Curiosità sulla variabilità della durata aleatoria dei giochi di rovina

di **Luigi Vannucci**

Abstract - The expected duration of the classic ruin game with two players is well known. Here the focus is on the variability of this random duration. More specifically, some analytical results are found for the variance and for the expected value conditioned to the ruin of a fixed player.

1 Il classico gioco di rovina tra due giocatori

Innumerevoli sono le pubblicazioni sui giochi di rovina con due o più giocatori e salto a piè pari la questione di tentare di farne un resoconto, rinviando per qualche spigolatura sulla durata degli stessi al paragrafo finale. In questa nota mi limiterei a riprendere la questione della durata del gioco nel caso più classico, ovvero quello in cui si considerano due giocatori, Primo e Secondo, dotati di capitali limitati che si scambiano importi unitari sulla base di sequenze di lanci di una moneta con esiti indipendenti, con probabilità di "testa" $p \in (0,1)$ e con probabilità di "croce" $1-p$ a ogni lancio, fintantoché uno dei due giocatori non si rovini: a quel punto il gioco ha termine e la sua durata è data dal numero di lanci eseguiti fino a quello, incluso, che ha provocato la rovina di Primo o di Secondo. Si ipotizzi che "testa" favorisca Primo e "croce" Secondo.

È ben noto che per ogni $p \in (0,1)$, e ovviamente anche nei casi estremi $p=0$ o $p=1$, la rovina di uno dei due giocatori avviene con probabilità 1 e mi piace ricordare a tal riguardo un contributo di B. de Finetti [2] sul Periodico di Matematiche della Mathesis, con cui Egli intese "accompagnare" il mio contributo [8]. Inoltre se il capitale iniziale di Primo è h e quello di Secondo è $c-h$ con h e $c-h$ interi positivi (e pertanto c finito e maggiore di 2) allora la probabilità di rovina di Primo è nel caso equo, quello con probabilità $p=\frac{1}{2}$

$$\pi_h = \frac{c-h}{c}$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$ e che la durata aleatoria del gioco, D_h, ha valore medio (si usa il simbolo usuale per il valore atteso di una variabile aleatoria)

$$d_h := E\left[D_h\right] = h\left(c-h\right)$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$.

Nel caso di gioco non equo, quindi con $p \neq \frac{1}{2}$, la probabilità di rovina di Primo se si pone $s = \dfrac{1-p}{p}$ e quindi $p = \dfrac{1}{s+1}$ è allora per $h = 1, 2, ..., c-1$

$$\pi_h = \frac{s^c - s^h}{s^c - 1}$$

e la durata media del gioco di rovina, $d_h = E[D_h]$, è

$$d_h = \frac{s+1}{s-1}\left(h - c\frac{s^h - 1}{s^c - 1}\right)$$

Si noti che le formule forniscono anche per $h = 0$ e $h = c$ i valori al bordo dovendo essere

$$\pi_0 = 1,\ \pi_c = 0,\ d_0 = d_c = 0$$

Trattasi di risultati ottenuti o partendo da equazioni alle differenze finite lineari a coefficienti costanti omogenee o non omogenee con preassegnate condizioni al bordo, equazioni impiantate sfruttando classiche certezze del calcolo delle probabilità quali il teorema delle probabilità totali, o sfruttando proprietà di martingala per opportuni valori attesi condizionati [1], [11].

Con riferimento alla durata attesa del gioco equo di rovina è curioso constatare, ad esempio, che con $h = 1$ e $c = 1000$ la durata media è $d_1 = 1 \cdot 999 = 999$. Ma nella metà dei casi, quindi con probabilità $\frac{1}{2}$, il gioco termina in un solo lancio: Primo perde al primo colpo tutto il suo capitale. Nell'altra metà dei casi al primo colpo Primo si ritrova con capitale 2 e Secondo con capitale 998 e il gioco ha allora una durata attesa pari a $d_2 = 1 + 2 \cdot 998 = 1997$. Si noti che

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1997 = 999$$

Questa esemplificazione fa intuire che deve esserci un'ampia variabilità della durata aleatoria dei giochi di rovina e in questa nota l'obiettivo è quello di curiosare su questa variabilità, scegliendo di determinare sia la varianza di D_h in funzione di p, di h e di c, che la durata attesa del gioco condizionata alla rovina di uno prefissato dei due giocatori.

2 La varianza della durata

2.1 Gioco equo

La varianza della durata, $\mathrm{Var}(D_h)$, può essere ottenuta conoscendo i momenti secondi $g_h := E\left[D_h^2\right]$ per $h = 0, 1, ..., c$ e i momenti primi della relativa variabile aleatoria, essendo $\mathrm{Var}(D_h) = E\left[D_h^2\right] - \left(E\left[D_h\right]\right)^2$. Nel caso di gioco equo la successione dei valori $E\left[D_h^2\right]$ soddisfa la

$$E\left[D_h^2\right] = \tfrac{1}{2}\left(E\left[(1 + D_{h+1})^2\right]\right) + \tfrac{1}{2}\left(E\left[(1 + D_{h-1})^2\right]\right)$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$, con le condizioni al bordo $E\left[D_0^2\right] = E\left[D_c^2\right] = 0$. Sviluppando i quadrati, si tratta di risolvere l'equazione alle differenze finite

$$g_h = 1 + d_{h+1} + \tfrac{1}{2}g_{h+1} + d_{h-1} + \tfrac{1}{2}g_{h-1}$$

con le condizioni al bordo $g_0 = g_c = 0$, che, essendo $d_{h+1} = (h+1)(c-h-1)$ e $d_{h-1} = (h-1)(c-h+1)$, si riduce a

$$\tfrac{1}{2}g_{h+1} - g_h + \tfrac{1}{2}g_{h-1} = 1 - 2hc + 2h^2$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$, con le condizioni al bordo $g_0 = g_c = 0$. La procedura standard di risoluzione per questa equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea, dà

$$g_h = \frac{h\left(h^3 - 2ch^2 + 2h + c\left(c^2 - 2\right)\right)}{3}$$

da cui la varianza

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(D_h) = E\left[D_h^2\right] - \left(E\left[D_h\right]\right)^2 = \\ &= \frac{h\left(h^3 - 2ch^2 + 2h + c\left(c^2 - 2\right)\right)}{3} - \left(h\left(c-h\right)\right)^2 = \\ &= \frac{h\left(c^3 - 2c + \left(2 - 3c^2\right)h + 4ch^2 - 2h^3\right)}{3}\end{aligned}$$

per $h = 0, 1, ..., c$. Nell'esempio considerato con $h = 1$ e $c = 1000$ tale varianza è $332\,334\,000$ e la devianza è $\sqrt{332\,334\,000} = 60 \cdot \sqrt{92\,315} \simeq 18230$: tra 18 e 19 volte il valore medio 999. Riporto un'esemplificazione numerica dei risultati ottenuti con $c = 10$, al variare di h.

h	π_h	d_h	g_h	$g_h - (d_h)^2$
0	1.0	0	0	0
1	0.9	9	321	240
2	0.8	16	608	352
3	0.7	21	833	392
4	0.6	24	976	400
5	0.5	25	1025	400
6	0.4	24	976	400
7	0.3	21	833	392
8	0.2	16	608	352
9	0.1	9	321	240
10	0.0	0	0	0

Tab. 1

Curiosa è l'invarianza dei tre valori centrali della varianza di D_h, che si registra sempre se c è pari: se i due giocatori hanno lo stesso capitale iniziale nel caso di gioco equo al primo colpo si determinano due situazioni di gioco di rovina uguali dal punto di vista della ulteriore durata. Con analoghe procedure si potrebbero calcolare anche i successivi momenti, ivi inclusi quelli centrali, della variabile aleatoria D_h ovviamente con crescita di "voluminosità" delle formule.

2.2 Gioco non equo

Nel gioco non equo la successione dei valori $E\left[D_h^2\right]$ soddisfa la

$$E\left[D_h^2\right] = \frac{1}{s+1}\left(E\left[\left(1 + D_{h+1}\right)^2\right]\right) + \frac{s}{s+1}\left(E\left[\left(1 + D_{h-1}\right)^2\right]\right)$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$, con le condizioni al bordo $E\left[D_0^2\right] = E\left[D_c^2\right] = 0$. Sviluppando i quadrati, si tratta di risolvere l'equazione alle differenze finite

$$g_h = 1 + \frac{2}{s+1} d_{h+1} + \frac{1}{s+1} g_{h+1} + \frac{2s}{s+1} d_{h-1} + \frac{s}{s+1} g_{h-1}$$

che con il risultato sopra richiamato per d_h equivale a

$$\frac{1}{s+1} g_{h+1} - g_h + \frac{s}{s+1} g_{h-1} = 1 + \frac{2\left(s+1\right)\left(c\left(s^h - 1\right) - h\left(s^c - 1\right)\right)}{\left(s-1\right)\left(s^c - 1\right)}$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$ e con le condizioni al bordo $g_0 = g_c = 0$. La procedura standard di risoluzione per questa equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea, dà la soluzione

$$g_h = \frac{s+1}{s-1}\left(\frac{2c\left(s+1\right)}{\left(s^c-1\right)\left(s-1\right)} + \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 - 1\right)\left(h - c\frac{s^h-1}{s^c-1}\right) +$$
$$+\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2\left(h^2 - c^2\frac{s^h-1}{s^c-1}\right) + \frac{2c\left(s+1\right)^2}{\left(s^c-1\right)\left(s-1\right)^2}\left(hs^h - cs^c\frac{s^h-1}{s^c-1}\right)$$

Con tale risultato per il momento secondo e ricordando quello di d_h, si può ovviamente ottenere la varianza di D_h

$$\mathrm{Var}(D_h) = g_h - \left(d_h\right)^2 =$$
$$= \tfrac{s+1}{1-s}\left(1 - \tfrac{2c(s+1)}{(s^c-1)(s-1)} - \left(\tfrac{s+1}{s-1}\right)^2\right)\left(h - c\tfrac{s^h-1}{s^c-1}\right) + \left(\tfrac{s+1}{s-1}\right)^2\left(h^2 - c^2\tfrac{s^h-1}{s^c-1}\right) +$$
$$+\tfrac{2c(s+1)^2}{(s^c-1)(s-1)^2}\left(hs^h - cs^c\tfrac{s^h-1}{s^c-1}\right) - \left(\tfrac{s+1}{s-1}\left(h - c\tfrac{s^h-1}{s^c-1}\right)\right)^2$$

per $h = 0, 1, ..., c$.

Si applicano i risultati ottenuti per decrivere quello che può capitare a Primo che, con h gettoni, gioca alla roulette francese puntando ogni volta un gettone su "rouge" o "noir" e che si ripromette di smettere quando il suo capitale raggiunga il valore c, se non è nel frattempo rovinato. Con i risultati indicati, posto $0 < h < c = 10$ ed essendo, in questo contesto, $p = \frac{18}{37}$ e quindi $s = \frac{19}{18}$, quello che può capitare "in termini medi" a Primo è evidenziato numericamente nella seguente tabella, in cui le probabilità di rovina sono arrotondate al quinto decimale e quelle su durate attese e loro varianze al secondo decimale

h	π_h	d_h	g_h	$g_h - (d_h)^2$
0	1.000 00	0.00	0.00	0.00
1	0.922 53	8.34	286.80	217.28
2	0.840 76	15.08	557.31	329.82
3	0.754 45	20.15	782.90	376.99
4	0.663 34	23.44	940.25	390.93
5	0.567 18	24.85	1012.04	394.28
6	0.465 66	24.30	987.70	397.42
7	0.358 51	21.65	864.17	395.47
8	0.245 41	16.80	646.84	364.56
9	0.126 02	9.63	350.42	257.73
10	0.000 00	0.00	0.00	0.00

Tab. 2

In questa tabella non si ha ovviamente quella situazione simmetrica rispetto alla riga di $h = 5$ che si registrava in Tab. 1 per il caso equo, con $p = \frac{1}{2}$ e $c = 10$. La durata attesa del gioco è maggiore di quella del gioco equo se $h \geq 6$ e la varianza della durata del gioco è maggiore di quella del gioco equo se $h \geq 7$: il gioco è leggermente sfavorevole per Primo e quanto più esso è "ricco" tanto più crescono, rispetto al caso di gioco equo, valore medio e varianza della durata del gioco per vederlo alla fine o rovinato o reso un po' più ricco!

Primo non si deve illudere sulla vantaggiosità del gioco. La tabella gli fa vedere che con $h = 6$ gettoni la probabilità di farcela a metterne insieme 10 e abbandonare il tavolo della roulette con una vincita di 4 e maggiore del 50%, ma il conto della sua vincita ha valore medio

$$\frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - \left(\frac{19}{18}\right)^{6}}{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - 1} \cdot (-6) + \left(1 - \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - \left(\frac{19}{18}\right)^{6}}{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - 1}\right) \cdot 4 \simeq -0.656\,67$$

Lo stesso valore che si otterebbe moltiplicando la durata attesa del gioco $E\left[D_h\right]$ per il guadagno medio per turno di gioco, pari a $\frac{19}{37}(-1) + \frac{18}{37} \cdot 1$. A riprova di ciò

$$\frac{\frac{19}{18} + 1}{\frac{19}{18} - 1}\left(6 - 10\frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{6} - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - 1}\right) \cdot \left(\frac{19}{37}(-1) + \frac{18}{37} \cdot 1\right) \simeq -0.656\,67$$

Il conto proposto fa intravedere la possibilità di determinare immediatamente e correttamente per il caso di gioco non equo la formula per $E\left[D_h\right]$ nota che sia $\pi_h = \dfrac{s^c - s^h}{s^c - 1}$ (senza usare l'armamentario delle equazioni alle differenze finite) come soluzione dell'equazione

$$-h \cdot \frac{s^c - s^h}{s^c - 1} + (c - h)\left(1 - \frac{s^c - s^h}{s^c - 1}\right) = E\left[D_h\right]\left(-1 \cdot \frac{1}{s+1} + 1 \cdot \frac{s}{s+1}\right)$$

Segue anche che quanto più dura mediamente per Primo il gioco a lui sfavorevole, quanto più mediamente perde!

3 La durata media condizionata alla rovina di Primo

3.1 Gioco equo

Vorrei ora analizzare un'altra questione connessa alla variabile aleatoria D_h nel caso del gioco equo, che non mi risulta sia stata considerata finora in letteratura (potrei sbagliare), ma che mi pare non priva di un qualche interesse. Limitandosi a considerare le durate del gioco in cui Primo, che detiene all'inizio il capitale h, rovina è intuitivo prevedere che le durate condizionate a questa eventualità (la rovina di Primo) devono avere un valore atteso minore di $h(c - h)$ se $h < c - h$, maggiore di $h(c - h)$ se $h > c - h$ e uguale a $h(c - h)$ se $h = c - h$. Non nuocerebbe conoscere l'esatta entità di questi scarti dal valore medio $h(c - h)$, anche per dare una misura alla naturale previsione che quanto più sono sbilanciati i capitali iniziali posseduti dai due giocatori quanto più devono differire la durata attesa del gioco di rovina condizionata alla rovina di Primo e quella condizionata alla rovina di Secondo.

Se con E_P si simboleggia l'evento "Rovina di Primo" e con E_S si simboleggia l'evento "Rovina di Secondo", allora d_h, finora considerato, esprimerebbe il valore atteso della variabile condizionata all'evento (che ha probabilità 1) $E_P + E_S$. In simboli

$$d_h := E\left[D_h \mid E_P + E_S\right]$$

Ora si vuole invece determinare il valore atteso della durata del gioco di rovina condizionato alla rovina di uno prefissato dei due giocatori e, senza perdita di generalità, faremo riferimento a Primo, quello che detiene il capitale h all'inizio del gioco.

Indicando con $\delta_h := E\left[D_h \mid E_P\right]$, l'equazione alle differenze soddisfatta dalla successione dei valori δ_h è

$$\delta_h = 1 + P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) \cdot \delta_{h+1} + P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right) \cdot \delta_{h-1}$$

per $h = 1, 2, ..., c-1$, con la condizione al bordo $\delta_0 = 0$. Qui con $P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right)$ si intende la probabilità che Primo, quando si trova a detenere il capitale h, vinca al lancio successivo, si noti il $+1$ come indice dell'evento, condizionata alla sua rovina (e alla non rovina di Secondo). Analoga è l'interpretazione di $P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right)$.

Quanto valgono $P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right)$ e $P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right)$? Si devono valutare delle probabilità condizionate e risulta pertanto per $h = 1, 2, ..., c-1$

$$P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \frac{P_h\left(E_{+1}E_P\right)}{P_h\left(E_P\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\text{Primo ha un capitale } h\text{, vince il turno e rovina}\right)}{P\left(\text{Primo ha un capitale } h \text{ e rovina}\right)} = ... = \frac{c-(h+1)}{2\left(c-h\right)}$$

Si noti che $P_{c-1}\left(E_{+1} \mid E_P\right) = 0$: se Primo vincesse allora non rovinerebbe in contraddizione con l'evento condizionante. La successione delle $P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right)$ è decrescente da $P_1\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \dfrac{c-2}{2\left(c-1\right)} < \frac{1}{2}$ a $P_{c-1}\left(E_{+1} \mid E_P\right) = 0$. Per $P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right)$ vale con le ovvie considerazioni

$$P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right) = 1 - P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \frac{c-(h-1)}{2\left(c-h\right)}$$

Con la simbologia introdotta, nel problema classico con l'evento condizionante $E_P + E_S$ di probabilità 1, è

$$P_h\left(E_{+1} \mid E_P + E_S\right) = P_h\left(E_{-1} \mid E_P + E_S\right) = \tfrac{1}{2}$$

Per determinare il valore dei δ_h si può considerare l'equazione alle differenze finite

$$\delta_h = 1 + \frac{c-(h+1)}{2\left(c-h\right)} \cdot \delta_{h+1} + \frac{c-(h-1)}{2\left(c-h\right)} \cdot \delta_{h-1}$$

o equivalentemente moltiplicando primo e secondo membro per $c-h$

$$\left(c-h\right)\delta_h = \left(c-h\right) + \frac{c-(h+1)}{2} \cdot \delta_{h+1} + \frac{c-(h-1)}{2} \cdot \delta_{h-1}$$

per $h = 1, 2, ..., c-2$, con le condizioni al bordo $\delta_0 = 0$ e quella, sui generis, $\delta_{c-1} = 1 + \delta_{c-2}$. Se si pone come nuova successione incognita $\gamma_h := (c-h)\,\delta_h$ si ottiene

$$\gamma_h = (c-h) + \tfrac{1}{2}\gamma_{h+1} + \tfrac{1}{2}\gamma_{h-1}$$

per $h = 1, 2, ..., c-2$, con le condizioni al bordo $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_{c-1} = c - 1 + \gamma_{c-2}$. Anche questa è un'equazione alle differenze finite lineare a coefficienti costanti non omogenea. La procedura standard di risoluzione conduce prima alla soluzione per γ_h

$$\gamma_h = \frac{h\,(2c-h)\,(c-h)}{3}$$

per $h = 0, 1, ..., c-1$ e quindi alla

$$\delta_h = \frac{h\,(2c-h)}{3}$$

per $h = 0, 1, 2, ..., c-1$. Un risultato sorprendentemente semplice che, nell'emblematico esempio con $c = 1000$, ci dà

$$\delta_1 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1000 - 1)}{3} = \frac{1999}{3}$$

quale durata media del gioco quando rovina Primo, che ha il capitale iniziale 1 e, all'altro estremo

$$\delta_{999} = \frac{999 \cdot (2 \cdot 1000 - 999)}{3} = 333\,333$$

quale durata media del gioco quando rovina Secondo (considerare Secondo equivale a pensare a Primo con capitale $h = 999$).

Ovviamente il risultato trovato "quadra" per $h = 0, 1, 2, ..., c$ nel senso che (indipendentemente da come si "valuti" δ_c)

$$\pi_h \cdot \delta_h + (1 - \pi_h) \cdot \delta_{c-h} = d_h$$

essendo

$$\frac{c-h}{c} \cdot \frac{h\,(2c-h)}{3} + \frac{h}{c} \cdot \frac{(c-h)\,(c+h)}{3} = h\,(c-h)$$

e consente di rispondere a quelle curiose osservazioni fatte all'inizio di questo paragrafo. Riporto un'esemplificazione numerica dei risultati ottenuti con $c = 10$, al variare di h.

h	δ_h	δ_{10-h}
1	$6.\overline{3}$	33
2	12	32
3	17	$30.\overline{3}$
4	$21.\overline{3}$	28
5	25	25
6	28	$21.\overline{3}$
7	$30.\overline{3}$	17
8	32	12
9	33	$6.\overline{3}$

Tab. 3

3.2 Gioco non equo

Con la simbologia introdotta, nel caso di gioco non equo risulta per $h = 1, 2, ...,$ $c - 1$

$$P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \frac{s^c - s^{h+1}}{(s+1)\left(s^c - s^h\right)}$$

$$P_h\left(E_{-1} \mid E_P\right) = 1 - P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \frac{s^{c+1} - s^h}{(s+1)\left(s^c - s^h\right)}$$

Considerando ancora con $\delta_h := E\left[D_h, p \mid E_P\right]$, dove si è voluto segnalare con p la probabilità di vincere di Primo a ogni lancio di moneta, l'equazione alle differenze soddisfatta dalla successione dei valori δ_h è

$$\delta_h = 1 + \frac{s^c - s^{h+1}}{(s+1)\left(s^c - s^h\right)} \cdot \delta_{h+1} + \frac{s^{c+1} - s^h}{(s+1)\left(s^c - s^h\right)} \cdot \delta_{h-1}$$

o equivalentemente moltiplicando primo e secondo membro per $s^c - s^h$

$$\left(s^c - s^h\right)\delta_h = \left(s^c - s^h\right) + \frac{s^c - s^{h+1}}{s+1} \cdot \delta_{h+1} + \frac{s\left(s^c - s^{h-1}\right)}{s+1} \cdot \delta_{h-1}$$

per $h = 1, 2, ..., c-2$ con le condizioni al bordo $\delta_0 = 0$ e quella, sui generis, $\delta_{c-1} = 1 + \delta_{c-2}$. Se si pone come nuova successione incognita $\gamma_h := \left(s^c - s^h\right)\delta_h$ si ottiene

$$\gamma_h = \left(s^c - s^h\right) + \frac{1}{s+1}\gamma_{h+1} + \frac{s}{s+1}\gamma_{h-1}$$

per $h = 1, 2, ..., c-2$, con le condizioni al bordo $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_{c-1} = s^c - s^{c-1} + \gamma_{c-2}$. Anche questa è un'equazione alle differenze finite lineare a coefficienti costanti non omogenea. La procedura standard di risoluzione conduce alla soluzione

$$\gamma_h = \frac{s+1}{s-1}\left(h\left(s^c + s^h\right) - \frac{2cs^c\left(s^h - 1\right)}{s^c - 1}\right)$$

per $h = 0, 1, ..., c-1$, ovvero per il problema posto

$$\delta_h = \frac{s+1}{s-1}\left(\frac{h\left(s^c + s^h\right)}{s^c - s^h} - \frac{2cs^c\left(s^h - 1\right)}{\left(s^c - s^h\right)\left(s^c - 1\right)}\right)$$

per $h = 0, 1, ..., c-1$.

Anche se il gioco non ha la "simmetria" di quello equo, è evidente che (Secondo sia inteso come Primo e viceversa...)

$$E\left[D_h; p \mid E_P\right] = E\left[D_{c-h}; 1-p \mid E_S\right]$$

e che

$$E\left[D_h; p \mid E_S\right] = E\left[D_{c-h}; 1-p \mid E_P\right]$$

Ma c'è di più. Se al posto di p si considera $1-p$ quale probabilità di vincita di Primo a ogni lancio, allora s^{-1} va al posto di s e si ha

$$P_h\left(E_{+1} \mid E_P\right) = \frac{\left(s^{-1}\right)^c - \left(s^{-1}\right)^{h+1}}{\left(s^{-1}+1\right)\left(\left(s^{-1}\right)^c - \left(s^{-1}\right)^h\right)}$$

Un banale controllo algebrico mostra che

$$\frac{\left(s^{-1}\right)^c - \left(s^{-1}\right)^{h+1}}{\left(s^{-1}+1\right)\left(\left(s^{-1}\right)^c - \left(s^{-1}\right)^h\right)} = \frac{\left(s^c - s^{h+1}\right)}{\left(s+1\right)\left(s^c - s^h\right)}$$

e pertanto l'equazione alle differenze e le condizioni al bordo per la successione dei valori di δ_h resta la stessa. Questo giustifica la meno evidente ma vera

$$E\left[D_h; p \mid E_P\right] = E\left[D_h; 1-p \mid E_P\right]$$

ovvero, se la probabilità di guadagno per Primo a ogni lancio è p o è $1-p$ (qualunque sia p anche diverso da $\frac{1}{2}$) allora la durata attesa del gioco condizionata alla sua rovina è la stessa dato h quale suo capitale iniziale; cambia ovviamente, se $p \neq \frac{1}{2}$, la probabilità della sua rovina.

Da queste osservazioni segue che

$$E\left[D_h; p \mid E_S\right] = E\left[D_{c-h}; 1-p \mid E_P\right] = E\left[D_{c-h}; p \mid E_P\right]$$

I risultati "quadrano" con la formula data per d_h per $h = 0, 1, 2, ..., c$ nel senso che

$$d_h = \pi_h \cdot E\left[D_h; p \mid E_P\right] + \left(1-\pi_h\right) \cdot E\left[D_h; p \mid E_S\right]$$

o anche

$$d_h = \pi_h \cdot E\left[D_h \mid E_P\right] + \left(1-\pi_h\right) \cdot E\left[D_{c-h}; p \mid E_P\right]$$

come si verifica con l'identità

$$\frac{s^c - s^h}{s^c - 1} \cdot \frac{s+1}{s-1}\left(\frac{h\left(s^c + s^h\right)}{s^c - s^h} - \frac{2cs^c\left(s^h - 1\right)}{\left(s^c - s^h\right)\left(s^c - 1\right)}\right) +$$

$$+\frac{s^h - 1}{s^c - 1} \cdot \frac{s+1}{s-1}\left(\frac{(c-h)\left(s^c + s^{c-h}\right)}{s^c - s^{c-h}} - \frac{2cs^c\left(s^{c-h} - 1\right)}{\left(s^c - s^{c-h}\right)\left(s^c - 1\right)}\right) =$$

$$= \frac{s+1}{s-1}\left(h - c\frac{s^h - 1}{s^c - 1}\right)$$

Applico questo risultato all'esempio prima considerato di Primo alle prese con la roulette francese che gioca "rouge" o "noir" con i suoi $h < 10$ gettoni e che vorrebbe guadagnarne $10 - h$, quindi $c = 10$, o... rovinarsi. Al solito per questo contesto si ha $p = \frac{18}{37}$ e quindi $s = \frac{19}{18}$. Nella seguente tabella le durate attese sono approssimate al secondo decimale e si riportano oltre a $E\left[D_h; p \mid E_P\right]$ anche i valori di $E\left[D_h; p \mid E_S\right]$ (ri-notare che $E\left[D_h; p \mid E_S\right] = E\left[D_{c-h}; p \mid E_P\right]$), questi ultimi da interpretarsi come durata media dei giochi in cui Primo consegue il suo obiettivo di vincita.

h	$E[D_h; p \mid E_P]$	$E[D_h; p \mid E_S]$
1	6.28	32.85
2	11.91	31.85
3	16.88	30.18
4	21.20	27.85
5	24.85	24.85
6	27.85	21.20
7	30.18	16.88
8	31.85	11.91
9	32.85	6.28

Tab. 4

4 Altre curiosità

È da quaranta anni che ogni tanto mi attraggono i problemi legati ai giochi di rovina. Segnalo alcune curiosità in merito alla loro durata.

Nel gioco equo di rovina con tre giocatori, se ad ogni colpo uno dei tre, con probabilità $\frac{1}{3}$, vince una unità di capitale dagli altri due e i tre giocatori hanno capitali iniziali rispettivamente a, b, c allora la durata media del gioco per registrare la prima rovina di almeno uno dei tre giocatori è

$$E[D] = \frac{abc}{a+b+c-2}$$

Il problema era stato proposto per la prima volta nel 1941 da G. W. Petrie [4], irrisolto ancora nel 1963 (vedi C.S. Ogivily [3]) e risolto nel 1966 da R.C. Read [5].

Se i giocatori sono $n > 2$ e soltanto 2 hanno un capitale iniziale limitato, rispettivamente a e b, e tutti gli altri $n-2$ hanno capitali illimitati la durata media del gioco equo di rovina (quello in cui il giocatore che vince un turno riceve una unità di capitale da tutti gli altri $n-1$ giocatori) per osservare, con probabilità 1, la prima rovina di almeno uno dei due giocatori "poveri" è

$$E[D] = ab$$

indipendentemente da n e anche se... $n = 2$. È questo un risultato del 1976, [8], con una successiva generalizzazione al caso non equo nel 1981, [9].

Più recentemente, a partire dal 1990, mi sono occupato del caso dei giochi di rovina tra due giocatori in particolari condizioni di dipendenza tra successivi esiti del gioco, ipotizzando che si possano avere fasi più favorevoli per un giocatore, seguite da fasi per lui meno favorevoli (e viceversa per l'altro), cercando di replicare schemi più aderenti, ancorchè stilizzati, a certe situazioni operative ipotizzabili nell'ambito dell'economia e della finanza: i primi risultati analitici sono in [10] e quei risultati, con altri successivamente ottenuti per varianti della modellistica, sono stati recentemente riproposti in [11].

I problemi irrisolti anche nei casi più classici sono tanti e ci si limita a considerare o ridotte dotazioni di capitale, includendo anche il caso di gioco non equo, [6] o ad analizzare la risolubilità di voluminosi sistemi di equazioni lineari associabili al problema, [7]. Visto l'oggetto di questa nota, tra i problemi irrisolti sulla durata attesa dei giochi equi di rovina tra n giocatori mi piace rammentarne uno superclassico, proposto da R.C. Read in [5] e ripreso con originalità da D. K. Chang, [1], ma senza addivenire alla soluzione: per il gioco equo tra quattro giocatori, detentori all'inizio del gioco dei capitali a, b, c, d, in cui a ogni colpo uno dei 4 giocatori vince con probabilità $\frac{1}{4}$ una unità di capitale dagli altri 3, si è chiesto se sia possibile ottenere la formula generale in funzione di a, b, c, d della durata attesa del gioco per registrare la prima rovina di almeno uno dei quattro giocatori, ma... finora nessuno l'ha trovata e, naturalmente, la "difficoltà" non si attenua con più di quattro giocatori.

Riferimenti bibliografici

[1] CHANG D. K. (1995), A game with four players, *Statistics & Probability Letters*, vol. 23, pp 111-115, .

[2] DE FINETTI B. (1976), Come, perchè, e in che senso la "rovina dei giocatori è certa", *Periodico di Matematiche della Mathesis*, gruppo IV serie V vol. 52, pp. 143-150.

[3] OGIVILY C. S. (1963), *Tomorrow's Math - Unsolved Problems for the Amateur*, Oxford University Press, pag. 114.

[4] PETRIE G. W. (1941), Rubrica: Unsolved Problems, *The American Mathematical Monthly*, vol. 48, pag. 483.

[5] READ R. C. (1966), A Type of "Gambler's Ruin" Problem, *The American Mathematical Monthly*, vol. 73, pp. 177-179.

[6] ROCHA A. L., STERN F. (1999), The gambler's ruin problem with n players and asymmetric play, *Statistics & Probability Letters*, vol. 44, pp. 87-95.

[7] SWAN Y. C., RUSS F. T. (2006), A matrix-analytic approach to n-player ruin problem, *J. Appl. Prob.*, vol. 43, 755-766.

[8] VANNUCCI L. (1976), Il problema della rovina in un particolare gioco tra n giocatori, *Periodico di Matematiche della Mathesis*, gruppo IV serie V vol. 52, pp. 3-20.

[9] VANNUCCI L. (1981), A new formula on a particular type of gambler's ruin problem with n players, *Rivista della Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*, anno 4 fascicolo 1, pp. 39-45.

[10] VANNUCCI L. (1990), La rovina del giocatore con dipendenza markoffiana nel processo di alternativa, *Rivista della Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*, Anno 13 Fascicolo 1-2, pp. 73-85.

[11] VANNUCCI L. (2010), *Teoria del rischio e tecniche attuariali contro i danni*, ed. Pitagora, Bologna, ISBN 88-371-1803-1, pp. 78-95.