tärkeydeltään toissijainen varsinaiselle tehtäväosuudelle.

Teoriaosuuden jälkeen kerholaisten materiaalissa alkaa tehtäväosuus. Tehtäväosuudessa oppilaiden on tarkoitus aloitella tekemään materiaalista löytyviä todistustehtäviä itsenäisesti, kerhonvetäjän kierrellessä ympäri oppimistilaa auttaen apua tarvitsevia. Kerhonvetäjän materiaalista ja liitteestä 3. löytyy tehtäviin eräät malliratkaisut. Ratkaisutapoja on kuitenkin monenlaisia, ja kerhonvetäjän harteille jää tulkita mitkä niistä ovat (lähinnä loogisesti) päteviä. Kerholaiset on oleellista saada vertailemaan ratkaisujaan ja pohtimaan yhdessä miksi heidän ratkaisunsa ovat tai eivät ole päteviä ja miten niitä voisi parantaa.

Tässä esitetty kerhon toteutustapa on suuntaa-antava, ja kerhonvetäjien/opettajien on mahdollista käyttää tässä työssä esitettyä materiaalia haluamallaan tavalla. Materiaalista voidaan myös jättää pois alun esittely- ja teoriaosuudet, ja korvata ne omalla saman tarkoituksen ajavalla materiaalilla. Materiaalin pitäisi toimia myös oppilaille jaettavana itsenäisen opiskelun tehtävänä tai kotitehtävänä. Tällöin kuitenkin tehtäville oleellinen pohdinta voi jäädä vähäiseksi.

4.2 Kerhossa käytettävät logiikkapulmat

Kerhon materiaaliin valikoitui tehtäviä Raymond Smullyanin kirjasta ‘Whats is the name of this book?’ (Smullyan 2015) ja Thomas Schwartzin kirjasta ’The art of logical reasoning’ (Schwartz, 1980). Tehtävät 1-4 on otettu Smullyanin kirjasta ja tehtävä 5 Schwartzin kirjasta. Materiaalissa on tarkoitus koetella oppilaiden matemaattisen todistamisen ja pätevän päättelyn taitoja tarpeeksi yksinkertaisilla tehtävillä. Kyseiset kirjat olivat täynnä oivallisia tehtäviä. Juuri nämä tehtävät tuntuivat kuitenkin tarpeeksi yksinkertaisilta ja lyhyessä kerhotuokiossa ymmärrettäviltä, mutta samalla matemaattisen päättelyn perusperiaatteita harjaannuttavilta, että ne päätettiin ottaa kerhon harjoituksiksi.

75-minuuttisessa rupeamassa ei ole riittävästi aikaa opetella kovin montaa erilaista tehtävätyyppiä, joten tehtävät on valittu niin, että niissä käytetään suurimmilta osin samaa ritarien ja kelmien käsitettä. Jokaisessa tehtävässä vaaditaan kuitenkin vähän erilaista päättelyä ja loogisten operaatioiden ja pätevän päättelyn osaamista. Kyseiset 5 tehtävää muodostavat myös loogisen kokonaisuuden, jotka vaativat kaikki omanlaistaan päättelyä, ja osa eri loogisten konnektiivien erikoisuuksien tuntemista. Viimeinen tehtävä jättää ritarien ja kelmien käsitteet ja menee lähemmäs perinteisiä matematiikan todistustehtäviä. Tämän tehtävän on tarkoitus haastaa oppilaita miettimään kerhon aiempien tehtävien yhteydessä pohtimia asioita perinteisemmässä matematiikan tehtävässä ja saada siten oppilaat miettimään sitä myös mahdollisesti jatkossa matematiikkaa koulun penkilläkin harrastaessaan.

4.2.1 Kerhomateriaaliin valitut tehtävät

Seuraavissa pulmissa esiintyy niin sanottuja ritareja ja kelmejä. Ritarit puhuvat aina totta ja kelmit valehtelevat aina. Tehtävät 1-3 valaisevat hyvin implikaation ('jos, niin') totuusarvoja, joiden ymmärtäminen saattaa olla monelle haasteellista. Ekvivalenssin tunteminen auttaa tehtävässä 4. Kaikkien tehtävien yhteydessä on tarkoitus pohtia onko kyseessä pätevä todistus ja miksi se toimii tai ei toimi. Jokaiseen tehtävään on laadittu malliratkaisut, jotka löytyvät vielä sekä kerhon vetäjän materiaalista (liite 1.), että erillisestä malliratkaisut sisältävästä liitteestä (liite 3.).

Tehtävä 1

(Smullyan 2015, t. 110 sivulta 103) Joku kysyy henkilöltä A, ”Oletko ritari?”. Hän vastaa, ”Jos olen ritari, niin syön hattuni.” Todista että A:n pitää syödä hattunsa.

Ratkaisu 1: Jos henkilö A olisi kelmi, niin väittämän (implikaation) ensimmäinen osa (premissi) olisi epätosi. Muistetaan kuitenkin, että implikaatio on tosi, silloin kun sen premissi on epätosi. Siis jos henkilö A olisi kelmi hän ei valehtelisi. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kelmien pitää valehdella. A ei siis voi olla kelmi. Jos henkilö A on ritari, on hänen pakko puhua totta ja syödä hattunsa. Siis henkilö A on ritari, ja siten hänen täytyy syödä hattunsa.

Ratkaisu 2: Tehdään totuustaulu. Olkoon lause R lause “A on ritari” ja lause H lause “A syö hattunsa.” Lause ”Jos olen ritari, niin syön hattuni” saa nyt muodon $R \Rightarrow H$ ja totuustaulu näyttää seuraavanlaiselta:

R	H	R ⇒ H
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Taulukossa kaksi alimmaista riviä eivät ole mahdollisuuksia, sillä niissä A ei ole ritari (eli on kelmi) ja hän ei valehtele. Toisella rivillä A on ritari ja valehtelee, joten sekään ei ole mahdollisuus. Ainoa mahdollinen rivi on ensimmäinen rivi, jolla R ja H pitävät paikkansa eli A on ritari ja syö hattunsa.

Tämä ensimmäinen tehtävä on valittu suhteellisen helppona tehtävänä kerhon ensimmäiseksi tehtäväksi. Tehtävä aukeaa implikaation totuusarvot muistamalla tai annetusta taulukosta katsomalla. Tässä on kuitenkin tärkeää osata käydä läpi kaikki loogiset vaihtoehdot, sillä muuten todistus ei ole loogisesti pätevä! Tämä on tärkeä havainto myös myöhempiä tehtäviä varten. Tämä ensimmäinen tehtävä antaa myös esimakua ritarit ja kelmit asetelman kummallisuuksista ja siitä mitä tehtäviltä voi odottaa. Tehtävässä alkuun pääseminen saattaa vaatia tukea kerhonvetäjältä. Tämän tehtävän yhteydessä on tarkoitus keskustella ja miettiä todistuksen pätevyyttä ja menetelmiä, kuten myös muissakin tehtävissä.

Tehtävä 2

(Smullyan 2015, t. 116 sivulta 104) Oletetaan, että seuraavat kaksi väittämää pitävät paikkansa:

1) Rakastan Bettyä tai rakastan Janea.

2) Jos rakastan Bettyä, niin rakastan myös Janea.

Seuraako väittämistä välttämättä, että rakastan Bettyä? Entä Janea?

Ratkaisu 1: Jotta väite 2 pitää paikkaansa, tulee minun rakastaa joko sekä Bettyä että Janea (tapaus t->t), tai en rakasta Bettyä (tapaukset e->t ja e->e). On siis mahdollista, että en rakasta Bettyä, mutta silloin väittämän 1 mukaan minun on rakastettava Janea.

Ratkaisu 2: Oletetaan, rakastan Bettyä. Tällöin väitteen 2 mukaan rakastan myös Janea. Oletetaan sen sijaan että rakastankin Janea. Nyt väite 2 pitää paikkaansa rakastin Bettyä tai en. On siis mahdollista, että rakastan Bettyä tai en, mutta Janea rakastan joka tapauksessa.

Tämä toinen tehtävä on myös helpommasta päästä. Tehtävä ei vaadi monimutkaista päättelyketjua. Tehtävän pitäisi aueta kerholaisille yhtälöparin ratkaisumenetelmiä mukaillen ottamalla tiedon yhdestä väittämästä ja käyttäen sitä toisessa. Tehtävä on myös hyvä esimerkki siitä, että ratkaisuja voi olla erilaisia. Tärkeintä on kuitenkin että ratkaisu on loogisesti pätevä.

Tehtävä 3

(Smullyan 2015, t. 120 sivulta 106) Oletetaan, että olen joko ritari tai kelmi, ja teen seuraavat väittämät:

1) Rakastan Lindaa.
2) Jos rakastan Lindaa, niin rakastan myös Kathya.

Olenko ritari vai kelmi?

Ratkaisu: Jos olen ritari, niin rakastan Lindaa ja siten myös Kathya. On siis mahdollista, että olen ritari. Sen sijaan jos olisin kelmi, niin molempien väittämien pitäisi olla epätosia. Ainut tapa miten väite 2 voi olla epätosi, on jos rakastan Lindaa, mutta en Kathya. Tämä on kuitenkin ristiriidassa väitteen 1 kanssa, sillä tällöin olisin puhunut väitteellä 1 totta vaikka olen kelmi. En siis voi olla kelmi, joten olen ritari.

Tämä kolmas tehtävä poikkeaa aiemmista tehtävistä siinä, että tehtävässä kysytäänkin että onko väitteiden esittäjä ritari vai kelmi. Tässä tehtävässä on erityisen tärkeää käydä läpi kaikki mahdollisuudet. Todistus ei ole loogisesti pätevä jos osoittaa vain että on mahdollista, että henkilö on ritari. On oleellista myös osoittaa että henkilö ei voi olla kelmi, että voi väittää henkilön olevan ritari.

Tehtävän ratkaisemisessa saattaa olla hyvä muistuttaa kerholaisia tehtävätyypin erikoisuudesta, nimittäin siitä että kelmien on pakko valehdella kaikessa siinä missä ritareiden on pakko kertoa totuus. Tehtävän voi ratkaista tarkistamalla onko mahdollista että kummatkin väitteet joko pitävät paikkaansa tai eivät pidä paikkaansa. Tehtävä eroaa siis tehtävästä 2 vaikka ne saattavatkin ensivaikutelmalta näyttää varsin samanlaisilta. Tehtävä saattaa auttaa oppilaita hahmottamaan eri tehtävätyyppien ratkaisumenetelmiä ja auttaa oppia valitsemaan oikea ratkaisumenetelmä.

Tehtävä 4

(Smullyan 2015, t. 122 sivulta 107) Huhutaan että saarella, jossa on pelkkiä ritareja ja kelmejä, on kultaa. Kysyt saaren asukkaalta, A:lta, että onko saarella kultaa. Asukas vastaa: ”Saarella on kultaa jos ja vain jos olen ritari.”

Ongelmassa on kaksi puolta:

a) Voimmeko päätellä onko A ritari vai kelmi?

b) Voimmeko päätellä onko saarella kultaa?

<u>Ratkaisu:</u> Päätellään ensin onko A ritari vai kelmi. Jos A on ritari, pitää väite paikkaansa jos saarella on kultaa. Jos A on kelmi, ei väite

saa pitää paikkaansa. Tämäkin on kuitenkin mahdollista jos saarella on kultaa. Emme siis voi päätellä, onko A ritari vai kelmi.

Tiedämme kuitenkin, että saarella on kultaa seuraavan päättelyn avulla: Jos A on ritari, niin väittämä pitää paikkaansa. Ekvivalenssi-muotoinen väite pitää paikkaansa silloin, kun molemmat puolet ovat samaan aikaan joko tosia tai epätosia. Koska tiedämme että A:n ollessa ritari väittämän oikea puoli pitää paikkaansa, tulee myös väitteen ensimmäisen puolen pitää paikkaansa että itse väite pitää paikkaansa. Siis saarella on tällöin kultaa. Jos A onkin kelmi, tulee väittämän olla epätosi. Jotta kyseinen ekvivalenssi-muotoinen väittämä voi olla epätosi, tulee toisen väittämän osista olla epätosi samalla kun toinen on tosi. Koska A:n ollessa kelmi väittämän ”olen ritari”-puoli on epätotta, niin silloin toisen puolen eli ”saarella on kultaa” on pidettävä paikkaansa. Siis oli A ritari tai kelmi, niin saarella on kultaa.

Tämä tehtävä vaatii aiemmista tehtävistä poiketen ekvivalenssin (“jos ja vain jos”) osaamista. Tehtävä on myös jaettu kahteen osaan ja vaatii kerholaisilta kykyä hahmottaa miten minkäkinlaista väitettä kannattaa lähteä todistamaan. Tässä tehtävässä on erityisen tärkeää jäädä pohtimaan, miksi todistus toimii ja miksi kyseessä on riittävä todistus. Tehtävä on vaativammasta päästä, ja tämän tehtävän voikin jättää välistä ja tehdä mieluummin tehtävän 5, jos aika ei riitä kaikkiin tehtäviin.

Tehtävä 5

(Schwartz 1980, s.4 esimerkki 12) Olkoot x ja y kokonaislukuja. Oletetaan, että $x + y$ on pariton luku. Osoita, että x tai y on parillinen luku. Voit käyttää hyväksesi sitä tietoa, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Ratkaisu: Ratkaistaan tehtävä vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että x ja y ovat molemmat parittomia lukuja (vastaoletus). Nyt x - 1 ja y - 1 ovat parillisia lukuja. Tiedetään, että parillisten lukujen summa on aina parillinen, siis (x - 1) + (y - 1) + 2 on parillinen. Mutta (x - 1) + (y - 1) + 2 = x + y. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksemme, että x + y on pariton, kanssa. Siis vastaoletuksemme on väärässä ja siten x:n tai y:n täytyy olla parillinen.

Tämä viimeinen tehtävä on lähempänä tavallisia matematiikan todistustehtäviä. Todistus on kuitenkin helpoimmasta päästä. Tehtävän on tarkoitus toimia eräänlaisena rajapintana helpompien todistustehtävien (kerhon tehtävät 1-4) ja vaikeampien puhtaasti matemaattisten todistustehtävien välillä. Tehtävässä käytetään matemaattisille todistuksille tyypillistä todistusta vastaoletuksen avulla.

Luku 5

5. Loppusanat

Matematiikalla ja filosofialla on aloina paljon yhteistä. Kaikkiin näihin yhteisiin aihealueisiin ei voida yhdessä pro gradu tutkielmassa suunnitella omaa materiaalia. Tämän kerhon ideaa on kuitenkin mahdollista jatkaa näihin muihin aihealueisiin, ja luultavimmin tullaankin jatkamaan. Pätevä päättely, argumentointi ja todistaminen on matematiikalle ja filosofialle selkein yhteinen aihealue. Yhteisten aihealueiden käsittelyn lisäksi matematiikkaa ja filosofiaa voi olla mielekästä yhdistää myös tutkimalla matematiikkaa filosofisesta näkökulmasta eli harrastamalla matematiikan filosofiaa, tai tuomalla matematiikkaa ja matemaattisia menetelmiä filosofian opetukseen. Nämä ovat aiheita mahdollisille seuraaville matematiikkaa ja filosofiaa yhdistäville kerhoille.

Lähteet

Czocher, J. A. (2017). Ancient Paradoxes Can Extend Mathematical Thinking. Mathematics Teaching in the Middle School 22.7: 438-442.

Dowden B. H. (1993). Logical Reasoning Belmont. California: Wadsworth Publishing Company

Fauvel, J. & Maanen, J. V. (2002). History in Mathematics Education: The ICMI Study. Dordrecht ; Boston: Kluwer Academic Publishers

Iversen, S. M. (2006). Modeling interdisciplinary activities involving mathematics and philosophy, The Mathematics Enthusiast: Vol. 3 : No. 1 , Article 5.

Jankvist, U.T.: A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education, Educ Stud Math (2009) 71: 235.

Jankvist, U.T. & Iversen (2014). ‘Whys’ and ‘Hows’ of Using Philosophy in Mathematics Education, S.M. Sci & Educ 23: 205.

Katz, V. J., Jankvist, U. T., Fried, M. N. & Rowlands, S. (2014). Special Issue on History and Philosophy of Mathematics in Mathematics Education.(Editorial). Science & Education, 23(1)

Kelley, D. (1988). The art of reasoning. New York: Norton.

Kracht, Marcus (2003). The Mathematics of Language. Springer Science & Business Media

Opetushallitus (2015). Lukion Opetussuunnitelman Perusteet 2015 Opetushallitus

Mosvold, R., Jakobsen, A. & Jankvist (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics, U.T. Sci & Educ 23: 47.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. Educational Studies in Mathematics 102.1

Schwartz, T. (1980). The art of logical reasoning. New York: Random House.

Smullyan, R. M. (2015). What Is the Name of This Book? Dover Publications

Von Wright, G. H. (1968). Logiikka, filosofia ja kieli. Otava

Liitteet

Liite 1: Kerhon vetäjän materiaali

Liite 2: Kerholaisten materiaali

Liite 3: Tehtävien malliratkaisut

Liite 1: Kerhon vetäjän materiaali

Matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä kerho: Osa 1 - Matemaattisen päättelyn alkeita, kerhon vetäjän materiaali

Tämä on kerhon vetäjälle tarkoitettu materiaali. Materiaalista löytyy lyhyt katsaus kerhon pohjalla olevista logiikan alkeista ja kerholaisten materiaalista löytyvät tehtävät, niiden ratkaisut ja sivunumerot alkuperäisistä teoksista.

Matematiikka ja filosofia ovat oppiaineita, joita oppilaat eivät usein ajattele samanlaisina. Ne ovat kuitenkin ajatukseltaan ja toimintaperiaatteiltaan hyvin samanlaisia, ja tämä kerho pyrkii valottamaan paitsi näiden oppiaineiden yhteneväisyyksiä, myös niiden keskinäistä vuorovaikutusta.

Kerho koostuu lyhyestä infopakkauksesta matematiikan ja filosofian yhteneväisyyksistä, oppilaille suunnitelluista todistamistehtävistä/logiikkapulmista ja näiden ratkaisemiseen auttavista ohjeista. Kerhon pulmat on otettu Raymond M. Smullyanin kirjasta 'What Is the Name of This Book?' (2015) ja Bradley H. Dowdenin kirjasta 'Logical Reasoning' (1993).

Lyhyt katsaus logiikan alkeisiin

Kerhon tehtävien tekemiseen tarvitaan jonkinlainen ymmärrys logiikan tavallisimmista konnektiiveista. Tässä lyhyt katsaus näihin konnektiiveihin muutamalla esimerkillä. Tämän osan voi jättää välistä jos kerholaisilla (ja kerhon vetäjällä) on logiikan alkeet hallussa.

Logiikassa kuten matematiikassa ylipäänsä on oleellista pätevä päättely, joka ottaa huomioon kaikki mahdollisuudet ja erikoistapaukset. Logiikassa se usein tarkoittaa eri muuttujien totuusarvojen tarkastelua eri arvoilla. Tämän kerhon tarkoituksiin riittää osata tavallisimmat konnektiivit eli negaatio, konjunktio, disjunktio, implikaatio ja ekvivalenssi.

Negaatio ¬

Olkoon A jokin totuusarvo. Negaatio ¬A saa aina vastakkaisen arvon arvosta A. Negaatio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘ei’.

Konjunktio ∧

Olkoot A ja B totuusarvoja joukosta {0,1}. Konjunktio A∧B saa arvon 1 jos ja vain jos sekä A että B saa arvon 1. Konjunktio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘ja’.

Disjunktio ∨

Disjunktio A∨B saa arvon 1 jos kumpikaan arvoista A tai B saa arvon 1. Disjunktio A∨B saa siis arvon 1 myös silloin, kun sekä A että B saavat arvon 1. Tällöin voidaan puhua myös inklusiivisesta disjunktiosta. Eksklusiiviseksi disjunktioksi kutsutaan disjunktiota A∨B, joka saa arvon 0 kun A ja B saavat arvon 1. Disjunktio voidaan rinnastaa suomen kielen sanaan ‘tai’.

Implikaatio ⇒

Implikaatio A ⇒ B saa arvon 0, kun A saa arvon 1 ja samanaikaisesti B saa arvon 0. Implikaatiossa A ⇒ B etujäsen A implikoi takajäsenen B, tai toisinsanoen B sisältyy A:han. Esimerkiksi väite “Jänis on nisäkäs” implikoi väitteen “Jänis on eläin”, jos oletetaan, että kaikki nisäkkäät ovat eläimiä. Implikaatio voidaan rinnastaa suomen kielen sanoihin ‘jos … niin’.

Ekvivalenssi ⇔

Ekvivalenssi A ⇔ B saa arvon 1 jos sekä A että B saavat saman arvon, eli joko molemmat saavat arvon 1 tai molemmat saavat arvon 0. Kaksi väitettä ovat siis ekvivalentteja jos ne pätevät aina täysin samaan aikaan. Tämä tarkoittaa myös sitä, että ekvivalentit väitteet seuraavat toisistaan. Jos toinen ekvivalenteista väitteistä pitää paikkaansa, niin tiedetään että myös toinen pitää paikkaansa. Ekvivalenssi voidaan rinnastaa suomen kielen sanoihin 'jos ja vain jos'.

Alla on näiden yksinkertaisimpien loogisten operaattoreiden (kutsutaan myöskonnektiiveiksi) totuustaulu, joka löytyy myös kerhossa suunnitellusta oppilaiden materiaalista (liite 2.):

A	**B**	**¬A**	**A ∧ B**	**A ∨ B**	**A ⇒ B**	**A ⇔ B**
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kuva 2. Totuusarvotaulukossa operaattorit ¬ (ei), ∧ (ja), ∨ (tai), ⇒ (jos, niin) ja ⇔ (jos, ja vain jos) alkioiden A ja B eri arvoilla.

Esimerkki 1:

Olkoot A, B ja C totuusarvoja. Määritä lauseen A ⇒ (B ∧ C) totuusarvot A:n, B:n ja C:n eri arvoilla.

Ratkaisu Tehdään totuustaulu.

A	**B**	**C**	**B $\wedge$ C**	**A $\Rightarrow$ (B $\wedge$ C)**
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Osassa seuraavista pulmista esiintyy niin sanottuja ritareja ja kelmejä. Ritarit puhuvat aina totta ja kelmit valehtelevat aina. Näissä tehtävissä tulee selvittää loogisen päättelyn avulla ovatko tarinoiden henkilöt ritareita vai kelmiä. Kaikissa seuraavista tehtävistä voi olla hyötyä hahmotella tilannetta totuusarvotaulukkoon tai muuhun vastaavaan kaavioon.

Esimerkki 2:

(Smullyan 2015, t. 29 sivulta 21) Henkilö A sanoo, “Minä olen kelmi tai B on ritari.” Mitä ovat henkilöt A ja B?

<u>Ratkaisu 1:</u> Oletetaan, että A on ritari ja puhuu siis totta. Tällöin väitteen “Minä olen kelmi tai B on ritari” tulee pitää paikkaansa. Jotta tai/konjunktio-muotoinen väite voi pitää paikkaansa, tulee jommankumman tai molempien sen osista pitää paikkaansa. Osa “Minä olen kelmi” ei selvästikään pidä paikkaansa kun A on ritari. Siis

väitteen toisen osan tulee pitää paikkaansa eli väitteen B on ritari. On siis mahdollista että sekä A että B ovat ritareita.

Tarkistetaan vielä onko myös mahdollista että A on kelmi. Jos A on kelmi, niin väite “Minä olen kelmi tai B on ritari” ei voi pitää paikkaansa. Tämän muotoinen väite ei pidä paikkaansa kun kumpikaan väitteistä ei pidä paikkaansa. Ensimmäinen osa eli väite “Minä olen kelmi” pitää kuitenkin paikkaansa kun A on kelmi. Tämä on ristiriita, joten ei ole mahdollista että A on kelmi. Siis A on ritari ja siten myös B: on oltava ritari.

Ratkaisu 2: Tehdään totuusarvotaulukko. Tarkoittakoon A lausetta “A on ritari” ja B lausetta “B on ritari”. Lause “A on kelmi” voidaan siis muotoilla väitteen A negaationa. Tällöin A:n esittämä lause saa muodon $\neg A \lor B$ ja totuusarvotaulukko näyttää seuraavanlaiselta:

A	**B**	**¬A**	**¬A ∨ B**
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Taulukossa kaksi ensimmäistä riviä kuvastavat tilannetta, missä A on ritari. Taulukon ensimmäinen rivi on ratkaisu tehtävälle, sillä siinä A on ritari ja puhuu totta (eli viimeisen sarakkeen eli A:n esittämän väittämän arvo on 1). Taulukon toisella rivillä A on ritari ja valehtelee, joten kyseinen rivi ei ole ratkaisu. Taulukon kahdella viimeisellä rivillä A on kelmi, mutta puhuu totta. Nekään eivät siis ole ratkaisuja tehtävään. Ainut mahdollisuus on siis että A ja B ovat molemmat ritareita.

Kerholaisille tarkoitetut tehtävät ratkaisuineen:

Tehtävä 1:

(Smullyan 2015, t. 110 sivulta 103) Joku kysyy henkilöltä A, ”Oletko ritari?”. Hän vastaa, ”Jos olen ritari, niin syön hattuni.” Todista että A:n pitää syödä hattunsa.

Ratkaisu 1: Jos henkilö A olisi kelmi, niin väittämän (implikaation) ensimmäinen osa (premissi) olisi epätosi. Muistetaan kuitenkin, että implikaatio on tosi, silloin kun sen premissi on epätosi. Siis jos henkilö A olisi kelmi hän ei valehtelisi. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kelmien pitää valehdella. A ei siis voi olla kelmi. Jos henkilö A on ritari, on hänen pakko puhua totta ja syödä hattunsa. Siis henkilö A on ritari, ja siten hänen täytyy syödä hattunsa.

Ratkaisu 2: Tehdään totuustaulu. Olkoon lause R lause “A on ritari” ja lause H lause “A syö hattunsa.” Lause ”Jos olen ritari, niin syön hattuni” saa nyt muodon R ⇒ H ja totuustaulu näyttää seuraavanlaiselta:

R	H	R ⇒ H
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Taulukossa kaksi alimmaista riviä eivät ole mahdollisuuksia, sillä niissä A ei ole ritari (eli on kelmi) ja hän ei valehtele. Toisella rivillä A on ritari ja valehtelee, joten sekään ei ole mahdollisuus. Ainoa mahdollinen rivi on ensimmäinen rivi, jolla R ja H pitävät paikkansa eli A on ritari ja syö hattunsa.

Tehtävä 2:

(Smullyan 2015, t. 116 sivulta 104) Oletetaan, että seuraavat kaksi väittämää pitävät paikkansa:

1) Rakastan Bettyä tai rakastan Janea.
2) Jos rakastan Bettyä, niin rakastan myös Janea.

Seuraako väittämistä välttämättä, että rakastan Bettyä? Entä Janea?

<u>Ratkaisu 1:</u> Jotta väite 2 pitää paikkaansa, tulee minun rakastaa joko sekä Bettyä että Janea (tapaus t->t), tai en rakasta Bettyä (tapaukset e->t ja e->e). On siis mahdollista, että en rakasta Bettyä, mutta silloin väittämän 1 mukaan minun on rakastettava Janea.

<u>Ratkaisu 2:</u> Oletetaan, rakastan Bettyä. Tällöin väitteen 2 mukaan rakastan myös Janea. Oletetaan sen sijaan että rakastankin Janea. Nyt väite 2 pitää paikkaansa rakastin Bettyä tai en. On siis mahdollista, että rakastan Bettyä tai en, mutta Janea rakastan joka tapauksessa.

Tehtävä 3:

(Smullyan 2015 t. 120 sivulta 106) Oletetaan, että olen joko ritari tai kelmi, ja teen seuraavat väittämät:

1) Rakastan Lindaa.
2) Jos rakastan Lindaa, niin rakastan myös Kathya.

Olenko ritari vai kelmi?

<u>Ratkaisu:</u> Jos olen ritari, niin rakastan Lindaa ja siten myös Kathya. On siis mahdollista, että olen ritari. Sen sijaan jos olisin kelmi, niin

molempien väittämien pitäisi olla epätosia. Ainut tapa miten väite 2 voi olla epätosi, on jos rakastan Lindaa, mutta en Kathya. Tämä on kuitenkin ristiriidassa väitteen 1 kanssa, sillä tällöin olisin puhunut väitteellä 1 totta vaikka olen kelmi. En siis voi olla kelmi, joten olen ritari.

Ekvivalenssia (jos ja vain jos) valottavia tehtäviä:

Tehtävä 4:

(Smullyan 2015, t. 122 sivulta 107) Huhutaan että saarella, jossa on pelkkiä ritareja ja kelmejä, on kultaa. Kysyt saaren asukkaalta, A:lta, että onko saarella kultaa. Asukas vastaa: ”Saarella on kultaa jos ja vain jos olen ritari.”

Ongelmassa on kaksi puolta:

a) Voimmeko päätellä onko A ritari vai kelmi?

b) Voimmeko päätellä onko saarella kultaa?

<u>Ratkaisu:</u> Päätellään ensin onko A ritari vai kelmi. Jos A on ritari, pitää väite paikkaansa jos saarella on kultaa. Jos A on kelmi, ei väite saa pitää paikkaansa. Tämäkin on kuitenkin mahdollista jos saarella on kultaa. Emme siis voi päätellä, onko A ritari vai kelmi.

Tiedämme kuitenkin, että saarella on kultaa seuraavan päättelyn avulla: Jos A on ritari, niin väittämä pitää paikkaansa. Ekvivalenssi-muotoinen väite pitää paikkaansa silloin, kun molemmat puolet ovat samaan aikaan joko tosia tai epätosia. Koska tiedämme että A:n ollessa ritari väittämän oikea puoli pitää paikkaansa, tulee myös väitteen ensimmäisen puolen pitää paikkaansa että itse väite pitää paikkaansa. Siis saarella on tällöin kultaa. Jos A onkin kelmi, tulee väittämän olla epätosi. Jotta kyseinen ekvivalenssi-muotoinen väittämä voi olla epätosi, tulee toisen väittämän osista olla epätosi samalla kun toinen on tosi. Koska A:n ollessa kelmi väittämän ”olen ritari”-puoli on epätotta, niin silloin toisen puolen eli ”saarella on kultaa” on pidettävä paikkaansa. Siis oli A ritari tai kelmi, niin saarella on kultaa.

Tehtävä 5:

(Schwartz, 1980: s.4 esimerkki 12) Olkoot x ja y kokonaislukuja. Oletetaan, että x + y on pariton luku. Osoita, että x tai y on parillinen luku. Voit käyttää hyväksesi sitä tietoa, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Ratkaisu: Ratkaistaan tehtävä vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että x ja y ovat molemmat parittomia lukuja (vastaoletus). Nyt x - 1 ja y - 1 ovat parillisia lukuja. Tiedetään, että parillisten lukujen summa on aina parillinen, siis (x - 1) + (y - 1) + 2 on parillinen. Mutta (x - 1) + (y - 1) + 2 = x + y. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksemme, että x + y on pariton, kanssa. Siis vastaoletuksemme on väärässä ja siten x:n tai y:n täytyy olla parillinen.

Lisätehtävä:

Todista tehtävässä 5 käytettävä väite, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Liite 2: Kerholaisten materiaali

Matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä kerho: Osa 1 - Matemaattisen päättelyn alkeita

Tämä kerho on matematiikkaa ja filosofiaa yhdistävä kerho, jonka tarkoituksena on tuoda esille matematiikan ja filosofian yhteneväisyyksiä ja valottaa niiden välistä vuorovaikutusta. Kerhossa käydään myös läpi erilaisia loogisia pulmia ja todistustehtäviä, joille kerholaisten on tarkoitus luoda mahdollisimman pätevät todistukset. Tehtävien yhteydessä käydään myös pohdiskelua todistusten pätevyydestä yksin tai pienryhmissä.

Matematiikan ja filosofian välinen vuorovaikutus

Matematiikka ja filosofia ovat molemmat niin sanottuja “meta-tason” aloja, eli ne toimivat abstraktilla tasolla muiden alojen yläpuolella. Ne ovat edelleen eräänlaisessa vuorovaikutuksessa keskenään. Filosofiassa käsitellään muun muassa aksiomaattisia tieteenihanteita ja varman tiedon käsitettä, kun matematiikka on aksiomaattinen “tiede” ja pyrkii varmaan tietoon. Filosofiassa taas ihannoidaan matematiikkaa juuri sen tarkkuuden ja järjestelmällisyyden takia. Filosofiassa onkin nähty useita yrityksiä “matematisoida” ala.

Lyhyt katsaus matematiikan ja filosofian yhteiseen historiaan

Matematiikan ja filosofian yhteinen historia on alkanut jo viimeistään antiikin Kreikassa. Antiikin Kreikan ehkä tunnetuinta filosofia Aristotelesta voidaan pitää myös aksiomaattisen tieteenihanteen ja muodollisen logiikan isänä. Logiikka voidaan luokitella paitsi filosofian, niin myös matematiikan osa-alueeksi. Aksiomaattisesta tieteestä ehkä paras esimerkki on Euklidinen geometria, joka saattaa olla Geometria-kursseilta MAB3 ja MAA3 tuttu termi. Suuri osa muun muassa antiikin Kreikan filosofeista oli myös matemaatikkoja ja matemaatikot filosofeja. Filosofi, loogikko ja matemaatikko Gottlob Frege (1848-1925) väittikin että matematiikka on vain logiikan osa-alue ja sitä kautta osa filosofiaa.

Yksi filosofian, ja erityisesti tieto-opin, lempiaiheita on tiedon käsite ja pätevä päättely. Pätevää päättelyä on käsitelty filosofiassa aina Aristoteleesta lähtien ja siitä onkin esimerkiksi kokonainen luku nimeltä 'Pätevän päättelyn perusteet' filosofian peruskurssin kirjassa 'Argumentti 1'. Tämä on kuitenkin myös pitkän matematiikan kurssilla MAA11 'Lukuteoria ja todistaminen' (ja ylipäätään matematiikassa) keskeinen aihe. Kyseisestä kurssista suurin osa omistetaan ainakin 'Tekijä'-kirjasarjan kurssikirjassa pätevälle päättelylle muodossa tai toisessa.

Matemaattisen todistamisen harjoituksia

Näillä tehtävillä on tarkoitus harjoitella matemaattista todistamista ja pätevää päättelyä. Tee seuraaville tehtäville todistus ja **mieti, miksi todistuksesi on/ei ole pätevä ja millä eri tavoilla tehtävän voisi mahdollisesti todistaa pätevästi. Mieti myös, oletko kirjoittanut ylös kaikki lopputulokseen päätymiseen tarvittavat oletukset.**

Tehtävissä saattaa olla hyötyä alla olevasta loogisten kvanttoreiden totuustaulukosta.

A	**B**	**¬A**	**A ⋀ B**	**A ⋁ B**	**A ⇒ B**	**A ⇔ B**
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kuva 1. Totuusarvotaulukossa operaattorit ¬ (ei), ⋀ (ja), ⋁ (tai), ⇒ (jos, niin) ja ⇔ (jos, ja vain jos) alkioiden A ja B eri arvoilla.

Tehtävissä 1-4 esiintyy niin sanottuja ritareja ja kelmejä. Ritarit puhuvat aina totta ja kelmit valehtelevat aina.

Tehtävä 1:

Joku kysyy henkilöltä A, ”Oletko ritari?”. Hän vastaa, ”Jos olen ritari, niin syön hattuni.” Todista että A:n pitää syödä hattunsa.

Tehtävä 2:

Oletetaan, että seuraavat kaksi väittämää pitävät paikkansa:

1) Rakastan Bettyä tai rakastan Janea.
2) Jos rakastan Bettyä, niin rakastan myös Janea.

Seuraako väittämistä välttämättä, että rakastan Bettyä? Entä Janea?

Tehtävä 3:

Oletetaan, että olen joko ritari tai kelmi, ja teen seuraavat väittämät:

1) Rakastan Lindaa.
2) Jos rakastan Lindaa, niin rakastan myös Kathya.

Olenko ritari vai kelmi?

Ekvivalenssia (jos ja vain jos) valottavia tehtäviä:

Tehtävä 4:

Huhutaan että saarella, jossa on pelkkiä ritareja ja kelmejä, on kultaa. Kysyt saaren asukkaalta, A:lta, että onko saarella kultaa. Asukas vastaa: ”Saarella on kultaa jos ja vain jos olen ritari.”

Ongelmassa on kaksi puolta:

a) Voimmeko päätellä onko A ritari vai kelmi?

b) Voimmeko päätellä onko saarella kultaa?

Tehtävä 5:

Olkoot x ja y kokonaislukuja. Oletetaan, että x + y on pariton luku. Osoita, että x tai y on parillinen luku. Voit käyttää hyväksesi sitä tietoa, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Lisätehtävä:

Todista tehtävässä 5 käytettävä väite, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Vinkkejä:

- Tarkastele mitä eri mahdollisuuksia on olemassa, sulkien niitä pois yksitellen. Mieti mitkä ovat muuttujia kussakin tehtävässä ja mitä arvoja ne voivat saada.
- Varmista ettei sinulta jää käsittelemättä yhtään yksittäistä tapausta, sillä muuten todistuksesi ei ole loogisesti pätevä/aukoton.
- Piirrä tarvittaessa kuva/taulukko eri mahdollisuuksista, siten että siinä on *kaikki* mahdolliset tapaukset. Siis esimerkiksi ketkä kaikki voivat olla ritareita tai kelmejä ja miksi tai miksi eivät. Muista myös että joissakin tehtävissä saattaa olla muitakin muuttujia kuin itse henkilöt.
- Mieti mitä tehtävässä tiedetään jo entuudestaan ja mitä siinä halutaan tietää. Yksinkertaisimmatkin alkuoletukset kannattaa sisäistää ja tarvittaessa kirjoittaa ylös.
- Muista perustella vastauksesi! Pelkkä vastaus ei ole pätevä todistus!

Matematiikalle ja filosofialle oleellisia termejä

aksiooma = tieto tai määritelmä, jota käytetään uuden tiedon johtamiseen

aksiomaattinen tiede = tiede, joka on rakennettu aksioomien päälle

euklidinen geometria = yleensä tasoa ja kolmiulotteista avaruutta tutkiva aksiomaattinen matematiikan ala, joka perustuu kreikkalaisen matemaatikon Eukleides Aleksandrialaisen viiteen aksioomaan

deduktio = päättely, jossa johtopäätös seuraa loogisesti premisseistä

induktio = päättely, jossa yksittäisestä johdetaan yleinen

matemaattinen induktio = induktion erikoismuoto, jossa käydään koko joukko läpi rekursion avulla päätyen varmaan tietoon

Liite 3: Tehtävien malliratkaisut

Tästä monisteesta löydät esimerkkivastaukset kerhon tehtäviin. Tehtäviin on löydettävissä erilaisia vastauksia, ja tässä esitetyt ovatkin vain esimerkkejä suoraviivaisimmista ratkaisuista. Henkilöiden tavat kirjoittaa matematiikkaa voivat vaihdella. Oleellista onkin, että lähtökohdat on ymmärretty oikein, päättely on aukotonta ja päädytään oikeaan lopputulokseen.

Tehtävä 1:

Joku kysyy henkilöltä A, ”Oletko ritari?”. Hän vastaa, ”Jos olen ritari, niin syön hattuni.” Todista että A:n pitää syödä hattunsa.

<u>Ratkaisu 1:</u> Jos henkilö A olisi kelmi, niin väittämän (implikaation) ensimmäinen osa (premissi) olisi epätosi. Muistetaan kuitenkin, että implikaatio on tosi, silloin kun sen premissi on epätosi. Siis jos henkilö A olisi kelmi hän ei valehtelisi. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä kelmien pitää valehdella. A ei siis voi olla kelmi. Jos henkilö A on ritari, on hänen pakko puhua totta ja syödä hattunsa. Siis henkilö A on ritari, ja siten hänen täytyy syödä hattunsa.

<u>Ratkaisu 2:</u> Tehdään totuustaulu. Olkoon lause R lause “A on ritari” ja lause H lause “A syö hattunsa.” Lause ”Jos olen ritari, niin syön hattuni” saa nyt muodon R ⇒ H ja totuustaulu näyttää seuraavanlaiselta:

R	H	R ⇒ H
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Taulukossa kaksi alimmaista riviä eivät ole mahdollisuuksia, sillä niissä A ei ole ritari (eli on kelmi) ja hän ei valehtele. Toisella rivillä A on ritari ja valehtelee, joten sekään ei ole mahdollisuus. Ainoa mahdollinen rivi on ensimmäinen rivi, jolla R ja H pitävät paikkansa eli A on ritari ja syö hattunsa.

Huomioita:

- Tehtävässä on oleellista ymmärtää, että “jos, niin” väite voi olla epätosi vain jos väitteen alku pitää paikkaansa, mutta sen seuraamus ei. Ainut tapa osoittaa, että jostakin ei seuraa jotain toista, on osoittaa että tästä syntyy ristiriita.
- Ratkaisussa osoitetaan, ettei voi pitää paikkaansa, että henkilö A on kelmi. Tarkoittaako tämä välttämättä että A on ritari? Jos tarkoittaa niin miksi?

Tehtävä 2:

Oletetaan, että seuraavat kaksi väittämää pitävät paikkansa:

1) Rakastan Bettyä tai rakastan Janea.
2) Jos rakastan Bettyä, niin rakastan myös Janea.

Seuraako väittämistä välttämättä, että rakastan Bettyä? Entä Janea?

<u>Ratkaisu 1:</u> Jotta väite 2 pitää paikkaansa, tulee minun rakastaa joko sekä Bettyä että Janea (tapaus t->t), tai en rakasta Bettyä (tapaukset e->t ja e->e). On siis mahdollista, että en rakasta Bettyä, mutta silloin väittämän 1 mukaan minun on rakastettava Janea.

<u>Ratkaisu 2:</u> Oletetaan, rakastan Bettyä. Tällöin väitteen 2 mukaan rakastan myös Janea. Oletetaan sen sijaan että rakastankin Janea. Nyt väite 2 pitää paikkaansa rakastin Bettyä tai en. On siis mahdollista, että rakastan Bettyä tai en, mutta Janea rakastan joka tapauksessa.

Huomioita:

- Tällaisia kaksiosaisia väitteitä voi ajatella yhtälöparina: otetaan toisesta yhtälöstä saatu tieto ja käytetään sitä toisessa yhtälössä pätevien arvojen saamiseksi. Ratkaisussa 1 otetaan väitteestä 2 saadut totuusarvot ja katsotaan mitä väite 1 sanoo niistä. Ratkaisussa 2 toimimme päinvastoin.
- Ratkaisussa käydään läpi kaikki implikaation (totuusarvotaulukossa merkki "⇒") totuuteen johtavat vaihtoehdot. Implikaatio on siis epätosi ainoastaan silloin kun väitetään, että todesta seuraa epätosi.

Tehtävä 3:

Oletetaan, että olen joko ritari tai kelmi, ja teen seuraavat väittämät:

1) Rakastan Lindaa.
2) Jos rakastan Lindaa, niin rakastan myös Kathya.

Olenko ritari vai kelmi?

<u>Ratkaisu:</u> Jos olen ritari, niin rakastan Lindaa ja siten myös Kathya. On siis mahdollista, että olen ritari. Sen sijaan jos olisin kelmi, niin molempien väittämien pitäisi olla epätosia. Ainut tapa miten väite 2 voi olla epätosi, on jos rakastan Lindaa, mutta en Kathya. Tämä on kuitenkin ristiriidassa väitteen 1 kanssa, sillä tällöin olisin puhunut väitteellä 1 totta vaikka olen kelmi. En siis voi olla kelmi, joten olen ritari.

Huomioita:

- Tässä todistuksessa käydään läpi eri vastausvaihtoehdot vuorotellen. Jos toisesta seuraa ristiriita, pitää joko toinen vaihtoehto paikkaansa, tai kyseessä olevat väittämät ovat ristiriita eli hölynpölyä joka ei pidä ikinä paikkaansa.

Ekvivalenssia (jos ja vain jos) valottavia tehtäviä:

Tehtävä 4:

Huhutaan että saarella, jossa on pelkkiä ritareja ja kelmejä, on kultaa. Kysyt saaren asukkaalta, A:lta, että onko saarella kultaa. Asukas vastaa: ”Saarella on kultaa jos ja vain jos olen ritari.”

Ongelmassa on kaksi puolta:

a) Voimmeko päätellä onko A ritari vai kelmi?

b) Voimmeko päätellä onko saarella kultaa?

<u>Ratkaisu:</u> Päätellään ensin onko A ritari vai kelmi. Jos A on ritari, pitää väite paikkaansa jos saarella on kultaa. Jos A on kelmi, ei väite saa pitää paikkaansa. Tämäkin on kuitenkin mahdollista jos saarella on kultaa. Emme siis voi päätellä, onko A ritari vai kelmi.

Tiedämme kuitenkin, että saarella on kultaa seuraavan päättelyn avulla: Jos A on ritari, niin väittämä pitää paikkaansa. Ekvivalenssi-muotoinen väite pitää paikkaansa silloin, kun molemmat puolet ovat samaan aikaan joko tosia tai epätosia. Koska tiedämme että A:n ollessa ritari väittämän oikea puoli pitää paikkaansa, tulee myös väitteen ensimmäisen puolen pitää paikkaansa että itse väite pitää paikkaansa. Siis saarella on tällöin kultaa. Jos A onkin kelmi, tulee väittämän olla epätosi. Jotta kyseinen ekvivalenssi-muotoinen väittämä voi olla epätosi, tulee toisen väittämän osista olla epätosi samalla kun toinen on tosi. Koska A:n ollessa kelmi väittämän ”olen ritari”-puoli on epätotta, niin silloin toisen puolen eli ”saarella on kultaa” on pidettävä paikkaansa. Siis oli A ritari tai kelmi, niin saarella on kultaa.

Huomioita:

- Tämän hahmottamiseen saattaa auttaa tarkastella ekvivalenssin totuustaulua (ks johdanto).

- Huomaa, että ratkaisun ensimmäinen osa ei ole tyydyttävä todistus sille, että saarella on kultaa. On oleellista myös mainita, että ritarin esittämä väite on totta myös silloin kun molemmat puolet “jos ja vain jos” -väitteessä ovat epätosia. Tämä tapaus on hyvän maun mukaisesti myös käytävä läpi vaikka se saattaakin vaikuttaa itsestäänselvältä.

Tehtävä 5:

Olkoot x ja y kokonaislukuja. Oletetaan, että x + y on pariton luku. Osoita, että x tai y on parillinen luku. Voit käyttää hyväksesi sitä tietoa, että parillisten lukujen summa on aina parillinen.

Ratkaisu: Ratkaistaan tehtävä vastaoletuksen avulla. Oletetaan, että x ja y ovat molemmat parittomia lukuja (vastaoletus). Nyt x - 1 ja y - 1 ovat parillisia lukuja. Tiedetään, että parillisten lukujen summa on aina parillinen, siis (x - 1) + (y - 1) + 2 on parillinen. Mutta (x - 1) + (y - 1) + 2 = x + y. Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksemme, että x + y on pariton, kanssa. Siis vastaoletuksemme on väärässä ja siten x:n tai y:n täytyy olla parillinen.

Huomioita:

- Tässäkin todistuksessa käytämme samanlaista tekniikkaa kuin aiemmissa tehtävissä, eli osoitamme että jokin pitää paikkaansa sulkemalla muita vaihtoehtoja pois. Tämä on yleisin ja yksinkertaisin todistustekniikka matematiikassa.
- Voit kokeilla myös todistaa, että parittomien lukujen summa tai erotus on parillinen, tai että parittoman ja parillisen luvun summa tai erotus on pariton. Voit myös kokeilla samaan tyyliin miten vastaavat tulot ja osamäärät menevät.