UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

FLEXIBILIDADE NA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA:

UM ESTUDO COM ALUNOS DO 2.º CICLO

Graça Maria Gaspar Cebola

Orientadora: Prof.ª Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutora em Educação

(Área de especialidade em Didática da Matemática)

2019

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

FLEXIBILIDADE NA COMPARAÇÃO MULTIPLICATIVA:
UM ESTUDO COM ALUNOS DO 2.º CICLO

Graça Maria Gaspar Cebola

Orientadora: Prof.ª Doutora Joana Maria Leitão Brocardo

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutora em Educação
(Área de especialidade em Didática da Matemática)

Júri:

Presidente: Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;

Vogais:
- Doutora Ana Paula Canavarro Teixeira, Professora Auxiliar da Escola de Ciências Sociais da Universidade de Évora;
- Doutor Manuel Celestino Vara Pires, Professor Coordenador da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança;
- Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Joana Maria Leitão Brocardo, Professora Associada Convidada do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientadora.

2019

Resumo

Este estudo incide na aprendizagem da Matemática e tem como objetivo compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa. Mais especificamente, pretende responder a duas questões. A primeira, surge relacionada com a caracterização da evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa; e a segunda, aparece ligada às conexões entre a compreensão dos aspetos proporcionais das estruturas multiplicativas, em particular, dos conceitos de razão e de proporção, e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações utilizadas pelos alunos.

A fundamentação teórica apresenta três temáticas: estruturas multiplicativas e raciocínio proporcional, representações na aprendizagem matemática e flexibilidade na aprendizagem matemática. Discutem-se, sob diferentes perspetivas, os conceitos de comparação multiplicativa, razão e proporção. Referem-se os modos de representação e a sua ligação à compreensão destes conceitos. Menciona-se a flexibilidade na construção de estratégias, no uso de representações, na criatividade e, em concreto, na resolução de tarefas de comparação multiplicativa.

O estudo segue uma metodologia de investigação baseada em *design*, na modalidade de experiência de ensino conduzida a partir de uma conjetura, concretizada em dois ciclos de experiência. Os participantes são os alunos de duas turmas do 6.º ano de escolaridade e as respetivas professoras.

A análise dos dados permite concluir que existe, nos dois ciclos de experiência, evolução na aprendizagem da comparação multiplicativa. O raciocínio dos alunos é desenvolvido somente dentro de um espaço de medida, mas as suas estratégias de resolução permitem marcar um percurso que se inicia na não quantificação e prossegue para a necessidade de quantificar e de utilizar estratégias aditivas e multiplicativas, apoiadas em representações simbólicas de razão (na forma de fração, tabelas e linhas numéricas duplas). Quando usam estratégias e representações adequadas, os alunos não mostram grande apetência para as alterar. No entanto, ao resolverem as tarefas identifica-se o uso de relações numéricas multiplicativas e de propriedades da operação multiplicação que articulam com as estratégias e as representações a que recorrem.

Palavras-chave: Comparação multiplicativa; estratégias de resolução; representações; flexibilidade.

Abstract

This study focuses on process of learning mathematics and aims to understand how 6th grade students develop proportionality in the context of exploring multiplicative comparison tasks. More specifically, it intends to answer two questions. The first is related to the characterization of the learning trajectory of the multiplicative comparison; and the second is linked to the connections between the understanding of the proportional aspects of the multiplicative structures, the concepts of ratio and proportion, and the flexibility of resolution strategies and representations used by the students.

The theoretical framework presents three themes: multiplicative structures and proportional reasoning, representations in mathematical learning and flexibility in mathematical learning. From different perspectives, the concepts of multiplicative comparison, ratio and proportion are discussed. An overview of the modes of representation and their connection to the understanding of these concepts is offered. Moreover, flexibility is discussed in context of construction of strategies, use of representations, creativity, and resolution of multiplicative comparison tasks.

The study follows a design-based research methodology, in the modality of teaching experiment conducted from a conjecture, comprised of two cycles of experience. Participants are students from two 6th grade classes and their respective teachers.

The analysis of the data allows us to conclude that there is an evolution in the learning of the multiplicative comparison in both cycles of experience. Students' reasoning is only developed within a space of measures, but their resolution strategies make it possible to delineate a path that begins with non-quantification and progresses towards the need to quantify and to use additive and multiplicative strategies, which are supported by symbolic representations of ratio (in the form of fraction, tables and double numeric rows). When using appropriate strategies and representations, students are unwilling to change them. However, when solving the tasks, one identifies the use of multiplicative numerical relations and multiplication operation properties that articulate with the strategies and representations they use.

Keywords: Multiplicative comparison; resolution strategies; representations; flexibility.

Agradecimentos

Terminado este trabalho gostaria de manifestar os meus agradecimentos:

À Professora Doutora Joana Brocardo, a minha orientadora, pela sua disponibilidade e incentivo ao longo de todo o decurso de realização deste trabalho. Agradeço-lhe as suas críticas (sempre construtivas), os seus comentários, as suas sugestões e, acima de tudo, o ter-me feito sentir que era possível.

À Sofia e à Vera, as professoras, cuja identificação é fictícia por questões de anonimato, que se disponibilizaram a trabalhar comigo e "a abrir a porta da sua sala de aula".

Aos alunos das duas turmas do 6.º ano de escolaridade que, à sua maneira, participaram ativamente na resolução das tarefas, e com carinho e simpatia me acolheram nas suas aulas.

À Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Portalegre pelas condições que me proporcionou. Em particular, aos colegas que, de uma forma ou de outra, gostavam de saber "como ia o trabalho" e ao Mário que em dois dos semestres assegurou o meu serviço letivo.

À equipa do Projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos" que calorosamente me acolheu, principalmente, à Joana, ao Jean-Marie e à Fátima que vivenciaram o percurso deste trabalho mais de perto e cujas discussões muito me fizeram pensar.

Aos meus amigos, mas muito em especial ao Sérgio, aquele que me proporciona as mais belas viagens da vida, e que com o seu amor, carinho, paciência e infinita vontade de ler, leu e releu este documento todas as vezes que para isso foi solicitado.

À minha família, com um especial obrigada pela vida à minha mãe, Maria da Graça, e ao meu pai, Dionísio, com eterna saudade. A eles dedico este trabalho.

Índice

Índice de episódios

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de tabelas

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo está dividido em três secções. Na primeira, contextualizo a investigação, exponho as razões que a motivaram, os objetivos e as questões do estudo. Na segunda, refiro-me à pertinência da investigação sobre comparação multiplicativa e flexibilidade de estratégias de resolução e de representações. Na terceira, foco-me na organização da investigação e descrevo a estrutura deste documento.

1.1. Contexto da investigação

As motivações para o estudo assumem duas perspetivas principais – a profissional e a pessoal – que convergem e se complementam. Sob o ponto de vista profissional, o ser professora numa instituição de formação de professores, numa escola superior de educação, envolve-me nas problemáticas do ensino e da aprendizagem da Matemática, quer a nível da formação inicial, quer a nível da formação contínua de professores, com aspetos ligados ao conhecimento matemático, didático e curricular do educador e do professor dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico.

O processo de ensino da Matemática, nas suas múltiplas e complexas facetas, surge, e só tem sentido, se relacionado com o processo de aprendizagem da Matemática, e vice-versa.

Em particular, a minha experiência enquanto professora supervisora de estágios de futuros professores de 1.º e 2.º ciclos tem-me levado a procurar conhecer melhor o modo como os alunos desenvolvem o seu conhecimento matemático. Tal como Sowder (2007) refere, tenho vindo a perceber a importância de analisar o que os alunos dizem e fazem e o modo como justificam os seus argumentos matemáticos.

Ensinar Matemática tem como objetivo primordial o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática, que se pretende significativa e para todos os alunos. National Research Council [NRC] (2001) define que a aprendizagem matemática está relacionada com o desenvolvimento de cinco aspetos entrelaçados que no seu conjunto constituem o que designa por proficiência matemática. A aprendizagem matemática é, portanto, encarada "como um processo ativo, no qual cada aluno constrói o seu próprio conhecimento matemático a partir de experiências pessoais, a par do retorno que recebe dos seus pares, de professores e de outros adultos" (NRC, 2001, p. 9). Os alunos devem, por isso, ter, entre outras experiências, a oportunidade de se envolver em tarefas desafiantes que lhes permitam dar sentido a conceitos e procedimentos matemáticos, de relacionar conhecimentos anteriores com novos conhecimentos e de adquirir conhecimento conceptual e processual. Nas aulas de matemática, o professor deve, pois, envolver os seus alunos na discussão de tarefas que promovam a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática e as conexões matemáticas. Este é um dos papéis que o professor tem que desempenhar de modo a atingir o seu grande objetivo: ensinar para uma aprendizagem com sentido para os seus alunos.

Sob o ponto de vista pessoal, a minha participação, ao longo de todos estes anos, em vários encontros nacionais e internacionais sobre educação matemática e investigação em educação matemática, revela que a atualização e a procura de novos rumos têm sido também para mim uma constante. No momento em que inicio esta investigação, e tendo consciência que a docência e a investigação são duas áreas cada vez mais importantes para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, interessa-me evidenciar que, por um lado, os resultados da investigação devem ser úteis para o dia a dia do professor, do aluno e até de outros intervenientes e que, por outro lado, a vivência autêntica na escola, na sala de aula e, em particular, na sala de aula de matemática é um "mundo infinito", repleto de temáticas a serem investigadas. É, por isso, que cada vez mais os projetos de investigação em educação seguem uma metodologia de Investigação Baseada em *Design*[1] (IBD), nas suas diversas modalidades, que também adoto.

A participação no projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos" (PNCFAC) permitiu-me a integração num grupo de investigadores, em que a discussão e reflexão sobre temáticas atuais do ensino e da aprendizagem da Matemática eram uma constante e se tornaram um desafio. Este é, de facto, o momento em que este trabalho de investigação, de caracter individual, se começa a delinear e, com o decorrer do tempo, ganha autonomia. O projeto "Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos" assume, por um lado, que existem aspetos críticos relacionados com um dos objetivos curriculares do tema Números e Operações "promover a capacidade de pensar e de calcular de modo eficiente, flexível e adequado a cada situação" (texto da proposta apresentada à Fundação para a Ciência e Tecnologia, PNCFAC (projeto não financiado), p. 3), e por outro lado, que o conhecimento aprofundado de trajetórias de aprendizagem específicas, a análise da sua implementação no que se refere ao trabalho dos alunos (aprendizagem) e dos professores (ensino) cria oportunidades de inovação que podem apoiar a aprendizagem dos alunos. Assim, os vários eixos de discussão englobam questões a nível da aprendizagem, com a exploração de tarefas na sala de aula de matemática, e a nível curricular, com a conceção de sequências de tarefas. No seio da equipa do projeto, em 2013/14, o trabalho desenvolvia-se basicamente em torno de questões de aprendizagem relacionadas com a subtração e a multiplicação (no 1.º ciclo do ensino básico), na perspetiva de flexibilidade ligada ao cálculo, em particular ao cálculo mental. Alargar o universo do estudo a alunos do 2.º ciclo e à aprendizagem de conceitos mencionados nos documentos curriculares oficiais deste ciclo do ensino básico foi considerado natural. A proposta estava lançada e direcionou-se para a aprendizagem da proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa, na perspetiva da flexibilidade. Também se foi concretizando um entendimento de flexibilidade mais abrangente, visto como um processo dinâmico de adaptação de estratégias de resolução e de representações utilizadas pelos alunos às características das tarefas, no qual as relações numéricas e as propriedades das operações têm um papel de destaque.

[1] IBD é a tradução adotada por Ponte, Carvalho, Mata-Pereira e Quaresma (2016) de *design basead-research* ou *design research*.

A investigação sobre comparação multiplicativa na perspetiva da flexibilidade de estratégias de resolução e de representações realiza-se segundo a metodologia de IBD, na modalidade de experiência de ensino transformadora conduzida a partir de conjeturas (Confrey & Lachance, 2000; Lesh & Kell, 2000), em dois ciclos de experiência, no início dos anos letivos 2015/16 e 2016/17, em duas turmas do 6.º ano de escolaridade. Concretamente, o objetivo do estudo que me proponho desenvolver insere-se na temática da aprendizagem da Matemática e consiste em compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa. Para responder a este problema, formulo as seguintes questões:

(i) Como se caracteriza a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa?
(ii) O que caracteriza as conexões entre a compreensão dos aspetos proporcionais das estruturas multiplicativas, em particular, dos conceitos de razão e proporção, e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações utilizadas pelos alunos?

1.2. Pertinência da investigação

Pode dizer-se que, sob o ponto de vista do currículo de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico, este trabalho de investigação vai, de alguma forma, inter-relacionar um tópico – a proporcionalidade – e flexibilidade, nas suas múltiplas facetas.

Nesta secção, começo por discutir o modo como a proporcionalidade tem sido perspetivada em alguns dos documentos internacionais de referência – Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989) e Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) – que apoiaram, durante muitos anos, a mudança da educação matemática em Portugal, e nos dois últimos documentos curriculares, que em Portugal marcaram uma bifurcação no caminho que tem vindo a ser percorrido no ensino e na aprendizagem da Matemática, nos primeiros nove anos de escolaridade. A seguir, discuto a flexibilidade também abordada nos referidos documentos.

A importância curricular da proporcionalidade é defendida por vários autores e, de acordo com o NCTM (1989, 2000), a capacidade de raciocinar proporcionalmente desenvolve-se no decurso dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. Esta é uma das capacidades mais importantes a ser desenvolvida nestes anos de escolaridade uma vez que também é, segundo Langrall e Swafford (2000), uma forma de consolidar os conhecimentos matemáticos já adquiridos e construir os alicerces para a matemática escolar superior e para o raciocínio algébrico.

A proporcionalidade é um tema integrante dos currículos que se enquadra, especificamente, no final do 2.º ciclo e no início do 3.º ciclo do ensino básico. Desenvolve-se através da exploração de diversos temas do currículo e a sua compreensão deverá emergir através da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio, permitindo conexões dentro da própria Matemática e entre a Matemática e outros domínios (NCTM, 2000). Explicita-se, por isso, no mesmo documento, que todos os alunos do 6.º ao 8.º ano de escolaridade devem, por um lado, compreender e utilizar os conceitos de razão e de proporção para representar relações quantitativas; e, por outro lado, desenvolver, analisar e explicar os processos utilizados na resolução de problemas que envolvam proporções, como é o caso de razões iguais.

Seguindo as linhas orientadoras do ensino e aprendizagem da Matemática que defendem a resolução de problemas como o cerne da atividade na sala de aula de matemática, de modo a proporcionar aos alunos um papel ativo na sua própria aprendizagem, o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) reforça, no tema Álgebra (2.º ciclo), que a proporcionalidade direta[2]

> é uma relação importante no desenvolvimento do pensamento algébrico presente em muitas situações do quotidiano dos alunos (envolvendo, por exemplo, problemas de natureza multiplicativa nas compras ou em receitas culinárias, percentagens e escalas). (Ministério da Educação [ME], 2007, p. 40)

Ainda no PMEB, nos objetivos específicos deste tópico, realça-se a importância relativamente: à compreensão de conceitos – razão, proporção e constante de proporcionalidade; à utilização de proporções para criar modelos e efetuar previsões; à resolução e formulação de problemas que envolvam situações de proporcionalidade.

Mais recentemente, com o Programa e Metas Curriculares de Matemática – ensino básico (PMCM), a proporcionalidade continua a ter relevo embora de uma forma menos intuitiva, sem articulação visível com tópicos anteriores, menos ligada à resolução de problemas e à compreensão, e mais à memorização e às regras de cálculo. Neste documento

[2] Para simplificação da linguagem adoto neste trabalho a terminologia "proporcionalidade" em vez de "proporcionalidade direta". Esta opção está em consonância com a convenção mais comum da linguagem relativamente à proporcionalidade.

programático a proporcionalidade surge como um conteúdo do domínio da Álgebra (6.º ano), onde se especifica que se deve abordar:

> – Noção de grandezas diretamente proporcionais e de constante de proporcionalidade direta;
> – Proporções; extremos, meios e termos de uma proporção; propriedades; regra de três simples;
> – Escalas em mapas;
> – Problemas envolvendo a noção de proporcionalidade direta entre grandezas mutuamente dependentes. (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013, p. 18)

Mencionam-se também duas metas dedicadas à proporcionalidade "4. Relacionar grandezas diretamente proporcionais (…) 5. Resolver problemas (…)" (MEC, 2013, p. 45) que estão em consonância com a listagem de conteúdos e onde o apelo à terminologia e às regras de cálculo específicas persiste.

Esta não é a linha que investigações realizadas (e mais à frente analisadas) defendem quanto à forma de desenvolver o conceito de proporcionalidade e ao tipo de tarefas a explorar com os alunos na sala de aula, pelo que me parece de todo o interesse compreender como os alunos desenvolvem a proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa que favoreçam a compreensão conceptual.

A relevância curricular do tema Números e Operações (onde surgem referências à flexibilidade), ao longo de toda a escolaridade, é realçada pelo NCTM (2000) quando defende que "compreender os números e as operações, desenvolver o sentido de número e ganhar fluência no cálculo aritmético constituem o cerne da educação matemática nos primeiros anos do ensino básico" (p. 32) e que no seu percurso escolar os alunos deverão adquirir um conhecimento vasto dos números baseado nos conceitos, nas representações, nas relações, nas integrações em diferentes estruturas e propriedades e na resolução de problemas. Definem, desta forma, três grandes objetivos ligados à aprendizagem dos números e das operações e transversais a toda a escolaridade:

> – Compreender os números, formas de representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos;
> – Compreender o significado das operações e o modo como se relacionam umas com as outras;
> – Calcular fluentemente e fazer estimativas plausíveis. (NCTM, 2000, p. 32)

Na perspetiva do NCTM (2000), "calcular com fluência" é definido como "a capacidade de calcular de forma eficiente e precisa – com frações, decimais e inteiros" (p. 220), que se deve desenvolver e englobar novos conceitos e novos procedimentos no decorrer de toda a escolaridade. Explicitamente, nos anos de escolaridade que vão do 3.º ao 5.º os alunos devem ser incentivados a explicar os seus procedimentos e ser capazes de o fazer, compreender que podem existir outros e reconhecer a vantagem da eficácia e da precisão dos métodos que utilizam. E, por isso, no final do 5.º ano, "os alunos mostram ter fluência de cálculo quando demonstram flexibilidade nos métodos de cálculo que escolhem, compreendem e sabem explicar esses métodos e apresentam respostas exatas de uma forma eficaz" (p. 152). Nos anos de escolaridade que se seguem, os alunos devem, de acordo com o contexto do problema a resolver, sentir a necessidade de obter uma resposta exata ou uma estimativa e escolher a forma mais adequada de cálculo – algoritmos de papel e lápis, cálculo mental ou calculadora – alargada, nesta fase, a números não inteiros ou inteiros negativos.

Objetivamente, a referência à flexibilidade no PMEB limita-se a questões de cálculo (em particular, cálculo mental) e no PMCM não é sequer mencionada.

No entanto, se se entender que:

> Ser fluente significa que os alunos são capazes de escolher com flexibilidade métodos e estratégias para resolver problemas de contexto e matemáticos, que compreendem e são capazes de explicar as suas abordagens e de elaborar efetivamente respostas corretas em conformidade. (NCTM, 2014, p. 42)

então, reforça-se que o ensino e a aprendizagem da Matemática devem centrar-se no desenvolvimento da compreensão de conceitos e de procedimentos, compreensão conceptual, no raciocínio e na resolução de problemas.

Em suma, sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem, a proporcionalidade engloba muitas vertentes de investigação, das quais a compreensão da evolução conceptual da comparação multiplicativa é uma delas. A comparação multiplicativa surge baseada nos conceitos de fator multiplicativo, razão e proporção e são as conexões entre a compreensão de conceitos, as estratégias de resolução e as representações utilizadas, suportadas pelas relações numéricas e pelas propriedades das operações que permitem perspetivar a flexibilidade na comparação multiplicativa, até ao momento, pouco estudada e que é o cerne desta investigação.

1.3. Organização da investigação

Esta investigação deu origem ao documento que elaboro e que está estruturado em seis capítulos. Cada um apresenta várias secções e algumas surgem ainda divididas em sub-secções que denotam determinada organização e possibilitam ao leitor uma identificação parcelar mais específica.

No capítulo 1, introdução, a primeira secção, contextualiza a investigação; a segunda, justifica a sua pertinência; e a terceira (e presente) secção, descreve como toda a informação produzida está organizada.

No capítulo 2, fundamentação teórica, abordam-se os temas que suportam o estudo empírico. A primeira secção, discute as estruturas multiplicativas e o raciocínio proporcional; a segunda, diz respeito às representações na aprendizagem matemática; e a terceira secção, menciona a flexibilidade na aprendizagem matemática.

No capítulo 3, metodologia de investigação, a primeira secção, expõe as opções metodológicas; a segunda, indica os contextos e os participantes; e a terceira secção, incide sobre os métodos de recolha de dados.

No capítulo 4, experiência de ensino nas turmas de Sofia e de Vera, a primeira secção, descreve a sequência de tarefas a propor na turma de Sofia (primeiro ciclo da experiência); e a segunda secção, refere a sequência de tarefas a propor na turma de Vera (segundo ciclo da experiência).

No capítulo 5, estratégias de resolução, relações numéricas, propriedades das operações e representações, apresenta-se a parte empírica da investigação. A primeira secção, analisa as produções e intervenções orais dos alunos, tarefa a tarefa, de acordo com as estratégias de resolução, o tipo de número, as relações numéricas, as propriedades das operações e as representações utilizadas, no primeiro ciclo da experiência; a segunda secção, reproduz a análise anterior, no segundo ciclo da experiência.

No capítulo 6, conclusão, a primeira secção, diz respeito às conclusões da investigação; e a segunda secção, inclui uma reflexão global sobre aspetos que destaco relativamente ao meu percurso ao longo desta investigação.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

O capítulo correspondente à fundamentação teórica desta investigação está dividido em três secções. Na primeira, abordo as estruturas multiplicativas e o raciocínio proporcional, sob diferentes perspetivas que se complementam. Na segunda, explicito as representações na aprendizagem matemática. Na terceira e última secção, discuto a flexibilidade na aprendizagem matemática. Cada uma das secções está dividida em subsecções, na última das quais, apresento uma síntese em formato de tabela, com termos e ideias que ao longo de cada uma se tornaram relevantes.

2.1 Estruturas multiplicativas e raciocínio proporcional

Nesta secção discuto aspetos que caraterizam as estruturas multiplicativas segundo a teoria dos campos conceptuais de Vergnaud (1983, 1988, 2009, 2013), aspetos que advêm da fenomenologia didática das estruturas matemáticas, proposta por Freudenthal (2002) e aspetos que relacionam os conceitos de quantidade e medida (Thompson & Saldanha, 2003; Lamon, 2007; Beckmann & Izsác, 2015). Todos eles se relacionam com o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Em particular, focam o raciocínio proporcional (Lesh, Post, & Behr, 1988; Post & Cramer, 1993) e as suas fases de desenvolvimento, relacionadas com a compreensão e com estratégias de resolução (Lamon, 1993a, 1993b, 2007). Refiro, ainda, investigações em que a fundamentação teórica aborda os aspetos anteriores e cujas conclusões continuam a sustentar a relevância e a atualidade desta temática no processo de ensino e aprendizagem.

2.1.1 Perspetiva de Vergnaud

Vergnaud (1983, 1988, 2009, 2013) preocupa-se com o desenvolvimento cognitivo dos alunos num entendimento profundo de conceitos matemáticos específicos e refere que, sob um ponto de vista cognitivista, um conceito matemático dificilmente pode ser considerado de forma isolada.

A teoria do conhecimento é essencialmente considerada, segundo Vergnaud (2009, 2013), como um processo de adaptação. Neste processo, o que realmente se adapta são as formas de organizar a atividade, os esquemas (*schemes*, no original), relativamente às situações. O par esquema/situação é, na sua opinião, conceptualmente mais interessante e poderoso do que o par resposta/estímulo e é mais viável descrever e analisar comportamentos e representações usando o par esquema/situação do que o par sujeito/objeto.

No desenvolvimento da sua teoria dos campos conceptuais Vergnaud (2009) identifica dois objetivos: (1) descrever e analisar a progressiva complexidade, a longo e a médio prazo, das competências matemáticas que os alunos desenvolvem dentro e fora da escola; e (2) estabelecer melhores conexões entre duas formas de conhecimento: operacional, que consiste em ações no mundo físico e social; predicativo, que consiste nas expressões linguísticas e simbólicas deste conhecimento. Assim, a teoria dos campos conceptuais fornece uma estrutura que permite compreender o desenvolvimento progressivo dos conhecimentos e do saber-fazer, na qual a ação e a representação desempenham papéis importantes. Vergnaud (2013) afirma que "é uma teoria dirigida, principalmente, para conceitos científicos, a sua aprendizagem e didática" (p. 58).

Vergnaud (1988, 2009) define campo conceptual como uma ligação simultânea entre um conjunto de situações e um conjunto de conceitos. E, como tal, o significado de um conceito não surge de uma situação única, mas de uma variedade de situações e, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada apenas através de um conceito isolado, mas por múltiplos conceitos, formando sistemas. Segundo o autor, o desenvolvimento de um campo conceptual envolve situações, esquemas e ferramentas simbólicas de representação.

Numa definição de esquema, Vergnaud (2013) refere-se à sua dupla vertente: por um lado, “um esquema é uma organização invariante da atividade e do comportamento numa determinada classe de situações” (Vergnaud, 2013, p. 47); por outro lado, um esquema deve conter conceitos abertos e possibilidades de inferência (a parte analítica da definição). Os esquemas compreendem, segundo Vergnaud (2009, 2013), diversos aspetos: intencional, pois englobam um ou vários objetivos (que podem ser especificados em subobjetivos) e antecipações; generativo (*generative*), porque envolvem regras que geram atividade, nomeadamente, a sequência de ações, a informação recolhida e o controlo; epistémico, uma vez que envolvem invariantes operacionais, nomeadamente, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, cuja principal função é encontrar e selecionar informação relevante e daí inferir objetivos e regras; computacional, pois admitem possibilidades de inferência essenciais para compreender o raciocínio desenvolvido numa intensa atividade de computação, mesmo em situações aparentemente simples e, mais ainda, em novas situações. Os pontos principais a reter desta definição são “a propriedade generativa dos esquemas e o facto de conterem componentes conceptuais, sem as quais seriam incapazes de adaptar a atividade à variedade de casos que um sujeito geralmente encontra” (Vergnaud, 2009, p. 88). Pepin (2016) realça ainda que esta definição de esquema contém conhecimento (implícito) e, além disso, fornece uma forma operacional de conhecimento que é dinâmica e ligada aos processos.

Relativamente aos invariantes operacionais, Vergnaud (2009, 2013) refere que um teorema-em-ação não é propriamente um teorema e pode ser verdadeiro ou falso porque é uma afirmação ou uma proposição. Podemos pensar que uma afirmação é verdadeira quando de facto é falsa, mas mesmo assim é um teorema-em-ação. Por definição, teoremas-em-ação são “relações matemáticas que são tidas em conta pelos alunos quando escolhem uma operação ou uma sequência de operações para resolver um problema” (Vergnaud, 1988, p. 144). E, da mesma forma, um conceito-em-ação não é um conceito e também não é uma proposição. Como tal, não pode ser verdadeiro ou falso, é simplesmente relevante ou não relevante. Os conceitos-em-ação são partes essenciais dos esquemas e, assim, o desenvolvimento de um campo conceptual requer envolvimento por parte do aluno e que este seja colocado perante propostas de situações contrastantes. A relação entre teorema-em-ação e conceito-em-ação é dialética, no sentido que um não existe sem o outro.

O papel do esquema é, de acordo com Vergnaud (2009), descrever abordagens comuns de situações que dominamos e dar pistas para abordar novas situações. Os esquemas são, portanto, recursos adaptáveis que assimilam novas situações e se acomodam a elas. Por isso, um esquema deve abarcar regras prontas (*ready-made rules*, no original), truques e procedimentos já conhecidos de situações que se dominam, mas que devem possibilitar a adaptação a novas situações. A análise de situações e esquemas mostra que o processo de conceptualização já tem lugar nas formas mais simples de atividade (mesmo sem linguagem) e a justificação é que nenhuma ação pode ser eficiente sem a identificação de alguns objetos e das suas propriedades. Mesmo os conceitos mais complexos, para adquirirem sentido e operacionalidade, necessitam ser contextualizados e exemplificados através de situações. Assim, sob um ponto de vista do desenvolvimento, um conceito é simultaneamente um conjunto de situações, um conjunto de invariantes operacionais (contidos nos esquemas) e um conjunto de representações linguísticas e simbólicas.

Vergnaud (2009) distingue quatro componentes de representação, não dependentes umas das outras, mas de natureza distinta: (i) o fluxo de consciência – cada indivíduo tem alguma experiência do fluxo de consciência e isso é a prova mais óbvia da existência da representação como um fenómeno psicológico, mesmo quando não nos fornece uma justa e suficiente conceção; (ii) linguagem e símbolos – sem palavras e símbolos a representação e a experiência não podem ser comunicadas, o que é particularmente importante na Matemática, em que as notações algébricas e numéricas têm um papel relevante nos processos de conceptualização e de raciocínio; (iii) conceitos e categorias – formam o sistema no qual encontramos a informação, com o objetivo de conduzir a nossa atividade da forma mais relevante. A palavra "conceito" é tida num sentido mais amplo que o usual uma vez que, normalmente, está restrita a explicitar objetos da mente. É ampliada aqui aos conceitos-em-ação que estão muitas vezes implícitos no decurso da atividade. A distinção entre conceptualização e simbolização é essencial, pois a compreensão das palavras e das frases por diferentes pessoas, em particular alunos e professores, não é uma simples relação binária significante/significado, mas uma relação ternária com a interpretação privilegiada pelos invariantes operacionais. Qualquer que seja a função dos símbolos no processo de conceptualização, não devemos confundir conceitos e símbolos; (iv) sistemas de esquemas e subesquemas – a representação é uma atividade dinâmica, um recurso funcional, porque organiza e regula a ação e a perceção e, simultaneamente, é também o produto da ação e da perceção. A forma operacional de conhecimento deve, portanto, ser considerada como uma componente da representação, em que os esquemas são essenciais, pois organizam os gestos e as ações no mundo físico, as interações com outros indivíduos, as conversações e o raciocínio.

Vergnaud (1983, 1988) interessou-se, entre outros, pelo estudo de dois campos conceptuais de natureza matemática, o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. Estas últimas surgem como uma etapa posterior das estruturas aditivas e da necessidade de resolver problemas a que estas não dão resposta. São definidas como:

> todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporção simples e múltipla, para as quais é normalmente necessário multiplicar ou dividir. Vários conceitos matemáticos estão ligados a estas situações e é necessário dominá-los. Entre estes conceitos estão as funções linear e *n*-linear, espaços vetoriais, análise de dimensões, fração, razão, taxa, número racional e as operações multiplicação e divisão. (Vergnaud, 1988, p. 141)

Sistematiza os problemas multiplicativos e classifica-os a partir de uma análise da sua estrutura matemática, ou seja, das relações entre os dados do enunciado e as questões colocadas, em três grupos diferentes (Vergnaud, 1983): (i) isomorfismo de medidas[3], que consiste numa proporção direta simples entre duas grandezas ou dois espaços de medida, M_1 e M_2 (por exemplo: pessoas e objetos, artigos e preços, tempo e distância); (ii) produto de medidas, definido como uma composição cartesiana de duas grandezas, M_1 e M_2, com o objetivo de encontrar uma terceira, M_3 (por exemplo, determinar a área ou o volume); (iii) proporção múltipla (do ponto de vista aritmético muito semelhante ao produto de medidas), em que uma grandeza, M_3, é proporcional a duas grandezas independentes diferentes, M_1 e M_2.

Vergnaud (1983, 1988) explicita que espaços de medida são usualmente tidos como diferentes conjuntos de objetos, diferentes tipos de quantidades ou diferentes unidades de medida. No isomorfismo de medidas considera quatro situações distintas: problemas de multiplicação, problemas de divisão tipo I, problemas de divisão tipo II e problemas de regra de três.

[3] Neste documento apenas discutimos este ponto porque é aquele em que se enquadra o trabalho desenvolvido.

Os problemas de multiplicação consistem numa relação quaternária da qual se tem que extrair uma relação terciária, através de uma lei de composição binária ou de uma operação unária, e que pode ser esquematizada como na figura 1.

M_1	M_2
1	a
b	x

Figura 1: Isomorfismo de medidas para a multiplicação (Vergnaud, 1983, p. 129)

Para concretizar a ideia de Vergnaud consideremos, por exemplo, o problema "*A Rita quer comprar 5 cadernos e cada um tem marcado o preço de 1,25 €. Quanto terá que pagar a Rita?*", em que M_1 corresponde ao número de cadernos, M_2 corresponde ao preço, a = 1,25 e b = 5. Para o autor, a resolução deste tipo de problemas, dados a e b, encontrar x, envolve dois processos: (i) quando no produto $a \times b$, a e b são entendidos como números e não como grandezas. A multiplicação é identificada como a operação que permite resolver o problema e calcula-se 5 × 1,25 ou 1,25 × 5; (ii) quando no produto $a \times b$, a e b são considerados como grandezas. Este processo pode permitir dois procedimentos diferentes: operador escalar e operador funcional.

Segundo Vergnaud (1983), o aluno recorre ao operador escalar quando aplica $\times\, b$ dentro do mesmo espaço de medida ($a \xrightarrow{\times b} x$) (figura 2). Trata-se, neste caso, de uma razão entre valores da mesma grandeza e, como tal, não possui dimensão.

	M_1	M_2	
$\times\, b$	1	a	$\times\, b$
	b	x	

Figura 2: Operador escalar (Vergnaud, 1983, p.130)

O aluno recorre ao operador funcional quando aplica $\times\, a$ entre diferentes espaços de medida ($b \xrightarrow{\times a} x$) (figura 3). Nesta situação trata-se do coeficiente da função linear que relaciona M_1 e M_2 e cuja dimensão é o quociente de duas outras dimensões.

$\times\, a$

M_1	M_2
1	a
b	x

$\times\, a$

Figura 3: Operador funcional (Vergnaud, 1983, p.130)

Vergnaud (1983) considera também que quando o aluno adiciona $a + a + \ldots + a$ (b vezes), isso é um procedimento que lhe permite a resolução do problema e, embora não seja um procedimento multiplicativo, ilustra que o procedimento escalar se pode relacionar com a iteração da adição. O procedimento de adicionar $b + b + \ldots b$ (*a* vezes) não tem qualquer significado num contexto deste género.

Os problemas de divisão tipo I (ou divisão como partilha equitativa) são para Vergnaud (1983) aqueles em que se pretende determinar o valor unitário, $f(1)$, e que podem ser considerados problemas de partilha (ou partição) e esquematizados como na figura 4.

M_1	M_2
1	$x = f(1)$
a	$b = f(a)$

Figura 4: Isomorfismo de medidas para a divisão tipo I (Vergnaud, 1983, p. 131)

A ação é distribuir igualmente uma quantidade de algo entre um determinado número de recetores e a questão é saber com que quantidade fica cada recetor. Por exemplo, no problema "*O Paulo comprou 7 bolas por 28 €. Quanto custou cada bola?"*, em que M_1 corresponde ao número de bolas, M_2 corresponde ao preço, $a = 7$ e $b = f(a) = 28$, a ação é distribuir igualmente uma quantia (28€) por um determinado número de objetos (7 bolas) e a conclusão é que cada bola está relacionada com 4€, o seu preço. Se considerarmos a representação deste problema num esquema em tabela (figura 5), podemos dizer que existe um procedimento vertical a relacionar bolas com bolas e euros com euros, em que :7 representa a aplicação da inversão de um operador escalar (× 7). As expressões *sete vezes menos* e a sua inversa, *sete vezes mais*, aplicam-se, neste contexto, tanto aos euros como às bolas, mas não são nem euros nem bolas.

	Bolas (n.º)	Preço (€)	
: 7	1	x	: 7
	7	28	

Figura 5: Exemplo de inversão do operador escalar

Os problemas de divisão tipo II (ou divisão como medida) são aqueles que, segundo Vergnaud (1983), têm por objetivo encontrar x, conhecendo-se $f(x)$ e $f(1)$, tal como o esquema da figura 6 ilustra. Estamos, assim, perante um problema de medida (medição ou segmentação) onde a ação é fragmentar uma quantidade em partes de um tamanho predeterminado e a questão coloca-se em saber quantas partes se obtiveram.

M_1	M_2
1	$a = f(1)$
x	$b = f(x)$

Figura 6: Isomorfismo de medida para a divisão tipo II (Vergnaud, 1983, p. 132)

Por exemplo, no problema "*A Alice comprou cadernos de apontamentos por 28 €; cada caderno custa 7 €. Quantos cadernos comprou?"*, cujos valores e espaços de medida são os mesmos do problema anterior, a sua interpretação é diferente. A quantia de 28€ é o todo, $f(x)$, que deve ser dividido em partes com o mesmo valor indicado *a priori* (7€ = $f(1)$) e que nos leva à compra de 4 cadernos. Se considerarmos novamente um esquema em tabela (figura 7), podemos dizer que houve um procedimento horizontal, :7, que permite passar de um espaço de medida, ou grandeza, a outro e que representa a aplicação da inversão de um operador funcional (× 7). Esta passagem analisa-se em termos de função, implica a noção de quociente de dimensões (euros por cadernos) e de função recíproca. É este tipo de procedimento que leva diretamente à determinação da constante de proporcionalidade na resolução de problemas de proporcionalidade. O aluno pode, neste caso, tentar responder à questão "*Quantas vezes cabe 7 em 28?*" (teorema-em-ação é "quantas vezes cabe 7 em 28") e por aplicação de conhecimentos anteriores ou, por tentativa erro, descobrir que 28 é igual a 4 vezes 7.

: 7

Cadernos (n.º)	Preço (€)
1	7
x	28

: 7

Figura 7: Exemplo de inversão do operador funcional

Levain e Vergnaud (1994-95) referem que os esquemas das figuras 1, 4 e 6 podem ser generalizados (figura 8) e traduzir inúmeras situações ligadas à vida real. A sua exploração, onde M_1 e M_2 representam espaços de medida, permite, por isso, distinguir os três tipos de problemas mencionados (multiplicação, divisão por partilha e por medida) consoante o objetivo seja determinar, respetivamente, $f(x)$, $f(1)$ ou x.

M_1	M_2
1	$f(1)$
x	$f(x)$

Figura 8: Isomorfismo de medida – multiplicação e divisão por partilha e por medida

Por último, os problemas de regra de três como isomorfismo de medidas são, de acordo com Vergnaud (1983), casos genéricos das situações anteriores em que pretendemos determinar o quarto termo de uma proporção, conhecidos os restantes três. Esta situação pode ser esquematizada como se apresenta na figura 9, em que nos dois espaços de medida, M_1 e M_2, são dados *a*, *b* e *c* e é desconhecido *x* (note-se que *x* pode ocupar uma qualquer das quatro posições).

M_1	M_2
a	b
c	x

Figura 9: Isomorfismo de medidas para a regra de três (Vergnaud, 1983, p. 133)

A resolução do problema "*A mãe da Maria fez um bolo em que misturou 4 ovos e 300 g de açúcar. Para voltar a fazer esta receita e utilizar 6 ovos, quantos gramas de açúcar tem que misturar a mãe da Maria?*", onde M_1 corresponde aos ovos, M_2 corresponde ao açúcar, $a = 4$, $b = 300$ e $c = 6$, pode englobar procedimentos que, segundo Vergnaud (1983), levam à descoberta de um operador escalar ou de um operador funcional e que surgem de uma forma mais natural do que a aplicação da regra de cálculo.

Em síntese, a figura 10 ilustra o tipo de esquematização de um problema e as suas caraterísticas de organização e possibilita pôr em evidência as correspondências, coluna a coluna e linha a linha. Os arcos verticais e horizontais permitem identificar, sem ambiguidade, os procedimentos a efetuar e podem explicar, de uma forma eficaz, os raciocínios que conduzem à determinação do quarto termo de uma proporção e à relação da multiplicação e da divisão como sendo operações inversas. A representação esquemática do problema, de acordo com Vergnaud (1983), torna-se importante para a sua resolução e para evidenciar o papel das estruturas multiplicativas no conceito de proporcionalidade, integrando, por isso, o campo conceptual da proporcionalidade.

M_1	M_2
a	b
c	□

Figura 10: Esquema de um problema, segundo o isomorfismo de medidas

Neste campo conceptual, Vergnaud (1983, 1988) define ainda razão, taxa (*rate*, no original), proporção simples, dupla e múltipla. Uma razão surge de uma comparação entre quantidades de natureza semelhante (por exemplo, comprimento *versus* comprimento); se as quantidades não têm naturezas semelhantes a comparação dá origem a uma taxa (por exemplo, distância *versus* tempo). Uma proporção simples (expressão que surge por oposição a outros tipos de proporção – dupla e múltipla – que Vergnaud também define) é uma relação entre duas quantidades de tal forma que se aumentarmos ou diminuirmos uma através de um fator, a, então a medida da outra também aumenta ou diminui através do mesmo fator, mantendo-se a relação entre as quantidades iniciais. Mais formalmente, dizemos que se x é uma medida de uma quantidade e se $f(x)$ é a medida de outra e se as duas estão relacionadas proporcionalmente, então $f(ax) = af(x)$. Proporção dupla é uma relação entre três quantidades, onde uma está pensada como surgindo a partir das outras duas, isto é, em que a quantidade criada é proporcional a cada uma das outras. Numa linguagem mais formal, se x e y são medidas de duas quantidades e se $f(x, y)$ é a medida de uma quantidade criada, tida como relacionada proporcionalmente com as outras duas, então $f(ax, by) = a\ f(x, by) = b\ f(ax, y) = ab\ f(x, y)$. Na proporção múltipla a situação anterior generaliza-se a mais de duas quantidades. Neste trabalho focamo-nos na proporção simples, referida por outros simplesmente como proporção, designação que adotamos.

No 1.º ciclo do ensino básico muitos dos problemas são resolvidos apenas com uma multiplicação ou uma divisão, mas problemas deste tipo são, de facto, problemas de proporção, em que uma das quatro quantidades integrantes da proporção tem o valor 1 e, como é mencionado por Levain e Vergnaud (1994-95) e, mais tarde, por Thompson e Saldanha (2003), o não relacionar a proporcionalidade com a multiplicação pode dificultar a compreensão de conceitos posteriores. Levain e Vergnaud (1994-95) referem que as investigações realizadas permitem sustentar um conjunto de dados que podem influenciar a didática da matemática. Defendem que se explore com os alunos o esquema anterior e que estes problemas simples surjam então como um caso particular da procura do quarto termo de uma proporção. Referem também que o alcance desta representação, que decorre da análise de estruturas multiplicativas, não tem tido o relevo que lhe é devido.

A abordagem de Vergnaud relativamente às estruturas multiplicativas, está, segundo Lesh, Post e Behr (1988), ligada à generalização de conceitos do domínio dos números inteiros[4] para o domínio dos números racionais[5] e ao conceito de quantidade. E, de acordo com Long, Dunne e Craig (2010), as relações entre as operações multiplicação e divisão permitem efetuar conexões com uma multiplicidade de conceitos (fração, razão, proporção, taxa, decimal e percentagem), o que justifica, em parte, a complexidade do tema

[4] Neste documento os números inteiros são considerados como números inteiros positivos.
[5] Da mesma forma, os números racionais são considerados como números racionais positivos.

proporcionalidade, no qual a comparação multiplicativa é considerada como um aspeto relevante para a sua consolidação.

Realça-se, assim, que ao falarmos de estruturas multiplicativas não pensamos somente na operação multiplicação, mas também na sua inversa, a divisão, e nas relações que é possível identificar entre os números, evidenciando a sua ligação aos conceitos de razão e de proporção e ainda ao raciocínio proporcional. E, também, que numa perspetiva de ensino e aprendizagem, importa considerar o papel relevante dos contextos e das questões a colocar (situações) e das representações a explorar.

2.1.2 Perspetiva de Freudenthal

Freudenthal (2002) argumenta que as ideias, conceitos e estruturas matemáticas foram inventadas para organizar fenómenos (físicos, mentais ou sociais). Isto implica que no contexto do ensino, os professores sigam uma didática fenomenológica, ou seja, proponham aos alunos a análise de fenómenos que originaram os conceitos e estruturas ou ideias matemáticas. Esta didática, na opinião do autor, vai para além do estudo de situações concretas, mas parte delas para atingir situações de raciocínio mais elaborado e que permitem perceber a parte formal dos conceitos. A fase algorítmica de alguns conceitos deve, por isso, na sua opinião, ser construída *a posteriori*.

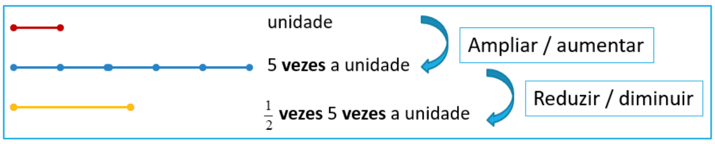
No desenvolvimento desta sua teoria didática, Freudenthal (2002) propõe outras definições e outras perspetivas metodológicas na abordagem de vários conceitos matemáticos num vasto espectro de conhecimento. As conexões de conceitos dentro da própria Matemática e desta com outras Ciências e com a vida real são defendidas e desenvolvidas sob um ponto de vista de um longo percurso delineado do concreto e informal até ao formal. Naquilo que é o interesse desta investigação, realço as conexões matemáticas relativamente aos conceitos de fração, número racional, razão e proporção, incluindo as diferentes interpretações das operações multiplicação e divisão, com números inteiros e não inteiros, e a relação inversa entre ambas.

Freudenthal (2002) considera as frações como fonte fenomenológica dos conceitos de número racional. Refere que a abordagem das frações no sentido parte-todo é demasiado restrita não apenas fenomenológica como também matematicamente, uma vez que nos induz apenas ao conceito de fração própria (inferior à unidade). As frações não devem, por isso, ser introduzidas somente como divisões fraturantes (dividir algo em *n* partes iguais) e devem também ser encaradas como comparadores. O processo de comparação pode, de acordo com um determinado critério, ser efetuado direta ou indiretamente.

Num processo de comparação direto, os objetos a comparar são colocados perto uns dos outros ou considera-se que a parte menor é parte integrante da maior. Neste caso, a ideia de fração como comparador é reduzida à de fração como fraturante de um objeto concreto; num processo de comparação indireto, surge um terceiro objeto (barra de medição) que é colocado entre os objetos a serem comparados e é considerado como um suporte dessa comparação.

Desta forma, as frações permitem comparar: objetos na relação parte-todo (em que as frações surgem como operadores fraturantes), objetos separados (em que as frações surgem na relação de razão) e quantidades ou medidas de grandezas (em que as frações surgem como operadores de razão, no sentido que transformam um número, um comprimento ou uma massa num outro).

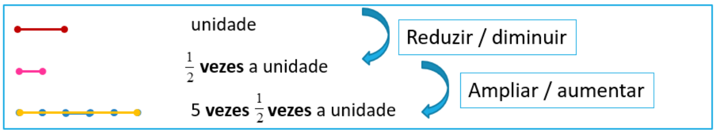
A passagem da fração como uma relação de razão para a fração como um operador de razão permite considerá-la como um transformador e associá-la à noção de *mapping* (relação ponto por ponto). As ações de *mapping* e de deformação são realizadas dentro do próprio objeto e é como se, segundo Freudenthal (2002), observássemos a fração através de lentes que permitem ampliar ou reduzir. Por exemplo, dada a fração $\frac{5}{2}$, se a interpretarmos à luz desta ideia temos que considerar também uma unidade (um segmento unitário que, sendo o modelo universal de medida de grandeza um número positivo visualizado na reta numérica como um comprimento, é facilmente representável) e uma sequência de ações. Assim, podemos pensar em $\frac{5}{2}$ como sendo *5 vezes a unidade* (ação de ampliar) e depois em $\frac{1}{2}$ *vezes 5 vezes a unidade* (ação de reduzir) e esquematizar e traduzir simbolicamente como se indica na figura 11:



$$x \to 5x \to \frac{1}{2}(5x)$$

Figura 11: Interpretar $\frac{5}{2}$ com a sequência de ações – ampliar e reduzir

No entanto, podemos alterar a sequência das ações e pensar que $\frac{5}{2}$ surge como $\frac{1}{2}$ *vezes a unidade* (ação de reduzir) e depois em *5 vezes* $\frac{1}{2}$ *vezes a unidade* (ação de ampliar) e esquematizar e traduzir simbolicamente como se indica na figura 12:



$$x \to \frac{1}{2}x \to 5(\frac{1}{2}x)$$

Figura 12: Interpretar $\frac{5}{2}$ com a sequência de ações – reduzir e ampliar

As duas figuras anteriores permitem visualizar que os segmentos de reta obtidos no final (representados nas posições inferiores) têm a mesma medida de comprimento, o que reforça a comutatividade das duas ações multiplicativas (ampliar e reduzir). Segundo Freudenthal (2002) esta ligação dos conceitos de fração e de medida baseia-se num processo de comparação e pressupõe que se compreenda que na operação multiplicação, qualquer que seja o fator em causa, este deve ser interpretado como "vezes", como algo que "atua em". Se o fator for um inteiro positivo, *n*, será tido como "*n* vezes", como algo que faz aumentar; caso contrário, se o fator for o inverso de *n*, $\frac{1}{n}$, será tido como "$\frac{1}{n}$ vezes", como algo que faz diminuir. Isto permite também realçar a propriedade de as duas operações, multiplicação e divisão, serem inversas uma da outra num universo mais amplo que o da divisão exata, isto é, no universo dos números racionais. As frações são, portanto, consideradas como números e representadas num modelo linear, o que permite dar sentido aos números racionais.

Segundo Freudenthal (2002), identificar uma razão como "uma função de um par ordenado de números ou medidas de grandeza" (p. 179) é considerá-la como um quociente e menorizar o seu significado. Para este autor a razão é, pois, num contexto fenomenológico, "uma relação de equivalência no conjunto dos pares ordenados de números (ou medidas de grandeza) e que pode ser formalmente representada por $a : b = c : d$, se o par (a, b) é equivalente ao par (c, d)" (p. 180). *A priori*, a razão depende de dois dados e, consequentemente, cada proposição sobre razões – proporcionalidade – depende de quatro. *A posteriori*, é um facto que depois de a unidade *e* ser escolhida, a classe de equivalência do par (*a*, *b*) pode ser representada por um número (um valor de grandeza), denominado *u*, mas apenas se *e* não depender de qualquer arbitrariedade (por exemplo, se tiver o valor um), e considerando que $a : b = u : e$.

Tendo consciência de que estes conceitos são de difícil compreensão por parte dos alunos, Freudenthal (2002) apresenta um exemplo com características fortemente matemáticas: o movimento uniforme, utilizando-o como protótipo. Relaciona duas grandezas, tempo e comprimento, e uma função *f* que atribui a um tempo um comprimento, nomeadamente a distância percorrida num intervalo de tempo. As razões aqui consideradas são os pares de um mesmo sistema (grandeza) (tempo ou comprimento) que obrigam a igualar as correspondentes razões no outro. Se t_1 e t_2 são tempos e s_1 e s_2 são as correspondentes distâncias, o postulado do movimento uniforme afirma que $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$. Se formos tentados a trocar os termos do meio, obtemos $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$, que é novamente uma igualdade entre duas razões, embora sejam razões de distância para tempo. O movimento uniforme é agora expresso pelo postulado: "A razão 'distância para tempo' é constante" (p.183). Esta situação permite-lhe classificar uma razão como: (i) razão interna, ou razão "dentro", se as grandezas (*magnitudes*, no original) que a constituem partilham o mesmo sistema; (ii) razão externa, ou razão "entre", se é composta por grandezas de dois sistemas diferentes.

Freudenthal (2002) explicita, no entanto, que uma razão deve ser considerada num sentido mais amplo que o de relações "dentro" e "entre" grandezas e pode ser interpretada como um quociente em que a razão interna é um número (comparação multiplicativa) e a razão externa é uma grandeza diferente das iniciais (unidade composta). Na relação ponto por ponto de duas grandezas, a invariância de razões internas e a equivalente constante de razões externas significa a linearidade da relação pontual (*mapping*).

Em suma, as ideias de Freudenthal (2002) quanto à existência de dois tipos de razão – interna e externa – correspondem às consideradas por Vergnaud (1983) quando no isomorfismo de medidas identifica, respetivamente, razões dentro de espaços de medida e razões entre espaços de medida. Do mesmo modo, o número relativo à razão interna considerada por Freudenthal pode ser o operador (fator) escalar referido por Vergnaud, e a razão externa de Freudenthal o operador (fator) funcional de Vergnaud. Qualquer que seja a interpretação, uma das ideias principais é o seu alicerce no conceito de medida, mais concretamente, no próprio ato de medir, tido como um processo de comparação.

2.1.3 Abordagem quantitativa

Medir um objeto significa conceber que algum dos seus atributos foi segmentado e que essa segmentação está em comparação com uma quantidade normalizada desse atributo (Thompson & Saldanha, 2003). Estes autores mencionam que a "ideia de razão está no coração da medição" (p. 15).

Note-se que mesmo quando um atributo de um objeto está bem definido, a questão de conceber a sua medida pode não ser imediata. A diferença está numa relação parte-todo, em que interferem um conjunto e os seus elementos, e numa comparação multiplicativa na qual a unidade de medida é imaginada para além daquilo que é medido. Concretizando esta última ideia, Thompson e Saldanha (2003) defendem que se considerarmos m como a medida de uma quantidade B em unidades de uma quantidade A, dizendo que B é igual a m vezes A e representando por B = m × A, então mn é a medida da quantidade B em unidades de $\frac{1}{n}$ × A, ou seja, $\mathrm{B} = mn \times (\frac{1}{n} \times \mathrm{A})$. E, inversamente, se m é a medida de uma quantidade B em unidades de uma quantidade A, então $\frac{m}{n}$ é a medida da quantidade B em unidades de n × A, ou seja, $\mathrm{B} = \frac{m}{n} \times (n \times \mathrm{A})$. Como se pode, reparar a unidade de medida é em cada caso diferente e a medida de B é determinada relativamente a essa unidade, isto é, a medida de B é reduzida $\frac{1}{n}$ se a unidade A é ampliada n vezes e é ampliada n vezes se a unidade A é reduzida $\frac{1}{n}$ vezes. Podemos então referir-nos à "relação recíproca do tamanho relativo" quando, com duas quantidades que estão em comparação, cada uma tem uma medida em unidades da outra. Propõem, tal como Freudenthal (2002), que se evite a expressão "$\frac{1}{n}$ de" e defendem, explicitamente, a substituição do termo "de" por "vezes", alicerçados na ideia de considerar uma fração através de lentes de ampliar ou reduzir para interpretar, respetivamente, "n vezes" e "$\frac{1}{n}$ vezes". Compreender as frações baseadas na relação recíproca do tamanho relativo traça uma relação robusta entre medida, multiplicação e divisão.

Uma conceptualização de medida envolve pois, segundo Thompson e Saldanha (2003), uma imagem de uma relação de razão que é invariante nas alterações das unidades de medida. Estes autores salientam que considerar uma razão ligada à medida pode ser trivial para quem possui um esquema mental quantitativo de medição, mas pode não ser acessível para quem está a construir o conceito de razão e necessita de abordagens significativas. Por este motivo, diferentes maneiras de pensar a formação de razões tornam-se importantes na resolução de problemas e devem ser exploradas para proporcionar uma melhor compreensão do próprio conceito de razão.

A anterior interpretação de razão, beneficia, de acordo com Thompson e Saldanha (2003), se notarmos que a operação multiplicação pode ser introduzida através de quantidades e números onde é necessário vislumbrar uma multiplicidade de objetos idênticos. Responder à questão “Quantos é que estes fazem?” pode surgir antes de conceber o que são “estes” e permite direcionar-nos até à multiplicidade quantitativa. Esta conceptualização da operação multiplicação leva a considerá-la muito para além da ideia de adição de parcelas repetidas, em que se trabalha com unidades unitárias. Se pensarmos em 5 × 4 apenas como uma adição de cinco parcelas iguais a 4 é difícil interpretar o que significa $\frac{3}{2} \times 4$, quando o universo dos números passou a ser o dos não inteiros. Não tem, de facto, sentido dizer que significa “adicionarmos dois terços de vezes o quatro”. Se adotarmos uma interpretação diferente de 5 × 4 como sendo “cinco 4s” ou “5 grupos de 4”, então $\frac{3}{2} \times 4$ pode ser interpretado como “três meios 4s” ou “três meios de um grupo de 4”. Cinco 4s são 20 e sendo três meios o triplo de um meio, então “três meios 4s” é o triplo de “um meio 4”, ou seja, 3 vezes 2, 6. Esta conceção de multiplicação como “grupos de” envolve a coordenação de unidades de unidades, o que representa um grande avanço conceptual e permite identificar a proporcionalidade na multiplicação (Lobato, Ellis, Charles, & Zbiek, 2010). Temos de pensar em 5 × 4 como um número que sabemos relacionar com outros, através por exemplo de decomposições, e não como uma operação.

Assim, para além das conexões entre razão e medida, a razão está também relacionada com quantidade e, mais especificamente, Simon e Placa (2012) consideram que ao definir uma razão unitária com base nos conceitos de medida focamo-nos, em parte, no desenvolvimento de um raciocínio que envolve quantidades intensivas. Estes autores propõem uma definição que consideram mais abrangente do que outras anteriores: “uma quantidade intensiva é o tamanho relativo das grandezas de medidas (número de unidades) de dois espaços de medida diferentes ou de medidas de duas grandezas diferentes do mesmo espaço de medida, dadas unidades de medida específicas para cada medida.” (p. 39). A denominação quantidade intensiva surge por contraste com quantidade extensiva. Segundo Schwartz (1988), uma quantidade intensiva não pode ser medida diretamente nem contada (como acontece com a velocidade ou a concentração) e é considerada como um descritor de “qualidade” que na maioria das vezes, pode ser identificada quando a sua unidade de medida contiver a expressão “por”; uma quantidade extensiva pode ser medida diretamente ou contada (comprimento, massa, área ou volume). Quantidades intensivas expressam a relação entre duas quantidades que podem elas próprias ser intensivas ou extensivas e estas últimas discretas ou contínuas. Consideram-se essenciais para a compreensão de um vasto leque de situações cuja resolução apela a procedimentos aritméticos ligados às operações multiplicação e divisão. Simon e Placa (2012) concluem, por um lado, que o raciocínio acerca de quantidades intensivas deve ser desenvolvido a par do conceito de razão, o que implica propor aos alunos tarefas adequadas e, por outro lado, o raciocínio sobre quantidades intensivas está intimamente ligado ao desenvolvimento do conceito de razão funcional.

Thompson (1994) refere que “quantidades são entidades conceptuais” (p. 187) que existem nas conceções que os indivíduos têm das situações. Pensamos numa quantidade quando concebemos a qualidade de um objeto de tal maneira que essa conceção implica a mensurabilidade da qualidade. Uma quantidade é esquemática e composta por um objeto, uma qualidade do objeto, uma unidade ou dimensão apropriada e um processo pelo qual atribuímos um valor numérico à qualidade. Este processo designa-se por quantificação e “é um processo direto ou indireto de medição” (p. 189). Realmente, o processo de quantificação não necessita ser executado no concreto, basta que tenhamos acesso ao processo mental. Uma operação quantitativa é definida por Thompson (1994) como “uma operação mental através da qual concebemos uma nova quantidade relacionada com uma ou mais quantidades anteriormente concebidas” (p. 189). Por exemplo, combinar ou comparar duas quantidades aditivamente, combinar ou comparar duas quantidades multiplicativamente, criar uma taxa (*rate*, no original), generalizar uma razão, combinar duas taxas aditivamente e compor duas taxas ou duas razões, são operações quantitativas. Uma operação quantitativa origina uma quantidade relacionada com as duas quantidades sobre as quais a efetuamos e, em conjunto, as três originam uma estrutura. Comparar duas quantidades multiplicativamente dá origem a uma razão e estas três quantidades são exemplo de uma estrutura. A operação quantitativa de comparar multiplicativamente duas quantidades tem origem na ação de revestir (*matching*, no original) ou de subdividir, com o objetivo de compartilhar. Esta ação pode ser efetuada mentalmente e permite delinear inferências acerca de relações numéricas que não estão presentes na situação propriamente dita. Uma operação quantitativa tem a ver com a compreensão da situação, é uma operação não numérica; ao contrário, uma operação numérica é utilizada para avaliar uma quantidade. A distinção entre uma e outra não é evidente, principalmente no caso de serem situações simples. A compreensão quantitativa de uma situação surge quando a concebemos em termos de quantidades e de operações quantitativas. Cada operação quantitativa origina uma relação entre as quantidades operadas com a operação quantitativa e o resultado da operação. Por exemplo, as quantidades "raparigas nesta turma" e "rapazes nesta turma" sendo comparadas multiplicativamente originam a quantidade "razão de raparigas para rapazes" e a relação destas três quantidades umas com as outras constitui uma relação quantitativa. A compreensão de situações complexas é feita pela construção de redes de relações quantitativas.

Beckmann e Izsác (2015) discutem duas perspetivas quantitativas no conceito de razão e nas relações de proporcionalidade, designadas por "número variável de quantidades fixas" e "números fixos de partes variáveis" e traduzidas em linguagem matemática, respetivamente, como $x \times \mathrm{N} = y$ e $\mathrm{M} \times x = y$, sendo N e M constantes conhecidas e x e y valores desconhecidos a determinar ou a covariar. Na sua opinião, esta distinção tem paralelo com a que surge entre os significados de medida e de partição, na operação divisão, e a contagem de grupos de igual tamanho e a determinação do tamanho dos grupos, na operação multiplicação. A análise matemática de razões e relações proporcionais, por eles proposta e analisada, é baseada na distinção comummente aceite entre multiplicador e multiplicando e que implica, em cada caso, um raciocínio diferente do que se desenvolve quando se considera a razão dentro e entre espaços de medida, proposta por Vergnaud (1983).

Segundo Beckmann e Izsác (2015) as relações de proporcionalidade podem ser encaradas como uma extensão das situações de multiplicação e divisão anteriormente referidas. Uma relação de proporcionalidade é uma coleção de pares de valores para x e y que satisfazem as duas equações $x \times \mathrm{N} = y$ e $\mathrm{M} \times x = y$ e que, por isso, estendem as duas interpretações da operação divisão e estão relacionadas com os papéis assimétricos de M e N nas referidas equações.

A relação de proporcionalidade denominada por número variável de quantidades fixas (ou simplesmente designada por vários lotes), $x \times \mathrm{N} = y$, explicita o que está fixo e o que varia e que corresponde à designação de unidades compostas indicada também por Lamon

(2007). Concretizemos esta perspetiva, por exemplo, nas quantidades de pêssego e de uva numa mistura de razão 2 para 3. Consideremos que são dadas unidades de medida fixas para duas quantidades (podendo as unidades serem, ou não, as mesmas), A unidades para a primeira e B unidades para a segunda (em que A e B são números positivos), então um par de quantidades fixas pode ser considerado como formando uma unidade composta ou um lote. Um outro par de quantidades fixas está também na razão de A para B se consiste num múltiplo da unidade composta ou do lote original. O que acontece quando para cada A unidades (ou parte delas) da primeira quantidade, *r*A (*r* número positivo), existem B unidades (ou as correspondentes parte delas) da segunda quantidade, *r*B, na razão de A para B. N é obtido através da divisão, na interpretação de determinar "quantas unidades em cada grupo", e pode fazer-se a correspondência a uma unidade derivada "unidades da segunda quantidade para uma unidade da primeira quantidade". O valor de N designa-se por constante de proporcionalidade, ou um valor de razão, e é naturalmente a unidade *rate*.

Na relação de proporcionalidade denominada por números fixos de partes variáveis (ou simplesmente designada por partes variáveis), $M \times x = y$, está novamente explícito o que está fixo e o que varia. Assim, nesta perspetiva, duas quantidades estão na razão de A para B se para alguma parte/tamanho existem A partes da primeira quantidade e B partes da segunda quantidade, em que A e B especificam números fixos de partes que podem variar de tamanho, ao contrário do que sucedia no caso anterior. Depois da unidade de medida ter sido escolhida, para qualquer número positivo *r*, A*r* unidades da primeira quantidade e B*r* unidades da segunda quantidade estão na razão de A para B. M obtém-se através da divisão B : A, na interpretação de determinar "quantos grupos de A cabem em B". O valor de M é designado por constante de proporcionalidade, ou valor de razão, e é o número que responde à questão "Quantas cópias de partes A preenchem partes B?". Genericamente, M indica quantas vezes a segunda quantidade é maior que a primeira. M é um fator escalar que relaciona as primeira e segunda quantidades.

Lobato *et al.* (2010) ilustram também esta ideia com duas propostas de resolução relativas ao problema da figura 13, onde as perguntas colocadas e as respostas a admitir são fundamentais para a explicitação e a exploração da razão.

Problema

O João fez um lote de tinta verde por mistura de 2 latas de tinta azul e 5 latas de tinta amarela. Que outras combinações do número de latas de tinta azul e do número de latas de tinta amarela pode o João fazer de forma a obter o mesmo tom de verde?

Figura 13: Problema: Misturas de tintas (Lobato *et al.*, 2010, p. 20)

Uma proposta de resolução é pensada através de uma comparação multiplicativa, ilustrada na figura 14.

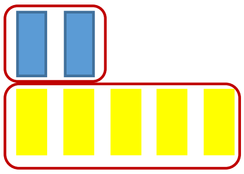


Figura 14: Duas latas de tinta azul em cinco de tinta amarela (Lobato *et al.*, 2010, p. 20)

Nesta resolução, começa-se por determinar quantas vezes o número de latas amarelas é maior relativamente ao número de latas azuis. Uma maneira de resolver é considerar as duas latas de tinta azul como um todo e ver quantas vezes cabe no número de latas de tinta amarela. A resposta “duas vezes e meia” pode levar-nos a uma ligação à divisão como medida, no sentido que respondemos à questão “Quantas vezes cabe *x* em *y*?”. A razão do número de latas amarelas (A_m) para o número de latas azuis (A_z) é, portanto, $\frac{A_m}{A_z} = 2\frac{1}{2}$, ou seja, sob a forma de fração $\frac{5}{2}$. Esta razão indica-nos quantas vezes o 5 é maior que o 2, ou seja, como podemos representar o 5 relativamente ao 2, $5 = \frac{5}{2} \times 2$, e que devemos ler como “5 é igual a $\frac{5}{2}$ vezes 2”. A igualdade anterior pode ser útil para determinar outras combinações solicitadas que originem o mesmo tom de verde. Podemos pensar que “*o número de latas amarelas terá que ser sempre* $\frac{5}{2}$ *vezes o número de latas azuis*” ($A_m = \frac{5}{2} \times A_z$) e que “*se triplicarmos o número de latas azuis* ($3 \times 2 = 6$) *para mantermos o mesmo tom de verde teremos que ter* $\frac{5}{2} \times 6$ *latas amarelas*, *isto é*, 15.” Como se pode constatar, “*triplicamos também o número de latas amarelas*”. Podemos continuar este processo com outros números, analisar a regularidade e concluir que as razões obtidas do número de latas amarelas para o número de latas azuis são todas iguais $\frac{5}{2} = \frac{15}{6} = \frac{10}{4} = \frac{2{,}5}{1} = \ldots$ uma vez que $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $\frac{2{,}5}{1} = \frac{5}{2}$; … A razão é, neste caso, o número $\frac{5}{2}$.

Uma outra proposta de resolução parte de se pensar numa unidade composta, que neste caso será a cor verde formada por duas latas azuis e cinco amarelas e na qual considera-mos ser a razão $\frac{2}{5}$ (figura 15).

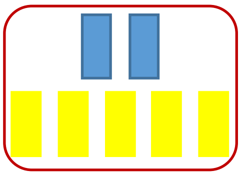


Figura 15: Unidade composta (duas latas de tinta azul e cinco de tinta amarela) (Lobato *et al.*, 2010, p. 21)

Por um processo de iteração (repetição) e de partição (divisão) podemos determinar quantas latas de cada cor fazem falta. Por exemplo, quando utilizamos cinco latas de cor azul, para saber quantas latas de cor amarela necessitamos, raciocinamos da seguinte forma: Por repetição de uma unidade composta obtemos a utilização de quatro latas azuis e dez amarelas e, dividindo ao meio a unidade composta, obtemos cinco latas azuis e doze e meia amarelas (figura 16).

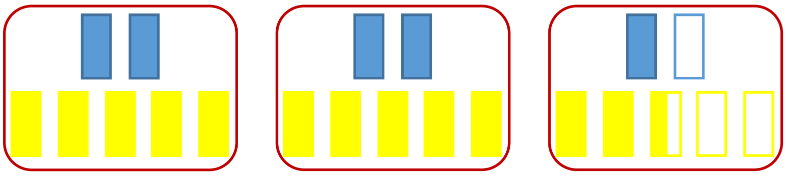


Figura 16: Repetição e divisão da unidade composta (Lobato *et al.*, 2010, p. 21)

As razões $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{12.5}$ representam o mesmo tom de verde e são, portanto, iguais tal como o são outras que sejam originadas por um processo semelhante.

Estes dois processos de resolução permitem-nos fazer conexões entre razões, proporções e raciocínio proporcional no sentido crucial de compreender que "Quando duas quantidades se relacionam proporcionalmente, a razão de uma relativamente à outra é numericamente invariante quando ambas as quantidades mudam através de um mesmo fator" (Lobato *et al.*, 2010, p. 11).

Vergnaud (1988) recomenda que estes tipos de processos sejam representados numa tabela (tabela 1) onde se pode explorar, por um lado, a relação multiplicativa entre os valores da mesma coluna (fator escalar), que relaciona o número de latas de uma dada cor e, por outro lado, a relação multiplicativa entre valores da mesma linha (fator funcional), que relaciona o número de latas de uma cor (amarela) com o da outra (azul) e que é constante: $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}=\frac{12.5}{5}=\frac{2.5}{1}=\ldots$ Este valor dá-nos, no contexto em causa o tom de verde solicitado.

Tabela 1: N.º de latas azuis versus n.º de latas amarelas

N.º de latas azuis	N.º de latas amarelas
2	5
4	10
5	12,5
1	2,5
$\frac{2}{5}$	1
…	…

As duas linhas sombreadas na tabela 1 indicam-nos duas razões importantes: as razões unitárias. Neste contexto dão-nos indicação do número de latas de tinta amarela necessárias quando temos uma só lata de tinta azul e vice-versa. Desta forma, podemos facilmente raciocinar em termos de múltiplos e submúltiplos da unidade e perceber que o número de possibilidades de resposta ao problema é infinito (se não tivermos em conta as limitações físicas do contexto real da questão).

Compreender que uma proporção é uma relação de igualdade entre duas razões engloba, portanto, perceber a relação de vários conceitos. Por exemplo, é necessário compreender o significado do sinal igual na representação simbólica de proporção e reinterpretar as razões, quer como quocientes, quer como frações. Em qualquer dos casos a ideia fundamental é perceber as razões como números que podem ser representados de diversas formas consoante o contexto a que se referem. Se considerarmos a proporção envolvida "no problema do palhaço que anda 10 centímetros em 4 segundos e do sapo que anda 20 centímetros em 8 segundos" (Lobato *et al.*, 2010, p. 34), ao escrever $\frac{10}{4}=\frac{20}{8}$, podemos questionar-nos sobre o que representa realmente a igualdade. Chegamos à conclusão, por um lado, que as razões podem ser reinterpretadas como quocientes e a relação de igualdade significa que as velocidades do palhaço e do sapo são iguais, ou seja, 2,5 cm/s. Neste caso as razões relacionam grandezas de diferentes espaços de medida (comprimento e tempo), originando uma nova grandeza – a velocidade – que, esta sim, deve ser comparada quando tentamos interpretar a situação. Por outro lado, a razão $\frac{10}{4}$ pode ser reinterpretada como uma fração, mais precisamente como $\frac{10}{4}$ centímetros em 1 segundo, baseados na ideia de juntar 10 centímetros em 4 segundos numa unidade composta e dividi-la em quatro partes iguais. Assim, a fração $\frac{10}{4}$ representa a distância que o palhaço percorre em 1 segundo. Se a razão $\frac{20}{8}$ for reinterpretada de forma similar, isto é, $\frac{20}{8}$ centímetros em 1 segundo, então a constatação que as frações $\frac{10}{4}$ e $\frac{20}{8}$ representam a mesma distância percorrida em 1 segundo (figura 17) envolve raciocinar sobre frações, considerando que sendo $\frac{1}{8}$ igual a $\frac{1}{2}$ vezes $\frac{1}{4}$, então duas vezes $\frac{1}{8}$ é igual a $\frac{1}{4}$. Logo, 10 grupos de $\frac{2}{8}$ terão um valor igual a 10 grupos de $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{20}{8} = \frac{10}{4}$.

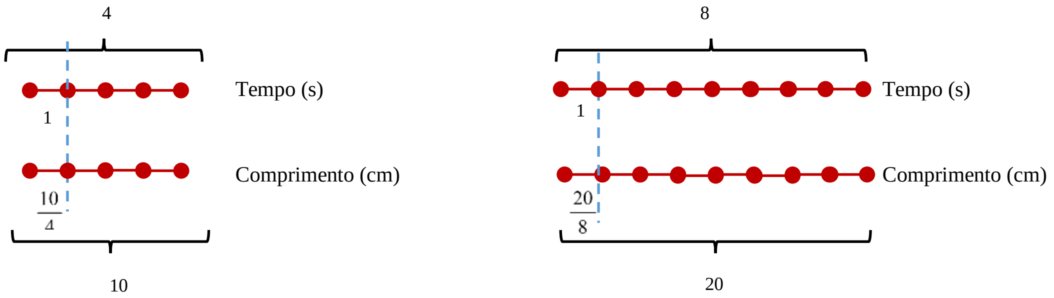


Figura 17: O palhaço anda 10 cm em 4s e o sapo anda 20 cm em 8s

Considerar uma razão como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades ou como a junção de duas quantidades numa unidade composta é, de acordo com Lobato *et al.* (2010), trabalhar implicitamente as razões internas e as razões externas anteriormente mencionadas. A evidência de formação de uma unidade composta surge frequentemente na ação de a repetir ou de a dividir em partes iguais. Há situações do mundo real que são propícias para a exemplificação de unidades compostas. Por exemplo, a velocidade, que é uma razão entre as grandezas distância e tempo; a inclinação de uma rampa (declive), que é uma razão entre as grandezas altura e comprimento da base da rampa; o sabor do refresco, que é uma razão entre as grandezas quantidade de concentrado de sumo e quantidade de água.

Sabendo que uma razão descreve uma situação em termos de uma comparação multiplicativa, uma proporção surge quando esta comparação é usada para descrever também uma situação relacionada nos mesmos termos comparativos. Por exemplo, de acordo com Shield e Dole (2002), se considerarmos que a razão de rapazes para raparigas numa turma é 2 para 3, comparamos o número de rapazes com o número de raparigas. Se soubermos que a turma tem 30 alunos, sabemos que proporcionalmente há 12 rapazes e 18 raparigas. Utilizámos a comparação base (2 : 3) para aplicar à situação global (número total de alunos da turma). Neste sentido temos que ter em conta não só a razão que é explicitada como também o número total de alunos e o problema de proporções torna-se, por isso, diferente dos anteriores. É necessário perceber que a comparação considerada através de uma razão é diferente de referir que em cada grupo formado há mais uma rapariga – comparação aditiva.

As proporções, consideradas como duas razões iguais, surgem em resposta à resolução de uma grande variedade de problemas da vida real. Lesh, Post e Behr (1988) e Freudenthal (2002) referem como típicos, por exemplo, os problemas de velocidade, de misturas, de densidade, de escalas, de conversões, de consumo e de preços.

Genericamente, utilizam-se razões e proporções quando são dados três dos termos da igualdade $a : b = c : d$ e temos por objetivo determinar o quarto. Mas pode também acontecer que uma das razões seja expressamente indicada, o que significa, na opinião de Freudenthal (2002), que trabalhamos apenas com dois dados. Um exemplo é o caso da razão externa obtida na comparação entre a distância percorrida e o tempo gasto (velocidade) quando pretendemos saber quantos quilómetros percorremos se viajarmos a uma velocidade constante de 40 km por hora durante 3 h. Por seu lado, Vergnaud (1983) permite interpretar este tipo de situação em termos de um isomorfismo entre dois espaços de medida, tempo e distância, e o problema pode ser resolvido dentro de espaços de medida, por aparecimento de um operador escalar num espaço de medida, aplicado depois no outro.

Post, Behr e Lesh (1988) salientam que o processo algorítmico de resolução de uma proporção tem sido questionado por vários investigadores que o consideram limitativo, no sentido de não ser suficiente saber manejar algebricamente e de forma automática para compreender o conceito de proporção. Para isso, é necessário dar significado e interpretar as razões dentro do contexto em causa. Mais uma vez, defende-se que a compreensão dos conceitos vai além da mera execução de procedimentos numéricos ou algébricos. Também a capacidade de construir uma igualdade de duas razões, isto é, uma proporção, e perceber que existe um número infinito de razões que respondem ao solicitado é um marco fundamental para o desenvolvimento do raciocínio proporcional (Lobato *et al.*, 2010). Podemos dizer que numa proporção a razão entre duas quantidades permanece constante, quando os valores correspondentes das quantidades "mudam" através de multiplicações ou divisões, que é possível explicitar as regularidades evidenciadas em tabelas e verificar também uma característica dos gráficos de proporcionalidade (são representados por uma reta que passa na origem e cujo declive é positivo, no universo dos números positivos).

O conceito de proporção, baseado no conceito de razão, é considerado por van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen e Keijzer (2008) como "um conceito abrangente" (p. 12) que pode surgir de início através de expressões de caracter qualitativo "este é grande… aquele é menor", substituídas depois por expressões quantitativas "cinco vezes maior; duas vezes mais pequeno; três vezes mais caro; …". Freudenthal (2002) refere-se a estas situações e afirma que muitos dos números que usamos no nosso dia a dia são, de facto, números de medição ou números de proporção. Van Galen et al. (2008) insistem que a aprendizagem, e especificamente a aprendizagem dos números, se deve focar no desenvolvimento do *insight* dos alunos. Para tal, as aulas de matemática devem dispor de mais tempo para discussões e conversações e deve ser-lhes passada a mensagem que o mais importante não é a resposta exata, mas antes o raciocínio em que é baseada a sua resolução. Numa perspetiva didática, a aprendizagem é encarada, por estes autores, como uma construção ativa de uma rede de relações em que a abordagem de conceitos e procedimentos deve levar também à investigação de relações. Propõem, portanto, uma abordagem em que o objetivo não é dominar procedimentos, mas sim compreender os princípios subjacentes, ou seja, a ênfase surge na compreensão e não na capacidade de execução de procedimentos. Na sua opinião, uma trajetória de ensino e aprendizagem das proporções pode ser alicerçada em quatro aspetos. O primeiro aspeto diz respeito à exploração de tabelas de razões que são construídas de modo a traduzir claramente a situação em causa e cujo número de colunas/linhas (consoante a tabela for, respetivamente, horizontal ou vertical) pode, se necessário, aumentar. A tabela de razões é "um modelo mental e também uma folha de trabalho" (p. 47) porque, por um lado, ajuda os alunos a raciocinar com proporções, permitindo-lhes que ganhem *insight* e, por outro lado, é uma conveniente ferramenta de cálculo que os convida a registar os passos intermédios. Os contextos nos quais as tabelas de razões são utilizadas podem começar por ser contextos onde ambos os números da razão se referem à mesma unidade (relações parte-todo) e progredir para situações onde os termos da razão estão ligados a unidades diferentes (unidades compostas). O segundo aspeto refere-se à ênfase na exploração de situações de comparação proporcional através de tarefas de investigação e em que não existe uma abordagem pré-determinada que obrigue a uma distinção inicial entre comparação absoluta e relativa. O terceiro aspeto é baseado na análise de situações em que não existem relações lineares, mas em que se atua como se existissem. O quarto aspeto tem o foco nas relações que não são lineares.

Neste trabalho de investigação os dois últimos aspetos da trajetória de aprendizagem não têm a relevância que lhes é devida, uma vez que experiência de ensino tem como intervenientes alunos do 6.º ano de escolaridade.

2.1.4 Raciocínio proporcional

Segundo Lesh, Post e Behr (1988) e Cramer e Post (1993) o raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio matemático que permite resolver vários problemas, quer do mundo real, quer da própria Matemática. Os fatores envolvidos na definição de raciocínio proporcional são complexos e, como tal, na opinião de Cramer e Post (1993), raciocinar proporcionalmente envolve: (1) ter conhecimento das características matemáticas de situações de proporcionalidade; (2) ser capaz de diferenciar as características matemáticas do raciocínio proporcional em contextos não proporcionais; (3) compreender exemplos de situações proporcionais quer na vida real, quer na Matemática; (4) perceber que podem ser utilizados vários métodos na resolução de tarefas de proporcionalidade e que estes se relacionam entre si; (5) ter conhecimento de como resolver tarefas quantitativas e qualitativas de proporcionalidade; e (6) não ser influenciado pelo contexto dos números na tarefa.

Os autores consideram o primeiro dos pontos anteriores como o mais importante e realçam quatro características matemáticas a ter em atenção em qualquer situação de proporcionalidade. A primeira característica é a existência de uma relação multiplicativa entre as quantidades envolvidas. Raciocinar de forma proporcional é compreender a relação multiplicativa entre a razão base e a situação proporcional à qual é aplicada. O que significa, de algum modo, estar apto a efetuar comparações, em termos multiplicativos, entre entidades (grandezas, quantidades) e também a usar a linguagem multiplicativa. Estas relações multiplicativas podem ser exploradas através de tabelas, expressões algébricas e representações gráficas. A segunda característica a realçar em todas as situações de proporcionalidade é que as relações numéricas entre as quantidades envolvidas, x e y, podem ser representadas através de uma equação do tipo $y = mx$, onde m é o fator constante que as relaciona, $m \neq 0$. A terceira característica é a representação gráfica da situação: uma reta que passa na origem. Assim, todos os pares ordenados considerados numa situação de proporcionalidade representam pontos que se situam numa linha reta que passa na origem. Se as situações de proporcionalidade forem baseadas em situações da vida real estas retas têm sempre declive positivo. A quarta característica surge quando se consideram razões que relacionam duas quantidades e se constata que todas representam um mesmo número, m, que é o fator constante identificado na relação $y = mx$ e que corresponde também ao declive da reta. Estas razões podem assim ser consideradas frações equivalentes uma vez que todas representam o mesmo número. É esta característica especial da relação de equivalência de frações, traduzida pela igualdade de razões, que possibilita a utilização do algoritmo do produto cruzado para a resolução de problemas de proporcionalidade, mais especificamente de problemas de proporções.

Lamon (1993a, 1993b) tem por objetivo identificar os mecanismos que permitem evidenciar um progressivo desenvolvimento do raciocínio na resolução de tarefas de proporcionalidade, principalmente através de duas componentes matemáticas: pensamento relativo e *unitizing* (capacidade de construir uma unidade de referência ou uma unidade inteira e depois reinterpretar a situação em termos dessa unidade). Considera quatro tipos diferentes de problemas que variam consoante a sua semântica e que normalmente podem ser organizados através de uma proporção.

Problemas tipo 1 (Medidas bem conhecidas (*well-chunked measures*, no original)) englobam a comparação de duas medidas extensivas, resultando numa terceira medida intensiva. Expressam relações que são entidades bem conhecidas ou razões, tais como: a velocidade (razão entre o número de quilómetros e o número de horas); o preço unitário (razão entre o número de itens e a quantidade de euros). Por exemplo: *O José percorreu 156 km no seu carro e gastou 6 ℓ de gasolina. Com este consumo é possível ele percorrer 561 km quando tem o depósito do seu carro cheio com 21 ℓ de gasolina?*

Problemas tipo 2 (Parte-parte-todo), neste contexto, a medida extensiva (cardinal) de um subconjunto do todo é indicada em termos dos cardinais de dois ou mais subconjuntos que compõem esse todo. Por exemplo: *Numa turma a professora coloca os seus alunos em grupos de 5. Cada grupo tem 3 raparigas. Se a professora tem 25 alunos, quantas raparigas e quantos rapazes tem na turma?*

Problemas tipo 3 (Conjuntos associados) envolvem grupos relacionados com duas grandezas que não estão normalmente associadas (objetos e dinheiro; pessoas e pizas; bolos e caixas; …), mas que o são no contexto do problema. Por exemplo: *A Helena, o João e o Henrique compraram 3 balões e pagaram 2€. Decidiram voltar à loja e comprar balões suficientes para cada um dos colegas da turma. Quanto pagaram por 24 balões?*

Problemas tipo 4 (Ampliação e redução) surgem quando, num contexto contínuo, é preservada uma relação um a um, *mapping*, entre duas quantidades que representam uma característica específica de um elemento, tais como a altura, o comprimento ou a largura, ou entre duas quantidades representando duas características de um elemento (comprimento e largura) e a situação envolve aumentar a escala (ampliação) ou reduzir a escala (redução). Por exemplo: *Uma fotografia de 6 cm por 8 cm foi ampliada de tal forma que a largura se alterou de 8 cm para 12 cm. Qual é o comprimento da nova fotografia?*

Em cada um destes tipos de problemas promove-se uma estratégia de resolução diferente, dependendo do nível de compreensão do raciocínio proporcional de quem os resolve. Lamon (1993b) analisa e codifica as estratégias de resolução dos alunos, que até esse momento não tinham tido qualquer contacto formal com os conceitos de razão e proporção, em termos de componentes matemáticas: relação em termos absolutos ou relativos, tipo de representação (verbal, pictórica e em tabela), estrutura quantitativa (unidade simples e composição de unidades) e sofisticação da estratégia (estratégia incorreta, raciocínio pré-proporcional, raciocínio proporcional qualitativo e raciocínio proporcional quantitativo). Para ela, o raciocínio pré-proporcional inclui métodos informais que resultam em respostas corretas, mas sem compreensão das relações escalar e funcional. O raciocínio proporcional qualitativo é o primeiro nível em que a razão é usada como uma unidade, a relação é pensada em termos relativos e são compreendidas algumas relações numéricas. No raciocínio proporcional quantitativo é utilizada a simbologia algébrica para representar as proporções com uma compreensão total das relações escalar e funcional. Genericamente, o raciocínio proporcional ocorre quando o aluno demonstra compreensão pela equivalência de razões escalares apropriadas e pela invariância da razão funcional entre dois espaços de medida, sendo ou não capaz de as traduzir simbolicamente.

Lamon (1993b) conclui que a capacidade de pensar em termos relativos e a capacidade de conceber uma razão como uma nova entidade à parte das duas quantidades que a compõem são duas dimensões muito próximas no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Os alunos que demonstraram um raciocínio mais sofisticado na resolução dos problemas de um qualquer dos tipos mencionados foram aqueles que também demonstraram um melhor desempenho em ambos os processos. A emergência da capacidade de raciocinar em termos relativos parece ser um sinal de que os alunos começam a fazer a ponte entre as estruturas aditivas e multiplicativas. Os alunos não podem verdadeiramente compreender as relações escalar e funcional inerentes à razão e à proporção, até que não percebam a natureza multiplicativa das situações que as envolvem. É por isso que lhes devem ser propostas tarefas que evidenciem a necessidade de uma comparação relativa, que possam ser tidas não só como uma referência na resolução de novas situações como também lhes despertem o sentido crítico perante o ser, ou não, apropriado pensar daquela forma. Os resultados desta investigação sugerem também que é proveitoso os alunos considerarem uma razão como uma unidade, como resultado de múltiplas composições de unidades compostas. Isto permite considerar a razão como um prosseguimento natural do processo de composição de unidades extensivas, permitindo uma outra ligação entre estruturas e processos matemáticos já conhecidos e o campo multiplicativo mais complexo.

Lamon (1993b) e Langrall e Swafford (2000) defendem que o ensino da proporcionalidade deve começar pela resolução e exploração de situações informais que vão progredindo em complexidade, até à resolução formal, a determinação numérica de um dos termos da proporção. Em concreto, devem explorar-se primeiramente situações não numéricas em contextos diversificados, onde se solicita ao aluno que expresse a sua interpretação do que lhe é proposto e das relações entre as várias variáveis envolvidas. Deve ser permitida a utilização de materiais manipuláveis assim como incentivada a exploração e interpretação de esquemas antes de se abordarem outras questões mais difíceis de modelar. Este tipo de abordagem ajuda o aluno a construir, através do seu raciocínio informal, uma melhor compreensão de como é que as duas quantidades em cada uma das razões da proporção variam juntas, isto é, covariam. As situações numéricas devem surgir num momento posterior, mas ainda em situações similares às anteriores. O aluno deve ser incentivado a usar o seu sentido proporcional, entendido como “a capacidade de raciocinar acerca de quantidades e das várias relações que estas quantidades partilham numa situação de proporcionalidade” (Billings, 2001, p. 11), em resposta a questões apropriadas. Só depois de refletir sobre as várias relações é que deve ser encaminhado para pensar sobre uma estratégia apropriada para resolver a questão e que permita determinar exatamente o valor da incógnita em falta. É um processo que se vai tornando habitual e que leva os próprios alunos a formular questões sobre as relações de proporcionalidade e a analisar a razoabilidade do resultado obtido.

Na investigação que efetuaram e na literatura revista, Langrall e Swafford (2000) identificam, na linha do que Lamon (1993a, 1993b) discute, quatro níveis diferentes de estratégias de raciocínio proporcional utilizado pelos alunos. No nível 0 – não existe raciocínio proporcional – os alunos utilizam estratégias caracterizadas por comparações aditivas em vez de multiplicativas ou pelo uso aleatório de números e operações. Este tipo de estratégia não leva à solução correta nem ao desenvolvimento de um raciocínio proporcional. No nível 1 – raciocínio informal sobre as situações de proporcionalidade – os alunos pensam sobre os problemas de uma maneira produtiva, usando materiais, desenhos ou outros modelos para que a situação lhes faça sentido. No nível 2 – raciocínio quantitativo – os alunos utilizam um raciocínio quantitativo, mas sem o apoio de qualquer tipo de material ou então ligam os seus modelos com os cálculos que efetuam. Finalmente, no nível 3 – raciocínio proporcional formal – os alunos podem definir uma proporção usando uma variável e determinar o seu valor através do produto cruzado ou da equivalência de frações, com total compreensão da estrutura relacional que existe. Os alunos devem compreender que a relação entre as duas quantidades continua a mesma, isto é, é invariante, enquanto as duas quantidades de cada razão variam juntas, ou seja, covariam.

Da conclusão desta investigação ressalta, mais uma vez, a ideia que existem quatro pré-requisitos para o raciocínio proporcional formal, o que pode ajudar a explicar algumas das dificuldades sentidas pelos alunos. Em primeiro lugar, os alunos devem reconhecer a diferença entre uma modificação absoluta ou aditiva (altera o valor inicial através de um valor absoluto ou fixo) e uma modificação relativa ou multiplicativa (altera o valor inicial por uma quantidade relativa que lhe está relacionada). A modificação relativa é multiplicativa uma vez que o valor da alteração determina-se multiplicando a quantidade original pela razão. Os alunos tendem naturalmente a considerar situações de mudança em termos aditivos, mas quando questionados por meio de perguntas específicas, podem vir a discutir essas situações, tanto em termos aditivos como multiplicativos. Em segundo lugar, é necessário que os alunos reconheçam situações onde uma comparação e a utilização de uma razão é razoável ou apropriada. Estas situações, tal como já foi referido, devem surgir antes de ser solicitada a resolução de problemas em que implicitamente se tem que determinar um termo desconhecido numa proporção. Em terceiro lugar, é essencial que os alunos compreendam que as quantidades que originam uma razão covariam no sentido de que a relação entre elas permanece invariável. Os alunos têm tendência a encarar os problemas partindo do princípio que as quantidades ou são as mesmas ou são diferentes. No entanto, muitas razões com valores diferentes podem ser proporcionais, uma vez que a relação multiplicativa entre os números implicados é a mesma. Por último, é essencial que os alunos sejam capazes de construir estruturas unitárias cada vez mais complexas – processo de *unitizing*. De facto, o raciocínio proporcional quantitativo surge quando se escolhe uma razão como unidade (uma unidade composta, Lamon, 1993b; Lobato *et al.*, 2010) e se usa essa unidade para construir ou medir outra. Assim, os alunos devem ser confrontados com situações que estimulem o processo de *unitizing* e ser encaminhados para que redefinam o todo no maior número possível de unidades diferentes.

Também com preocupações orientadas para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos, Silvestre e Ponte (2012) propõem realçar três aspetos importantes na capacidade de raciocínio proporcional: o primeiro refere-se à distinção que é necessário dominar entre situações de proporcionalidade e situações de não proporcionalidade; o segundo diz respeito à compreensão da natureza multiplicativa inerente às relações de proporcionalidade; e o terceiro relaciona-se com a capacidade de resolução de diferentes tipos de problemas onde é revelada flexibilidade no uso de diversas abordagens, que não devem ser influenciadas pelos contextos, pelos dados e pelas representações. Silvestre (2012) analisa o modo como os alunos abordam tarefas incluídas numa unidade de ensino exploratória e conclui que o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos parece estar relacionado com o trabalho realizado em torno da exploração de tarefas. Estas tarefas evidenciam a natureza multiplicativa da proporcionalidade e incentivam o uso de múltiplas representações.

A complexidade do raciocínio proporcional revela-se quer em termos dos conceitos matemáticos subjacentes, quer em termos das experiências de aprendizagem necessárias à sua compreensão. Vários autores defendem, por isso, que deve ser desenvolvido durante um longo período de tempo e não num único ponto ou capítulo do programa (NRC, 2001). As suas conexões com a Geometria, os números racionais, incluindo frações, decimais, percentagens, escalas, razões e proporções e com muitos outros tópicos matemáticos, e também porque parece ser fundamental para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, mostram que deve ser um tema unificador no decorrer dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) especificam aspetos a ter em atenção, a nível do 2.º ciclo do ensino básico, "o reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e a aptidão para usar o raciocínio proporcional em problemas diversos" (p. 65). Miller e Fey (2000) no estudo que realizaram, em que exploram uma sequenciação de tarefas, vão mais longe e referem a importância do contexto nos problemas de proporcionalidade, onde as conexões com situações conhecidas do dia a dia dos alunos os tornam mais acessíveis.

Embora os investigadores em educação tenham consciência que o raciocínio proporcional é complexo, Lamon (2007) refere que nos livros de texto, nos processos de avaliação em larga escala e na investigação, o domínio da razão e da proporção tem sido definido tradicionalmente em termos de dois problemas tipo: (*a*) problemas de comparação em que são indicados quatro valores e o objetivo é comparar as razões consideradas. Por exemplo: *O João faz concentrado de limonada misturando 3 colheres de açúcar com 12 colheres de sumo de limão. A Maria, por sua vez, faz concentrado de limonada juntando 5 colheres de açúcar e 20 de sumo de limão. Qual dos dois concentrados é mais doce? Ou têm ambos o mesmo sabor?*; (*b*) problemas de valor omisso em que são indicados três dos quatro valores numa proporção e o objetivo é determinar o valor em falta. Um exemplo: *A fórmula para a obtenção de um certo tom de tinta azul resulta de misturar 2 partes de tinta azul e 3 de tinta branca. Com esta razão, que quantidade de tinta branca é necessária se foram utilizadas 9 partes de tinta azul?*. Vários processos de resolução podem ser admitidos quer num problema quer no outro. No entanto, no primeiro a ênfase centra-se muitas vezes em encontrar o valor de cada uma das razões e perceber que, neste caso, representam o mesmo número racional e, como tal, os concentrados têm o mesmo sabor. No segundo problema, o enfoque é geralmente a tradução algébrica da situação e a sua resolução algorítmica.

Globalmente, para definir raciocínio proporcional, os autores analisados baseiam-se quer nas características matemáticas do conceito de proporcionalidade, quer nos diferentes tipos de problemas e distintos processos de resolução. Defendem que o raciocínio proporcional é essencial para a resolução de muitas situações tanto do dia a dia como da própria Matemática, serve de base a raciocínios mais elaborados e desenvolve-se através da resolução de tarefas apropriadas, ao longo de vários anos de escolaridade. Também, como foi referido anteriormente, o desenvolvimento do raciocínio proporcional depende da compreensão profunda de tópicos anteriormente trabalhados, como seja o caso das operações multiplicação e divisão, é uma consequência da compreensão da natureza dos números racionais e é promovido através de uma compreensão conceptual de razão e de proporção. Estes conceitos são complexos e difíceis e representam um desafio quer a nível do ensino quer da aprendizagem.

2.1.5 Em síntese

No quadro 1 resumo a visão mencionada nesta secção sobre as estruturas multiplicativas e o raciocínio proporcional. Acerca de cada perspetiva teórica indico os conceitos e as suas principais conexões, as estratégias e procedimentos na resolução de problemas e as possíveis representações. A exploração de tarefas diferenciadas e promotoras de abordagens diversificadas surge como fio condutor do processo de ensino e aprendizagem, tendo em vista uma aprendizagem significativa e com compreensão.

Quadro 1: Síntese (Estruturas multiplicativas e raciocínio proporcional)

<table>
<tr><td rowspan="5">Estruturas multiplicativas</td><td>Teorias</td><td>Conceitos</td><td>Estratégias de resolução/procedimentos</td><td>Representações</td><td rowspan="5">Raciocínio proporcional</td></tr>
<tr><td>Campos conceptuais
(Vergnaud)</td><td>• Espaços de medida (uma ou duas dimensões)
➢ Razão
▪ dentro
▪ entre
➢ Proporção</td><td>• Operadores
➢ escalar (e respetiva inversão)
➢ funcional (e respetiva inversão)
• Operações
➢ multiplicação
➢ divisão</td><td>• Tabelas de razões</td></tr>
<tr><td>Fenomenologia didática
(Freudenthal)</td><td>• Fração
➢ comparar
➢ mapping
• Razão
➢ interna } quociente
➢ externa
• Número racional</td><td>• Comparação
• Mapping
➢ ampliar
➢ reduzir</td><td>• Icónica → representação linear → segmento unitário</td></tr>
<tr><td>Quantitativa
(Thompson e Saldanha)</td><td>• Medida
• Razão
➢ relação invariante em relação à unidade de medida
• Quantidade
➢ intensiva
➢ extensiva</td><td>• Comparação
➢ direta
➢ indireta
• Unidade composta
• Operações quantitativas</td><td>• Icónica → representação linear
• Tabelas de razões</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tarefas diferenciadas proporcionam abordagens e interpretações distintas.
Diferentes tipos de problemas que evidenciam conexões entre a Matemática e a vida real.</td></tr>
</table>

2.2 Representações na aprendizagem matemática

As representações são parte intrínseca da comunicação, sem elas não há de facto possibilidade de os vários elementos de uma comunidade comunicarem entre si. Permitem a ligação entre os raciocínios que efetuamos (ou que outros efetuam) na resolução de uma qualquer situação, de âmbito matemático ou não.

As representações matemáticas permitem relacionar vários processos matemáticos (resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático), que de outra forma não seria possível (NRC, 2001). Nas últimas décadas, verificou-se uma progressiva valorização das representações no ensino e aprendizagem da Matemática a nível de orientações curriculares. Internacionalmente, por exemplo, NCTM (1989) propõe que deve ser dada aos alunos, em particular entre o 5.º e o 8.º ano de escolaridade, a oportunidade de comunicarem matematicamente e que, para tal, devem “modelar situações usando métodos orais, escritos, concretos, pictóricos, gráficos e algébricos” (p. 78). Nesse sentido, cabe aos professores “encorajar e aceitar o uso de (…) materiais concretos usados como modelos; figuras, diagramas, tabelas e gráficos; termos e símbolos inventados ou convencionais” (NCTM, 1994, p. 55). A nível nacional, por exemplo, no documento programático de 2007 refere-se que além das capacidades transversais (processos matemáticos) já mencionadas, se valorizam “também outras capacidades como as de representação e de estabelecimento de conexões dentro e fora da Matemática” (ME, 2007, p. 8) e que estas serão exploradas no trabalho com as outras e com os diversos temas matemáticos, ao longo de toda a escolaridade do ensino básico.

Numa aprendizagem matemática ativa e com compreensão por parte dos alunos, as representações desempenham nesse processo um papel que se tem tornado relevante e, por isso, devem ser consideradas como elementos essenciais na compreensão de conceitos, de procedimentos e nas relações entre ambos. De acordo com NCTM (2000), “a representação é central para o estudo da matemática” (p. 280) e, como tal, a sua importância surge tanto nas ações dos alunos (aprendizagem) como do professor (ensino) (NCTM, 2014).

Sob o ponto de vista da psicologia e da educação matemática, existem diferentes modos de representação e diferentes classificações e Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) salientam que “o conceito de representação é um conceito complexo que pode ser encarado de diversas formas” (p. 360).

Compreender o modo como os alunos do 6.º ano desenvolvem a comparação multiplicativa, relacionando as estratégias de resolução, os procedimentos e as representações que utilizam com as características dos números envolvidos e com as propriedades das operações, leva-me, nesta secção, a discutir alguns dos significados de representação, incluindo os seus diversos modos, e as conexões entre representação e compreensão de conceitos e de procedimentos, em particular, no que respeita aos conceitos de razão e proporção.

2.2.1 Representação e modos de representação

Bruner (1966) defende que qualquer ideia, problema ou corpo de conhecimento pode ser apresentado de uma forma suficientemente simples para que quem aprende possa compreendê-lo de uma forma reconhecível. Especifica que qualquer domínio de conhecimento (ou qualquer problema nesse domínio) pode ser representado de três modos (ou níveis): representação ativa que surge através de um conjunto de ações apropriadas para atingir determinado resultado; representação icónica que nasce através de um conjunto sumário de imagens ou gráficos que se ligam a um conceito sem o definirem completamente; representação simbólica, onde surge um conjunto de símbolos ou proposições lógicas traçadas a partir de um sistema simbólico que é gerido por regras e leis para formar e transformar proposições.

A caracterização e os exemplos explorados por Bruner (1966) sugerem que estes modos de representação ocorrem numa sequência hierárquica (baseada, por exemplo, no desenvolvimento cognitivo e na faixa etária). Clements (1999) discute o entendimento de "materiais manipulativos concretos" e de "ideias concretas", duvida da utilidade da sequenciação e defende que para facilitar a progressão na aprendizagem, as representações devem ser significativas e os objetos e as ações devem surgir e ser utilizados em paralelo com os objetos (ideias) e os procedimentos matemáticos. Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) notam também que "estas diferentes possibilidades de representação não devem ser entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras" (p. 71), mas ser conectadas de forma circular. Cada um é livre de começar por utilizar o modo de representação que considera mais adequado para a tarefa que se propôs resolver, tendo em conta os conhecimentos que possui, e de progredir nesse ou para um outro modo, se isso lhe for conveniente.

Lesh, Landau e Hamilton (1983) focam a discussão na compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos e propõem cinco modos de representação úteis: (a) oralidade; (b) símbolos escritos; (c) modelos figurativos estáticos (desenhos ou diagramas); (d) modelos manipuláveis (materiais concretos); (e) situações da vida real. O anterior modelo de

Bruner é ampliado com dois modos de representação, situações do mundo real e oralidade. As situações da vida real e os modelos manipuláveis fazem parte das representações ativas, os modelos estáticos figurativos ficam englobados nas representações icónicas e a oralidade e os símbolos escritos incluem-se nas representações simbólicas. Behr, Harel, Post e Lesh (1992) referem-se a este modelo, com ligeiras alterações de terminologia (figura 18), e afirmam que pressupõe mudanças em e entre os modos de representação.

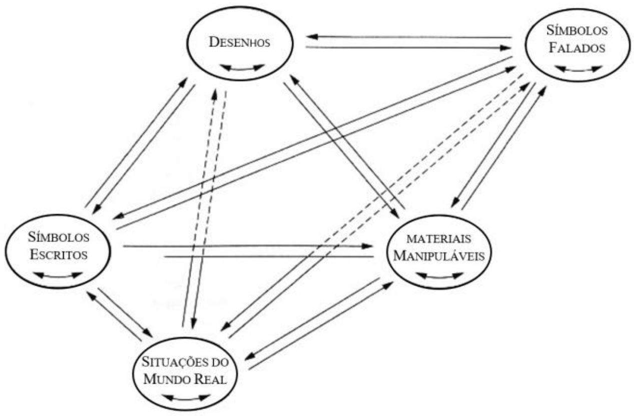


Figura 18: Modelo de Lesh para as translações entre modos de representação (Behr *et al.*, 1992)

Baseados nas suas investigações, acreditam que é a capacidade de os alunos efetuarem essas transições que torna as ideias poderosas para eles. Estas transições só podem ser efetuadas se compreenderem o conceito em questão num determinado modo. Depois, devem reinterpretá-lo no sentido de o colocar num outro modo ou de uma outra maneira no mesmo modo. Esta compreensão e reinterpretação são processos cognitivos (intelectuais) importantes e necessitam ser encorajados a nível do processo de ensino e aprendizagem.

A importância das representações a esse nível é realçada pelo NCTM (2000) quando propõe que os programas curriculares de Matemática dos diferentes anos de escolaridade proporcionem a todos os alunos a criação e o uso de representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas, a seleção, aplicação e tradução de representações matemáticas na resolução de problemas e o uso de representações para a modelação e interpretação de fenómenos físicos, sociais e matemáticos. Consequentemente, ao longo de toda a escolaridade, a multiplicidade de representações e a sua eficácia deve ser enaltecida e, por isso,

> os alunos necessitam trabalhar intensivamente com cada representação em vários contextos, tal como alternar entre representações de modo a compreenderem como podem usar uma representação para modelar ideias e relações matemáticas. (NCTM, 2000, p. 209)

Por exemplo, representar frações como um sector circular, como partes de um retângulo ou de uma outra figura qualquer pode auxiliar na interpretação de fração no sentido parte-todo, na equivalência de frações ou na adição de frações com o mesmo denominador. No entanto, estas representações tornam-se insuficientes quando a fração é interpretada como uma razão, uma divisão ou um número. Neste caso, outras representações devem ser exploradas: pontos na linha numérica ou razões entre elementos discretos de um conjunto. Compreender cada uma das representações e escolher aquelas, ou aquela, que melhor se adequam, ou adequa, à situação que pretendemos resolver é também algo que deve ser incentivado no processo de ensino e aprendizagem. Proporcionar aos alunos oportunidades para usar, desenvolver, comparar e analisar uma variedade de representações, permite-lhes tornarem-se mais competentes em selecionar o que necessitam para resolver um determinado problema. Os alunos representam as suas ideias quando organizam os dados numa tabela, quando descrevem por palavras ou desenhos características importantes de um objeto ou quando traduzem determinados aspetos de um problema numa equação.

Segundo Thomas, Mulligan e Goldin (2002) existem, de modo similar, três tipos fundamentais de sinais ou caracteres que surgem como componentes nas representações produzidas pelos alunos na resolução de tarefas: pictóricos, icónicos e simbólicos. Representações pictóricas são consideradas como desenhos de objetos que podem, ou não, ser acompanhados por uma descrição oral. Representações icónicas são definidas de forma a englobar registos de marcas, quadrados, círculos ou pontos numa tradução menos realista que as anteriores. Representações simbólicas são evidenciadas pelo uso predominante de numerais e outros símbolos matemáticos e podem surgir na reta numérica, numa matriz, numa régua ou numa coluna vertical. Estes autores discutem, por exemplo, a emergência de desenvolvimento estrutural nos sistemas de representação internos das crianças, através de características estruturais nas representações externas dos números de 1 a 100 (agrupar, reagrupar, distribuir e identificar padrões) e realçam a comunicação oral como um meio de descrever e esclarecer as representações escritas.

Goldin e Shteingold (2001) referem que “uma representação é tipicamente um sinal ou uma configuração de sinais, carateres ou objetos” (p. 3), identificam dois sistemas de representação e respetivos níveis de desenvolvimento e defendem igualmente que as conexões entre ambos são essenciais à compreensão e à progressão na aprendizagem (Goldin, 1998). Os sistemas externos de representação incluem as representações convencionais, que são geralmente simbólicas (por exemplo, o sistema de numeração base dez, a notação algébrica formal de representar uma expressão ou equação), permitem mostrar relações visuais ou espaciais (no caso da reta numérica real, de um gráfico cartesiano, de diagramas geométricos ou de imagens de fractais geradas através do computador) e englobam ainda palavras e frases na forma escrita ou oral. Os sistemas internos de representação são criados na mente de cada um de nós, descrevem construções de simbolização pessoal e de atribuições de sentido quer a notações matemáticas, quer à própria linguagem natural (sistemas verbais/sintáticos de representação) e incluem configurações cognitivas visuais e espaciais (sistemas imagéticos de representação). As estratégias de resolução de problemas e as heurísticas são também representadas internamente enquanto desenvolvemos e organizamos mentalmente, por exemplo, os processos de tentativa erro ou de trabalhar do fim para o princípio. Incluídos nos sistemas internos surgem ainda os sistemas afetivos de representação de cada indivíduo, que englobam alterações de emoções, atitudes, crenças e valores que possamos ter sobre a Matemática e a nossa relação com ela.

Esta dicotomia é também indicada por Vergnaud (1988) quando refere que uma representação pode ser encarada como dois aspetos do pensamento que interagem: o significado (a representação interna) e o significante (a representação externa). No entanto, Vergnaud (2009) realça, como já referi, que intervenientes diferentes podem não ter a mesma compreensão e, como tal, esta dicotomia (significado/significante) deve ser considerada como uma relação ternária, em que se inclui a interpretação dos invariantes operacionais (conceito-em-ação e teorema-em-ação).

O termo representação aplica-se a processos e a resultados que são observáveis externamente e aos que ocorrem "internamente" na mente dos que fazem Matemática, isto é, refere-se "à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma" (NCTM, 2000, p. 67).

As representações são, por isso, consideradas como ferramentas de suporte à compreensão de quem aprende um novo conceito ou procedimento ou de quem resolve um problema e são tidas como um elo de ligação entre resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática (NRC, 2001), como mencionei antes. A vertente oral da comunicação (discurso e explicações apresentadas) é muitas vezes ilustrada, segundo NCTM (2014), por desenhos, tabelas, diagramas ou gráficos que possibilitam uma clarificação do raciocínio de quem fala, e permite evidenciar a importância das representações visuais. Assim,

> Um ensino eficaz da matemática envolve os alunos no estabelecimento de conexões entre representações matemáticas, no sentido do aprofundamento da compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos, e assume-as como ferramentas para a resolução de problemas. (NCTM, 2014, p. 24)

Compreender é "fundamentalmente, o que resulta da interpretação pessoal dos signos, dos símbolos, das relações ou conversões" (Thompson e Saldanha, 2003). Sob um ponto de vista histórico, tal como Greer (2009) refere, muito do desenvolvimento da Matemática tem sido mediado pelo desenvolvimento de novas ferramentas de representação – os gráficos Cartesianos, a notação de exponenciação, a substituição do sistema de numeração Romano pelo sistema de numeração decimal na representação dos números naturais, são alguns exemplos. Ainda numa breve análise histórica, a evolução das representações matemáticas em várias culturas foi um processo predominantemente *ad hoc* ao longo de milénios e, como tal, as representações são frequentemente inconsistentes, ambíguas, mal projetadas e resistentes a mudanças. Mas, uma coisa é certa, os sistemas de representação ligados à Matemática são convenções, construídas culturalmente. No entanto, sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem matemática, principalmente nos primeiros anos de escolaridade, é também importante, de acordo com Greer (2009) o papel das representações não convencionais a que os alunos dão significado e que os ajudam a explicar o seu raciocínio.

2.2.2 Representações e compreensão dos conceitos razão e proporção

A representação é uma ferramenta útil para a compreensão de conceitos e para a resolução de problemas, em particular, para a resolução de situações multiplicativas onde surgem os conceitos de razão e de proporção.

Lamon (2001) refere que Vergnaud (1983, 1988), ao definir campo conceptual como um conjunto de problemas e situações nos quais as conexões entre conceitos, procedimentos e representações são necessárias, conseguiu dar resposta ao desafio e à complexidade matemática de compreender os números racionais. Estes números só podem ser compreendidos, segundo Lamon (2001), nas conexões entre um conjunto de contextos, significados, operações e representações, o que implica a coordenação de conceitos matemáticos e origina formas flexíveis de raciocinar, entre as quais se destaca o raciocínio proporcional. A compreensão de frações como "números por direito próprio e, como tal, como objetos que podem ser manipulados através da aritmética" (p. 149) é um dos objetivos do processo de ensino e aprendizagem. No entanto, a tarefa para alcançar esse objetivo nem sempre é fácil e, muito menos, imediata. Somente a exploração de diferentes interpretações de fração – comparação parte-todo, medida, operador, quociente, razão e taxa – e, para cada uma, a interpretação e análise de diferentes modos de representação – ações, desenhos, palavras e símbolos – permite ao aluno consolidar a sua compreensão sobre o campo dos números racionais. De notar também que, num determinado modo de representação, podem existir subtilezas no significado de fração, dependendo, por exemplo, se os objetos usados pertencem a um universo discreto ou contínuo, ou se são considerados como objetos unitários ou compostos.

Ao identificar diferentes tipos de problemas no isomorfismo de medidas, Vergnaud (1983, 1988) defende que a representação esquemática dos problemas, anteriormente registada, se torna importante para a sua resolução e para evidenciar o papel das estruturas multiplicativas no conceito de proporcionalidade. Nos casos exemplificados não há referência ao tipo de números que estão envolvidos e as quantidades em cada um dos espaços de medida podem ser números inteiros ou não inteiros, representados na forma de fração ou de decimal.

As conexões entre diferentes conceitos e entre diferentes modos de representação é, como já foi referido, um fator positivo para o processo de aprendizagem. Abrantes *et al.* (1999) referem-se especificamente às conexões entre o conceito de razão e os diferentes modos de representação mencionados por Bruner (1966) – ativo, icónico e simbólico – e que denominam, respetivamente, por representações concretas, figurativas e simbólicas:

> Conceitos como fração, razão, decimal e percentagem constituem ideias chave a serem trabalhadas em situações significativas para os alunos e que lhes permitam a passagem de umas representações para outras, das concretas para as figurativas e destas para as simbólicas. (Abrantes *et al.*, 1999, p. 53)

Também, de acordo com Cramer e Post (1993), as características matemáticas de todas as situações de proporcionalidade, atrás referidas, permitem reforçar a importância das conexões matemáticas e das representações na resolução de problemas. Incentivar a representação dos dados de um contexto que se pretende discutir se é ou não proporcional numa tabela, com o objetivo de identificar regularidades numéricas, traduzir as relações numéricas de comparação multiplicativa entre as duas quantidades em expressões algébricas e, por fim, traduzi-las em representações gráficas, permite avaliar criticamente os problemas e determinar se o contexto é de facto uma situação de proporcionalidade. As diferentes representações salientam diferentes aspetos da situação em estudo e cada uma fomenta ideias e conexões com as outras. Assim, as representações são consideradas relevantes para a interpretação dos problemas e para a escolha das estratégias de resolução.

Os alunos usam representações para desenvolver e aplicar a sua compreensão sobre proporcionalidade quando, segundo NCTM (2000): (i) fazem ou interpretam desenhos de figuras ou modelos físicos de objetos à escala; (ii) fazem conexões entre a noção geométrica de semelhança e as razões numéricas; e (iii) usam histogramas de frequências relativas de conjuntos de dados.

Abrahamson e Cigan (2003) propõem o ensino dos conceitos de razão e de proporção, no 5.º ano de escolaridade, baseado numa teia de conceitos em que as representações, sob a forma de tabela, vão surgindo como ferramentas auxiliares de interpretação e resolução de determinado tipo de problemas. Os alunos começam então por revisitar a operação multiplicação na respetiva tabela, interpretada como adição de parcelas iguais. A exploração de padrões nesta tabela permite-lhes abordar o conceito de taxa, considerado como uma única coluna da tabela. De seguida, discutem a noção de razão como duas colunas de taxa que estão ligadas, ou seja, representam e analisam uma tabela de razões. Por fim, identificam duas linhas na tabela de razões, o que lhes permite evidenciar uma tabela de proporções, também designada pelos autores como "quarteto de proporção" (p. 493). Esta proposta permite dar ênfase ao raciocínio multiplicativo num contexto numérico apropriado, mas onde apenas surgem os números inteiros.

Abrahamson (2006) defende que as representações matemáticas são composições conceptuais, isto é, "envolvem uma coordenação histórica de duas ou mais ideias matemáticas" (p. 464). Este autor nota que, sob o ponto de vista da aprendizagem, a composição de ideias pode estar oculta nas representações e não ser facilmente compreendida. Esta situação pode levar à utilização procedimental das representações matemáticas sem a devida compreensão de ideias que aí estão imbuídas. Para colmatar, ou pelo menos amenizar esta dificuldade, a explicação oral e as discussões entre os alunos e destes com o professor são um valioso auxiliar.

Van Galen *et al*. (2008) referem que, numa fase inicial, os modelos estão muito próximos de situações contextualizadas. À medida que a escolaridade avança, os modelos devem permitir que os alunos raciocinem fora de um contexto/situação concreta e, como tal, sugerem que a substituição de "modelos de situações concretas para modelos para pensar"

(p. 18) possa ser desenvolvida. Exemplificam esta sua pretensão com a utilização da barra dupla ou da linha numérica dupla com frações, percentagens, decimais e proporções.

Tendo em conta que o foco desta investigação é compreender o modo como os alunos do 6.º ano desenvolvem a proporcionalidade ao explorar tarefas de comparação multiplicativa, considero que as classificações relativas ao modo de representações, referidas anteriormente, são demasiado globais e senti, por isso, necessidade de as tornar mais "finas", pormenorizando-as, principalmente, no que diz respeito à que, por certo, vai ser dominante. Desta forma, por exemplo, o modo de representação simbólico tanto pode incluir a adição de parcelas iguais como a multiplicação, aspetos que revelam diferentes níveis de compreensão relativamente à evolução conceptual da comparação multiplicativa. Optei por adaptar as representações externas e simbólicas propostas por Greer (1992) para as situações multiplicativas (operações multiplicação e divisão), distinguindo: a adição de parcelas iguais, a tabela de razões ou a linha numérica dupla (em relações escalar e funcional) e o gráfico. Se as resoluções dos alunos evidenciarem mudanças no modo de representação simbólico, no sentido de a adição de parcelas iguais ir sendo substituída por tabelas de razões ou linhas numéricas duplas, isso permite-nos concluir que a aprendizagem dos conceitos relacionados com a comparação multiplicativa se encontra num processo evolutivo de construção, de acordo com Behr *et al*. (1992).

2.2.3 Em síntese

No quadro 2 resumo a visão mencionada nesta secção acerca de representações na aprendizagem matemática. Evidencio diferentes modos de representação, segundo perspetivas que se complementam. Refiro as representações como ferramenta para a resolução de tarefas de comparação multiplicativa e as suas relações com a compreensão dos conceitos de razão e proporção.

Quadro 2: Síntese (Representações na aprendizagem matemática)

		Modos	Sistemas	Sinais ou caracteres
Comunicação	**Representação**	• Ativo ○ situações da vida real ○ modelos manipuláveis • Icónico ○ desenhos ○ diagramas • Simbólico ○ palavras faladas ○ símbolos escritos (Bruner; Lesh *et al.*)	• Externos • Internos (Goldin)	• Pictóricos • Icónicos • Simbólicos (Thomas *et al.*)
		Ferramentas para a resolução de problemas e explicitação do raciocínio matemático.		
		Compreensão dos conceitos de razão e de proporção.		

2.3 Flexibilidade na aprendizagem matemática

Uma aprendizagem significativa em Matemática está relacionada com perícia, competência, conhecimento e facilidade, ou seja, segundo NRC (2001), está relacionada com proficiência matemática, considerada como um entrelaçar entre compreensão conceptual (compreensão de conceitos matemáticos, operações e relações), fluência de procedimentos (competência em executar procedimentos de forma flexível, precisa, eficiente e apropriada), competência estratégica (capacidade de formular, representar e resolver problemas matemáticos), raciocínio adaptativo (capacidade para o pensamento lógico, a reflexão, a explicação e a justificação) e tendência produtiva (propensão comum para ver a Matemática como sensata, útil e interessante e para crer também no seu zelo e na sua própria eficácia).

Na sua preocupação com a aprendizagem, um ensino da Matemática deve criar alicerces em "práticas poderosas" consideradas como as que "estão no âmago da atividade de ensinar e que têm maior probabilidade de influenciar a aprendizagem" (NCTM, 2014, p. 8) e que devem ter como meta, entre outras, que os alunos cheguem à fluência de procedimentos a partir da compreensão conceptual. A fluência de procedimentos decorre e constrói-se com base na compreensão conceptual, no raciocínio estratégico e na resolução de problemas. "Ser fluente" é entendido como ser capaz de escolher de forma flexível métodos e estratégias para a resolução de um problema contextualizado ou puramente matemático, compreender e ser capaz de explicar as abordagens usadas e elaborar respostas que solucionem a situação em causa (NCTM, 2014).

No campo da educação matemática, em particular no ensino e na aprendizagem, o foco na flexibilidade tem-se vindo a acentuar e tem tido um relevo significativo nas investigações realizadas (Elia, Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009). Vários são os estudos que, ao longo das últimas décadas, apresentam preocupações com a flexibilidade em diferentes áreas da Matemática, retiram conclusões e propõem orientações para a melhoria do ensino e para uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, desenvolvendo e implementando materiais e planeando intervenções para o seu aperfeiçoamento.

A flexibilidade em Matemática surge associada à utilização de estratégias (ou procedimentos), ao uso de representações e à criatividade. A discussão em torno da flexibilidade de estratégias desenvolve-se, em particular, na relação entre conhecimento de conceitos e de procedimentos, na influência que cada um determina no outro e no quanto ambos são imprescindíveis para a compreensão. A discussão de flexibilidade no uso de representações assume-se genericamente na importância que os diferentes modos de representação e as suas conexões têm na compreensão de conhecimentos e de procedimentos e na resolução de problemas. A discussão entre flexibilidade e criatividade surge numa tentativa de as relacionar no espetro mais amplo das capacidades matemáticas.

Discuto cada uma destas vertentes através de investigações que ilustram diferentes campos de ação e reflexão. Primeiro, caracterizo uma linha de pensamento que vai da flexibilidade na utilização de estratégias (ou procedimentos) à flexibilidade na construção de estratégias, em particular, no que respeita ao cálculo mental. Não existe uma definição unânime, principalmente no que respeita à flexibilidade no uso de estratégias. Alguns autores distinguem flexibilidade de adaptabilidade, outros consideram-nas sinónimos. De seguida, abordo a flexibilidade no uso de representações e refiro-me sumariamente, por não estar diretamente ligado às questões da investigação, às conexões entre flexibilidade e criatividade matemática. Por último, apresento a flexibilidade na construção de estratégias e na utilização de representações na resolução de tarefas de comparação multiplicativa, propondo um modelo de análise da evolução conceptual.

2.3.1 Flexibilidade, do uso à construção de estratégias/procedimentos

Em muitas investigações, flexibilidade surge em áreas relacionadas com o cálculo aritmético ou algébrico e, em particular, com o cálculo mental, analisado mais à frente numa outra subsecção. O corpo de conhecimento sobre as características da flexibilidade na utilização de estratégias baseia-se em estudos que analisam situações de cálculo desprovidas de contexto e que permitem, por isso, colocar em evidência somente "o que se faz com os números" e como "se pensam os números" nas relações entre si e no seu papel operativo.

A flexibilidade na utilização de estratégias (ou procedimentos) relaciona-se com multiplicidade (múltiplos procedimentos na resolução de um conjunto de problemas) (Dowker, 1992; Sowder, 1992; Selter, 2001; Star & Seifert, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007; Berk, Taber, Gorowara, & Poetzl, 2009), versatilidade (utilizar múltiplos processos de resolução de um dado problema) (Berk *et al.*, 2009) e eficiência (escolher um, de entre vários métodos, com base na competência relativa) (Blöte, van der Burg, & Klein, 2001; Selter, 2001; Star & Seifert, 2006; Robinson & LeFevre, 2012).

Uma característica dos especialistas (matemáticos) identificada por Dowker (1992) é a flexibilidade no uso de estratégias, em detrimento da utilização de uma única estratégia. Perante várias tarefas de cálculo por estimação – definido como a construção de hipóteses razoáveis para respostas aproximadas a questões aritméticas, sem ou antes de efetivamente se efetuarem os cálculos – envolvendo as operações multiplicação e divisão, os matemáticos mostraram uma variedade de estratégias apropriadas e uma versatilidade na sua escolha, selecionando aquelas que se baseavam em propriedades das operações e nas relações entre si. Não utilizaram um método padronizado e as suas estratégias envolviam uma forma lúdica de pensar os números em vez de serem uma aplicação de técnicas memorizadas.

O sucesso no processo de estimação mesmo quando desenvolvido por alunos que não são, obviamente, especialistas relaciona-se, segundo Sowder (1992), com a multiplicidade de estratégias utilizadas, alicerçadas concretamente na compreensão de números, operações e suas propriedades e relações, e requer um trabalho continuado.

Numa investigação onde se propôs descrever o sucesso, os métodos (mental, escrito informal e escrito padrão) e as estratégias de resolução escritas e informais, de alunos alemães do 4.º ano de escolaridade, em problemas de adição e de subtração (não contextualizados) com números de três dígitos, Selter (2001) define o que entende por métodos escritos padrão. Tais métodos são caracterizados quando se pensam os números divididos nas suas várias ordens, ou seja, dígito a dígito, e em que estes são manipulados maioritariamente da direita para a esquerda, efetuando-se, se necessário, os reagrupamentos respetivos nas operações adição e multiplicação. Selter (2001) denomina-os por métodos de dígitos, em contraponto com os métodos de números que compreendem quer os métodos mentais, quer os métodos escritos informais. Para ele, a distinção entre métodos de dígitos e de números é clara, embora o mesmo não suceda com a distinção entre métodos mental e escritos informais. É também nítido, e sustentado em resultados de investigação, que deve ser repensado o papel dos algoritmos padrão no ensino e na aprendizagem das operações aritméticas elementares e realçada a importância da flexibilidade na utilização de estratégias.

As tarefas escolhidas para a referida investigação são problemas não contextualizados, quatro para a adição e quatro para a subtração, construídos por forma a possibilitar a utilização de uma estratégia flexível de aritmética de números. Foram selecionadas e antecipadas, como exemplos, quatro estratégias: (a) tarefa auxiliar na adição – realizar uma tarefa diferente, intimamente relacionada com a proposta, e depois compensar; (b) combinando na adição – adicionar primeiro dois números convenientes e depois o terceiro; (c) tarefa auxiliar na subtração – realizar uma tarefa diferente, intimamente relacionada com a proposta, e depois compensar; (d) tornar igual na subtração – considerar a subtração não apenas no sentido de retirar, mas também no de adicionar, principalmente se a diferença entre os números é pequena.

No entanto, as diferentes estratégias de aritmética flexível antecipadas pelo investigador, e atrás mencionadas, apareceram raramente na resolução dos alunos. Em vez disso, a maioria dos problemas foi resolvida, nos três momentos de recolha de dados, de acordo com uma mesma estratégia individual onde, por exemplo, o trabalhar “centenas, dezenas e unidades” foi o processo mais utilizado. Com estes resultados, Selter (2001) realça algumas implicações para o ensino da aritmética no domínio dos números (naturais) até 1000: reforçar o papel da aritmética dos números (deve ser disponibilizado mais tempo aos métodos mentais e aos métodos escritos informais); encorajar a reflexão constante no método utilizado e, consequentemente, defender a substituição da sequência "primeiro mental, depois informal e, finalmente, escrito formal" (p. 169) por uma abordagem de todos os métodos em várias aulas, evidenciando a comparação de diferentes métodos em relação à sua adequação a certos problemas (e a certas crianças); desenvolver continuamente um sentido para as relações com números; incorporar as estratégias das crianças;

estabelecer formas acessíveis e rápidas de registo da aritmética escrita informal; revalorizar a operação subtração explorando-a sob diferentes perspetivas, não apenas com o sentido de retirar, mas também de tornar igual, este último bastante importante na subtração de números inteiros negativos.

No que se refere à flexibilidade na adição e na subtração de números com dois dígitos, Blöte *et al*. (2001) definem-na como a capacidade de escolher de entre vários processos de resolução igualmente válidos, mas explorando as características dos números envolvidos com vista a reduzir as questões computacionais. Por exemplo, perante a questão de calcular 45 + 39, uma criança que mostre flexibilidade no domínio da adição pode encontrar a soma de 45 com 40 e depois subtrair 1. Nesta estratégia aproveitou o facto de o subtrativo, 39, ser muito próximo de 40, e evitou o reagrupamento exigido pelo algoritmo usual. Estes investigadores, nos seus estudos com alunos do 2.º ano sobre os processos por eles utilizados na resolução de problemas de adição e de subtração de números com dois dígitos, constataram que a comparação e discussão de diferentes processos de resolução influencia a flexibilidade. As crianças que criaram e discutiram os seus próprios processos de resolução e compararam, posteriormente, as vantagens e desvantagens de cada um, mostraram uma maior flexibilidade do que aquelas que começaram por trabalhar um procedimento e, em seguida, estudaram, à vez, procedimentos alternativos.

A flexibilidade está, pois, relacionada não só com a diversidade, mas também com a eficiência nos métodos utilizados. Star e Seifert (2006) discutem o desenvolvimento da flexibilidade na utilização de procedimentos matemáticos, em particular, na resolução de equações do primeiro grau. Consideram que depois de lhes ter sido ensinado o processo algorítmico de resolução de equações do primeiro grau, os alunos que surgem como resolvedores mais flexíveis são aqueles que têm conhecimento de vários procedimentos para chegar à solução e capacidade de inventar ou inovar na criação de novos procedimentos. Invenção de novos procedimentos algébricos envolve, neste caso, a utilização de transformações numa combinação não usual, atípica ou inovadora do processo de resolução de equações tido como padrão (passo 1 – utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para eliminar os parenteses; passo 2 – transformar a equação para a forma *standard* ($ax + b = cx + d$), combinando todos os termos com variável e todos os termos constantes em cada um dos membros; passo 3 – colocar os termos com variável do lado esquerdo e as constantes do lado direito do sinal igual; passo 4 – dividir ambos os membros pelo coeficiente do termo com variável). Assim, flexibilidade pressupõe, segundo Star e Seifert (2006), um amplo conhecimento de procedimentos dentro de um determinado domínio e, como tal, os "resolvedores flexíveis têm mais 'ferramentas' na sua 'caixa de ferramentas' de procedimentos" (p. 283). Isto não é, na sua opinião, suficiente, o que faz com que realcem também a "capacidade de usar as 'ferramentas' da 'sua caixa de ferramentas' de formas não padronizadas que proporcionem uma melhor execução em certos tipos de tarefas" (p. 283), ou seja, que obtenham a solução de uma forma mais eficiente, com um menor número de passos.

Rittle-Johnson e Star (2007) realçam a importância e influência de uma determinada conceção pedagógica – discussão e comparação de diferentes processos de resolução – no desenvolvimento da flexibilidade. Conjeturaram que a comparação de diferentes métodos de resolução levaria a um maior conhecimento de procedimentos e de conceitos e também a uma maior flexibilidade, na ideia de incentivar os alunos a escolher um método mais eficiente na resolução de equações lineares. Referindo-se apenas à avaliação da flexibilidade abordada num pré-teste e num pós-teste, esta baseou-se em três componentes: (a) gerar múltiplos métodos de resolução; (b) reconhecer múltiplos métodos de resolução; (c) avaliar métodos de resolução não convencionais. No final da sua investigação, constataram que os alunos do 7.º ano de escolaridade que resolviam equações comparando simultaneamente diferentes processos de resolução obtiveram maior flexibilidade do que aqueles que estudaram os mesmos processos de resolução, mas de forma isolada. Em particular, os alunos que trabalharam a comparação de múltiplas resoluções eram mais competentes a resolver a mesma equação usando vários métodos e mais propensos a apresentar métodos mais eficientes para resolver equações, ou seja, demonstraram uma maior flexibilidade.

O desenvolvimento da flexibilidade no domínio do raciocínio proporcional com futuros professores surge numa investigação de Berk *et al*. (2009), onde é realçada a importância da exploração em sala de aula da comparação de diferentes métodos de resolução no apoio à flexibilidade dos alunos em Matemática, já referida por outros autores (Rittle-Johnson & Star, 2007), e na qual se propõem replicar as conclusões num outro contexto. Admitem que flexibilidade no domínio do raciocínio proporcional e, mais especificamente, na resolução de problemas de valor omisso, consiste em três componentes: (i) conhecimento e capacidade de utilizar cinco processos de resolução numa coleção de problemas de proporção – produto cruzado; fator escalar entre espaços de medida; fator escalar dentro de espaços de medida; razão unitária; ampliação (*scaling up*, no original) e redução (*scaling down*, no original); (ii) capacidade de resolver o mesmo problema de proporção através de processos diferentes; (iii) capacidade de escolher estrategicamente de entre vários métodos, de maneira a reduzir as exigências computacionais.

A flexibilidade na utilização de procedimentos matemáticos consiste, de acordo com Berk *et al*. (2009), na capacidade de utilizar múltiplos processos de resolução num determinado conjunto de problemas, resolver um mesmo problema utilizando múltiplos processos e escolher estrategicamente de entre métodos específicos, com base na sua eficiência relativa a um determinado problema, e foi identificada por vários investigadores como a componente chave de um profundo conhecimento procedimental (*procedural knowledge*, no original). A construção da flexibilidade torna possível amenizar as visões tradicionais de conhecimento procedimental como algo "habitual, superficial e binário" (Berk *et al*., 2009, p. 133) e, por isso, com características algorítmicas. Mais do que saber como usar um procedimento único para resolver uma classe de problemas, a flexibilidade implica o conhecimento e a capacidade de usar vários métodos para resolver tais problemas, bem como a capacidade de escolher estrategicamente de entre esses métodos o que mais se adapta. Este estudo revelou que os alunos de matemática, neste caso, futuros professores do ensino básico, podem, com o apoio adequado, tornar-se utilizadores mais flexíveis de procedimentos matemáticos. Estes investigadores consideram, ainda, que a sua investigação pode ter respondido à questão colocada em NRC (2001) no sentido de reformular o que se entende por conhecimento procedimental em Matemática, tido como um domínio complexo e multifacetado.

Robinson e LeFevre (2012) utilizam a caracterização de quem resolve problemas de forma flexível associada a alguém que implemente procedimentos elementares de simplificação de cálculo (*shortcut procedures*, no original), baseados na compreensão e no uso da relação inversa entre a multiplicação e a divisão. Defendem a pertinência deste estudo pela maior dificuldade de compreensão dos conceitos multiplicativos relativamente aos aditivos. Na sua opinião, os procedimentos relativos à adição e à subtração podem ser extensivos à multiplicação e à divisão, no entanto, estas operações têm também características únicas que permitem ligá-las, por exemplo, a outro tipo de números. Desta forma, propõem-se estudar a resolução de expressões numéricas de três-termos tipo: $a \times b : b$ e $a \times b : c$, onde a, b e c são inteiros positivos. Para tal, por um lado, admitem duas ideias fundamentais no conhecimento conceptual relativamente à multiplicação e à divisão: (a) princípio da inversa entre a multiplicação e a divisão – $b : b = b \times \frac{1}{b} = 1$; (b) propriedade associativa da multiplicação – $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Por outro lado, defendem que a compreensão e utilização destas duas ideias permite aplicar procedimentos de simplificação de cálculo, que designam de simplificação por inversão (*inversion shortcut*, no original) e de simplificação associativa (*associativity shortcut*, no original).

É neste tipo de procedimentos que Robinson e LeFevre (2012) assumem ver refletida a capacidade de cada um em aplicar flexivelmente o seu conhecimento conceptual na simplificação de expressões com que possam confrontar-se, nem que seja raramente, evidenciando uma estratégia de cálculo eficiente que pode reduzir o tempo e os erros de resolução relativamente ao procedimento comum da esquerda para a direita. As autoras admitem que a utilização destes procedimentos não é uma evidência do conhecimento conceptual, mas é uma atitude que deve ser tida em conta.

Associando o conceito de flexibilidade à utilização de estratégias individuais, convém referir que alguns autores identificam significados diferentes para os conceitos "flexível" e "adaptativo" enquanto outros consideram-nos sinónimos. Uns distinguem entre o uso flexível de estratégias (flexibilidade), que significa que cada um tem a capacidade de escolher entre múltiplas estratégias e de alternar entre elas, mas não de selecionar necessariamente a mais apropriada, e o uso adaptativo de estratégias (adaptabilidade) que engloba também a escolha da estratégia mais apropriada, onde realçam a capacidade de cada um em, mais ou menos conscientemente, selecionar e utilizar a abordagem mais adequada para a resolução de um determinado problema, num determinado contexto sociocultural (Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & van Dooren, 2009). Assim, num entendimento mais estrito, flexibilidade está apenas relacionada com a escolha de estratégias e, num entendimento mais amplo, inclui igualmente a decisão de escolher a que é mais adequada. Em qualquer dos casos, surgem incluídas na definição de flexibilidade e de adaptabilidade as particularidades do indivíduo, da tarefa e do contexto.

A conceção de flexibilidade de Heinze, Star e Verschaffel (2009), para além de incluir a adaptabilidade, inclui as características da tarefa, do contexto e do que pode fazer sentido para o aluno que, em grande parte, está intimamente relacionado com a fase de progressão da sua aprendizagem matemática. De facto, um aluno que ainda recorre frequentemente à contagem um a um tem necessariamente uma flexibilidade muito reduzida para resolver, por exemplo, problemas de adição/subtração.

Segundo estes autores, existe, no entanto, consenso na comunidade de educadores matemáticos em que cada um deve ser capaz de resolver tarefas matemáticas não apenas de forma rápida e eficiente, mas também de uma forma adaptativa, ou seja, deve ter a capacidade de as resolver com flexibilidade através de estratégias e representações que tenham significado para si, tendo em conta o tópico, a tarefa e/ou as características do contexto.

A flexibilidade é reconhecida por vários investigadores, de acordo com Berk *et al.* (2009), como a componente chave de um profundo conhecimento procedimental. A flexibilidade em Matemática é, pois, identificada como o conhecimento de múltiplos processos de resolução num determinado conjunto de problemas e a capacidade de escolher estrategicamente de entre esses métodos, com base na sua eficiência relativa num determinado problema.

Para a coexistência entre multiplicidade e versatilidade Hatano (2003) e Verschaffel *et al.* (2009) defendem que devemos considerar dois tipos de perícia, bastante diferentes. Por um lado, possuir uma perícia de rotina (*routine expertise*, no original) permite resolver problemas rotineiros de forma rápida e eficiente, utilizando procedimentos que se automatizaram; por outro lado, ser detentor de uma perícia adaptativa (*adaptive expertise*, no original) permite compreender como e porque funcionam os procedimentos e ser capaz de os modificar e adaptar, à medida que as condições do problema se alteram. Possuir perícia adaptativa significa, por isso, não estar limitado a regras ou procedimentos, ter acesso a muitas formas de encontrar com sucesso uma solução e, se necessário inventar novos.

Uma perspetiva construtivista da aprendizagem no campo dos números e das operações baseia-se no princípio que as crianças devem construir a sua própria rede de competências e conceitos e, segundo Baroody (2003), isso implica que, ao longo do tempo, a construção de conexões entre as noções/conceitos adquiridos e os procedimentos de cálculo seja explícita. O consenso desta visão desaparece, no entanto, quanto às formas como se relacionam e ao impacto das conexões no desenvolvimento de conceitos e procedimentos. Baroody (2003) expõe três conclusões adicionais acerca da investigação em torno da relação do conhecimento conceptual e procedimental:

(1) o conhecimento conceptual está normalmente subjacente a procedimentos inovadores – embora pareça que as crianças aprendem muitas competências matemáticas, sem com-

preender plenamente a sua base conceptual, a visão de considerar as competências primeiro não fornece uma explicação adequada de como elas podem facilmente desenvolver ou adaptar procedimentos apropriados a várias tarefas matemáticas. Carpenter (1986) rejeita esta visão e conclui que a aprendizagem de procedimentos, mesmo os que possam ser considerados informais, tem pelo menos uma base ou um sustento conceptual;

(2) perícia adaptativa envolve a integração de conhecimento conceptual e procedimental – segundo Carpenter (1986), "o desenvolvimento isolado do conhecimento conceptual não conduz à aquisição de procedimentos para resolver problemas de adição e subtração" (p. 119). Desta forma, o desenvolvimento de perícia aritmética adaptativa, não pode simplesmente ser equiparado com a construção de compreensão. Envolve também a construção de vínculos entre conhecimento conceptual e procedimental. Surgem, por isso, duas consequências fundamentais, decorrentes da hipótese que o desenvolvimento de perícia aritmética adaptativa pode ser caracterizado pela crescente integração destes dois tipos de conhecimento: (a) considerar que a distinção entre conhecimento conceptual e procedimental será inicialmente difusa, independentemente da natureza do processo de ensino, ou que essa distinção se torna clara mais tarde, dependendo muito do processo de ensino; (b) considerar que a integração do conhecimento conceptual e procedimental deverá permitir uma maior flexibilidade na invenção e no uso de estratégias ou procedimentos;

(3) o conhecimento conceptual pode ter um papel, quer direto quer indireto, na invenção de procedimentos – o pressuposto é que o desenvolvimento evolui desde compreensões localizadas ou *week schemas* (no original) até conceitos gerais ou *strong schemas* (no original) e que existem também fatores não-conceptuais, como um mecanismo para promover o desenvolvimento ou a escolha de estratégias.

A construção progressiva de uma rede de conexões caracteriza o desenvolvimento esperado da flexibilidade na invenção e na utilização de estratégias (perícia adaptativa) e é baseada, de acordo com Baroody (2003), nas duas últimas ideias.

A discussão em torno da flexibilidade na construção de estratégias desenvolve-se, portanto, na relação entre conhecimentos conceptual (compreender "porque fazer") e procedimental (saber "como fazer"), na influência que cada um determina no outro e no quanto ambos são imprescindíveis para a compreensão matemática. Freudenthal (2002) e Sfard (1991) referem que o processo histórico de construção da Matemática é caracterizado por uma série de transições nas quais as ações (processos) são compactadas em objetos, os quais, por sua vez, são usados como *input* de novos processos. Sugerem que se adote este processo como um modelo para orientar as aprendizagens dos alunos no domínio dos números e das operações.

De acordo com este esquema de desenvolvimento, Sfard (1991) distingue três fases na formação de um conceito que correspondem a três "níveis de estruturação" (p. 18) e que podem ser simplesmente mencionados para a análise puramente teórica da relação entre os processos e os objetos. No primeiro nível, designado por interiorização, o aluno familiariza-se com o processo adquirido, o qual pode suscitar um novo conceito (por exemplo, "contar tudo" leva ao conceito de número natural). O processo foi interiorizado se "pode ser efetuado por meio de representações [mentais] e, para que possa ser considerado, analisado e comparado, não precisa realmente de ser executado" (p. 18).

Durante o segundo nível, denominado por condensação, o aluno "aperta/estreita" longas sequências de operações em partes mais viáveis e torna-se mais competente a pensar num determinado processo como um todo, ou seja, não necessita explicitar todos os detalhes. Esta é "altura em que 'oficialmente' um novo conceito nasceu" (p. 19) e é devido à condensação que a combinação de um processo com outros, a comparação e a generalização se tornam muito mais acessíveis. O progresso neste nível ilustra-se também através da crescente facilidade com que se alternam as diferentes representações do conceito.

O terceiro e último nível, a reificação, é um "grande e instantâneo salto" (p. 20) que contrasta, como tal, com as "mudanças graduais, quantitativas e não qualitativas" (p. 20) verificadas ao longo das fases anteriores. Várias representações do conceito tornam-se semanticamente unificadas por este constructo abstrato e puramente imaginário. A nova entidade é em breve separada do processo que a originou e começa a delinear o seu significado a partir do facto de ser um membro de uma determinada categoria. Por exemplo, os resultados do processo de contagem são unificados com a noção de número natural. Este conceito torna-se um *input* para a invenção de um novo e mais elaborado processo como seja, por exemplo, contar a partir de certa ordem. Tanto neste nível, como no anterior, o papel dos nomes, dos símbolos, dos gráficos e de outras representações é crucial.

Esta sequência de níveis e a sua ligação à formação de conceitos é esquematizada por Sfard (1991) através da figura 19 e tem que ser entendida, na sua opinião, de forma hierárquica, isto é, um nível não pode ser alcançado sem que no anterior todas as etapas tenham sido percorridas.

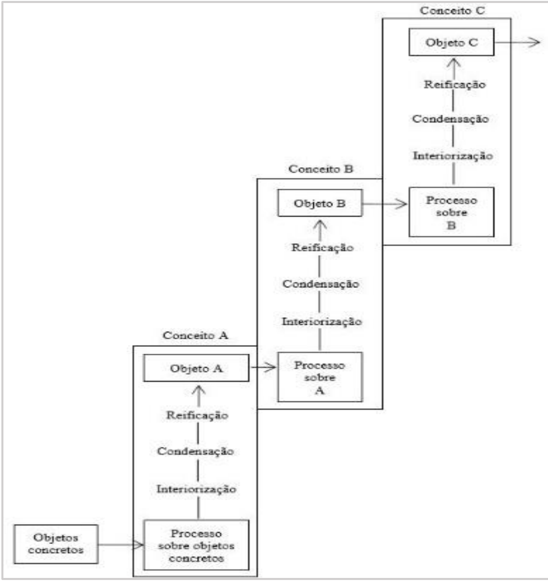


Figura 19: Modelo geral de formação de um conceito (Sfard, 1991, p. 22)

A categorização do conhecimento matemático em conceptual e procedimental ou em instrumental e relacional reflete uma visão dicotómica, largamente aceite, mas para Sfard (1991) os termos estrutural (conceito) e operacional (processo) mostram-se inseparáveis, embora diferentes, e são "facetas de uma mesma coisa" (p. 9). Argumenta que devemos lidar com esta dualidade, e não com a dicotomia, e Gray e Tall (1994) reforçam-na e sugerem o "pensamento *proceptual*" caracterizado como "a capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível como processo ou como conceito, alternando livremente diferentes simbolismos para o mesmo objeto" (p. 7). Sublinham as transições no processo de construção do conceito elementar de número e a sua relação com uma maior flexibilidade no uso de símbolos aritméticos. Desta forma, é o pensamento *proceptual* que, através da flexibilidade, dá grande poder ao uso ambíguo do simbolismo que representa a dualidade do processo e do conceito usando a mesma notação. A capacidade de se alternar entre a interpretação da notação como um processo para fazer algo (procedimental) e um objeto para pensar com e sobre (conceptual), dependendo do contexto, permite que a flexibilidade nos forneça um caminho do procedimental ao conceptual.

Gray e Tall (1994) propõem o termo *procept* elementar para expressar esta particularidade da Matemática, que se refere à "amálgama de três componentes: um processo que produz um objeto matemático e um símbolo que é utilizado para representar o processo ou o objeto" (p. 6) e, desta forma, o simbolismo está ligado a um processo ou a um conceito. Por exemplo, o símbolo 2 + 3 pode ser considerado como o processo de adicionar dois números ou como o conceito de soma. De realçar que pode não ser apenas um único símbolo que é considerado de uma forma flexível, mas também que o mesmo objeto pode ser representado simbolicamente de diferentes maneiras que são muitas vezes conotadas com nomes diferentes. Uma criança pode, por exemplo, ver 3 + 4 como "mais 1 do que 6, ou seja, 7", uma vez que considera "4 como 3 + 1 e o outro 3 mais este dá 6, logo mais 1 dá 7". Para especificar melhor este alargar do conceito de flexibilidade e a versatilidade dos processos de pensamento, os autores propõem uma extensão da definição anterior: "*procept* consiste numa coleção de *procept*s elementares que têm o mesmo objeto" (p. 6). Desta forma, podemos referir-nos ao *procept* 6 e isso inclui o processo de contar seis e uma coleção de outras representações tais como 3 + 3, 4 + 2, 2 + 4, 2 × 3, 8 – 2, … o que permite concluir que a criança pode decompor e compor o 6 de uma forma flexível.

Gray e Tall (1994) concentram o seu estudo na aritmética, mas incitam a investigações em outras áreas da Matemática reinterpretando-as em termos de *procepts*. Apresentam explicitamente como um dos exemplos, a diferença entre razão e taxa, que pode ter uma interpretação óbvia em termos de *procept* onde a razão é um processo e a taxa o objeto matemático produzido por este processo.

2.3.2 Flexibilidade em cálculo mental

Embora a flexibilidade tenha sido estudada em vários tópicos matemáticos, é no cálculo mental que ela mais se realça. Nas últimas décadas, o cálculo mental e o pensar flexivelmente sobre os números (tido como característica fundamental do sentido de número, McIntosh, Reys & Reys, 1992) têm sido considerados como uma capacidade a desenvolver por todos os alunos (NCTM, 2000; Threlfall, 2002). No entanto, várias perspetivas de flexibilidade em cálculo mental têm surgido, baseadas nas diferentes definições de flexibilidade adotadas (Star & Newton 2009; Verschaffel *et al.*, 2009; Torbeyns, de Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009).

É conveniente notar que alguns autores consideram que cálculo mental e cálculo mental flexível são conceitos distintos. Cálculo mental significa, segundo Rathgeb-Schnierer e Green (2013), resolver mentalmente problemas aritméticos com números multi-dígitos, sem utilizar os procedimentos de papel e lápis. É possível identificar no cálculo mental elementos de três domínios – (a) métodos de cálculo, (b) elementos cognitivos e (c) ferramentas para a solução – e é a sua combinação que permite nomear diferentes competências e, explicitamente, a flexibilidade em cálculo mental. Estes investigadores propõem um modelo que permite descrever o processo de cálculo utilizado pelos alunos aquando da resolução de problemas numéricos de adição e subtração, com números multi-dígitos, baseado numa complexa interação entre os três domínios. Um aluno pode utilizar múltiplos métodos de cálculo (a), tais como algoritmos usuais, somas parciais ou cálculo mental. No entanto, um método descreve a maneira como o processo de resolução pode ser feito e não como a solução é determinada. Concretamente, na aplicação do algoritmo da adição, adicionamos separadamente os elementos das várias ordens, mas isso não nos dá a informação de como adicionamos, por exemplo, 8 + 7. Existem várias ferramentas possíveis para a solução (c): contando a partir do 8; trabalhando sobre factos conhecidos, ou seja, sabendo por exemplo que 7 + 7 = 14, logo 8 + 7 = 1+ 14; usando outros meios estratégicos, como seja, a decomposição de números, 8 = 5 + 3 e 7 = 5 + 2, associada a um cálculo mais evidente (5 + 5) + (3 + 2) = 10 + 5 = 15. Os elementos cognitivos (b) são experiências específicas nas quais estão baseados os processos de resolução dos alunos, que podem ser procedimentos aprendidos (algoritmos de cálculo) ou o reconhecimento de caraterísticas dos números (padrões de números e relações). Para determinar uma resposta, os elementos cognitivos dependem de ferramentas para a solução que são usadas e combinadas num dado contexto. Por exemplo, contar, relacionar com factos básicos ou utilizar outros meios estratégicos adaptáveis que incluem decomposição e composição de números, transformar um problema, derivar a solução a partir de um problema conhecido ou utilizar analogias no que concerne ao trabalho nas diferentes posições dos algarismos.

Cálculo mental flexível requer uma compreensão profunda das relações dos números e das operações e um conhecimento prévio de factos básicos e de conjuntos de factos (Threlfall, 2002, 2009; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 2015). Flexibilidade em cálculo mental está ligada, explicita ou implicitamente, a adaptação e significa uma maneira apropriada de atuar na resolução de um determinado problema. Threlfall (2002, 2009) define flexibilidade em cálculo mental como uma forma de agir apropriadamente, em contraponto com a perspetiva de aplicação de estratégias holísticas aprendidas. Na sua opinião parecem existir muitas circunstâncias em que as decisões sobre as boas estratégias não podem surgir com antecedência, antes de realmente se avançar para o cálculo e, como tal, a ideia de os critérios poderem ser ensinados às crianças para decidirem, antecipadamente, qual a estratégia a utilizar não parece viável. Também a preferência pessoal não deve ser considerada como sinónimo de escolha de um método apropriado embora muitas vezes surja como tal. Por isso, se o critério de decisão sobre qual a estratégia a utilizar é demasiado complexo para ser ensinado, a abordagem de ensinar um conjunto de estratégias como alternativas para depois cada um escolher uma é um risco. Tal como Torbeyns, Verschaffel e Ghesquière (2005) mencionam, quando os alunos fazem a escolha de uma estratégia, pode ser porque lhes foi ensinado daquela forma e seguem, portanto, uma regra, e não por uma questão direta de flexibilidade.

Threlfall (2002, 2009) refere que as estratégias de cálculo mental que conduzem à flexibilidade são de natureza emergente e Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015) reafirmam esta ideia em situações específicas de adição e de subtração. Quando se enfrenta um novo problema e as circunstâncias em si mesmas não obrigam a uma abordagem com um determinado número de transformações, os números do problema são considerados ostensivamente para decidir o que fazer. São as características dos números e das relações entre eles que se realçam. Mas identificar determinadas características não é suficiente para decidir uma sequência de cálculo a efetuar, conduz certamente a uma exploração parcial dos cálculos e pode sugerir o que se deve fazer. “A estratégia de cálculo não foi selecionada e aplicada, foi aparecendo” (Threlfall, 2009, p. 548), ou seja, o processo cognitivo do cálculo mental na flexibilidade de estratégias não considera os números do problema para decidir sobre a estratégia de cálculo a aplicar, pelo contrário, considera os números do problema e chega a uma estratégia de cálculo. A estratégia não é o que foi feito considerado como um todo, embora possa ser reconstruída como tal, mas antes uma construção passo a passo. Este processo é semelhante ao que Dennett (1991 *in* Threlfall, 2009) denominou como *zeroing-in*, aplicado a um discurso, onde argumenta que não é, de um modo geral, um processo totalmente consciente e racional.

O cálculo mental flexível pode, portanto, “ser encarado como uma reação de conhecimento, individual e pessoal, manifestada de uma forma subjetiva, a partir do que se compreende sobre um problema específico” (Threlfall, 2002, p. 42). Como resultado desta interação entre o compreender e o conhecer, cada “método” de resolução é, num determinado sentido, único para aquele caso e foi inventado no contexto particular de um cálculo, embora claramente influenciado pela experiência anterior. Não foi aprendido como uma abordagem genérica e depois aplicado num caso particular. O cálculo mental flexível não deve ser, portanto, a aplicação de estratégias holísticas aprendidas e aplicadas a um caso particular. A “estratégia” (no sentido holístico de uma rede total de passos de resolução) não foi decidida *a priori*, mas emergiu no decorrer da resolução e, como tal, as estratégias mentais que podem ocorrer não são estratégias de resolução, mas estratégias analíticas. O que se pensa sobre os números, como podem ser decompostos ou combinados, e os cálculos parciais que originam uma resposta ocorrem a um nível não consciente através de “descobertas acidentais, complementadas por um formato oportunista" (Threlfall, 2009, p. 548). Desta forma, o processo *zeroing-in*, tido em conta no cálculo mental flexível, faz realçar que as caraterísticas do problema afetam a estratégia utilizada pelo que se compreende, e até mesmo pelo que é “óbvio”, e não por uma análise consciente do problema relativamente a alternativas conhecidas. A flexibilidade no cálculo mental surge como resultado de uma “descoberta”, em parte não consciente, que pode ser influenciada pela relação de confiança, de facilidade e de viabilidade sentida por cada um no contexto em causa, e permite valorizar as conexões entre conhecimento de conceitos e de procedimentos anteriormente mencionadas.

Desta forma, embora a flexibilidade em cálculo mental seja um objetivo reconhecido, a sua caracterização baseada na escolha “consciente” entre várias estratégias parece, na opinião Threlfall (2002, 2009), injustificada e a abordagem para o seu desenvolvimento baseada no ensino direto de estratégias holísticas equivocada e improvável de obter sucesso. Assim, mais do que estarmos preocupados em ensinar as estratégias de cálculo mental, devemos investir em aulas onde seja possível analisar e pensar acerca dos números, mais concretamente nos números específicos de um dado problema, contribuindo, desta forma, para o desenvolvimento do cálculo mental flexível nos alunos.

Para realçar a diferença de abordagens entre estratégias de cálculo mental e flexibilidade estratégica em cálculo mental, Threlfall (2009) considera que

> uma abordagem estratégica de cálculo mental é a forma geral de utilização do conhecimento matemático na resolução de um problema – por exemplo de contagem – o recordar ou o aplicar de um método aprendido, a visualização de um procedimento ou a exploração de relações numéricas conhecidas. (p. 541)

Por exemplo, para calcular 45 – 28 podemos obter várias respostas: “Transformei o 4 em 3 e depois de 15 retirei 8 para obter 7. A seguir retirei 2 de 3 para obter 1. Logo, obtive 1 e 7, dezassete” – reflete a abordagem de visualização mental do algoritmo escrito; “Comecei com o 45 e contei para atrás 10, até ao 35 e depois 7 para chegar ao 28” – reflete uma abordagem de contagem; “Tirei 20 de 45 para obter 25, depois 5 e depois 3, logo dá

17" – pode refletir uma abordagem de utilização de um método conhecido ou de exploração de relações conhecidas dos números.

É esta última abordagem que Threlfall (2009) designa por estratégia-transformação-número em cálculo mental, como sendo "a forma detalhada como os números foram sendo transformados para se chegar a uma solução" (p. 542). Cada estratégia-transformação-número reflete uma abordagem, mas é percetível que algumas abordagens estratégicas determinam, de facto, a estratégia-transformação-número, enquanto outras não. Uma estratégia-transformação-número que surge a partir de uma abordagem de estratégias baseada na exploração de relações numéricas conhecidas é denominada, por Threlfall (2009), como uma "estratégia de cálculo". Desta forma, na sua ótica "estratégia" é considerada como uma forma pessoal e individual de calcular que "emerge" de conexões não conscientes entre o que o aluno nota nos números envolvidos na tarefa e o que ele sabe sobre esses números e das relações entre eles. Uma estratégia de cálculo mental surge "quando um problema é solucionado através da exploração de relações numéricas conhecidas, tendo-se adotado uma determinada abordagem" (p.542).

No seu entendimento, as crianças ou os adultos, quando confrontados com um novo problema, seguem diferentes caminhos de resolução, dependendo dos números em causa e não pensando quais as estratégias alternativas que existem para tentar decidir entre elas. Em vez disso, pensam sobre os números do problema, observando as suas características e posicionando-os em proximidade com outros números, e consideram as possibilidades de os decompor ou arredondar. Além disso, podem também fazer conexões entre os números onde se realcem as suas características individuais. O caminho de resolução seguido por cada um depende então dos elementos que, com os seus conhecimentos, foram observados num *flash* sobre os possíveis passos nos cálculos, e cujas possibilidades assentam mais facilmente no conhecimento com que se sentem confortáveis e, por isso "aquilo que cada um vê nos números leva ao que é feito para resolver o problema" (Threlfall, 2002, p. 42).

No modelo de flexibilidade estratégica em cálculo mental, Threlfall (2009) defende que a escolha/seleção de estratégias de cálculo permite relacionar a flexibilidade com as circunstâncias que afetam a escolha e até mesmo com o estado de espírito "criativo" desejável para proporcionar boas opções. Como Verschaffel *et al.* (2009) clarificam, a seleção e a execução de uma estratégia não necessitam de ser racionais, deliberadas e conscientes. Contudo, para ser um modelo viável de flexibilidade estratégica, a escolha da estratégia exige que se tenham em mente as ideias mencionadas por Threlfall (2002, 2009) relativamente ao ensino de estratégias de cálculo mental e a sua ligação à flexibilidade, anteriormente expostas.

Na conceção de Threlfall (2002, 2009) agir apropriadamente significa construir a estratégia mais viável ou a maneira de mais rapidamente obter uma solução, enquanto para Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015) agir de uma forma apropriada significa abarcar a combinação de meios estratégicos, para reconhecer padrões numéricos e relações no processo de resolução de um determinado problema. Os meios estratégicos incluem a decomposição e composição de números, a transformação de um problema num outro mais acessível, o derivar da solução a partir de um problema conhecido ou o usar de analogias nos diferentes valores de posição de um número, e não são, portanto, estratégias holísticas ou menus cognitivos que completam uma rede de soluções.

A "escolha estratégica" é, como menciona Brocardo (2014), associada a "estratégias" consideradas como uma coleção de métodos mentais de cálculo ou procedimentos que são realmente "pensados e aprendidos" no novo domínio do cálculo mental. As estratégias não são escolhidas à partida e o seu processo de formação exige um conhecimento específico e uma competência para fazer "boas" escolhas, no sentido de selecionar o mais "apropriado" e/ou "eficiente" método de cálculo mental.

Brocardo (2014) propõe uma outra visão de flexibilidade, uma abordagem integrativa para desenvolver o pensamento flexível e adaptativo no cálculo mental, baseada na formação de conceitos de Sfard (1991), no simbolismo operacional de Gray e Tall (1994) e de Tall (2013) e na visão de exploração do cálculo mental de Threlfall (2002, 2009). Caracteriza esta abordagem através da descrição do princípio integrativo utilizado e da rede global de conexões desenvolvida como uma "teoria local" para a construção de tarefas.

No princípio integrativo a ideia chave é, portanto, de acordo com Brocardo (2014), a integração de dois aspetos/componentes centrais do cálculo mental flexível. O primeiro é o conhecimento aritmético pessoal (Tall, 2013) que progressivamente emerge de um processo de encapsulação de longo prazo (Sfard, 1991). O segundo aspeto é a idiossincrática prática de flexibilidade (Tall, 2013) desenvolvida em contextos reais e locais de resolução de problemas (Threlfall, 2002, 2009).

No que se refere ao primeiro aspeto, o conhecimento aritmético pessoal que progressivamente emerge de um processo de encapsulação de longo prazo, a argumentação apresentada por Tall (2013) justifica-o em três pontos: (i) a compactação do conhecimento ocorre quando um fenómeno de algum tipo é concebido na mente de uma forma mais simples ou mais eficiente. Isto acontece quando se realizam conexões mentais mais diretas no cérebro e é aperfeiçoada pelo uso da linguagem, para dar um nome ao conceito e permitir a partilha de ideias sobre as suas propriedades e relações com outros conceitos; (ii) a compactação materializada de operações em conceitos mentais incide no efeito visível das operações, o qual engloba propriedades gerais das operações, como por exemplo a ideia de que a adição é comutativa; (iii) a compactação operacional incide nas próprias operações, à medida que o indivíduo as utiliza para aprender factos numéricos específicos. A flexibilidade na aritmética requer tanto uma apreciação das propriedades gerais das operações, como os detalhes específicos do cálculo. Estas ténues dificuldades terão um papel importante na compreensão flexível da aritmética e na sua generalização à álgebra.

Quanto ao segundo aspeto, a idiossincrática prática de flexibilidade desenvolvida em contextos reais e locais de resolução de problemas, a argumentação de Threlfall (2002, 2009) permite justificá-lo. A primeira ideia é que o cálculo mental flexível pode ser considerado como uma reação individual e pessoal ao conhecimento, manifestada no sentido subjetivo do que é percebido sobre determinado problema. Como resultado dessa interação entre o perceber e o conhecimento, cada método de resolução é, num certo sentido, único para esse caso e é inventado no contexto de um cálculo particular, embora claramente influenciado pela experiência. Esse método não foi aprendido como uma abordagem geral aplicada a um caso particular. A segunda ideia é que o processo é semelhante à noção de *zeroing-in* e não é um processo totalmente consciente e racional, como já foi referido. Os pensamentos transitórios sobre os números e a maneira como eles podem ser decompostos e combinados e os cálculos exploratórios parciais que levam a uma resposta, acontecem a um nível não consciente. A terceira ideia é que o cálculo real fornecerá exemplos convincentes de decomposição de números, fatorização, localização de proximidade e quase dobros, e permitirá também perceber o que pode ser feito com eles. Por exemplo, como podem ser tratadas as suas partes e como são compensadas as proximidades. A quarta ideia é que parece importante para o desenvolvimento da flexibilidade manter o trabalho sobre o cálculo mental fortemente ligado a tentativas reais de resolver problemas, examinando resoluções concretas no sentido de enfatizar o que é possível fazer com os números.

Lemaire e Siegler (1995) caracterizam a eficiência e a flexibilidade, explorando um modelo de mudança de estratégia, distinguindo entre quatro parâmetros: (1) repertório de estratégias, refere-se aos tipos de estratégias que um indivíduo aplica para resolver uma série de itens; (2) distribuição de estratégia, relaciona-se com a frequência de uso da estratégia; (3) eficiência da estratégia, envolve a precisão e a velocidade de execução da estratégia; (4) seleção de estratégias, faz referência à natureza flexível de opções individuais de estratégia, isto é, cada um seleciona as estratégias que são mais eficientes para si próprio.

Para analisar a competência das crianças na utilização de estratégias de cálculo mental na resolução de adições e subtrações com números com mais de dois dígitos, focada na eficiência e na flexibilidade dos cálculos mentais *versus* algoritmos escritos padrão, Torbeyns e Verschaffel (2013) baseiam-se no modelo anterior e no método de escolha/não escolha[6] que Torbeyns *et al.* (2005) também já tinham utilizado. Para tal, admitem que quando são confrontadas com a resolução de adições de números com mais de dois dígitos, as crianças podem utilizar diferentes tipos de estratégias, incluindo estratégias de cálculo mental e algoritmos escritos padrão. Consideram "estratégias de cálculo mental" aquelas em "que as crianças calculam *com* a sua cabeça (em vez de *na* sua cabeça)" (p. 130), baseadas na compreensão que possuem das características elementares do sistema de numeração e das operações aritméticas. Admitem, por isso, ao contrário de outros, que as crianças podem registar no papel os passos das suas resoluções e/ou os resultados intermédios. Estes autores classificam as estratégias de cálculo mental das crianças em três categorias básicas: (a) estratégias de decomposição, que envolvem a separação nas diferentes ordens em ambos os números, adicionando-as ou subtraindo-as; (b) estratégias sequenciais, que consistem em adicionar ou subtrair o segundo número inteiro, decomposto nas suas diferentes ordens, a partir do primeiro e efetuar a adição da esquerda para a direita; (c) estratégias variáveis, que se referem a diversas estratégias tidas como inteligentes e que envolvem a adaptação flexível dos números e das operações numa dada si-

[6] O método de escolha/não escolha requer a avaliação de cada participante numa condição de escolha, onde pode optar pela estratégia que usaria para resolver cada item, e numa ou mais condições de não escolha, onde cada participante é obrigado a resolver todos os itens aplicando uma estratégia particular.

tuação, baseadas na compreensão das relações numéricas e/ou nas propriedades de operações aritméticas que cada um domina. Um exemplo de uma estratégia variável é a estratégia de compensação, que pode ser aplicada, de forma eficiente, em situações em que um dos números inteiros termina nos dígitos 8 ou 9. Consideram também que a expressão “algoritmos escritos padrão” se refere à aplicação dos algoritmos usuais, ou seja, a procedimentos fixos e bem definidos passo a passo, utilizados na resolução de adições e subtrações com mais de dois dígitos.

Os resultados deste estudo revelam que as crianças aplicam de forma eficiente e flexível diferentes tipos de estratégias no domínio dos números (naturais) até 1000, ajustando as escolhas estratégicas de flexibilidade com as suas características individuais de velocidade de execução. Complementando trabalhos anteriores sobre as operações com mais de dois dígitos, este estudo fornece, segundo os investigadores, novas informações sobre a frequência, a eficiência e a flexibilidade no cálculo mental das crianças *versus* os algoritmos escritos padrão.

Perante as alternativas de cálculo mental flexível anteriormente referidas, nota-se que há pontos de desacordo que entram em conflito com a vertente de fluência de procedimentos que integra a proficiência matemática, mencionada em NRC (2001), pois omite-se a precisão para se realçar o *insight* espontâneo.

Se a alusão de Baroody (2003) sobre a relação entre os conhecimentos conceptual e procedimental, atrás mencionada, for delimitada ao cálculo mental, pode referir-se que foram desenvolvidas duas abordagens em cálculo mental flexível. Uma é fundamentada na hipótese de que as crianças têm de escolher com antecedência uma estratégia que estruture toda a sequência do cálculo (Thompson, 1999); a outra é baseada no pressuposto que as soluções resultam da interação única e local entre “perceber” algo nos números e o conhecimento adquirido sobre os números (Threlfall, 2002; 2009).

Baroody e Tiilikainen (2003) propõem uma lista hierárquica subjacente ao tipo de desempenho, na qual o que as crianças fazem no cálculo é decidido de acordo com a forma como esse cálculo se desenrola, e rejeitam também o modelo de escolha estratégica para adotar o que designam como um esquema de visão (*schema view*, no original).

2.3.3 Flexibilidade e o uso de representações

Considerando que as estratégias de resolução têm conexões com as representações e que a flexibilidade na aprendizagem matemática surge ligada à utilização/construção de estratégias (ou procedimentos) na resolução de tarefas que procuram explorar temáticas diferentes, principalmente questões de cálculo aritmético e algébrico e, mais concretamente, de cálculo mental, também esta se relaciona com o uso de representações.

A definição de "flexibilidade de representação" surge, segundo Nistal, van Dooren, Clarebout, Elen e Verschaffel (2009), como sendo a tendência para "fazer escolhas de representações apropriadas, tendo em atenção as características da tarefa, do aluno e do contexto consideradas na resolução da tarefa matemática em causa" (p. 629). Esta definição, tal como os autores afirmam, é inspirada na conceptualização de escolha adaptativa de estratégias de Verschaffel *et al.* (2009), anteriormente mencionada, e tem como finalidade realçar que, sob o ponto de vista teórico, o olhar sobre as estratégias pode ser útil no campo das representações. Nistal *et al.* (2009) mencionam várias investigações que permitem identificar os fatores que influenciam a flexibilidade de representações: as características da tarefa, do indivíduo e do contexto.

Nas características das tarefas a ideia central é que "diferentes representações são ideais para diferentes tarefas, desde que apoiem processos tais como a inferência ou diferentes modos de calcular" (p. 629). Desta forma, quem for capaz de identificar as questões das tarefas e selecionar a representação mais adequada para as resolver, deve apresentar um desempenho superior a quem não é sensível a essa variável e, como tal, ser flexível significa "identificar correspondências entre tarefas e representações e fazer as escolhas de representação de acordo com esses jogos" (p. 630).

As características do indivíduo englobam: os conhecimentos conceptual e procedimental prévios acerca das representações que têm em conta o conhecer, ou não, as convenções e também a possibilidade de existirem conceções erróneas sobre essas convenções; o conhecimento condicional abstrato das representações, definido como "uma agregação de conhecimento acerca de convenções que regulam representações e conhecimento sobre quando e por que usá-las" (Nistal *et al.*, 2009, p. 631); o conhecimento específico de domínio no qual alguns autores defendem que o conhecimento da representação formal não é suficiente para que se utilizem adequadamente as representações externas, uma vez que precisamos também de adquirir ou possuir conhecimento específico do domínio ao qual as representações são aplicadas. Outros afirmam que a capacidade de usar uma representação corretamente não depende somente do facto de quem a usa estar familiarizado com o contexto no qual a aplica. Além destes conhecimentos, a preferência de representação e os fatores afetivos que são observados em quem está a resolver uma tarefa podem ser tidos como características do indivíduo. Normalmente, quando tentamos resolver uma tarefa, um problema matemático, evidenciamos sentimentos de curiosidade, frustração, ansiedade, desespero, perplexidade, satisfação, encorajamento, entre outros, que vão, por certo, influenciar o nosso processo de resolução e que podem sugerir mudança de representação consoante esse processo se mostre, ou não, eficaz.

As características do contexto, em particular o ambiente de trabalho em sala de aula e o currículo prescrito, podem influenciar a possibilidade de escolha de representações, ou seja, podem afetar a flexibilidade de representações, no sentido definido anteriormente. Na sala de aula, a apresentação de diferentes representações na resolução de uma dada tarefa, a sua discussão e reflexão conjunta, sobre qual a mais apropriada, são parte integrante da comunicação matemática, considerada como um processo a desenvolver ao longo de toda a escolaridade (NCTM, 2000). Mas, frequentemente e muito por influência curricular, de acordo com Nistal *et al.* (2009), não é dada aos alunos a possibilidade de escolherem a sua representação, uma vez que são “forçados” a usar representações predeterminadas para completar determinadas tarefas. Estas práticas de ensino colocam, sem dúvida, um entrave à flexibilidade quer no uso de representações, quer na construção de estratégias. E, como Greer (2009) refere, discutir com os alunos o que sabemos (ou pensamos saber) sobre a natureza das representações e quais as suas interferências no processo de aprendizagem, pode ser uma abordagem didática interessante e útil.

Warner, Schorr e Davis (2009) discutem o desenvolvimento da flexibilidade de representações matemáticas utilizadas pelos alunos num contexto de sala de aula. Defendem, tal como outros anteriormente, que as interações na sala de aula, entre pares ou com o professor, influenciam e estimulam a evolução de representações individuais. Estas interações surgem, muitas vezes, em discussões acerca das estratégias de resolução utilizadas, sob a forma de um pedido de explicação de um dado raciocínio ou de uma dada representação. Quando questionados pelos colegas ou pelo professor, “os alunos podem ser estimulados a criar representações que possam revelar melhor o seu processo de pensamento, principalmente, quando necessitam esclarecer ou defender o seu raciocínio” (p. 663). O refletir sobre as suas próprias ações permite-lhes uma evolução das suas representações para versões cada vez mais sofisticadas. No entanto, as representações anteriores não são simplesmente abandonadas, pelo contrário, novas representações são formuladas e reformuladas enquanto modificam e ajustam as representações existentes para responder a um outro problema ou a uma nova solicitação. É esta evolução de representações que está associada ao desenvolvimento da compreensão e, como argumentam estes autores,

> aprender com compreensão está relacionado com a evolução de sistemas representacionais flexíveis que permitem aos alunos abordar com sucesso problemas novos, utilizando não apenas o seu conhecimento prévio, mas a sua prévia reorganização representacional desse conhecimento, obtida através da comparação introspetiva de memórias anteriores de ação. (Warner *et al.*, 2009, p. 664)

A flexibilidade de representações surge ligada ao pensamento matemático flexível, considerado por Warner *et al.* (2009) como "uma capacidade de quem aprende a reorientar-se relativamente ao contexto, ao lugar ou à pessoa, e a mudar os seus focos de atenção, à medida que encontra novas configurações para o problema" (p. 665). O pensamento matemático flexível engloba a transferência de memórias de ações matemáticas para outra parte do sistema de memória humano, envolvendo relações entre memórias anteriores. Esta parte do sistema de memória humana é denominada memória declarativa, principalmente porque a exibimos através de declarações e não simplesmente através de ações. Essas declarações podem ser orais (fala), escritas (desenhos, esquemas ou outros) ou gestos e são representações do pensamento. Na memória declarativa uma das suas características, permitir novos *insights* dentro das relações, dá origem à flexibilidade representacional – o uso inferencial da memória em novas situações.

Em resultado de um projeto de desenvolvimento profissional cujo objetivo era ajudar os professores a utilizar métodos de ensino que ajudassem os alunos a aprender Matemática com um profundo nível de compreensão, Warner *et al.* (2009) focam-se no trabalho desenvolvido por três alunos, durante um período de seis meses, mais especificamente no de uma aluna, para discutir a flexibilidade representacional. Inicialmente os alunos exploraram uma tarefa baseada no conhecido "problema dos apertos de mão" (NCTM, 2000) (Parte 1 – *John está numa festa de Holloween. Cada pessoa aperta a mão de cada pessoa da festa uma vez. São dados vinte e oito apertos de mão. Quantas pessoas estão na festa? Convence-nos.*). Ao longo do tempo (com um intervalo de pelo menos uma semana) foram propostas duas extensões da tarefa (Parte 2 – *Há onze pessoas na festa de Ação de Graças. Cada pessoa aperta a mão de cada pessoa na festa uma vez. Quantos apertos de mão acontecem? Convence-nos*; Parte 3 – *Há cento e uma pessoas na festa de*

Natal. Cada pessoa aperta a mão de cada pessoa na festa uma vez. Quantos apertos de mão acontecem? Convence-nos.), que proporcionaram uma oportunidade adicional para os alunos criarem uma solução que poderia ser generalizada a um grupo maior de problemas envolvendo estruturas semelhantes. Seis meses depois, em duas sessões adicionais, os alunos exploraram um outro problema com uma estrutura semelhante (A festa do pijama de Yakia – *Na noite da festa do pijama de Yakia houve uma grande trovoada. A rua principal esteve fechada e, por isso, Yakia e as suas catorze amigas (quinze raparigas, no total) decidiram ter uma "festa por telefone" em substituição da festa do pijama. A ideia era que cada amiga falasse ao telefone com todas as amigas da festa. Com as quinze amigas a participar na festa por telefone, qual foi o menor número de chamadas que poderiam ser feitas para que todas as pessoas conversassem com todas as pessoas por telefone?*). A análise dos resultados permite concluir, segundo Warner *et al.* (2009), que as representações da aluna evoluíram no decorrer das sessões, por causas várias, mas muito por influência das interações com os seus colegas. A aluna resolve a tarefa, começando por apertar a mão aos seus colegas de grupo (ação física). Esta ação é a base da troca de impressões entre todos e da discussão de como poderão contar os apertos de mão. Abordam, em concreto, a questão: *quando duas pessoas apertam a mão, isto é um aperto de mão ou dois?* De seguida, a aluna elabora a sua primeira representação escrita através de um desenho, não pormenorizado, de pessoas a apertar as mãos sem, no entanto, as desenhar. As pessoas estão substituídas por círculos e os apertos de mão por linhas que os unem. Depois desta representação, a aluna experimenta a situação considerando diferentes números de participantes na festa, naquilo que Warner *et al.* (2009) admitem parecer um processo organizado de tentativa erro. Em simultâneo, regista uma multiplicação associada a cada exemplo. Com esta sua representação pictórica, ela vai construindo uma ideia (errónea) sobre como determinar o número total de apertos de mão (multiplicar o número total de pessoas pelo número total menos um), consegue explicar porque pensa dessa forma e conclui que o problema não tem solução. No momento em que um dos colegas partilha a sua resolução e apresenta uma resposta, a aluna consegue interpretá-la na sua representação e modificar a tradução simbólica, acrescentando uma divisão por dois. Os autores acreditam que esta modificação foi mais procedimental do que conceptual, mas foi totalmente influenciada pelo trabalho do colega. No entanto, a aluna não foi capaz de apresentar uma justificação convincente para a utilização deste procedimento até que outro colega a questionou. O diálogo entre os dois permitiu-lhe, por um lado, modificar a sua representação inicial para um esquema em tabela e, por outro lado, defender que a sua representação inicial traduzia um raciocínio correto. Como Warner *et al.* (2009) afirmam "ela passou do demonstrar *como* fazer algo, e que ela poderia resolver o problema através da produção de uma representação, até ao *porque* funcionava o seu método, através de uma nova representação" (p. 671). De acordo com a definição apresentada pelos autores, isto é a demonstração inicial do pensamento matemático flexível. Como eles referem, a aluna foi capaz de construir uma nova representação, que no final lhe foi mais útil para as suas próprias justificações. O conhecimento declarativo evidencia-se nas representações da aluna e essas representações tornam-se ferramentas cognitivas flexíveis que podem ser recordadas e usadas em situações que diferem das do problema original. A sua representação tornou-se "uma ferramenta para pensar acerca de e através de" (p. 672).

2.3.4 Flexibilidade e criatividade matemática

Fluência, flexibilidade, originalidade e elaboração surgem, segundo Lev-Zamir e Leikin (2011), como os principais indicadores de criatividade num qualquer campo da atividade humana, relacionando-se mutuamente e não sendo obrigatória a presença simultânea de todos. Fluência relaciona-se com continuidade de ideias, redes de associações e uso de conhecimento básico e universal. Flexibilidade surge associada à mudança de ideias na abordagem de um problema sob diferentes formas e na obtenção de várias soluções. Originalidade é caracterizada por uma forma exclusiva de pensar e pelos produtos exclusivos de uma atividade mental ou artística. Elaboração tem a ver com a capacidade de descrever, iluminar e generalizar ideias.

Neste vasto campo de atividade podemos incluir o processo de ensino e aprendizagem, em particular, o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, no qual a criatividade é mencionada desde há muito como fundamental, relacionando-se com a atividade do professor e do aluno, respetivamente. Segundo Mann (2006) e perante a revisão de literatura analisada, não existe unicidade na definição de criatividade, mas este autor refere-se a ela como "a essência da Matemática" (p. 239) e salienta a sua importância para uma aprendizagem significativa sob diferentes pontos de vista: ligada à resolução e formulação de problemas, ao desenvolvimento do conhecimento conceptual e ao despoletar de atitudes que demonstrem interesse e prazer pela Matemática, entre outros. Lev-Zamir e

Leikin (2011) defendem que "a criatividade é de natureza dinâmica" (p. 30) e que é possível desenvolver o conhecimento dos professores e a capacidade que demonstram no trabalho na sala de aula, com o objetivo de melhorar quer a sua criatividade, quer a dos seus alunos. Concluem que a conceção dos professores sobre a criatividade no ensino da Matemática consiste em dois tipos: direcionada ao professor (*teacher-directed*, no original), considerando-a como ações dos professores que os tornam criativos; direcionada ao aluno (*student-directed*, no original), ligando-a a oportunidades disponibilizadas para o desenvolvimento da criatividade de cada um. Quer um, quer outro tipo são examinados sob as perspetivas matemática e pedagógica, tendo em atenção os indicadores mencionados. Vale e Pimentel (2012) ligam inovação e criatividade e consideram-nas também "uma característica dinâmica que os alunos devem desenvolver" (p.348) na sala de aula, perante condições apropriadas.

Selter (2009) realça que as conotações com a noção de adaptabilidade, defendida por Verschaffel *et al.* (2009) quando a distingue de flexibilidade, devem incluir a ideia de criatividade, nomeadamente no que respeita à invenção de novas estratégias ou à modificação das que já existem. Adota então as definições de: criatividade, como a capacidade de inventar novas estratégias ou modificar estratégias já conhecidas; flexibilidade, como a capacidade de alternar entre diferentes estratégias; e adaptabilidade, como a capacidade de cada um em usar estratégias apropriadas desenvolvidas pelo próprio de forma criativa ou selecionadas com flexibilidade. Selter (2009) tem consciência que a fronteira entre estas três ideias pode não ser totalmente clara, mas num determinado sentido, criatividade e flexibilidade são requisitos de adaptabilidade ou, por outras palavras, a adaptabilidade deriva da criatividade e da flexibilidade e é caracterizada pelo elemento específico de adequação. Por sua vez, adequação deve ser definida de diferentes maneiras, tendo em atenção os diversos contextos e as necessidades específicas de cada um. Para ele, criatividade e flexibilidade são elementos de igual importância quando nos referimos especificamente a adaptabilidade no uso de estratégias em matemática:

> A adaptabilidade é a capacidade de desenvolver criativamente ou de selecionar e usar uma estratégia de resolução apropriada de uma maneira (não) consciente em um determinado item ou problema matemático, para um determinado indivíduo, em um determinado contexto sociocultural. (Selter, 2009, p. 624)

Star e Seifert (2006) relacionam, na investigação atrás referida (p. 55), flexibilidade e criatividade nos métodos utilizados pelos alunos para resolver equações do primeiro grau.

A criatividade está, neste caso, ligada à invenção de estratégias de resolução onde o foco de atenção considerado mais adequado são pequenas etapas de "transformação" baseadas numa sequenciação não normalizada de procedimentos, em detrimento dos "procedimentos inteiros".

Vale e Pimentel (2012) realçam alguns pontos comuns nas ideias sobre criatividade matemática: (1) envolve pensamento divergente, considerado como uma forma de olhar para um problema, analisar todas as possibilidades e "procurar o melhor caminho para chegar à melhor solução para o problema" (p. 351) que muitas vezes aparece espontaneamente. Surge por oposição ao pensamento convergente (considerado como uma forma orientada de pensar para chegar a uma resposta única). Ambos são aspetos marcantes de inteligência, de resolução de problemas e de pensamento crítico; (2) possui três componentes principais: fluência (capacidade de produzir respostas sempre que solicitadas), flexibilidade (capacidade para pensar de forma diferente) e originalidade (capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias diferentes); e (3) está relacionada com a resolução e a formulação de problemas (incluindo elaboração e generalização), atividades importantes e complementares no processo de ensino e aprendizagem.

Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi e Christou (2013) desenvolvem a sua investigação, de carácter quantitativo, com o objetivo de averiguar como se estrutura uma relação entre capacidade matemática e criatividade matemática, partindo do pressuposto de que ela existe. Para isso definem criatividade matemática como um domínio de características específicas, possibilitando que os indivíduos sejam caracterizados por fluência, flexibilidade e originalidade no domínio da Matemática, tal como Lev-Zamir e Leikin (2011) e Vale e Pimentel (2012) mencionam. Nas suas conclusões referem que o modelo que melhor descreve a relação entre criatividade matemática e capacidade matemática é aquele que considera a primeira como uma subcomponente da segunda, ou seja, a criatividade matemática é considerada a par de outras capacidades tais como a capacidade espacial, quantitativa, qualitativa, causal, dedutiva/indutiva. Esta ideia está de acordo com outras investigações que também realçam a criatividade como um pré-requisito para o desenvolvimento da capacidade matemática e levam os investigadores a sugerir que, para melhorar a capacidade matemática, os professores devem investir no desenvolvimento da criatividade matemática dos seus alunos.

O esquema da figura 20 será, por isso, uma boa ilustração da relação de capacidade matemática com criatividade matemática, mas os investigadores chamam a atenção para as limitações do estudo e também para a necessidade de outros mais amplos onde, por exemplo, seja tida em atenção a idade e o género dos alunos.

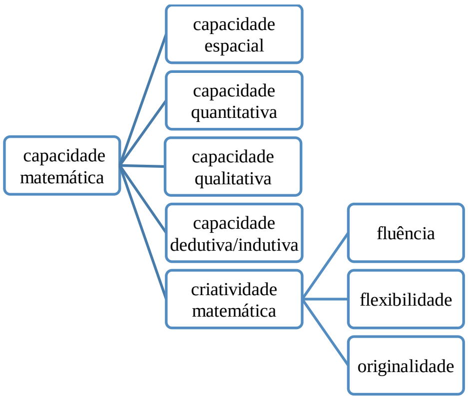


Figura 20: Relação entre capacidade matemática, criatividade matemática e flexibilidade (Modelo proposto por Kattou *et al.*, 2013, p. 174)

Resumindo, ao aperfeiçoar a criatividade matemática dos alunos, a sua capacidade matemática também será melhorada. Se os alunos puderem enfrentar situações matemáticas de forma fluente, flexível, perspicaz e original, serão competentes no uso de conhecimentos e processos matemáticos adequados na resolução de outras tarefas matemáticas. Desta forma, a flexibilidade surge como uma componente da criatividade considerada como uma capacidade matemática.

2.3.5 Flexibilidade na construção de estratégias e na utilização de representações na resolução de tarefas de comparação multiplicativa

Neste trabalho proponho um modelo de análise da comparação multiplicativa, ilustrado no quadro 3, em que a sua evolução conceptual (coluna à esquerda) começa por considerar, tal como Vergnaud (1983, 1988), relações em um espaço de medida, continua com relações em dois espaços de medida e termina com a comparação funcional, ligada à característica de função linear mencionada por Cramer e Post (1993). Articulo as ideias de comparar multiplicativamente com: (i) Estratégias de Resolução (coluna (i)), consideradas como a descrição e a caracterização de um conjunto de procedimentos, adaptados de Robinson e LeFevre (2012), e utilizados pelos alunos para resolverem situações de comparação multiplicativa. Nas tarefas propostas, identifico as situações em que é possível surgir pelo menos uma razão e construir outras razões que mantenham a proporcionalidade; as situações de comparação de uma dada razão com outras de forma a concluir, ou não, pela sua relação de proporcionalidade. Reconheço quatro estratégias: adicionar parcelas iguais, tendo em conta as relações proporcionais entre duas quantidades (raciocínio escalar); multiplicar, aplicando um fator representado por um número racional (inteiro ou não inteiro), no sentido de aumentar ou diminuir quantidades, mantendo relações proporcionais entre duas quantidades (raciocínio escalar); utilizar a razão entre quantidades de dois espaços de medida como um fator de proporcionalidade, realçando o coeficiente de proporcionalidade (raciocínio funcional); interpretar o coeficiente de proporcionalidade como o declive de uma reta. Estas estratégias revelam níveis diferentes de compreensão da comparação multiplicativa e tornam-se mais elaboradas à medida que se avança no quadro, de baixo para cima; (ii) Relações Numéricas e Propriedades das Operações (coluna (ii)), considero, num nível mais elementar, o processo de contagem relativo ao mesmo número de unidades compostas (utilização de números inteiros); a seguir realço as conexões entre as operações multiplicação e divisão, tidas como operações inversas, as relações multiplicativas entre números inteiros ou não inteiros representados sob a forma de fração, decimal e percentagem e a evidência de utilização de propriedades das operações, em particular, da comutativa e da associativa da multiplicação e da distributiva da multiplicação em relação à adição; por fim, a relação entre números negativos e positivos (que não é aqui abordada uma vez que os alunos ainda não trabalham com números negativos) (iii) Representações (coluna (iii)), tidas, num nível inicial, como uma tradução numérica de adições de parcelas iguais articuladas entre si; de seguida, consideradas como uma elaboração de esquemas (tabelas de razões ou linhas numéricas duplas), traduzindo relações escalares ou funcionais e, por fim, como um registo gráfico (Greer, 1992). Todas estas representações se englobam nos sistemas externos de representação de Goldin (1998), de que são parte integrante as representações simbólicas consideradas, entre outros, por Bruner (1966) e Lesh *et al*. (1983).

A flexibilidade é assinalada pelas relações horizontais, de sentido duplo, entre as quatro colunas e pelas articulações verticais, de baixo para cima, que simbolizam o desenvolvimento conceptual da comparação multiplicativa. É, portanto, um processo dinâmico no sentido de adaptação das estratégias de resolução e do uso de representações às características das tarefas, no qual as relações numéricas e as propriedades das operações têm um papel de destaque.

O intuito é valorizar a compreensão dos alunos no que respeita ao conceito de comparação multiplicativa, na perspetiva da flexibilidade, encarada no sentido de adaptabilidade (adequação, eficiência e rapidez), onde se relevam as estratégias utilizadas na resolução de tarefas específicas, as relações numéricas e as propriedades das operações aplicadas e, ainda, as diferentes representações adotadas.

Quadro 3: Estratégias de resolução, relações numéricas, propriedades das operações e representações associadas à evolução conceptual da comparação multiplicativa

EVOLUÇÃO CONCEPTUAL	**(i) ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO**	**(ii) RELAÇÕES NUMÉRICAS E PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES**	**(iii) REPRESENTAÇÕES**
Comparação funcional (função linear)	Interpretação do coeficiente de proporcionalidade como declive de uma reta → razão funcional	• Relações entre números negativos e positivos	Gráfico
Comparação multiplicativa (em dois espaços de medida)	Uso da razão entre as quantidade de dois campos de medida como o fator de proporcionalidade (coeficiente de proporcionalidade) → razão funcional	• Relações numéricas multiplicativas (entre diferentes representações de números racionais) • Propriedades da multiplicação • Relação inversa entre a multiplicação e a divisão	Tabela de razões / linha numérica dupla (relações funcionais)
	Uso de números racionais (inteiros e não inteiros) como fator para aumentar ou diminuir quantidades (raciocínio/procedimento escalar) → razão escalar		Tabela de razões / linha numérica dupla (relações escalares)
	Uso de duas sequências de adições de parcelas iguais tendo em conta as relações proporcionais entre as duas quantidade (raciocínio/procedimento escalar)	• Contagem usando o mesmo número de unidades compostas	Duas adições de parcelas iguais articuladas
Comparação multiplicativa (em um espaço de medida)			

2.3.6 Em síntese

No quadro 4 resumo a visão discutida nesta secção sobre flexibilidade na aprendizagem matemática, no que foi referido relativamente à utilização e construção de estratégias, em particular, no cálculo mental, ao uso de representações e à criatividade matemática. A subsecção 2.3.5. foi tratada num quadro autónomo e, como tal, não é aqui mencionada.

Quadro 4: Síntese (Flexibilidade na aprendizagem matemática)

<table>
<tr><td colspan="5">Flexibilidade na aprendizagem matemática</td></tr>
<tr><td colspan="3">Do uso à construção de estratégias</td><td>Uso de representações</td><td>Criatividade matemática</td></tr>
<tr><td>• Multiplicidade
(Dowker; Sowder, …)
• Versatilidade
(Berk et al.)
• Eficiência
(Blöte et al, …)</td><td rowspan="2">Cálculo mental</td><td rowspan="2">• Zeroing-in
○ como vemos os números
○ o que sabemos sobre os números
(Threlfall)</td><td rowspan="2">• Características
○ Indivíduo
○ Tarefa
○ Contexto
(Nistal et al.)</td><td rowspan="2">• Adaptabilidade
○ Invenção
○ Modificação
(Selter)</td></tr>
<tr><td>• Estratégias individuais
• Adaptabilidade
• Características
○ Indivíduo
○ Tarefa
○ Contexto
(Heinze, Star e Verschaffel)</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conhecimento conceptual/procedimental
(Baroody)
Processo → objeto
Símbolo
(Gray e Tall)</td></tr>
</table>

Capítulo 3

Metodologia de investigação

O capítulo correspondente à metodologia de investigação está dividido em cinco secções. Na primeira, descrevo e justifico as opções metodológicas adotadas. Na segunda, menciono o contexto e os participantes escolhidos. Na terceira, discuto os métodos de recolha de dados. Na quarta, apresento a recolha de dados efetuada. Na quinta, apresento os procedimentos para a análise de dados. Cada uma das secções apresenta-se dividida em subsecções que auxiliam numa visão própria.

3.1 Opções metodológicas

O objetivo deste estudo insere-se na temática da aprendizagem da Matemática e consiste em compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa. Para conseguir atingir este objetivo, tenho como diretrizes duas questões: (i) como se caracteriza a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa?; (ii) o que caracteriza as conexões entre a compreensão dos aspetos proporcionais das estruturas multiplicativas, em particular, dos conceitos de razão e de proporção, e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações?

Discuto a metodologia de Investigação Baseada em *Design* (IBD), em particular a modalidade de experiência de ensino, na qual o estudo que me proponho realizar se insere, e também os critérios de ética e de qualidade associados a uma investigação em educação e de carácter qualitativo.

3.1.1 Investigação baseada em *design*

As diferenças metodológicas entre estudos de laboratório e estudos na sala de aula são justificadas por Brown (1992) pela mudança de objeto de estudo. A compreensão e, em particular, o grau de compreensão dos vários conceitos e processos, os diferentes significados, a aceitação de diferentes pontos de vista e o próprio processo de ensino e aprendizagem tornaram-se relevantes para a investigação em educação e isso implicou a mudança de metodologias a adotar. Brown é uma defensora da investigação em educação, que designou por *design experiments* e que nas últimas décadas surgiu, segundo Prediger, Gravemeijer e Confrey (2015), em diferentes áreas, para responder a necessidades diversas e sob diferentes designações: *design research*, *design based-research*, *design theories*, *educational design research* e *developmental research*. No entanto, qualquer que seja a designação adotada, o foco deste tipo de investigação tem-se vindo a situar na compreensão.

Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) referem que a IBD inclui investigações com características comuns, mas que diferem entre si pela sua abrangência, tais como: experiências de ensino *one-on-one* (professor experimentador e aluno); experiências de sala de aula (*classroom experiments*, no original); experiências de desenvolvimento com futuros professores; experiências de desenvolvimento com professores já em serviço e experiências de reestruturação de escolas ou agrupamento de escolas.

Estes autores identificam em qualquer dos tipos de IBD cinco características transversais. A primeira é desenvolver um conjunto de teorias, quer sobre o processo de aprendizagem, quer sobre os meios projetados para suportar essa aprendizagem. Prediger *et al*. (2015) entendem que gerar teorias "é desenvolver e refinar teorias (mas raramente "testar" no sentido estrito da psicologia experimental)" (p. 879). Experiências individuais de *design* visam teorias pragmáticas (transmitem o projeto prospetivo) e humildes (estão ligadas a processos de aprendizagem de tópicos específicos). O papel principal da IBD é, portanto, especificar o *design* e justificar as diferenças entre as condições principais e auxiliares. A segunda característica é possuir uma natureza intervencionista, em que a intenção é criar e estudar novas formas de ensino e, como tal, investigar aspetos associados à inovação educacional. A terceira é criar condições para o desenvolvimento de teorias, ainda que possam ser pragmáticas. Assim, as experiências de *design* têm sempre duas faces, isto é, são prospetivas e reflexivas: a teoria informa prospectivamente o *design* para a realização da experiência e é também desenvolvida uma reflexão retrospetiva sobre os processos de ensino expectáveis e efetivamente observados. A quarta característica é resultar num *design* iterativo. As conjeturas são geradas, testadas e talvez refutadas, o que pressupõe que novas conjeturas podem ser desenvolvidas e submetidas a testes. O resultado é, portanto, um processo de *design* iterativo com ciclos de invenção e de revisão, que acontece durante uma experiência ou entre experiências (Confrey & Lachance, 2000). Estes ciclos são designados por Gravemeijer e Cobb (2013), respetivamente, por microciclos e macrociclos de *design*. Os microciclos de *design* ocorrem numa experiência da investigação, quando se tenta adaptar as atividades de ensino e a teoria que as suportam. Cada microciclo de *design* consiste numa experiência de pensamento antecipatório, a antecipação da organização de atividades de ensino e a sua análise. É este processo que leva à adaptação ou revisão de atividades subsequentes. Os macrociclos de *design* ocorrem quando as experiências de *design* são repetidas enquanto se constrói uma ou mais experiências de *design* precedentes. Na prática, a pesquisa de *design* pode variar na medida em que se baseia em micro ou macrociclos, ou em ambos. O conhecimento não é apenas obtido nas várias iterações, mas também na análise retrospetiva. A quinta e última característica é refletir as raízes pragmáticas da investigação, ser "ecologicamente válida e orientada pela prática" (Prediger *et al.*, 2015, p. 879). No entanto, a teoria deve ter uma aplicação real e abranger um conjunto mais vasto de fenómenos característicos e complexos das condições de trabalho na sala de aula (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016).

Estas características da metodologia apoiada em IBD tornam-na "desafiante para todos aqueles que têm como foco dos seus estudos a aprendizagem dos alunos em determinadas temáticas" (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2016, p. 53).

A opção metodológica que adotei neste trabalho recai na IBD. Por um lado, porque o objetivo do estudo se alicerça na compreensão dos alunos sobre um tema matemático particular e, por outro lado, porque a exploração, em sala de aula, de um conjunto de tarefas com determinadas especificidades, permite criar um novo olhar sobre o ensino e a aprendizagem do tema em questão e ter uma atitude simultaneamente prospetiva e reflexiva.

3.1.2 Experiências de ensino

De acordo com Kelly e Lesh (2000), as experiências de ensino (*teaching experiments*, no original), enquanto modalidade de IBD, são o tipo de investigação que melhor ilustra as características distintas da pesquisa em educação matemática, em que se tenta que a prática de investigação tenha uma relação efetiva com a prática de ensino e aprendizagem da Matemática (Gravemeijer & Cobb, 2013). Contudo, as experiências de ensino admitem uma grande diversidade de abordagens. Focam-se na intervenção que ocorre em ambientes conceptualmente ricos e que são explicitamente desenhados para otimizar as mudanças relevantes que ocorrerão e que podem ser observadas. Os períodos de tempo em que decorre a investigação podem variar de umas horas até um ano letivo. O ambiente que está a ser observado pode variar de pequenos laboratórios (por exemplo, salas de entrevista), a salas repletas de alunos ou outro tipo de ambientes de aprendizagem, ainda com mais participantes. Desta forma, a experiência de ensino, por um lado, pode ser genericamente considerada como uma intervenção complexa no contexto real de sala de aula, planeada e concretizada, a partir da qual se recolhem dados para documentar e explicar a existência de acontecimentos relevantes (Kelly & Lesh, 2000). Por outro lado, a experiência de ensino envolve, segundo Steffe e Thompson (2000), uma sequência de episódios de ensino e tem como intervenientes um agente de ensino (normalmente o professor), um ou mais alunos, uma testemunha do episódio de ensino e um método de gravação em que transparece o que acontece durante o desenrolar dos episódios.

Na opinião de Kelly e Lesh (2000), as características mais específicas das experiências de ensino permitem diferenciar três tipos: (i) experiências de ensino conduzidas a partir do teste de hipóteses; (ii) experiências de ensino em multicamadas (*multitiered*, no original); (iii) experiências de ensino transformadoras conduzidas a partir de conjeturas.

As experiências de ensino conduzidas a partir do teste de hipóteses consistem em investigações desenvolvidas para testar uma determinada hipótese associada a um aspeto particular do ensino. A formulação de hipóteses pode surgir a partir da análise de episódios de ensino ou de entrevistas clínicas realizadas aos alunos (Steffe & Thompson, 2000).

As experiências de ensino em multicamadas são orientadas pela formulação e teste de conjeturas, mas consideradas em três níveis ou camadas. No nível 1 (os alunos), os projetos podem ter por objetivo investigar a natureza do desenvolvimento de conhecimentos e de capacidades dos alunos. Desta forma, grupos de três alunos podem trabalhar num conjunto de tarefas tido como modelo, em que os objetivos incluem a construção e o refinamento do próprio modelo (descrições, explicações e justificações) e revelam, em parte, como os intervenientes vão interpretando a situação. Este tipo de investigação provou ter sido especialmente útil para estudar, por exemplo, a natureza do desenvolvimento de conhecimentos dos alunos sobre frações, quocientes, razões, taxas e proporções, que evoluem raramente para além dos níveis básicos em ambientes naturais e que não são artificialmente enriquecidos. No nível 2 (os professores), os projetos podem concentrar-se no desenvolvimento de pressupostos dos professores sobre a natureza dos conhecimentos e das capacidades matemáticas dos alunos. Assim, a maneira como os professores desenvolvem ferramentas compartilhadas (tais como métodos de observação ou orientações de avaliação das respostas dos alunos) e como descrevem, explicam e fazem prognósticos sobre o comportamento dos alunos, permite que construam e refinem os modelos para dar sentido ao processo de modelação dos alunos. No nível 3 (os investigadores), os projetos podem concentrar-se no desenvolvimento de conceções dos investigadores sobre a natureza dos conhecimentos e das capacidades dos alunos e dos professores. Os investigadores desenvolvem modelos para dar sentido ao processo de modelação de alunos e professores. Revelam as suas interpretações com a criação de situações de aprendizagem para alunos e professores, descrevem, explicam e apresentam prognósticos sobre os comportamentos de ambos (Lesh & Kelly, 2000).

As experiências de ensino em multicamadas não têm como objetivo, segundo Lesh e Kelly (2000), produzir generalizações sobre alunos, professores ou grupos. Pelo contrário, o seu principal objetivo é o foco na natureza do desenvolvimento relevante de ideias (ou "pequenas ferramentas", modelos ou metáforas onde estas ideias estão incorporadas), independentemente do facto de ocorrer em indivíduos ou em grupos. Assim, os temas podem variar de alunos individuais, a grupos de alunos, a professores, ao discurso na sala de aula, a comunidades que envolvem professores e alunos, ou a escolas e comunidades próximas.

Também as entidades cujo desenvolvimento está a ser investigado podem ser as ferramentas inteligentes (modelos, metáforas ou sistemas de representação) que os alunos desenvolvem para lidar com um determinado tipo de problemas. Desta forma, algumas experiências de ensino resultam em generalizações sobre a natureza das ferramentas conceptuais e de procedimentos dos alunos, enquanto outras resultam em generalizações sobre a natureza dos alunos, professores, grupos, *software* ou outras entidades.

Independentemente do foco da investigação há, em cada nível de análise, a tendência para enaltecer ou clarificar determinados aspetos da situação enquanto, em simultâneo, outros se subestimam ou distorcem. Além disso, quando num projeto de investigação se opta por adotar uma determinada perspetiva teórica é quase como se estivéssemos a escolher uma janela através da qual se podem analisar os objetos em estudo. Dependendo da janela teórica escolhida e do nível de detalhe, uma dada investigação é suscetível de recolher informação diferente e é possível salientar diferentes padrões ou regularidades (Lesh & Kelly, 2000).

Da mesma forma, seja qual for o foco da investigação – desenvolvimento dos alunos, dos professores, de grupos, de *software* ou de outras entidades que interagem durante o processo de ensino e aprendizagem – um pressuposto básico que sustenta a experiência de ensino em multicamadas é que nenhum adapta e desenvolve sistemas de autorregulação isoladamente. Consequentemente, os projetos de investigação que provaram ser mais produtivos para investigar a natureza destas entidades tendem a concentrar-se no desenvolvimento (não somente em momentos isolados e estáticos de desenvolvimento) e nas interações (não apenas em entidades isoladas). Um outro pressuposto básico é que, apesar das diferenças óbvias entre os três níveis de investigação (os alunos, os professores e os investigadores), em todos existe empenho em dar sentido às suas experiências através do desenvolvimento de ferramentas inteligentes (constructos, modelos, sistemas conceptuais, sistemas de crenças e sistemas de representação) que são usadas para gerar descrições, explicações, construções e justificações através de uma variedade de sistemas de representação (Lesh & Kelly, 2000).

Para cada um destes tipos de sistemas de desenvolvimento, a investigação relevante pode, segundo Lesh e Kelly (2000), incluir experiências de ensino com as seguintes características: (a) desenvolvimento, pois envolvem estudos de desenvolvimento longitudinal, interagindo em ambientes de aprendizagem estruturados e ricos; (b) ensino, no sentido que, em cada nível, as experiências são criadas para garantir que o desenvolvimento ocorrerá sem predeterminar a sua natureza específica ou direção; (c) experiências, que permitem, em cada nível, envolver os participantes principais (alunos, professores e investigadores) na construção de ciclos de desenvolvimento que repetidamente revelam testar, aperfeiçoar e ampliar os seus conhecimentos.

As experiências de ensino transformadoras conduzidas a partir de conjeturas, de acordo com Confrey e Lachance (2000) e Lesh e Kelly (2000), são estudos de desenvolvimento longitudinal, orientados por uma conjetura. Consistem em intervenções relativamente prolongadas, na sala de aula, que inter-relacionam as conjeturas que orientam a definição da experiência e as componentes de ensino – o currículo, os métodos de ensino, o papel do professor e os métodos de avaliação. As questões do estudo, os métodos de recolha e análise de dados devem ter em atenção essa inter-relação.

Confrey e Lachance (2000) referem que uma conjetura, no contexto da educação matemática, é um meio para conceptualizar as formas de abordar quer o conteúdo quer a pedagogia de um conjunto de temas matemáticos; uma conjetura não é uma afirmação a ser, ou não, provada no final da investigação, pelo contrário, ela é revista e reformulada no decurso do estudo. Explicitam, pois, que as conjeturas que orientam este tipo de experiências de ensino devem ter duas dimensões: (a) dimensão de conteúdo matemático, que inclui uma componente matemática e perspetiva o que deve ser ensinado, para permitir responder à questão "o que deve ser ensinado?" (p. 235); (b) dimensão pedagógica, ligada à outra, mas que perspetiva a maneira como se ensina, para permitir responder à questão "como é que este conteúdo deve ser ensinado?" (p. 235). Esta dimensão orienta, portanto, as decisões ao nível da organização do ensino, das tarefas a propor e dos recursos que lhes estão associados.

Uma conjetura tem necessariamente que estar enquadrada numa teoria, caso contrário não pode ser interpretada e, seja qual for a sua particularidade, ela serve para estruturar as atividades e as metodologias da experiência de ensino. Segundo Confrey e Lachance (2000), a teoria ajuda a elaborar a conjetura nas duas dimensões.

A experiência de ensino a realizar durante a investigação que me proponho desenvolver enquadra-se neste último tipo, experiência de ensino conduzida a partir de uma conjetura e, como tal, especifico, em primeiro lugar, as conjeturas que orientam a definição desta experiência e refiro, em segundo lugar, cada uma das componentes de ensino.

A dimensão de conteúdo matemático da conjetura diz respeito aos aspetos considerados essenciais para a evolução da aprendizagem da proporcionalidade, em particular, no respeitante à comparação multiplicativa. A teoria permitiu, por um lado, identificar que a proporcionalidade, concretamente a comparação multiplicativa, está relacionada com as estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983, 1988), com os conceitos de razão e de proporção (Freudenthal, 2002; Thompson e Saldanha, 2003), entre outros, e também com o raciocínio proporcional (Lamon, 2007). Por outro lado, constatou-se que a flexibilidade se pode evidenciar na utilização e construção de estratégias de resolução e de representações (Blöte *et al*., 2001; Berk *et al*., 2009; Nistal *et al*., 2009). Assim, nesta dimensão explicito as estratégias de resolução e as representações que podem ser usadas pelos alunos em tarefas de introdução à proporcionalidade. Quanto às estratégias de resolução, como já referi (secção 2.3), reconheço quatro: adicionar parcelas iguais, tendo em conta as relações proporcionais entre duas quantidades (raciocínio escalar); multiplicar através de um fator representado por um número racional (inteiro ou não inteiro), no sentido de aumentar ou diminuir quantidades, mantendo relações proporcionais entre duas quantidades (raciocínio escalar); utilizar a razão entre quantidades de dois espaços de medida como um fator de proporcionalidade (coeficiente de proporcionalidade) (raciocínio funcional); interpretar o coeficiente de proporcionalidade como o declive de uma reta (função linear). Relativamente às representações, a evidência impõe-se no modo de representação simbólico, em linguagem matemática, considerado entre outros por Bruner (1966), Lesh *et al*. (1983) e Vergnaud (1983, 1988). Refiro-me também à flexibilidade relacionada com a construção de estratégias de resolução (Threlfall, 2002, 2009; Verschaffel *et al*., 2009) e com representações utilizadas (Warner *et al*., 2009), num processo dinâmico de ligação entre estratégias de resolução, entre representações e entre estratégias de resolução e representações. Essas relações, de duplo sentido, evidenciam-se através de aspetos numéricos mencionados por Threlfall (2002, 2009) e por Verschaffel *et al*. (2009), em particular no que se refere ao cálculo mental, como sejam: o tipo de números envolvidos e as suas relações, as operações utilizadas e as suas propriedades.

A dimensão pedagógica da conjetura foca-se no modo como a comparação multiplicativa e a flexibilidade são exploradas na sala de aula, apoiando-se numa aprendizagem significativa e com compreensão (NCTM, 2000). A aprendizagem dos alunos deve basear-se "no processo pelo qual uma matemática nova é aprendida como um processo de reinvenção no qual eles próprios têm um papel ativo" (Gravemeijer, 2004, p. 109). As opções metodológicas que se consideram facilitar essa aprendizagem incluem o desenvolvimento de um ambiente de sala de aula que favoreça o trabalho em grupo (ou em pares/trios), a participação ativa dos alunos (anteriormente referida), a existência de momentos de interação professor/aluno e aluno/aluno que valorizem a partilha e a argumentação. Mais importante que "saber fazer" é "saber explicar como foi feito" e justificar as opções tomadas. Nesta perspetiva, esta dimensão da conjetura assenta no pressuposto que a exploração de tarefas, desenhadas de forma a favorecer a flexibilidade na comparação multiplicativa, proporciona aos alunos a construção de um sistema de relações multiplicativas entre números racionais[7] (inteiros e não inteiros) representados sob a forma de fração, decimal, numeral misto ou percentagem, que lhes permite utilizar, de modo flexível, estratégias de resolução e representações adequadas e alternar com confiança entre os conceitos/procedimentos de fator multiplicativo, razão escalar e razão funcional.

No que diz respeito às componentes de ensino, relativamente ao currículo, a conjetura vai determinar que áreas de conteúdo serão cobertas na intervenção em sala de aula. Quanto aos métodos de ensino (ensino direto, ensino-aprendizagem exploratório ou uma mistura de ambos), as escolhas são influenciadas pela dimensão de conteúdo e pela dimensão pedagógica da conjetura, baseadas no quadro teórico, e vão afetar os métodos de recolha de dados. Nos métodos de ensino, é por isso necessário definir como é que os alunos vão trabalhar (individualmente, em pequenos grupos ou na turma no seu todo). Em relação ao papel do professor, é essencial decidir de início quem vai ser o professor que atua (o professor da turma ou o investigador) e que tipo de papel vai desempenhar durante a intervenção na sala de aula (disponibiliza os conhecimentos que forem necessários, auxilia os alunos nas suas resoluções ou o seu papel modifica-se consoante as tarefas). Estas opções são influenciadas pela conjetura e pelo tipo de tarefas a propor aos alunos. Com referência à avaliação, os processos utilizados para avaliar a aprendizagem e o progresso dos alunos devem ser, tal como as outras componentes de ensino, baseados e coerentes com o conteúdo, a teoria de ensino e o enquadramento teórico da conjetura. Os resultados das avaliações não fornecem só dados sobre o impacto da intervenção, mas permitem também uma constante avaliação formativa do processo que vai orientar continuamente a evolução da conjetura e os materiais curriculares. Assim, será importante variar os processos de avaliação utilizados, do mais informal ao mais formal.

Os diferentes tipos de experiências de ensino, tal como a metodologia de IBD, onde se inserem e anteriormente mencionada, envolvem, segundo Cobb *et al*. (2003), Gravemeijer (2004) e Gravemeijer e Cobb (2013), um aspeto comum a todos: as fases que as constituem. De facto, uma experiência de ensino desenrola-se segundo três fases: a preparação da experiência, a experimentação na sala de aula e a realização de uma análise retrospetiva.

[7] A referência a números racionais, neste trabalho, significa números racionais positivos.

Na primeira fase, a preparação da experiência, são identificados os aspetos teóricos relacionados com a perspetiva de aprendizagem assumida no estudo, assim como os seus objetivos. É formulada uma teoria local de ensino que inclui uma conjetura composta por três componentes: (a) os objetivos de aprendizagem para os alunos; (b) a planificação de um conjunto de tarefas, organizadas em sequências a explorar na sala de aula, e de ferramentas a usar; (c) uma hipotética antecipação do modo como o raciocínio e a compreensão dos alunos evolui durante a resolução das tarefas na sala de aula.

A teoria local de ensino conjeturada está aberta a adaptações que derivam do trabalho dos alunos e da avaliação da sua compreensão. A teoria reflete também a importância de antecipar o processo de aprendizagem quando as atividades de ensino que foram planeadas são realizadas na sala de aula. Na fase seguinte, estas conjeturas são testadas (Gravemeijer, 2004; Gravemeijer & Cobb, 2013).

Na segunda fase, a experimentação na sala de aula, são exploradas pelos alunos sequências de tarefas. As resoluções destas tarefas são depois analisadas conjuntamente, pelo investigador e pelo professor da turma, com vista a "redesenhá-las" e adaptá-las, iniciando-se assim um processo cíclico, considerado a "espinha dorsal da *design research* aplicada à experiência de ensino" (Gravemeijer, 2004, p. 110) e ilustrado na figura 21.

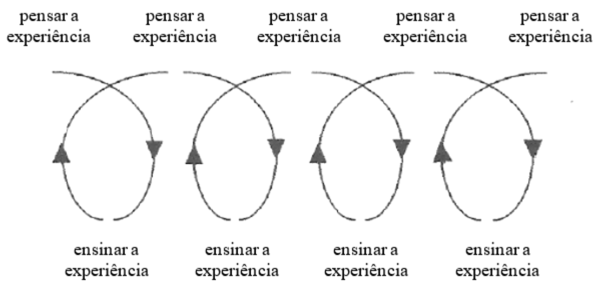


Figura 21: Processo cíclico entre o pensar e o ensinar a experiência (adaptado de Gravemeijer, 2004, p. 111)

Para Gravemeijer e Cobb (2013) são estes microciclos, entre o pensar a experiência e o ensinar a experiência, que permitem desenvolver a teoria local de ensino, uma vez que existe, de facto, uma relação reflexiva entre ambos. Por um lado, a teoria local de ensino que foi conjeturada, guia o pensar e o ensinar da experiência e, por outro lado, o microciclo de ensino da experiência forma a teoria local de ensino conjeturada (figura 22).

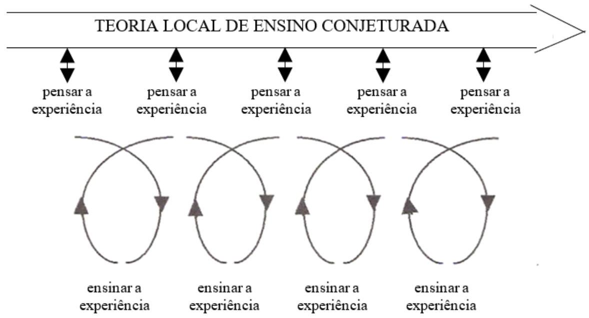


Figura 22: Relação reflexiva entre teoria e experiências (adaptado de Gravemeijer, 2004, p. 112)

O trabalho diário do investigador, balizado entre o pensar as experiências e o ensinar as experiências, não tem como objetivo preparar a atividade de ensino do dia seguinte, mas desenvolver uma teoria local de ensino ponderada e empiricamente fundamentada. Segundo Gravemeijer (2004), a expressão “teoria local de ensino” surge para transmitir a intenção de oferecer mais do que uma descrição de um caminho de aprendizagem e de atividades de ensino correspondentes e inclui uma justificação. O objetivo da IBD não é oferecer uma sequência de ensino que “funcione”, mas sim uma teoria fundamentada pela experiência sobre como os investigadores pensam que uma determinada sequência de tarefas pode funcionar.

Na terceira e última fase, a realização de análises retrospetivas, são analisados todos os dados recolhidos e confrontados tanto com a teoria como com os objetivos da investigação e as questões que os suportam. O investigador deve ter oportunidade de responder à questão “o que aprendi?”.

Embora as três fases anteriores possam ser identificadas num estudo desta natureza, nem sempre os seus limites se conseguem delinear de uma forma explícita. Ou seja, pode acontecer, por exemplo, que as tarefas sejam concebidas e planificadas na fase de preparação da experiência e também durante a fase de experimentação na sala de aula. Da mesma forma, as análises retrospetivas podem começar a ser efetuadas antes de a experimentação na sala de aula terminar.

Como já referi, a experiência de ensino desenvolvida nesta investigação insere-se no tipo transformadora conduzida a partir de conjeturas e decorreu em dois ciclos de experiência. Cada ciclo decorreu no início do ano letivo, num momento em que os alunos ainda não tinham trabalhado a temática curricular designada por Proporcionalidade Direta. Genericamente, a sequência de tarefas manteve-se, mas foram efetuados alguns ajustes de um ciclo para o outro (a tarefa 3 é proposta no segundo ciclo, quando não o tinha sido no primeiro; a tarefa 5 sofre uma alteração a nível dos valores inicialmente considerados). Mais à frente, no capítulo 4, desenvolvo cada uma das fases em que se desenrolaram os dois ciclos desta experiência de ensino.

3.1.3 Critérios de ética e de qualidade

Planear uma investigação no âmbito da educação é um processo que tem subjacente várias questões integradas no campo da ética. Uma delas é o que Cohen, Manion e Morrison (2007) designam por consentimento informado, isto é, "os procedimentos perante os quais os indivíduos escolhem se devem participar de uma investigação, após terem sido informados de factos que poderiam influenciar as suas decisões" (p. 52).

No caso em apreço, os participantes na investigação – as professoras e os alunos – são informados sobre os objetivos da investigação, a forma como cada um deverá desempenhar o seu papel e quais as consequências da sua participação. Em reuniões marcadas expressamente para esse efeito, explico às professoras a investigação que me proponho realizar, baseada no projeto de investigação apresentado, discutido e aprovado academicamente. Posteriormente, solicito autorização à direção dos agrupamentos em causa (Anexo A) e, mais uma vez, explico o teor do estudo. Devido ao facto de alguns dos participantes serem menores de idade (alunos que frequentam o 2.º ciclo do ensino básico) é necessário obter a sua anuência e, além disso, a permissão da sua participação por parte dos encarregados de educação. Em aulas que antecipam o início da investigação esboço com os alunos o papel da sua participação e, devido à sua idade, são comunicadas aos encarregados de educação, em reuniões ou através de contactos mais informais tidos com o diretor de turma, as ideias principais da investigação. Cada encarregado de educação assina, e devolve à professora titular da turma, um documento, a autorizar a participação do seu educando e podendo impor condições, caso considere necessário (Anexos B e C).

Cohen *et al.* (2007) mencionam ainda que na conceção de uma investigação deste tipo devemos ter em atenção, entre outras, questões no campo da ética ligadas com a privacidade e o anonimato dos participantes e com a confidencialidade.

A privacidade pode ser considerada segundo três perspetivas: (1) sensibilidade da informação recolhida, refere-se a questões de caracter pessoal ou a dados potencialmente ameaçadores obtidos pelo investigador; (2) configuração observada, pode variar de muito privada a totalmente pública; (3) disseminação da informação, diz respeito à capacidade de combinar informações pessoais com a identidade de quem participa na investigação.

A ideia principal do anonimato dos participantes baseia-se no facto de as informações por eles fornecidas não permitirem revelar a sua identidade. Um participante é considerado anónimo quando o investigador, ou outra pessoa, não o consegue identificar através das informações que lhe foram fornecidas. Sempre que o anonimato é considerado, a privacidade do participante está garantida, independentemente da sensibilidade da informação obtida.

A promessa de confidencialidade emanada pelo investigador é também, de acordo com Cohen *et al.* (2007), uma maneira de proteger o direito à privacidade dos participantes. Isto quer dizer que o investigador, embora saiba quem forneceu as informações ou seja capaz de identificar os participantes através das informações fornecidas, não exporá essa ligação publicamente.

Desta forma, mostrando a promessa de confidencialidade, as escolas não são identificadas e quer as professoras quer os alunos surgem com nomes fictícios, tendo em vista manter o seu anonimato e privacidade. Nenhuma das professoras sentiu ser necessário recorrer ao seu anonimato, mas ele impõe-se pelo anonimato devido aos seus alunos. Está igualmente garantido que os dados recolhidos são utilizados somente no âmbito da investigação que me proponho efetuar.

Quanto a critérios de qualidade associados a uma investigação em educação Cohen *et al.* (2007) referem, entre outros, a importância da triangulação de dados, "definida como o uso de dois ou mais métodos de recolha de dados num estudo de algum aspeto do comportamento humano" (p. 141). Por analogia à técnica de medição física, designada por triangulação e muito usada, por exemplo, por navegadores, "as técnicas de triangulação utilizadas nas ciências sociais tentam mapear ou explicar com mais pormenor a riqueza e a complexidade do comportamento humano, estudando-o sob diferentes pontos de vista" (p. 141).

Na investigação em causa, os dados são recolhidos através de registos escritos dos alunos, elaborados durante as aulas, e de gravações vídeo de aulas. A transcrição completa, objetiva e pormenorizada das aulas e a sua análise permitem, muitas vezes, completar e aprofundar a informação recolhida nas produções escritas. O objetivo de compreender o modo como os alunos desenvolvem a proporcionalidade num contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa, implica considerar o pormenor e a complexidade de variados momentos de aprendizagem e, como tal, triangular a recolha de dados.

3.2 Contexto e participantes

Nesta secção, por um lado, descrevo o contexto em que se realizou a experiência de ensino, referindo os agrupamentos de escolas e, em particular, as escolas escolhidas; por outro lado, caracterizo os participantes, isto é, as professoras e os alunos envolvidos.

3.2.1 Agrupamentos de escolas – As escolas

A experiência de ensino proposta nesta investigação é concretizada em duas escolas, com valência de lecionação no 2.º ciclo do ensino básico, pertencentes a um agrupamento de escolas do distrito de Portalegre e a um do distrito de Setúbal. Estes agrupamentos de escolas têm, ao longo dos tempos, colaborado com as Escolas Superiores de Educação dos Institutos Politécnicos das zonas respetivas, quer na formação inicial, quer na formação contínua de professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e de educadores de infância. Estas duas vertentes de colaboração permitem considerar que existe, da parte de alguns dos professores destes agrupamentos, um investimento profissional aberto a inovações e experiências pedagógicas, necessário a um estudo com estas características.

Uma das escolas é sede do agrupamento e está inserida num meio de características urbano-rural, com acentuada tendência urbana. A população envolvente apresenta um nível socioeconómico e cultural muito heterogéneo e, em particular, grande parte dos encarregados de educação está empregada e tem como habilitações académicas a escolaridade básica (9.º ano).

A outra das escolas não é sede do agrupamento, mas insere-se num meio com características urbanas. No que diz respeito à população envolvente, grande parte tem emprego e apresenta como habilitações académicas a escolaridade básica, ao nível do 1.º ciclo.

3.2.2 Participantes – As professoras e os alunos

Nesta experiência de ensino, nos seus dois ciclos, os participantes são as professoras e todos os alunos de duas turmas do 6.º ano de escolaridade e eu própria, como investigadora.

A escolha das professoras baseia-se nos seguintes critérios: (i) lecionar nos anos letivos 2015/16 e 2016/17 uma turma de 6.º ano de escolaridade; (ii) ter pelo menos 10 anos de prática de ensino; (iii) mostrar interesse e disponibilidade para se envolver num projeto de âmbito curricular na disciplina de Matemática.

O primeiro critério fundamenta-se pelo objetivo da investigação que pretendo realizar. O segundo e o terceiro justificam-se com o pressuposto de que alguma experiência profissional conjugada com disponibilidade e interesse é uma mais valia para o desenrolar de um projeto, tendo em consideração que o estudo assenta numa investigação com características de experiência de ensino.

No primeiro ciclo da experiência, os participantes são a professora Sofia e os dezoito alunos (onze rapazes e sete raparigas) que frequentam a disciplina de Matemática, de uma turma do 6.º ano de escolaridade.

À data da recolha de dados, Sofia tem como habilitação académica uma licenciatura em Ensino dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza. Ao longo dos seus dezassete anos de exercício da profissão docente, Sofia lecionou doze como professora de Matemática e Ciências da Natureza do 2.º ciclo do ensino básico e dois como professora do 1.º ciclo do ensino básico e integrou, durante três anos, uma equipa de Ensino Especial. O ano letivo 2015/16 é o primeiro em que Sofia leciona nesta escola e, como tal, os tempos iniciais foram também de adaptação a uma outra realidade – novos colegas, espaços diferentes e, claro, alunos desconhecidos. Sofia é a professora da turma nas disciplinas de Matemática e Ciências da Natureza.

Todos os alunos desta turma estão pela primeira vez a frequentar o 6.º ano de escolaridade, o que os coloca numa posição de igualdade perante a novidade dos temas a explorar. Apenas um aluno é abrangido pelo Regime Educativo Especial (DL n.º 3/2008, de 7 de janeiro, artigo 16.º, ponto 2, alíneas: a) Apoio pedagógico personalizado; d) Adequações no processo de avaliação) e um outro por Currículo Específico Individual. Este último não participa nas aulas da disciplina de Matemática e, como tal não foi contabilizado. Os alunos que frequentam as aulas de Matemática têm todos onze anos de idade, com exceção de um que tem treze anos.

No segundo ciclo da experiência, os participantes são a professora Vera e os vinte alunos (dez rapazes e dez raparigas) que frequentam a disciplina de Matemática, de uma turma do 6.º ano de escolaridade.

À data da recolha de dados, Vera tem como habilitações académicas um mestrado em Didática da Matemática, uma licenciatura em Ensino dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza e a parte curricular de um curso de especialização em Educação Especial. Ao longo dos seus vinte e oito anos de exercício da profissão docente, Vera lecionou vinte como professora de Matemática e Ciências da Natureza do 2.º ciclo do ensino básico e integrou durante oito anos uma equipa de Ensino Especial. Há já alguns anos que Vera pertence ao quadro desta escola e este ano leciona à turma as disciplinas de Matemática e de Ciências da Natureza, sendo também a diretora de turma.

Dos alunos desta turma, apenas um não está a frequentar o 6.º ano de escolaridade pela primeira vez, o que os coloca, na quase totalidade, numa posição de igualdade perante a novidade dos temas a explorar. Apenas um aluno é abrangido pelo Regime Educativo Especial (DL n.º 3/2008, de 7 de janeiro, artigo 16.º, ponto 2, alíneas: a) Apoio pedagógico personalizado; d) Adequações no processo de avaliação) e um outro por Currículo Específico Individual e, como tal, não participa nas aulas da disciplina de Matemática e não foi, por isso, contabilizado. Dos alunos que frequentam as aulas da disciplina de Matemática, quinze têm onze anos, quatro têm dez anos e um tem treze anos de idade.

A opção por turmas de 6.º ano é legitimada pelo facto de os conteúdos programáticos terem a sua relevância curricular neste ano de escolaridade, de acordo com o PMCM em vigor. As turmas não são propriamente escolhidas, mas surgem antes pela preferência de cada uma das professoras perante o leque de turmas que lecionam, as características dos alunos que as compõem e as condições de compatibilidade de horários.

3.3 Métodos de recolha de dados

Numa investigação com as características de experiência de ensino, os dados a recolher são maioritariamente de natureza qualitativa e, segundo Confrey e Lachance (2000), com o propósito principal de captar as interações do dia a dia da sala de aula, e surgem de diferentes fontes: observação participante, recolha documental e conversas informais.

No caso concreto desta investigação, tendo em atenção o seu objetivo e as questões do estudo, os principais métodos de recolha de dados são a observação participante e a recolha documental. As conversas informais com as professoras, pelas suas características, surgem com um carácter mais secundário.

3.3.1 Observação participante

A opção por uma experiência de ensino na sala de aula obriga-me a assumir um duplo papel – investigadora e elemento de recolha de dados. Sendo um elemento exterior à turma, tento que a minha presença seja aceite de uma forma o mais natural possível.

Tal como Confrey e Lachance (2000) referem, a observação participante deve ser complementada com gravações vídeo das aulas. Nesta investigação, todas as aulas em que foram exploradas as tarefas que integram a experiência de ensino foram gravadas em vídeo. As gravações foram integralmente transcritas, por mim, de forma a que quem lê estes documentos fique elucidado quanto ao papel de cada um dos intervenientes e seja capaz, por si próprio, de criar uma imagem das interações da aula a que não assistiu.

Em cada ciclo da experiência, antes da primeira aula da experiência de ensino, procedo à gravação de uma aula para que os alunos se familiarizem com a minha presença e com a gravação e para que eu própria afine alguns pormenores técnicos. Por norma, a câmara é montada num tripé e fixa num local previamente escolhido de cada sala de aula.

No primeiro ciclo da experiência, as aulas da disciplina de Matemática são todas lecionadas na mesma sala (é política da escola que cada turma tem a sua sala) e a câmara de filmar é colocada ao fundo, de modo a criar um ângulo de visão tanto para o quadro, como para a turma no seu todo. Os alunos têm os seus lugares fixos e, por isso, ao longo da experiência não há alteração dos pares de trabalho. Em alguns momentos pontuais, desloco-me com a câmara por entre as mesas de maneira a ser possível filmar os detalhes de resolução dos alunos, principalmente no que se refere às tarefas em que é disponibilizado material manipulável. Por regra da escola, as mesas individuais estão dispostas em filas separadas. Todavia, sempre que há uma aula da experiência, eu e Sofia, no intervalo que a antecede, juntamos as mesas duas a duas, originando três filas, de modo a permitir que os alunos trabalhem a pares. Quando a aula termina, durante o intervalo, voltamos a arrumar as mesas na sua disposição obrigatória. Esta sala de aula está equipada com computador e quadro interativo que, por motivos técnicos, apenas começaram a funcionar uns dias depois do início da experiência.

No segundo ciclo da experiência, as aulas da disciplina de Matemática são lecionadas em duas salas, com dimensões e organização espacial algo diferentes, o que leva a que os alunos nem sempre mantenham os mesmos colegas de grupo. Numa das salas a câmara de filmar é colocada ao fundo e, na outra, por falta de espaço, é posicionada do lado esquerdo de quem está virado de frente para o quadro. Em qualquer das situações, o ângulo de visão abrange o quadro e a turma na sua globalidade e, sempre que é considerado necessário, desloco-me com a câmara entre as mesas para, tal como aconteceu no primeiro ciclo, conseguir gravar em detalhe sobretudo a resolução de tarefas em que os alunos têm à sua disposição material manipulável. Em ambas as salas, as mesas de dois lugares estão dispostas em filas e assim se mantêm nestas aulas. As duas salas estão equipadas com computador e projetor vídeo, sempre disponíveis para utilização.

3.3.2 Recolha documental

A recolha documental é composta, segundo Confrey e Lachance (2000), fundamentalmente pelas produções escritas dos alunos. Nesta experiência e nos seus dois ciclos, embora o trabalho na sala de aula seja maioritariamente em pares, é distribuída a cada aluno uma folha de resposta, onde deve escrever tudo o que considere importante para a explicação da sua resolução. No final da aula, cada folha, devidamente identificada, é deixada em cima da mesa e recolhida por mim ou pela professora. Num momento posterior, todas as resoluções são digitalizadas e devolvidas aos alunos numa outra aula. É-lhes explicado o que se pretende do seu trabalho e participação e acordado que as resoluções devem ser registadas a caneta e, sempre que necessário e sem qualquer constrangimento, que podem riscar e voltar a escrever (esta norma nem sempre foi cumprida e, em alguns casos, apenas está registada a resposta apresentada e discutida no quadro).

Relativamente a outros documentos, no primeiro ciclo da experiência, tive acesso à planificação a médio prazo do conteúdo Proporcionalidade Direta, concebida pelo departamento da escola. Este documento mostra-se útil no sentido de se cumprir o calendário estipulado, tendo em atenção que os momentos de avaliação sumativa da disciplina de

Matemática são comuns a todas as turmas. O início da experiência coincide com o do estudo do conteúdo Proporcionalidade Direta que, de acordo com o documento do PMCM em vigor, é parte integrante do domínio de conteúdo de Álgebra. Por opção do departamento, neste ano letivo, este domínio é lecionado imediatamente a seguir ao de Números e Operações.

Ao contextualizar temporalmente o primeiro ciclo da experiência de ensino convém referir que as aulas de Matemática decorrem em períodos de 90 min, três vezes por semana, e que, por constrangimentos profissionais, apenas posso estar presente uma vez por semana e, muito excecionalmente, duas. Assim, as tarefas desta experiência de ensino desenvolvem-se com uma abordagem diferente (explicada em secção própria – 4.1.), mas de acordo com a planificação anual do departamento de Matemática da escola e segundo a sequência e o calendário apresentados na tabela 2.

Tabela 2: Sequência e calendarização das tarefas, no primeiro ciclo da experiência

Número	Tarefa	Data
1	Misturas de chocolates	9 nov. 2015
2	Redimensionar – Quatro imagens do mesmo desenho (parte 1) Redimensionar – Multiplicando (parte 2)	16 nov. 2015
	Redimensionar – Ampliar e reduzir com percentagens (parte 3)	19 nov. 2015
	Comparar dimensões (parte 4)	TPC[8]
4	Fazer limonadas	23 nov. 2015
5	Qual devo comprar?!	14 dez. 2015

No segundo ciclo da experiência, Vera entende que não deve alterar a planificação anual do departamento de Matemática, que segue a ordem proposta pelo documento programático em vigor. Isto para não criar muito desfasamento entre os alunos, considerando o modelo organizacional em vigor na própria escola, baseado no Projeto Fénix.

> Este modelo consiste na criação de Turmas Fénix – ninhos nos quais são temporariamente integrados os alunos que necessitam de um maior apoio para conseguir recuperar aprendizagens, permitindo um ensino mais individualizado, com respeito por diferentes ritmos de aprendizagem, o que se tem vindo a revelar uma estratégia de sucesso educativo.
>
> Os ninhos funcionam no mesmo tempo letivo da turma de origem, o que permite não sobrecarregar os alunos com tempos extra de apoio educativo. Assim que o nível de desempenho esperado é atingido, os alunos regressam à sua turma de origem. Paralelamente, também são criados ninhos para alunos com elevadas taxas de sucesso, de forma a permitir o desenvolvimento da excelência. (ME, Direção-Geral da Educação, http://www.dge.mec.pt/fenix)

[8] TPC – Trabalho Para Casa.

Perante tal situação, não considerei relevante ter conhecimento da planificação a longo ou a médio prazo. As tarefas da experiência são, por isso, propostas em aulas que intercalam com outras onde a sequência de conteúdos do programa é mantida.

As aulas de Matemática decorrem três vezes por semana, em dois períodos de 90 min e um de 45 min. Mais uma vez, por contingências de âmbito profissional, apenas me é possível estar presente uma vez por semana e, em alguns casos, duas. Por consenso com Vera, as tarefas são sempre propostas em aulas de 90 min, seguindo a sequência e a calendarização indicadas na tabela 3.

Tabela 3: Sequência e calendarização das tarefas, no segundo ciclo da experiência

<table>
<tr><th>Número</th><th>Tarefa</th><th>Data</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Misturas de chocolates</td><td>8 nov. 2016</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>Redimensionar – Quatro imagens do mesmo desenho (parte 1)
Redimensionar – Multiplicando (parte 2)</td><td>14 nov. 2016</td></tr>
<tr><td>Redimensionar – Ampliar e reduzir com percentagens (parte 3)</td><td>15 nov. 2016</td></tr>
<tr><td>Comparar dimensões (parte 4)</td><td>Não filmada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Cálculos e mais cálculos (parte 1)</td><td>13 dez. 2016</td></tr>
<tr><td>Cálculos e mais cálculos (parte 2)</td><td>9 jan. 2017</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Fazer limonadas</td><td>10 jan. 2017</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Qual devo comprar?!</td><td>17 jan. 2017</td></tr>
</table>

3.3.3 Conversas informais com as professoras

As reuniões realizadas com Sofia e Vera decorrem sempre numa perspetiva de cooperação, sem qualquer suporte de gravação, e apenas em momentos posteriores são anotadas as ideias abordadas e as reflexões efetuadas, em breves notas de campo.

No primeiro ciclo da experiência, reúno seis vezes com Sofia. Na primeira reunião, apresento o projeto e as respetivas tarefas, que são depois discutidas uma a uma. É reorganizada a planificação a médio prazo com a introdução das novas tarefas e acordada a calendarização da experiência. São também explicitados os momentos de cada aula na abordagem e exploração das tarefas. Em cada uma das reuniões seguintes, são analisados e discutidos documentos escritos em que se propõem os enunciados das tarefas, os seus objetivos de aprendizagem e o seu enquadramento no PMCM em vigor. Discutem-se indicações de exploração das tarefas na sala de aula, incluindo a antecipação de resoluções e prováveis erros dos alunos (desenvolvido em secção própria – 4.1.). Numa das reuniões foram visionadas partes da gravação de uma aula em que, numa análise inicial, são realçados o comportamento de alguns alunos e a incompreensão que persistia no enunciado de uma das questões da tarefa; numa outra reunião, após uma primeira análise das resoluções dos alunos, é discutida uma situação que originou, por parte de Sofia, uma abordagem diferente na aula seguinte.

No segundo ciclo da experiência, reúno três vezes com Vera. Na primeira reunião, tal como aconteceu no ano letivo transato, apresento o projeto e as tarefas a discutir, posteriormente uma a uma. É acordada a calendarização semanal da experiência, marcada a data da aula do seu início e reforçada a importância dos vários momentos de aula, que Vera considera habituais. Após a aula de gravação experimental, discutimos o documento de trabalho relativo à tarefa 1 (Misturas de chocolates) e depois os outros, individualmente. Depois de uma breve análise das aulas no intervalo, Vera propôs-se, muitas vezes, a continuar o trabalho em outras aulas não gravadas, principalmente, para sistematizar com os alunos as ideias e os procedimentos que tinham sido explorados.

Os documentos discutidos com as professoras sofrem ligeiras alterações de conteúdo, mantendo a mesma formatação, de um ciclo da experiência de ensino para o outro. Por motivos vários, o visionamento conjunto de aulas só foi possível ser realizado uma vez e, como tal, essa responsabilidade ficou apenas a cargo da investigadora. De um modo global, as sessões de trabalho colaborativo com Sofia e Vera são muito de preparação e antecipação de aulas e pouco de análise retrospetiva. Contingências profissionais e incompatibilidades horárias assim o determinam. No entanto, sempre que surgia alguma dúvida, o contacto telefónico e o correio eletrónico foram meios de comunicação sempre disponíveis nos dois ciclos da experiência.

3.4 Recolha de dados

No início do ano letivo 2015/16 encontro-me pessoalmente com a professora Sofia, que já conhecia, convidando-a a participar nesta investigação. Obtido o seu acordo, em setembro de 2015, contacto o Diretor do Agrupamento no qual Sofia trabalha, a quem explico o estudo que pretendo realizar e com quem discuto a maneira de obter as autorizações necessárias para a experiência a concretizar numa das turmas da escola. Por intermédio de Sofia são obtidas as correspondentes autorizações escritas dos encarregados de educação dos alunos (Anexo B – modelo de autorização que foi assinado por cada um), que ficam na sua posse. Todos permitem que os seus educandos participem, sem imporem quaisquer restrições.

No início do ano letivo 2016/17, por intermédio de uma colega, contacto pessoalmente a professora Vera, que não conhecia, convidando-a também a participar nesta investigação. Obtido o seu acordo, contacto a Direção do Agrupamento no qual Vera exerce funções e, mais uma vez, explico pormenorizadamente o estudo que me proponho efetuar. Por sugestão da Direção e por intermédio de Vera, no seu papel de diretora de turma, os encarregados de educação são informados. Os consentimentos escritos, para a participação dos alunos (Anexo C – modelo de autorização que foi assinado por cada um), são obtidos e ficam na posse de Vera. Todos os encarregados de educação autorizam o seu educando a participar e apenas um impõe a condição de ele não ser filmado. Esta circunstância particular é cumprida, apesar de toda a investigação, no que respeita à recolha, tratamento e análise de dados, observar questões de ética pessoal e profissional, como é referido em secção própria (3.1.).

Durante os meses que antecederam o momento inicial da recolha de dados, do primeiro ciclo da experiência, procedo à escolha e organização das tarefas que serão propostas e discutidas com Sofia e depois exploradas na sala de aula.

A recolha de dados inicia-se com a gravação, em cada um dos ciclos da experiência, da aula em que a tarefa 1 é proposta e continua em aulas posteriores, de acordo com os calendários indicados nas tabelas 5 e 6, na secção anterior.

As produções dos alunos, consideradas, em conjunto com as aulas gravadas, parte dos principais dados da investigação são, portanto, o objeto de análise. Na próxima secção discuto como proceder na análise de dados.

3.5 Análise de dados

Para analisar dados qualitativos Bogdan e Biklen (1994) defendem que são necessários processos de organização e de posterior análise de conteúdo para detetar padrões e temas emergentes. Há várias formas de estruturar um tal processo: um sistema matricial de organização, uma abordagem de teoria fundamentada, um processo de codificação e criação de um sistema de categoria, entre outros.

Em particular, numa investigação baseada na modalidade de experiência de ensino orientada por uma conjetura, Confrey e Lachance (2000) referem que a análise de dados decorre em dois momentos distintos. Num primeiro momento, que ocorre em simultâneo com o processo de experimentação em sala de aula, o objetivo é ajustar, alterar e aprofundar aspetos da experiência de ensino, se tal for pontualmente considerado necessário. Num segundo momento de análise retrospetiva (Confrey & Lachance, 2000; Cobb *et al*., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2013), o objetivo é, perante todo o material recolhido, observar novamente quer os vídeos (complementados com as suas transcrições), quer as produções escritas dos alunos, e começar, por exemplo, a criar categorias de análise, sem nunca esquecer que o ponto fulcral deve ser o de permitir responder às questões da investigação.

No caso concreto desta investigação, durante a recolha de dados nos dois ciclos da experiência, o primeiro momento de análise baseou-se no visionamento do vídeo das aulas, na tentativa de identificar situações que pudessem conter informação relevante para a professora relativamente ao desempenho dos seus alunos. Ainda nesta fase, as produções escritas dos alunos foram observadas com um olhar crítico, de que resultou a anotação de algumas estratégias de resolução e de procedimentos de cálculo individuais. Foi perante esta primeira análise da informação recolhida que, por um lado, Sofia propôs a não exploração da tarefa 3 (Cálculos e mais cálculos…) e, por outro, Vera aprofundou, em outras aulas (não gravadas), a exploração de algumas das tarefas.

Terminada a recolha de dados no primeiro ciclo da experiência, a transcrição das gravações das aulas, entretanto efetuada, veio permitir obter informação mais refinada sobre os dados, a par de uma análise também mais organizada da produção destes alunos. A análise das produções teve três diretrizes genéricas: o tipo de números (inteiro/não inteiro) usados, as estratégias de resolução (aditivas/multiplicativas) utilizadas e o modo de representação (ativo, icónico e simbólico) escolhido pelos alunos. Esta informação permitiu, portanto, criar uma primeira versão de categorias de análise, que antecedeu as que estão estabelecidas teoricamente no quadro 3 e que vieram depois a prevalecer. Esta fase da análise de dados veio também influenciar o segundo ciclo da experiência que, num ambiente totalmente novo, foi concretizado de forma similar ao primeiro e em que os passos de um primeiro momento de análise dos dados são, como já referi, idênticos, visionamento dos vídeos das aulas (e posterior transcrição) e leitura atenta das produções dos alunos.

O segundo momento da análise de dados começa quando os dados dos dois ciclos da experiência estão todos recolhidos, englobando a transcrição dos vídeos das últimas aulas. Esta análise é baseada nas produções escritas de todos os alunos que, entretanto, foram organizadas segundo o ciclo da experiência de ensino a que pertenciam e a tarefa a que diziam respeito, mantendo juntos os registos dos elementos de cada grupo. Para complementar as produções escritas dos alunos, voltei muitas vezes a ler as transcrições das aulas e a identificar as suas intervenções mais relevantes, no decorrer de diálogos com a professora ou com os colegas. É esta conjugação entre as produções escritas dos alunos e as suas intervenções orais na sala de aula que permitiu refinar e especificar cada uma das categorias de análise anteriormente referidas. Assim, relativamente ao tipo de números a referência faz-se a: inteiros – pares/ímpares; múltiplos de …; não inteiros – representados sob a forma de fração, decimal, numeral misto e percentagem. Em relação às estratégias de resolução a referência surge com: quantificação (sim ou não); estratégias aditivas – adições de parcelas iguais e decomposição de números; estratégias multiplicativas ligadas a procedimentos escalar e funcional, com números inteiros ou não. Nos modos de representação, particulariza-se a representação simbólica em: razões representadas sob a forma de fração, linhas numéricas duplas ou tabelas de razões.

Na análise de dados, apresentada em pormenor no capítulo 5, descrevo e analiso, por ciclo de experiência, os dados relacionados com cada uma das tarefas. Mantenho a sequência com que as tarefas foram propostas e preservo também a cronologia dos acontecimentos na sala de aula. Termino com uma síntese que permite, posteriormente, a identificação de padrões em cada uma das categorias de análise.

Capítulo 4

Experiência de ensino nas turmas de Sofia e de Vera

Neste capítulo descrevo em pormenor e justifico os dois ciclos de experiência de ensino transformadora conduzida a partir de uma conjetura (Confrey & Lachance, 2000). Começo por realçar as fases da experiência de ensino desenvolvida, em que menciono as conjeturas que orientaram a definição desta experiência e as componentes de ensino, incluindo a teoria local de ensino e aprendizagem. A seguir, apresento a sequência de tarefas propostas para exploração no primeiro ciclo da experiência, nas aulas de Sofia. Para cada uma das tarefas, refiro o enquadramento teórico, descrevo-a, específico os seus objetivos de aprendizagem e proponho uma hipotética antecipação de resolução dos alunos, discutida com Sofia antes da experimentação na sala de aula. Mais do que uma regra a seguir, a ideia é despertar a atenção para pormenores ligados, principalmente, ao possível raciocínio dos alunos em algumas resoluções e procedimentos de cálculo e respetivos registos escritos. Por fim, retomo a sequência de tarefas referida e caracterizo o segundo ciclo da experiência de ensino, ou seja, reporto-me ao desenrolar dos acontecimentos nas aulas de Vera.

Esta investigação seguiu a modalidade de experiência de ensino conduzida a partir de uma conjetura. Tal como mencionado no capítulo anterior e de acordo com Confrey e Lachance (2000), Gravemeijer (2004) e Gravemeijer e Cobb (2013), são as intervenções na sala de aula que permitem inter-relacionar as conjeturas que orientam a definição desta experiência (em particular) e as respetivas componentes de ensino – o currículo, os métodos de ensino, o papel da professora e os métodos de avaliação.

No caso desta investigação, cujo objetivo é compreender o modo como alunos do 6.º ano desenvolvem a proporcionalidade, no contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa, formulámos a seguinte conjetura: a exploração de tarefas desenhadas de forma a que a flexibilidade na comparação multiplicativa seja realçada, proporciona aos alunos a construção de um sistema de relações multiplicativas entre números racionais (inteiros ou não inteiros), representados nas suas diversas formas, e permite-lhes utilizar estratégias de resolução e representações adequadas e articular conceitos e procedimentos tais como, fator multiplicativo, razão escalar e razão funcional.

A teoria local de ensino e aprendizagem, concretamente o conjunto e a sequenciação das tarefas propostas, vai naturalmente ter em atenção as duas dimensões da conjetura.

A dimensão de conteúdo matemático refere-se aos aspetos considerados essenciais na aprendizagem da proporcionalidade, em particular da comparação multiplicativa, numa perspetiva de flexibilidade de estratégias de resolução e de representações utilizadas, em que as relações numéricas e as propriedades das operações permitem evidenciar as conexões entre os conceitos de razão e de proporção.

No que diz respeito às componentes de ensino, e relativamente ao currículo, a área de conteúdo é a proporcionalidade, mais concretamente a comparação multiplicativa, evidenciada em estruturas multiplicativas (Vergnaud 1983, 1988) e na exploração dos conceitos de fator multiplicativo, razão e proporção (Freudenthal, 2002; Thompson e Saldanha, 2003), em conexão com a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações. A flexibilidade é considerada, como referido anteriormente, como um processo dinâmico de adaptar as estratégias de resolução e as representações utilizadas às características das tarefas. Neste processo, o destaque surge no papel das relações numéricas e das propriedades das operações (Threlfall, 2002, 2009).

Em relação aos métodos de ensino que podem surgir, acordámos que as aulas decorreriam segundo uma metodologia baseada no ensino e aprendizagem exploratório no qual, de acordo com Ponte (2005), a "característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (p. 13). Ficou decidido que os alunos trabalhariam em pares e esta opção justifica-se por dois motivos. Um prende-se com as características dos alunos e a pouca regularidade com que o trabalho em grupo era desenvolvido o que, por si só, criaria momentos de alguma instabilidade. O outro motivo, liga-se a condições naturais de funcionamento, organização do espaço nas salas de aula, em que a disposição do mobiliário obedecia a regras que deviam ser escrupulosamente mantidas de umas aulas para as outras.

A professora da turma assume a responsabilidade de gerir a aula e o seu papel de intervenção na sala de aula decorre, de forma similar ao que Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) propõem relativamente às fases de desenvolvimento de atividades de investigação, em três momentos: (a) lançar a tarefa – ler o enunciado (ou pedir a um aluno para o fazer) e certificar-se que não persistem dúvidas quanto ao que se pretende; (b) resolução da tarefa – auxiliar os alunos nas suas resoluções, não direcionar as suas respostas, mas tentar perceber como pensam, questionando-os e incentivando-os a escrever resoluções e não apenas respostas; (c) discussão final da tarefa e a organização e sistematização de conhecimentos – identificar diferentes raciocínios que permitam evidenciar diferentes resoluções a discutir com toda a turma e retirar conclusões conjuntamente com os alunos. Este momento pode ser aquele "em que os alunos apresentam o seu trabalho, relatam as suas conjecturas e conclusões, apresentam as suas justificações e questionam-se uns aos outros" (Ponte, 2005, p. 16).

A avaliação que deriva das produções escritas e da participação dos alunos na apresentação e discussão das tarefas na sala de aula, é considerada pelas professoras como um momento importante do decurso da aula.

As tarefas propostas têm genericamente características de problemas (Ponte, 2005). Pretendem responder à sequenciação conceptual hierárquica dos três conceitos/procedimentos relacionados com a comparação multiplicativa, esquematizada na figura 23.

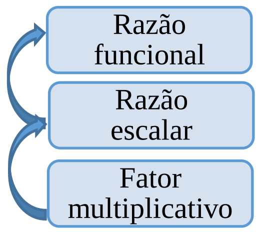


Figura 23: Evolução conceptual da comparação multiplicativa

Conceptualmente, o procedimento escalar encontra-se entre o fator multiplicativo e o procedimento funcional e é ele que vai fazer a ponte entre o primeiro (já do conhecimento dos alunos) e o último (em processo de apropriação pelos alunos).

À medida que se avança de um nível conceptual para outro, as tarefas que proporcionam essa passagem devem incluir questões que permitam começar sempre no conhecimento que os alunos já possuem (*met-before*, na designação usada por Tall (2013)) e ir até à compreensão e utilização de propriedades, cada vez mais complexas e abstratas. O conhecimento anterior dos alunos vai-se alterando e basear-se na última aquisição de conceitos do nível anterior, a exploração de modelos físicos e/ou esquemáticos vai-se tornando irrelevante e o ponto crucial é o raciocinar sobre os números, as suas relações e propriedades, mas em determinados momentos pode haver necessidade de introduzir terminologia nova e organizar e sistematizar o conhecimento resultante da exploração efetuada.

A experiência de ensino desenvolve-se, como mencionado no capítulo anterior e de acordo com Cobb et al. (2003), Gravemeijer (2004) e Gravemeijer e Cobb (2013), segundo três fases: preparação da experiência, experimentação em sala de aula e análise retrospetiva.

Na primeira fase da experiência de ensino, é formulada uma teoria local de ensino e aprendizagem que inclui a planificação de um conjunto de tarefas, organizadas em sequências a explorar na sala de aula e uma hipotética antecipação no modo como os alunos poderão raciocinar quando as resolvem. Segundo Simon (1995) e Gravemeijer e Cobb (2013) na planificação das tarefas deve ter-se em consideração três aspetos:

(i) o conhecimento anterior dos alunos, isto é, o que eles já sabem ou com o qual já se depararam no seu processo de aprendizagem e que estará relacionado com o tema em estudo. Pressupõe-se, portanto, que sejam capazes de explorar e aplicar esse conhecimento na resolução de uma nova situação, ou seja, devem começar por explorar e aplicar o conceito de fator multiplicativo e prosseguir para a exploração e aplicação dos conceitos de razão escalar e funcional;

(ii) as perspetivas conceptuais e procedimentais da comparação multiplicativa que se podem dividir em razão escalar (razão interna) e razão funcional (razão externa) (Vergnaud, 1988; Freudenthal, 2002). A teoria salienta a exploração sequencial do escalar para o funcional e o tipo de números envolvidos na resolução das situações propostas deve ser progressivamente menos "amigável". O objetivo é que o raciocínio e as estratégias desenvolvidas e os procedimentos efetuados com os números inteiros permitam uma extensão a outros universos numéricos, nos quais se continuam a verificar as propriedades das operações e as relações numéricas já conhecidas;

(iii) o percurso da investigação que pressupõe uma expetativa de desenvolvimento da comparação multiplicativa nos alunos do 6.º ano, traduzida na resolução das várias tarefas propostas e nos argumentos apresentados nas respetivas resoluções. A intenção é que seja percorrido, passo a passo, um caminho idealizado de níveis de evolução, no qual o importante é tentar compreender como se concretiza e quais são, de facto, as diferenças que se podem apontar no decurso do processo de aprendizagem do aluno.

O percurso idealizado concretiza-se através do *design* de uma sequência de tarefas que inclui quatro níveis[9] de evolução conceptual da comparação multiplicativa (figura 24).

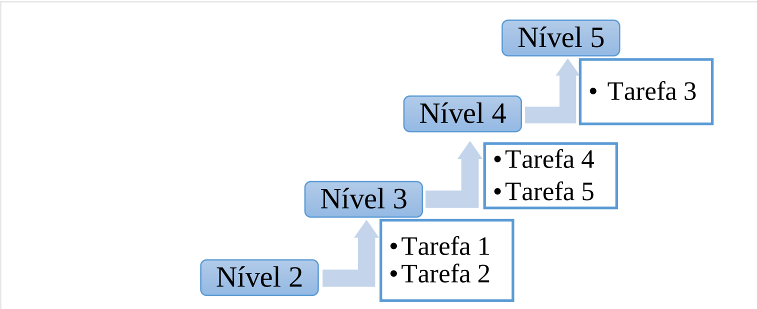


Figura 24: Níveis de evolução conceptual da comparação multiplicativa

No nível 2 – fator multiplicativo – o objetivo da(s) tarefa(s) é, num dado contexto, comparar de forma multiplicativa duas quantidades (discretas ou contínuas). Pretende-se fazer surgir um fator de comparação em que conste, primeiro um número inteiro e, posteriormente um número não inteiro que pode ser representado sob a forma de fração, decimal ou percentagem. A intenção é permitir que os alunos nas suas resoluções, se assim o desejarem, utilizem materiais manipuláveis, expliquem oralmente e registem os procedimentos realizados.

No nível 3 – conceito/procedimento escalar de razão – o objetivo da(s) tarefa(s) é, num primeiro momento, evidenciar uma relação multiplicativa contextualizada entre elementos de uma mesma grandeza, no "mesmo espaço de medida" (na terminologia de Vergnaud, 1988) ou, como Freudenthal (2002) refere, explorar "razões internas". Num

[9] O nível 0 – relação um/muitos – e o nível 1 – multiplicação (fator multiplicativo) – devem ter sido explorados no 1.º ciclo do ensino básico e estão, por isso, fora do âmbito deste trabalho.

segundo momento, o contexto deve ser simplesmente numérico e a ideia chave é começar a trabalhar os números como entidades autónomas, com propriedades e relações próprias.

No nível 4 – conceito/procedimento funcional de razão – o objetivo da(s) tarefa(s) é evidenciar uma relação multiplicativa, num determinado contexto, entre elementos correspondentes de grandezas distintas (na terminologia de Vergnaud (1988) "entre espaços de medida diferentes") ou, de acordo com Freudenthal (2002), explorar "razões externas". É neste nível que surge uma nova grandeza criada exatamente pela relação multiplicativa das grandezas iniciais. Por exemplo, numa tarefa de misturas de líquidos, a nova grandeza é o "sabor" ou a "acidez" da bebida em causa.

No nível 5 – conceito/procedimento funcional de razão – o objetivo da(s) tarefa(s) é, num contexto puramente numérico, especificar as propriedades das relações numéricas utilizadas de uma maneira abstrata. Este nível é, por isso, considerado o mais elevado e conceptualmente mais complexo e deve permitir consolidar a flexibilidade de cálculo em situações de comparação multiplicativa. A grande diferença entre este nível e o anterior consiste, principalmente, na ausência de contexto e também no tipo de números com que se trabalha.

Na segunda fase, a experimentação na sala de aula, foram propostas aos alunos as tarefas na sequência que foi previamente discutida com Sofia e Vera e que é desenvolvida, à frente, nas secções 4.1. e 4.2..

A terceira fase, análise retrospetiva, é desenvolvida no capítulo 5, em que uma das secções é dedicada às conclusões da investigação.

4.1 Sequência de tarefas na turma de Sofia (primeiro ciclo)

Na turma de Sofia foram exploradas quatro tarefas, em cinco aulas de 90 min, como mencionado na secção 3.3.. A descrição das tarefas, que a seguir apresento, segue a ordem pela qual foram exploradas na sala de aula e abrange o conhecimento anterior dos alunos, os objetivos de aprendizagem, uma hipotética antecipação do modo como os alunos poderão raciocinar, construir estratégias de resolução e utilizar modos de representação e, uma ou outra observação considerada importante para o processo de ensino e aprendizagem.

O *design* inicial das tarefas incluía a tarefa 3, mas Sofia considerou que os seus alunos teriam alguma dificuldade em compreendê-la e que isso seria um fator de desmotivação e de fraca participação. Uma vez que o tempo disponível para a experiência de ensino estava limitado, acordámos que a tarefa 3 não seria explorada nesta turma.

Tarefa 1: Misturas de chocolates.[10] Esta é uma tarefa tipo problema composto por quatro questões (Ponte, 2005). O enunciado é sucinto, ilustrado e diferente do usual. Não são indicados quaisquer valores iniciais aos alunos, a escolha da mistura (questão 1) e do tamanho dos diferentes tipos de frascos (questões 3 e 4) é totalmente livre, mesmo no que diz respeito à relação de quantidade de pastilhas de chocolate na mistura e nos frascos, e não existe qualquer tipo de abordagem pré-determinada.

Com esta tarefa introduz-se o tema curricular Proporcionalidade Direta e considera-se que o conhecimento anterior dos alunos se baseia no conceito de fator multiplicativo (com números inteiros – dobro de, triplo de, …), o qual poderá ser um auxílio na explicação do raciocínio desenvolvido. Começa-se por explorar situações de comparação multiplicativa contextualizadas em dois espaços de medida, num universo discreto (pastilhas de chocolate), em que o fator de comparação surge pela imposição de preservar a relação entre as quantidades de pastilhas dos dois tipos ("manter a mistura escolhida").

Pretende-se que os alunos compreendam que, para "manter a mistura escolhida" nos frascos de diferentes tamanhos (diferentes quantidades), vão ter de relacionar multiplicativamente a quantidade de pastilhas de cada um dos dois tipos selecionados (fator multiplicativo → razão escalar). Eles têm de perceber que ao optar por um determinado fator multiplicativo relativamente a um tipo de pastilhas de chocolate, este fator deve também ser a sua opção relativamente ao outro tipo de pastilhas. Só desta maneira o total de pastilhas se relacionará proporcionalmente com a quantidade de pastilhas de cada tipo.

Pressupõe-se que os alunos escolhem os dois tipos de pastilhas de chocolate que mais gostam. Se escolherem, por exemplo, chocolate de leite e chocolate branco vão, provavelmente, identificar ainda que gostam mais de um (por exemplo, de leite) do que outro (por exemplo, branco) e esse terá mais pastilhas na mistura. A perspetiva é que utilizem as relações multiplicativas que já conhecem (2 ×, 3 ×, …) e com isso imaginem que o frasco de tamanho S tem uma determinada capacidade. Quando escolherem os outros

[10] Enunciado completo em anexo (Anexo 1).

frascos, espera-se que não voltem à mistura inicial e que partam do frasco de tamanho S, criando uma sequência entre os diferentes frascos. Os alunos podem assim construir sequências de múltiplos, usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e também a propriedade de invariância do quociente (consoante o tipo de representação simbólica que adotarem).

Dependendo dos seus conhecimentos anteriores, os alunos podem raciocinar de modo diferente e responder através da utilização do conceito de frações equivalentes ou da propriedade de invariância do quociente. Por exemplo, as misturas indicadas na figura 25 são iguais (embora com uma quantidade diferente de pastilhas) porque mantêm a relação multiplicativa entre os dois tipos de pastilhas de chocolate que as compõem.

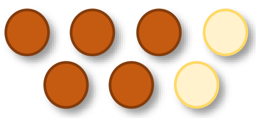
5 pastilhas de chocolate branco 2 pastilhas de chocolate de leite	10 pastilhas de chocolate branco 4 pastilhas de chocolate de leite

Figura 25: Um exemplo de duas misturas iguais, com quantidades diferentes

$\frac{5}{2} = \frac{2\times5}{2\times2} = \frac{10}{4}$ → conceito de frações equivalentes

$5 : 2 = (2 \times 5) : (2 \times 2) = 10 : 4$ → propriedade de invariância do quociente.

Várias formas de registo podem surgir (figura 26): a representação icónica e a representação simbólica, em linguagem natural ou em linguagem matemática mais ou menos elementar[11]. Mas à medida que avançam nas questões, por exemplo na última, a representação icónica deve ser suplantada pela simbólica, considerando a quantidade de pastilhas que poderá estar envolvida.



5 chocolate de leite e 2 chocolate branco	5 chocolate de leite para 2 chocolate branco	$5\,\ell$—$2\,b$

Figura 26: Diferentes modos de representar uma mistura de chocolates

Não é previsível que os alunos utilizem, logo de início, a simbologia $5 : 2$ ou $\frac{5}{2}$, uma vez que, embora, já a tenham trabalhado no 5.º ano aquando da exploração das várias interpretações do conceito de fração, poderá estar esquecida. Na discussão final, a professora pode sugerir organizar as respostas das várias questões numa tabela – tabela de razões, criando um tipo de representação novo para os alunos. A interpretação e análise da tabela permite explorar relações numéricas entre colunas/linhas consecutivas, ou não, e registá-

[11] Elementar no sentido que não utilizam outros símbolos matemáticos além dos algarismos.

las. De acordo com van Galen *et al*. (2008) este tipo de registo é útil para os alunos, uma vez que os ajuda a calcular com compreensão, convidando-os a efetuar passos intermédios que considerem adequados, na resolução de problemas envolvendo proporções.

Pode ser útil antecipar e discutir com os alunos um caso (figura 27) em que as duas misturas não são iguais, embora propositadamente, a diferença entre as quantidades de pastilhas de cada tipo, de uma mistura para a outra, seja a mesma (8 – 5 = 3 e 5 – 2 = 3).

5 pastilhas de chocolate branco 2 pastilhas de chocolate de leite	8 pastilhas de chocolate branco 5 pastilhas de chocolate de leite

Figura 27: Duas misturas diferentes

De facto, as duas misturas são diferentes porque, por um lado, não se mantém a relação multiplicativa entre as quantidades de cada tipo de pastilhas de chocolate, de uma para a outra mistura; por outro lado, não se mantém a relação multiplicativa entre as duas quantidades de pastilhas numa mistura e na outra. Uma maneira de evidenciar esta situação é responder à pergunta: "Quantas vezes cabe … em …?". Concretamente, "Quantas vezes cabe 5 em 8?" (resposta aproximada: uma vez e mais um pouco; resposta exata, $\frac{8}{5}$, porque 8 : 5 = $\frac{8}{5}$ e isso permite escrever $8 = \frac{8}{5} \times 5$,) e "Quantas vezes cabe 2 em 5?" (resposta aproximada: duas vezes e mais um pouco; resposta exata: $\frac{5}{2}$ porque 5 : 2 = $\frac{5}{2}$ e isso permite escrever $5 = \frac{5}{2} \times 2$). Conclui-se que os fatores utilizados ($\frac{8}{5}$ e $\frac{5}{2}$), quer como procedimento escalar, quer como funcional, não são iguais, logo a mistura não se mantém.

Esta situação permite evidenciar, segundo Thompson e Saldanha (2003), a relação entre a divisão e a multiplicação, como operações inversas, e a importância da medida no processo de comparação multiplicativa e na compreensão do conceito de razão, ou seja, realizar conexões entre razão, medida e quantidade.

Tarefa 2: Redimensionar.[12] Esta é uma tarefa constituída por quatro problemas que Lamon (1993a, 1993b) classifica como problemas de "ampliação e redução" e que vão ser distribuídos um a um, à medida que forem sendo resolvidos e discutidos. O enunciado, em "Quatro imagens do mesmo desenho", começa por ser reduzido, ilustrado e apenas textual. Depois, em "Multiplicando", para uma ligação direta ao material distribuído[13]

[12] Enunciado completo em anexo (Anexo 2).
[13] É facultado a cada par de alunos um conjunto de figuras em papel, exatamente iguais às do enunciado, e três tiras de cartolina cuja medida de comprimento é a do comprimento do desenho original.

surgem esquemas para completar. De seguida, em “Ampliar e reduzir com percentagens”, estão ilustradas janelas do programa *Paint* também para completar. Por último, em “Comparar dimensões”, a ligação ao real mantém-se e o objetivo é aplicar os conceitos e procedimentos que foram sendo trabalhados.

Considera-se que os alunos já têm conhecimento dos conceitos e procedimentos de fator multiplicativo ($n \times \ldots$) e de fator escalar. A comparação multiplicativa é explorada num contexto de dois espaços de medida, num universo contínuo (desenho da Rita), o qual vai permitir a ligação ao conceito de *mapping*, mencionado por Freudenthal (2002). Pretende-se que seja abordada, primeiramente de uma forma qualitativa, através da simples observação a “olho nu” das figuras em causa. Depois, deve permitir a utilização progressiva e com compreensão de vários operadores multiplicativos não inteiros, que podem surgir representados de diferentes maneiras. A seguir, os alunos são confrontados com o que a Rita realmente fez ao seu desenho original (O), com o programa *Paint*, para obter as imagens A, B, C e D. Este é um caso de modelação que ilustra o processo de redimensionar. Por último, propõe-se que considerem a maior ampliação possível do desenho da Rita numa folha de papel fotográfico A4 e relacionem as dimensões da folha com as do desenho original.

Inicialmente, os alunos devem ser capazes de reconhecer, olhando simplesmente para as imagens, se são, ou não, semelhantes ao desenho original, identificando características que lhes permitam justificar as suas opções. De seguida, devem ser capazes de responder à questão: “Quanto é que a Rita aumentou ou reduziu as dimensões do seu desenho?”. Isto é, devem ser capazes de comparar comprimentos de forma geométrica, utilizando tiras de cartolina como ferramenta, traduzir simbolicamente (em linguagem matemática) o resultado da comparação e explicitar “quantas vezes cabem as dimensões do original nas dimensões correspondentes das várias figuras”. As reproduções A, B, C e D devem ser classificadas como sendo semelhantes ao desenho original ou deformadas. Sendo semelhantes devem ser identificadas como uma sua redução ou ampliação, consoante o fator de comparação seja inferior ou superior a um, respetivamente. O significado de, por exemplo, “ampliar uma vez e meia” e “reduzir três quartos” surge relacionado com a utilização de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ como unidades de medida de comparação. Depois, perante o que sabem sobre percentagens, consideradas como um operador/fator, devem fazer conexões entre percentagens, frações, decimais ou numerais mistos. Por último, devem relacionar o conceito de semelhança com “o manter a forma” e decidir que a maior ampliação do desenho da Rita vai ser um quadrado cuja medida de lado coincide com a largura da folha de papel fotográfico A4.

Pressupõe-se que os alunos sejam capazes de identificar semelhanças e diferenças entre o desenho da Rita (O) e cada uma das outras imagens (A, B, C e D). Sob o ponto de vista matemático, as condições do problema criam expetativas no sentido de os alunos reconhecerem figuras semelhantes simplesmente através da observação direta e também da utilização intuitiva do princípio de *mapping*, definido por Freudenthal (2002) como "o que é mutuamente igual no original, deve ser mutuamente igual na imagem" (p. 191). Esta regra refere-se à invariância das razões internas, caracterizando as correspondências ponto a ponto (*mapping*) como semelhanças. De acordo com Freudenthal (2002), sistemáticos desvios a este princípio de correspondência são notados pelas crianças, por exemplo no uso de escalas diferentes, em diferentes direções, para diferentes figuras e para partes da mesma figura. Isto, no entanto, não é feito considerando as escalas explícitas, mas com formulações como "a cabeça é muito grande, se comparada com o tronco"; "isto é comprido de mais, se comparado com a largura", são objeções quanto à falta de semelhança embora sem explicitações de razões.

Os alunos devem perceber que a comparação é feita sempre entre o desenho original e cada uma das outras imagens no sentido de mencionar o que se mantém e o que se altera. Descrever o que foi feito com o programa *Paint*, é o próximo passo. O manusear das figuras em papel facilita-lhes a observação das ilustrações e também a identificação de características ligadas às dimensões dos vários elementos. De notar que alguns alunos poderão ter dificuldades com o registo das semelhanças e das diferenças na classificação das imagens (não se recordando de expressões adequadas) e também na verbalização do que pode ter sido feito com o *Paint*. A terminologia de classificação das figuras em semelhante ou deformada (esticada, achatada, …) surgirá durante os vários diálogos em grupo e como síntese.

Desta forma, espera-se que os alunos associem as imagens distorcidas (deformadas) com a utilização de diferentes fatores de comparação nas duas dimensões de redimensionar (horizontal e vertical ou comprimento e largura, respetivamente) como sucede, de facto, com as imagens B e D. Os alunos podem comparar proporcionalmente dois comprimentos sem, no entanto, formularem a ideia subjacente "de relativamente" e esta tarefa apresenta a oportunidade de estimular a utilização de expressões de comparação, tais como: em comparação com …; em relação a …; relativamente a … Por exemplo, "na imagem D, os animais estão todos muito estreitos (finos), comparativamente com os animais do desenho original" ou "o cão da imagem B é relativamente mais comprido do que o do desenho original". O programa *Paint* permite-nos transformar as figuras, aumentando ou diminuindo o tamanho e mantendo, ou não, as razões internas – largura com largura e comprimento com comprimento, mencionadas por Freudenthal (2002).

Os alunos, depois de terem na sua posse as tiras de cartolina, devem utilizá-las para comparar geometricamente os comprimentos em causa. Continuam a trabalhar sem medidas de comprimento explícitas e isto é um desafio para eles, uma vez que, provavelmente, nunca foram confrontados com uma situação idêntica. A ideia é que sejam capazes de medir um comprimento comparativamente a outro que lhes serve de referência, ou seja, tendo o comprimento do desenho original como referência devem compará-lo com o comprimento e a largura das imagens A, B, C e D e traduzir numericamente o resultado dessa comparação. Devem, portanto, considerar a tira de cartolina como a sua unidade de medida e utilizá-la para medir o comprimento e a largura das imagens. A dobragem das tiras de cartolina, e até das próprias figuras, vai permitir efetuar as comparações pretendidas. A grande questão, quando ainda sobra ou falta um bocado é: "Como fazer?". Tomemos o exemplo da imagem A (figura 28): neste caso, a tira de cartolina cabe uma vez no comprimento da imagem A e o que sobra parece que é "metade da unidade". Isto sugere a mudança na forma de segmentar (dividir), utilizando agora "metade da tira" como a unidade de medida. Parece que o comprimento de A é "uma vez e meia" tão comprido como o do desenho original. Por outras palavras, o comprimento do desenho original cabe $1\frac{1}{2}$ vezes no comprimento da imagem A. "O que sobra na imagem A é metade do comprimento do desenho original" e "o comprimento do desenho original cabe $1\frac{1}{2}$ (uma vez e mais metade) no comprimento da imagem A". A esta resposta podemos sempre associar uma outra que lhe é equivalente "O comprimento da imagem A é $1\frac{1}{2}$ vezes o comprimento do desenho original".

Figura 28: Quantas vezes cabe o comprimento do desenho original no da imagem A?

As afirmações anteriores permitem reforçar a relação inversa entre as operações multiplicação e divisão. A tradução numérica poderá então ficar a seguinte: $6 : 4 = 1\frac{1}{2}$, ou seja, $6 = 1\frac{1}{2} \times 4$ (fator de comparação superior a 1, implica aumento).

Quando as percentagens surgem nas janelas do programa *Paint* o seu significado é o de quantificar, ou seja, indicar "quanto" é que as dimensões do desenho original devem ser ampliadas/aumentadas ou reduzidas/diminuídas. Os alunos devem, por isso, concluir que a percentagem introduzida pode servir para aumentar ou diminuir as dimensões do desenho original e que se pretende obter: (a) uma imagem semelhante, o seu valor terá que ser o mesmo em ambas as dimensões; (b) uma imagem distorcida, o seu valor para as duas dimensões terá que ser diferente.

Os alunos podem relacionar as janelas do *Paint* com as imagens que a Rita obteve usando as categorias de imagens já identificadas (semelhantes/distorcidas) ou associando as percentagens com números que lhes são familiares (por exemplo, $50\% = \frac{1}{2}$ e $100\% = 1$). No primeiro caso, o seu raciocínio deve levá-los a relacionar a ação de ativar, ou não, a opção "Manter a proporção" com o tipo de imagem obtida e com as percentagens propostas. No segundo, a relação de igualdade entre fração, decimal, numeral misto e percentagem torna-se evidente e pode ser traduzida por: $50\% = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ou $150\% = 1\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Dependendo do tipo de representação numérica, assim os alunos justificam os cálculos que efetuam.

Todas estas relações de comparação podem ser assinaladas, no modo simbólico em linhas numéricas duplas, como se apresenta na figura 29, em que a unidade é a medida de comprimento do desenho original (6) e em que se relacionam, por um lado, a unidade e algumas das suas partes na forma de fração e, por outro, valores absolutos e percentagem.

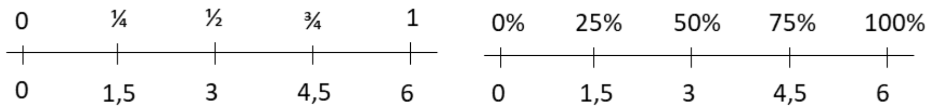


Figura 29: Linhas numéricas duplas – frações e percentagens

Os alunos devem comparar multiplicativamente o comprimento do desenho original com a largura da folha de papel fotográfico A4, ou seja, devem relacionar 6 e 21 através de uma estratégia semelhante à que já utilizaram e pensar em "Quantas vezes cabe 6 em 21?". Uma vez que os valores em causa são números não inteiros, a expectativa é que a sua representação possa surgir sob a forma de fração, decimal, numeral misto ou percentagem.

Tarefa 4: Fazer Limonadas.[14] Esta tarefa é composta por quatro problemas (questões de resposta direta a um tema desconhecido) com um enunciado diferente do usual, mas cuja estrutura é fechada e apresenta um desafio moderado para os alunos (Ponte, 2005). Pretende-se dar continuidade à exploração da comparação multiplicativa, contextualizada em dois espaços de medida, e consolidar procedimentos que permitam a comparação de razões em situações do quotidiano, no sentido de retirar conclusões fundamentadas. Trabalha-se num universo contínuo (líquido) onde "o fazer limonadas" estabelece a ação de misturar dois líquidos de tipos diferentes (água e concentrado de sumo de limão), com unidades de medida também diferentes (litro e chávena, respetivamente), para se obter um líquido com características distintas dos iniciais. Estes problemas podem englobar-se, de acordo com Lamon (1993a, 1993b), no tipo de problemas denominado por "medidas bem conhecidas" e o seu enunciado permite organizá-los através de uma proporção. No caso concreto desta experiência de ensino, a proposta é que este tipo de problemas permita a construção e exploração de tabelas de razão ou linhas numéricas duplas, que evidenciem procedimentos de cálculo que não são baseados nas regras algorítmicas das proporções, de acordo com van Galen *et al*. (2008). Os números envolvidos em cada problema estão

[14] Enunciado completo em anexo (Anexo 4).

pensados com o intuito de realçar mentalmente as relações numéricas e a utilização das propriedades das operações, sem recurso a algoritmos.

Primeiramente (problema 1), pretende-se que os alunos compreendam que vão ter que comparar multiplicativamente as duas misturas apresentadas, ou seja, considerar razões que permitam traduzir simbolicamente as duas limonadas. O contexto do problema faz referência à opinião dos amigos do João sobre as limonadas (“a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado”) e, por isso, os alunos devem perceber que isso equivale a dizer que consideram diferentes as duas razões, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ (correspondentes à limonada de sexta-feira e de sábado, respetivamente). O que se pretende na sua resposta é que digam se a opinião dos amigos é, ou não, correta e justifiquem a sua opção.

A seguir (problemas 2, 3 e 4), o objetivo é que os alunos compreendam que para “fazer uma limonada”, segundo determinadas condições e “manter o sabor”, devem alterar as quantidades dos dois ingredientes de forma proporcional, ou seja, utilizar, por exemplo, um só fator de comparação, no sentido de as aumentar ou diminuir. O raciocínio sobre o trabalho efetuado com os números inteiros deve permitir a generalização da situação anterior, através da utilização simultânea de um qualquer fator positivo (inteiro ou não), aos elementos das duas grandezas em jogo, ou seja, deve possibilitar uma extensão a outros universos numéricos, nos quais se continuam a verificar as propriedades das operações e as relações numéricas já evidenciadas.

Sob o ponto de vista matemático, as condições do problema 1 criam expetativas no sentido de os alunos reconhecerem que devem criar duas razões, uma referente à limonada feita na sexta-feira ($\frac{3}{4}$) e outra à limonada feita no sábado ($\frac{4}{5}$), e depois compará-las. Para isso, podem registar em tabelas ou linhas numéricas duplas distintas uma série de razões iguais a $\frac{3}{4}$ e a $\frac{4}{5}$, respetivamente, que, numa primeira versão, podem ser construídas pelas sequências dos múltiplos naturais dos números em causa (figura 30), cujo procedimento é já do seu conhecimento. Estas sequências permitem em cada momento relacionar os valores das duas grandezas e, no contexto em causa, encontrar e justificar as respostas.

Sexta-feira

× 2 × 3 × 4 …

Chávenas de concentrado (n.º)	**3**	6	9	**12**	**15**	18	…
Água (ℓ)	**4**	8	12	**16**	**20**	24	…

× 2 × 3 × 4 …

Sábado

× 2 × 3 × 4 …

Chávenas de concentrado (n.º)	**4**	8	**12**	**16**	20	24	…
Água (ℓ)	**5**	10	**15**	**20**	25	30	…

× 2 × 3 × 4 …

Figura 30: Tabelas de razões, baseadas em sequências de múltiplos

Portanto, para a primeira resposta, os alunos devem perceber que as tabelas podem continuar, mas a comparação, por um lado, entre a 4.ª coluna da primeira e a 3.ª da segunda (assinaladas a verde) permite concluir que para uma mesma quantidade de chávenas de concentrado (12) a quantidade de água é diferente (16 ℓ no primeiro caso e 15 no segundo); e, por outro lado, entre a 5.ª coluna da primeira tabela e a 4.ª da segunda (assinaladas a azul), permite concluir que para a mesma quantidade de água (20 ℓ) existem diferentes quantidades de chávenas de concentrado de limão (15 no primeiro e 16 no segundo). Logo, as limonadas de sexta-feira e de sábado não são exatamente a mesma mistura, isto é, não podem ter o mesmo sabor.

Não é expectável que, neste momento, os alunos determinem, por exemplo, os quocientes das divisões 3 : 4 e 4 : 5 e concluam, de imediato, que as razões são diferentes e, como tal, que as limonadas de sexta-feira e de sábado são misturas com sabores diferentes. A representação da razão sob a forma de fração, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$, (até ao momento, unanimemente escolhida pelos alunos), apela, sob o ponto de vista de utilização de conhecimentos adquiridos, ao conceito de equivalência de frações, traduzido também sob a forma de tabela de razões (ou de linhas numéricas duplas).

Convém referir que a possibilidade de os alunos responderem "não concordo" pode surgir de uma má interpretação do enunciado deste problema e, como tal, convém no início interpretá-lo cuidadosamente.

Pressupõe-se que os alunos reconhecem, sem dificuldade, os divisores e nomeiam a sequência dos múltiplos de um número. Estes conhecimentos devem permitir-lhes relacionar o conceito de comparação multiplicativa com o procedimento escalar, ou seja, devem perceber que ao multiplicar ou dividir ambos os termos de uma razão por um mesmo número positivo, isso permite-lhes obter uma razão igual à que já existia.

No decorrer da resolução dos restantes problemas, parte-se do princípio que os alunos estão aptos a relacionar as respostas que foram obtendo, com o intuito de facilitar os seus próprios procedimentos de cálculo e com rapidez chegar à solução. Em concreto, a tabela de razões correspondente à limonada feita no sábado pode agora ser ampliada com outras colunas (figura 31) e a sua interpretação e análise usada para responder aos dois problemas seguintes. A razão unitária encontrada no problema 2 pode depois ser utilizada na resolução do outro problema e permitir economizar nos cálculos a efetuar.

: 4 × 9

Sábado

Chávenas de concentrado (n.º)	**1**	4	…	**9**	20	24	…
Água (ℓ)	**1,25**	5	…	**11,25**	25	30	…

: 4 × 9

Figura 31: Tabela de razões – sábado (razão unitária)

Relativamente a estratégias e procedimentos de cálculo, podem prever-se alguns, preferencialmente não algorítmicos. Tal como Threlfall (2002, 2009) menciona, é a maneira como pensamos os números, as relações numéricas que conhecemos e as propriedades das operações que dominamos, que nos permitem, construir a nossa estratégia, válida para aqueles números e naquele momento particular. Como exemplo, pode-se evidenciar que para encontrar a razão unitária, $\frac{1}{1,25}$, basta dividir ambos os termos da razão inicial por 4, como indicado pelos arcos orientados e legendados da tabela de razões da figura 31. Mas se 4 : 4 = 1 é um cálculo imediato, o mesmo pode não acontecer com 5 : 4. Neste caso apresentam-se três estratégias que os alunos podem construir, dependendo do que lhes ocorrer no momento da resolução:

(i) raciocinar como anteriormente e à pergunta “Quantas vezes cabe 4 em 5?”, responder através da utilização de representações icónicas de tiras de papel;

(ii) decidir que 5 = 4 +1 e que 0,25 = $\frac{1}{4}$ = 1 : 4, permite-lhes aplicar a propriedade distributiva da divisão em relação à adição à direita e obter a seguinte sequência de cálculos, em linguagem matemática:

$$5 : 4 = (4 + 1) : 4 = 4 : 4 + 1 : 4 = 1 + 0{,}25 = 1{,}25;$$

(iii) relembrar que dividir por um número e multiplicar pelo seu inverso dá o mesmo resultado, que $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, que $\frac{1}{2} \times 5 = 2{,}50$ e $\frac{1}{2} \times 2{,}50 = 1{,}25$ e ainda que a multiplicação goza da propriedade comutativa, permite-lhes obter outra sequência de cálculos, em linguagem matemática:

$$5 : 4 = 5 \times \frac{1}{4} = 5 \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = (5 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = 2{,}50 \times \frac{1}{2} = 1{,}25$$

Da mesma forma, se 9 × 1 é um cálculo imediato, o mesmo não acontece com 9 × 1,25. Assim, o recurso a números de referência, como o 10, a sua relação com o 9 (9 = 10 – 1) e a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, permitem construir a seguinte sequência de cálculos:

$$9 \times 1{,}25 = (10 - 1) \times 1{,}25 = 10 \times 1{,}25 - 1 \times 1{,}25 = 12{,}5 - 1{,}25 = 11{,}25$$

A discussão destas estratégias pode ser um momento importante de incentivo à resolução do último problema em que, mais uma vez, a tabela de razões, agora referente à limonada feita na sexta-feira (figura 32), pode ter múltiplas interpretações.

Sexta-feira

Chávenas de concentrado (n.º)	3	6	9	12	**?**	15	18	…
Água (ℓ)	4	8	12	16	**18**	20	24	…

Figura 32: Tabela de razões – sexta-feira

O valor procurado não é um múltiplo de 3, tal como 18 não é um múltiplo de 4, por isso os alunos podem:

(i) a partir da tabela confirmar que 18 está entre 16 e 20, da mesma forma que o valor pretendido deverá estar entre 12 e 15. Pensar em situar 18 exatamente a meio entre 16 e 20, ou seja, $\frac{16+20}{2} = 18$, e da mesma maneira situar o valor pretendido a meio entre 12 e 15, ou seja, $\frac{12+15}{2} = 13{,}5$, encontrando, assim, o valor procurado, 13,5 chávenas de concentrado de limão para 18 litros de água;

(ii) raciocinar em termos da divisão de 18 por 4 e à pergunta "Quantas vezes cabe 4 em 18?" responder através de uma decomposição aditiva do 18 relativamente ao 4, para a transformar numa relação multiplicativa:

$$18 = 16 + 2 = 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 = (4 + \frac{1}{2}) \times 4 = 4\frac{1}{2} \times 4 = 4{,}5 \times 4$$

A resposta “4 cabe quatro vezes e meia em 18” permite ao aluno determinar o valor que procura, aplicando ainda a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: 4,5 × 3 = (4 + 0,5) × 3 = 4 × 3 + 0,5 × 3 = 12 + 1,5 = 13,5.

Encontrado o número de chávenas (13,5) que corresponde aos 18 ℓ de água, em jeito de conclusão, a professora pode representar uma proporção através de uma igualdade de razões, $\frac{3}{4} = \frac{13{,}5}{18}$, na qual acabaram de determinar um termo desconhecido, sem a ênfase num processo algorítmico e, pelo contrário, com apelo à compreensão de conceitos e procedimentos.

Tarefa 5: Qual devo comprar?![15] Esta é uma tarefa tipo problema uma vez que tem uma estrutura fechada (questão de resposta direta) e apresenta um desafio moderado para os alunos. Não é solicitado nenhum processo de resolução específico e os alunos são livres de utilizar os seus conhecimentos sobre os conceitos de comparação multiplicativa, razão e proporção da forma que considerarem mais conveniente. A tarefa tem duas partes que diferem entre si apenas na sugestão de utilizar outra estratégia de resolução, a qual deve permitir evidenciar raciocínios, procedimentos de cálculo ou modos de representações distintos.

Com esta tarefa pretende-se dar continuidade à exploração dos conceitos de razão e de proporção e consolidar procedimentos que permitam a comparação de razões em situações do quotidiano, no sentido de retirar conclusões fundamentadas. O contexto concretiza-se em dois espaços de medida (massa e preço), num universo contínuo, e Lamon (1993a, 1993b) classifica o problema como “medidas bem conhecidas” em que, mais uma vez, os dados se podem organizar através de uma proporção. Nesta experiência de ensino, tal como nas tarefas anteriores, a proposta é a construção de tabelas de razão ou de linhas numéricas duplas cuja exploração evidencie procedimentos de cálculo não algorítmicos (van Galen *et al*., 2008).

A ilustração do problema apresenta dois frascos, um de doce de morango, com 400 g e cujo preço é 1,68 €, e outro de compota de morango, com 300 g e que custa 1,20 €. A discussão deve centrar-se sobre qual será mais vantajoso comprar, no pressuposto de que

[15] Enunciado completo em anexo (Anexo 5).

a qualidade dos produtos é semelhante. O objetivo é que os alunos sejam críticos perante a situação e criem relações numéricas que lhes permitam argumentar a favor da sua opção.

Ao constatar que a compota de morango tem um preço menor, mas também tem menos quantidade, surge a questão: "Será que é realmente 'a mais barata'?". Escolher "o mais barato" pode, evidentemente, ser perspetivado de duas maneiras: absoluta e relativa. No primeiro caso, está-se apenas à procura do produto em que, num dado momento, se gasta menos dinheiro (compara-se 1,68 € e 1,20 €), mas não se tem em atenção a relação entre a quantidade e o preço. No segundo caso, procura-se uma relação proporcional que permita escolher a opção mais vantajosa e, como tal, podem comparar-se os preços dos dois produtos para uma mesma quantidade ou comparar as quantidades dos dois produtos para um mesmo preço.

A escolha final do produto, como resposta ao problema, deve ser fundamentada na análise e interpretação de tabelas de razões ou de linhas numéricas duplas, construídas pelos alunos, muito provavelmente, segundo procedimentos escalares. Mais do que apresentar uma solução, eles devem ser capazes de justificar as opções tomadas e as respostas que registam.

Na primeira resolução, ao escolher comparar os preços relativamente à mesma quantidade, pode trabalhar-se com uma das quantidades indicadas no enunciado ou com uma outra, tendo em atenção os valores envolvidos. É interessante discutir com os alunos que perante os valores em causa, encontrar o preço unitário não faz muito sentido.

Os alunos podem optar por trabalhar com uma das quantidades indicadas no enunciado, por exemplo 300 g, e o seu objetivo é agora encontrar o preço de 300 g de doce e depois compará-los. Para isso, a construção de uma tabela de razões, como a da figura 33, ou de uma linha numérica dupla, vai ajudá-los nos procedimentos de cálculo. O valor intercalar, 100 g, e o respetivo preço surge como uma forma de facilitar os cálculos e determinar que um frasco de doce de morango com 300 g custará 1,26 €.

Doce de morango : 4 × 3

Massa (*Peso*) (g)	400	100	300
Preço (€)	1,68	0,42	1,26

: 4 × 3

Figura 33: Tabela de razões – doce de morango

Estão criadas as condições para comparar os preços da mesma quantidade (300 g) de compota de morango (1,20 €, indicado no enunciado) e de doce de morango (1,26 €, calculado numa sucessão de procedimentos) e decidir que é, de facto, mais barato comprar o frasco de compota de morango (1,20 < 1,26). Neste caso, contrariamente ao que é usual neste tipo de problemas, a intuição inicial foi confirmada.

Com procedimentos similares, os alunos podem optar por trabalhar com o outro valor indicado no enunciado, 400 g, e determinar quanto custará um frasco de compota de morango de 400 g:

Compota de morango

	: 3 →	× 4 →	
Peso (g)	300	100	400
Preço (€)	1,20	0,40	1,60
	: 3 →	× 4 →	

Figura 34: Tabela de razões – compota de morango

Concluem que para frascos com a mesma quantidade (400 g), o de compota de morango custa 1,60 € e o de doce de morango custa 1,68 € e, por isso, será mais vantajoso comprar o frasco de compota de morango (1,60 < 1,68). De notar que, sob o ponto de vista dos procedimentos de cálculo, esta última opção é mais amigável porque os valores envolvidos são mais acessíveis ao cálculo mental.

Tendo em atenção as propostas de resolução para a primeira questão, a segunda pode ser resolvida raciocinando agora em termos de calcular o preço de ambos os frascos para uma mesma quantidade, diferente das inicialmente indicadas. Desta forma, os alunos podem:

(i) analisar as duas tabelas de razões anteriores e, de imediato, comparar os preços de 100 g dos dois produtos (colunas do meio);

(ii) pensar em encontrar um múltiplo comum aos dois valores 300 e 400 e determinar os preços respetivos dos dois produtos, por exemplo, através de igualdades de razões representadas sob a forma de fração (figura 35). As duas igualdades de razões, uma para a compota de morango e outra para o doce de morango, em que um dos termos é comum (1200), rapidamente permitem confirmar a resposta já obtida.

Compota

$$\frac{300}{1{,}20} \xrightarrow{\times 4} \frac{1200}{4{,}80}$$

$$\frac{300}{1{,}20} = \frac{1200}{4{,}80}$$

e

Doce

$$\frac{400}{1{,}68} \xrightarrow{\times 3} \frac{1200}{5{,}04}$$

$$\frac{400}{1{,}68} = \frac{1200}{5{,}04}$$

logo

$$\frac{1200}{4{,}80} \neq \frac{1200}{5{,}04}$$

Será proporcionalmente mais barato porque, perante a mesma quantidade, o preço é inferior (4,80 < 5,04).

Figura 35: Duas igualdades de razões representadas sob a forma de fração

4.2 Sequência de tarefas na turma de Vera (segundo ciclo)

Na turma de Vera foram exploradas cinco tarefas, em sete aulas de 90 min, como mencionado na secção 3.3., seguindo a sua ordem de numeração, tal como já tinha acontecido nas aulas de Sofia. Uma vez que as tarefas são as mesmas de um ciclo da experiência para o outro, com exceção da tarefa 3, nesta secção descrevo apenas esta tarefa.

Tarefa 3: Cálculos e mais cálculos…[16] Esta tarefa está dividida em duas partes distintas desenvolvidas em contextos meramente numéricos. Na primeira, são apresentadas três coleções de multiplicações onde, em cada uma, os fatores são sempre os mesmos, mas um deles surge representado de diversas formas. O que interessa, por isso, é que os alunos utilizem as relações entre os números e a aplicação de propriedades da operação multiplicação para construírem, segundo Threlfall (2002, 2009), a sua estratégia de resolução. Pensar a multiplicação como produzindo um produto e, simultaneamente, no produto em relação aos seus fatores, implica o raciocínio proporcional (Thompson & Saldanha, 2003).

Para cada coleção de igualdades numéricas, supõe-se que os alunos reconhecem que um número racional pode ter várias representações (sob a forma de fração, decimal e numeral misto). Identificam, por isso que, em cada caso, o resultado se mantém inalterado. Considera-se também que as propriedades associativa e comutativa da multiplicação e distributiva da multiplicação em relação à adição são já do conhecimento dos alunos. Isso significa que têm consciência de as poder utilizar por forma a tornar os seus procedimentos

[16] Enunciado completo em anexo (Anexo 3).

de cálculo mais eficazes e menos dependentes de regras ou algoritmos (algoritmo da multiplicação de números representados por frações ou algoritmo da multiplicação de inteiros estendido ao caso em que um dos números é representado sob a forma decimal). Pode, portanto, facilitar os cálculos, por exemplo:

(i) substituir o numeral misto $1\frac{1}{2}$ por $1 + \frac{1}{2}$;

(ii) considerar a decomposição decimal de 1,5 em 1 + 0,5 e saber que $0{,}5 = \frac{1}{2}$;

(iii) aplicar a propriedade comutativa da multiplicação e trocar a ordem dos fatores 3 e $\frac{1}{2}$, em $12 \times 3 \times \frac{1}{2}$.

(iv) recordar que multiplicar por $\frac{1}{4}$ é o mesmo que dividir por 4 e que $4 = 2 \times 2$.

Na segunda parte da tarefa, surge um exemplo de relação proporcional entre os termos de uma multiplicação. Um esquema de dois arcos de sentidos opostos, um legendado com a operação multiplicação e o outro com a operação divisão, permite ilustrar a relação inversa entre as duas operações. Ao lado, representam-se simbolicamente três igualdades, em que num dos membros surge uma multiplicação de dois fatores e no outro o seu resultado. Os alunos devem completar os restantes seis esquemas, identificar as relações proporcionais existentes entre os termos das várias multiplicações e concluir que dados dois números, é sempre possível compará-los multiplicativamente, isto é, escrever um à custa do outro através de uma multiplicação de dois fatores.

Para cada esquema e respetiva tradução numérica, parte-se do princípio que, por um lado, os alunos conhecem a relação inversa entre as operações multiplicação e divisão e, por outro, identificam a representação do inverso de um número inteiro (diferente de zero) como sendo uma fração cujo numerador é 1 e o denominador coincide com o número.

Por exemplo, sabem que 2 e $\frac{1}{2}$ são números inversos, tal como, 6 e $\frac{1}{6}$. A exploração conjunta do exemplo inicial, em concreto, a leitura dos esquemas apresentados "seis vezes dois é igual a doze (da esquerda para a direita) e doze a dividir por dois é igual a seis (da direita para a esquerda)" e, de modo similar, "dois vezes seis é igual a doze (da esquerda para a direita) e doze a dividir por seis é igual a dois (da direita para a esquerda)" vai permitir-lhes comprovar que os números envolvidos alteram os seus papéis consoante a operação que está em jogo. Ou seja, o 2 e o 6 são fatores de 12 ($6 \times 2 = 12$) tal como também são seus divisores ($12 : 2 = 6$ e $12 : 6 = 2$). São estas últimas igualdades que dão sentido, respetivamente, às igualdades $6 = \frac{1}{2} \times 12$ e $2 = \frac{1}{6} \times 12$, que evidenciam as relações proporcionais entre os termos da multiplicação $6 \times 2 = 12$.

Como tal, perante os esquemas em que os números envolvidos são inteiros, os alunos devem rapidamente identificar os termos em falta, representar as respetivas multiplicações e identificar as relações proporcionais existentes entre os seus termos.

Os esquemas em que surgem fatores não inteiros, escritos sob a forma decimal ou de fração, podem causar alguma perplexidade aos alunos, quando identificam o seu inverso como sendo $\frac{1}{a}$, em que a é igual, por exemplo, a 1,5, ou seja, quando o denominador não é um número inteiro. Esta situação deve, mais uma vez, ser utilizada para relacionar as operações multiplicação e divisão e estender este conceito e a sua representação a números não inteiros, representados sob a forma decimal ou de fração.

Relativamente às restantes tarefas, apenas a tarefa 5 (a última) sofreu alterações de um ciclo da experiência para o outro. A primeira versão desta tarefa incluía valores que obrigavam a que a resposta sobre a opção de comprar "o mais barato" recaísse exatamente no produto em que estava marcado o menor preço (compota – 300 g custam 1,20 €; doce – 400 g custam 1,68). Sofia não levantou qualquer objeção a esta situação, algo invulgar em problemas deste tipo, mas Vera considerou mais apelativo que o comprar "o mais barato" tivesse como resposta o produto cujo preço marcado era o mais elevado e, como tal, os valores foram alterados para: compota – 300 g custam 1,80 €; doce – 400 g custam 1,96 €.

Capítulo 5

Estratégias de resolução, relações numéricas, propriedades das operações e representações

Este capítulo está dividido em duas secções. Na primeira, descrevo e analiso as produções e as intervenções orais dos alunos nas aulas do primeiro ciclo da experiência de ensino, que decorreu no ano letivo 2015/16. Na segunda secção, tal como na primeira, descrevo e analiso as produções e as intervenções orais dos alunos nas aulas do segundo ciclo da experiência de ensino, que decorreu no ano letivo 2016/17.

5.1 Primeiro ciclo da experiência de ensino

Em cada tarefa evidencio as estratégias de resolução, o tipo de números, as relações numéricas, as propriedades das operações e as representações utilizadas pelos alunos. A articulação entre estes pontos irá permitir analisar uma evolução conceptual ao nível da comparação multiplicativa e assinalar a flexibilidade.

5.1.1 Tarefa 1: Misturas de chocolates

Questão 1. A mistura escolhida deve ser identificada nos dois quadrados em branco da folha de resposta e cada um dos alunos regista aí a sua escolha (individual ou do par), traduzindo-a simbolicamente num misto de linguagens natural (palavras) e matemática (algarismos) (figura 36).

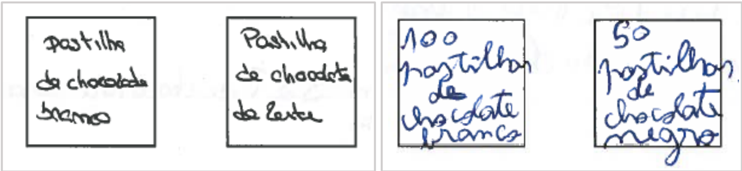


Figura 36: Registo de Filipe (à esquerda) e de Isabel (à direita) – misturas

Nenhum aluno utiliza uma representação icónica da mistura escolhida. Vários alunos apresentam inicialmente uma mistura, mas não quantificam as pastilhas que escolhem (exemplo de Filipe, à esquerda na figura 36). Filipe e o seu colega, Manuel, apenas quando completam a expressão "A minha mistura é…" indicam as quantidades. Perceber que uma mistura só está definida quando se indica a quantidade de cada um dos tipos de pastilhas de chocolate é um aspeto que se torna relevante somente depois de a professora, ao circular pela sala, especificar que para ela fazer "uma mistura igual" precisa de mais informação e vai mais longe quando diz, diretamente a dois alunos, que a quantidade vai influenciar a mistura no sentido de ficar "ou mais branco ou mais preto ou mais escuro".

Em seis pares a mistura escolhida pelos dois alunos é a mesma e nos restantes três as quantidades de pastilhas escolhidas pelos dois alunos não coincidem. No entanto, num destes pares, uma das misturas não está completa porque Francisco risca o que escreveu num dos quadrados para adotar o que o seu colega Renato tinha registado.

Analisando os números usados para traduzir as misturas, verificamos que o 5 é o único número ímpar escolhido, surgindo quatro vezes numa mistura com 5 pastilhas de chocolate de um tipo e 10 de outro tipo. No entanto, na sua escolha inicial, Fernando propõe uma mistura com dois números ímpares, 15 e 17, mas uma vez que o seu processo de resolução implicava dividir por 2 e obter um quociente inteiro, altera-a para 16 pastilhas de chocolate branco e 18 pastilhas de chocolate preto.

As onze misturas propostas são formadas por quantidades de diferentes tipos de pastilhas de chocolate representadas por dois números inteiros de um, dois, três ou mais de três dígitos (ver tabela 4).

Tabela 4: Quantidade de dígitos dos números inteiros escolhidos nas misturas (2015/16)

Número de dígitos (nos dois números)	misturas
1	2
1 e 2	3
2	4
2 e 3	1
3	0
Mais de 3	1

Depois de todos os pares terem a sua mistura de pastilhas de chocolate, um elemento de cada um é convidado a ir ao quadro registá-la. Nas nove respostas apresentadas surgem apenas frases em linguagem natural: "A mistura é 100 pastilhas de chocolate branco e 50 de chocolate preto" para, por exemplo, traduzir a resposta do par de Isabel (à direita na figura 36).

Ao lançar o desafio de averiguarem se existem, ou não, misturas iguais, a professora realça o padrão de registo "tanto de pastilhas tal e pastilhas tal" e questiona os alunos se não conhecem outra forma de escrever as respostas que, estando corretas, podiam ser traduzidas numa linguagem com mais símbolos matemáticos. Repete a leitura de uma das misturas, interpreta a situação "quer dizer que para dez pastilhas de chocolate branco eu tenho de pôr cinco pastilhas de chocolate de leite", aponta em simultâneo o "10" e o "5" e frisa o termo "para". Um dos alunos responde "dez sobre cinco", a professora regista $\frac{10}{5}$, tenta que eles recordem isso como uma razão e acrescenta que também se pode representar como 10 : 5.

Com a colaboração oral dos alunos, todas as misturas que estão registadas no quadro são representadas pela professora, através de uma razão na notação quer de fração, quer de divisão. Na sua folha de resposta todos os alunos registam as razões da sua mistura sob as formas de fração e de divisão. No entanto, em todas as suas posteriores respostas, utilizam a representação em fração. Comparam a quantidade de pastilhas de chocolate colocada no quadrado à esquerda com a quantidade do quadrado à direita. Na maior parte dos casos, à esquerda há um número maior de pastilhas e, quando isso não acontece, utilizam a informação em sentido inverso, procurando que o maior valor numérico corresponda ao primeiro termo da razão, tal como acontece na resolução de José (figura 37), em que começa por escrever $\frac{1000}{100000}$ = 1000 : 100000, risca e regista depois $\frac{100000}{1000}$ = 100000 : 1000.

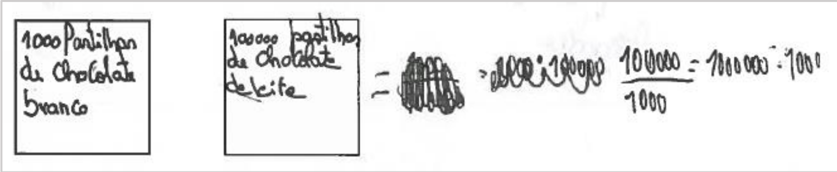


Figura 37: A mistura de José e a razão respetiva

Perante as expressões representadas no quadro (figura 38), os alunos identificam como sendo misturas iguais as razões $\frac{10}{5}$, $\frac{100}{50}$ e $\frac{20}{10}$.

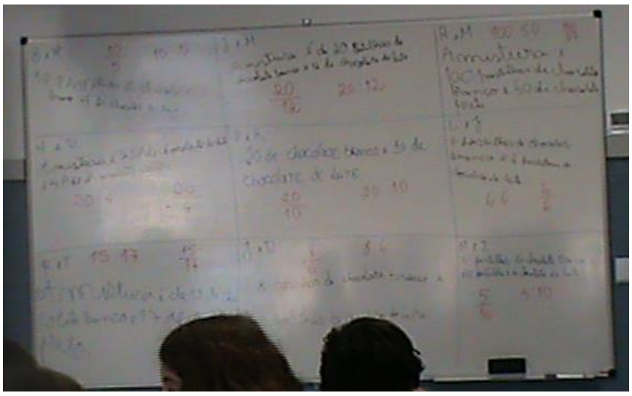


Figura 38: Registo conjunto das misturas, no quadro (2015/16)

Um deles justifica corretamente estas opções porque a divisão vai dar sempre 2, mas esta opinião não é analisada na discussão. Um outro indica que $\frac{20}{10}$ é o dobro de $\frac{10}{5}$. A professora aproveita esta ideia não correta para reforçar que as razões são iguais e desafiá-los a explicitarem o que foi feito de uma para outra, notando que é verdade que a quantidade de pastilhas duplicou. No final desta discussão, vários alunos expressam a sua compreensão da ideia genérica “para manter a mistura inicial devemos multiplicar ambos os termos da razão pelo mesmo número”.

Questão 2. Considerar um frasco de tamanho S (*Small*). Para responder a esta questão todos os alunos dividem ou multiplicam ambos os termos da razão por um mesmo número registando, de diferentes maneiras, o que fizeram. Por exemplo, Alexandre e Hugo, perante a mistura inicial (20 pastilhas de chocolate de leite e 4 de chocolate preto), dividem ambos os termos da razão separadamente por 4 e registam a quantidade de pastilhas de chocolate do frasco de tamanho S e o procedimento de como a obtiveram como se ilustra na figura 39.

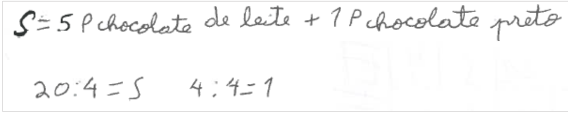


Figura 39: Como Alexandre e Hugo obtêm a quantidade de pastilhas do frasco de tamanho S

Vários alunos registam a alteração de ambos os termos da razão através da operação multiplicação, sendo 2 o fator mais utilizado. No entanto, o procedimento que apresentam é registado de modo diferente. Nuns casos surge a indicação simultânea da multiplicação de cada um dos termos da razão através do registo auxiliar comum para o trabalho com frações equivalentes (figura 40).

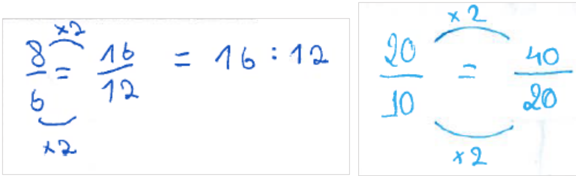


Figura 40: Registo segundo o esquema de trabalho com frações equivalentes

Noutros casos, a ideia que tentam expressar é a multiplicação ou a divisão de ambos os termos da razão por um mesmo número (2), mas o registo traduz a multiplicação de frações ou a divisão de frações em que a mistura inicial é o primeiro elemento da operação e $\frac{2}{2}$ ou 2 o segundo (ver figura 41).

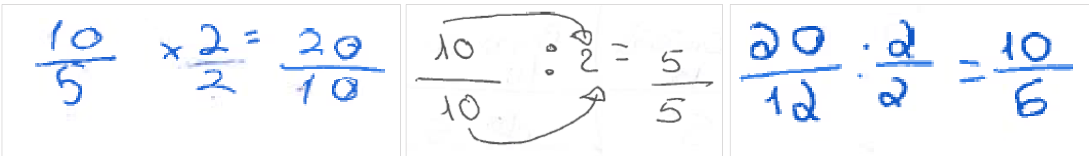


Figura 41: Como o fator de comparação 2 se transforma em multiplicar por $\frac{2}{2}$ e em dividir por 2 e por $\frac{2}{2}$

O registo à esquerda (figura 41) representa, de facto, a operação multiplicação entre duas frações, a segunda das quais com numerador e denominador iguais e, por isso, sob o ponto de vista do cálculo, o que está em jogo é a multiplicação por 1. E, embora os alunos saibam que um número multiplicado por 1 vai dar esse número, este conhecimento não parece ser operacionalizado no seu raciocínio, uma vez que a fração resultante vai ser encarada como a razão que compara a quantidade de pastilhas de um tipo chocolate com a do outro, no frasco de tamanho S. No registo do meio (figura 41), a divisão não é efetivamente a operação de dividir por 2 pois o aluno não calcula metade, mas sim metade de cada um dos termos da razão. Note-se que os dois arcos indiciam exatamente este procedimento. No registo à direita (figura 41) também não é efetuada a divisão indicada. O aluno não nota que o divisor é 1, embora escrito sob a forma de fração em que os dois termos são iguais a 2, e o procedimento que efetua corresponde a dividir o numerador e o denominador por 2, obtendo assim uma fração equivalente à inicial.

Deste modo, a grande maioria dos alunos apresenta resoluções baseadas na equivalência de frações, usando um raciocínio multiplicativo, mas não pensando em termos da invariância do quociente.

Apenas um par utiliza um raciocínio aditivo (figura 42).

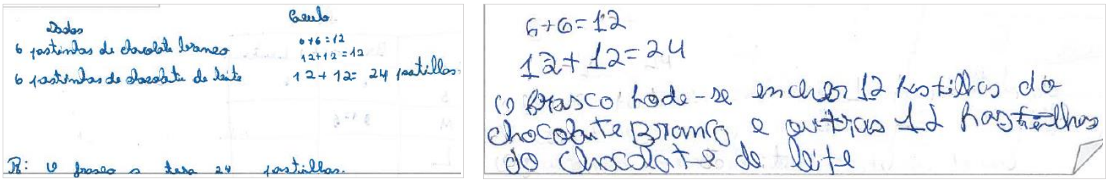


Figura 42: Registos de um raciocínio aditivo

E enquanto Mário regista os dados (mistura de pastilhas de chocolate escolhida anteriormente), os cálculos (com uma igualdade incorreta) e a resposta (incompleta), Helena, além das duas adições de parcelas iguais apresentadas, especifica na resposta a quantidade de pastilhas de cada um dos tipos de chocolate, tal como é implicitamente solicitado na ideia de manter a mistura escolhida.

Questões 3 e 4. Os alunos devem escolher dois frascos de tamanhos diferentes e determinar a quantidade de cada tipo de pastilhas, mantendo a mistura. Na grande maioria dos casos os frascos escolhidos têm dois tamanhos seguidos (por exemplo, M e L ou L e XL). Apenas um par escolhe os tamanhos M e XL. Os fatores escolhidos são maioritariamente números pares e apenas o ímpar 3 surge duas vezes, uma delas substituindo o uso de 2, que é riscado pelo aluno. O fator utilizado de um tamanho de frasco para outro é normalmente repetido na situação seguinte, ou seja, se o fator escolhido para manter a mistura do frasco de tamanho S para M é o 2 então ele surge também quando relacionam as quantidades de pastilhas de chocolate dos frascos de tamanhos M e L.

O registo de procedimentos é idêntico ao apresentado na questão anterior, tal como acontece com os de Manuel e Filipe. Este par recorre à equivalência de frações e ao fator multiplicativo 2, que se repete na comparação entre cada um dos tipos de pastilhas de chocolate, de um frasco de determinado tamanho para outro (figura 43).

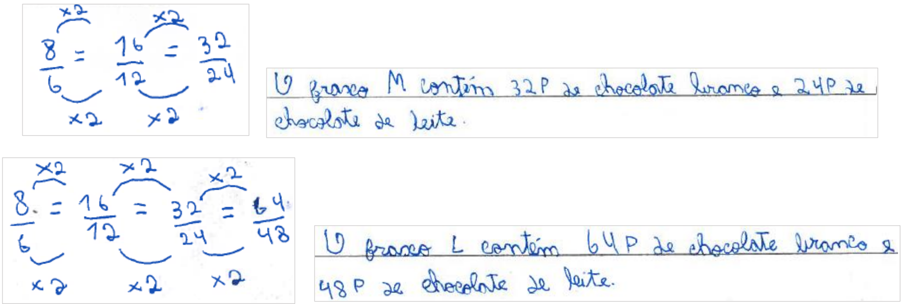


Figura 43: Registos de Manuel e Filipe – frascos de tamanhos M e L

Luís e Ana (figura 44) mantêm também o mesmo tipo de registo ($\times \frac{2}{2}$) e, em cada questão, repetem o processo desde a mistura inicialmente escolhida, 10 pastilhas de chocolate branco e 5 de chocolate de leite, até ao tamanho do frasco preferido, efetuando os cálculos sempre da esquerda para a direita

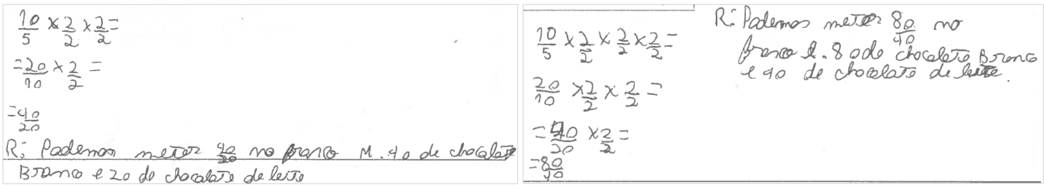


Figura 44: Registos de Luís e Ana – frascos de tamanhos M e L

O par Cláudia e Fernando (figura 45) é mais um exemplo de que mantêm o mesmo tipo de registo (neste caso incorreto) e comparam também as quantidades de pastilhas de chocolate dos frascos escolhidos (tamanho M e XL) com as da mistura inicial, 10 pastilhas de chocolate branco e 10 pastilhas de chocolate preto.

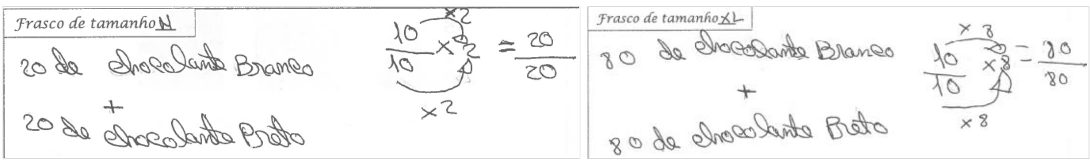


Figura 45: Registos de Cláudia e Fernando – frascos de tamanhos M e XL

Na análise do registo, parece que estes alunos não calculam o dobro (× 2, como indicam) mas multiplicam sim cada termo da razão por 2, como é sugerido pelos dois arcos, o que lhes permite obter uma razão igual com quantidades diferentes para cada tipo de pastilhas de chocolate (o mesmo acontece em relação ao frasco de tamanho XL e ao multiplicar por 8).

Discussão final da tarefa. Com o objetivo de melhor organizar a informação e permitir uma consulta mais acessível, a professora, dialogando com a turma, cria uma tabela de razões para um dos exemplos do quadro e, de seguida, cada par organiza desta maneira as suas resoluções. Apresentam-se na figura 46 duas das tabelas, uma vertical (de Manuel) outra horizontal (de Isabel), onde surgem as quantidades de pastilhas dos dois tipos escolhidos para a mistura inicial e para cada um dos frascos do tamanho selecionado. Nestas tabelas aparecem, como informação auxiliar, arcos de ligação entre duas linhas (colunas) consecutivas legendados com os fatores de comparação. Na tabela da esquerda, Manuel regista também arcos, não orientados, de ligação da primeira linha com as restantes, legendados com o fator de comparação entre a quantidade da mistura inicial e a dos restantes frascos.

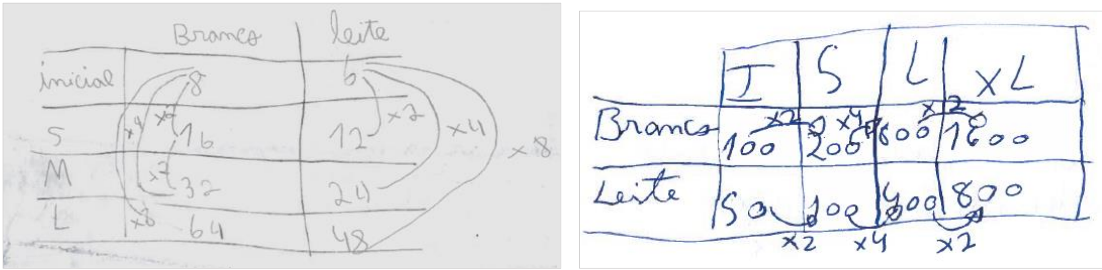


Figura 46: Tabelas de razões de Manuel e de Isabel

Apenas Manuel e Isabel escrevem fatores de comparação na tabela. Os restantes alunos limitam-se a representá-la sem registo de quaisquer procedimentos auxiliares. Catorze alunos apresentam a tabela na vertical, tal como tinha surgido no quadro, e quatro apresentam-na na horizontal. Treze têm-na completa e correta enquanto cinco não a conseguiram completar.

Em síntese. As pastilhas de chocolate, de dois tipos diferentes, exemplificam dois espaços de medida, em que as grandezas em jogo são discretas (pastilhas de chocolate indivisíveis). A situação inicial (questão 1) de não contabilização do número de pastilhas da mistura, verificada em algumas das resoluções, é substituída pela necessidade de quantificação quando a ideia de considerar misturas iguais torna evidente que os atributos qualitativos das pastilhas de chocolate não são suficientes para identificar uma mistura. Os registos analisados permitem identificar um esquema de evolução da aprendizagem do conceito/procedimento de comparação multiplicativa dos alunos em que eles elaboram oralmente um raciocínio do género: se multiplicarmos ou dividirmos a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate por um mesmo número (inteiro positivo), obtemos um frasco com uma quantidade maior (ou menor), mas mantemos a mistura. Posteriormente, vão aplicá-lo na resolução das questões 2 a 4. As representações utilizadas são simbólicas e a linguagem natural (texto) aparece aliada à linguagem matemática (numerais e símbolos matemáticos). Quando a razão surge é representada sempre sob a forma de fração, onde os números utilizados são inteiros positivos pares de um ou dois dígitos (salvo 2 exceções). No final, a tabela de razões é sugerida pela professora como forma de registo que permite organizar concisamente toda a resolução da tarefa, analisá-la e interpretá-la. Cada aluno constrói individualmente a sua tabela e a grande maioria opta pela representação vertical, onde as duas colunas correspondem ao tipo de pastilhas de chocolate escolhido e as quatro linhas à mistura inicial e ao tamanho do frasco. O registo de arcos (orientados ou não) e legendados com os procedimentos de multiplicar ou dividir apenas é feito por dois alunos. Em caso algum há cálculos auxiliares explícitos, talvez porque os valores envolvidos não incentivam a isso. A equivalência de frações é um conceito que os alunos já conhecem e que utilizam na construção de razões iguais e evidenciam, por isso, trabalhar dentro de um mesmo espaço de medida, ou seja, estabelecem sempre relações escalares. O fator escalar mais comum é “× 2” e traduz o conceito “dobro de”, “2 ×”, mencionado muitas vezes oralmente. Esta situação permite ilustrar, de forma não explícita, a utilização da propriedade comutativa da multiplicação.

5.1.2 Tarefa 2: Redimensionar/comparar dimensões

Redimensionar – Quatro imagens do mesmo desenho. Para a identificação, a olho nu, de semelhanças e diferenças entre o desenho original e as reproduções A, B, C e D, os alunos começam por comparar, por sobreposição, as áreas das várias imagens. José diz de imediato que “o desenho é metade” quando relaciona o original com a imagem B e acrescenta, momentos depois, “pensávamos que a original e a D faziam metade da A”. A primeira resposta de Mário (figura 47) exemplifica também essa ideia quando especifica a relação entre cada uma das imagens e o desenho original: “passou a ser o dobro”, “passou a ser o *tripelo* [triplo]” e “passou a ser a metade”.

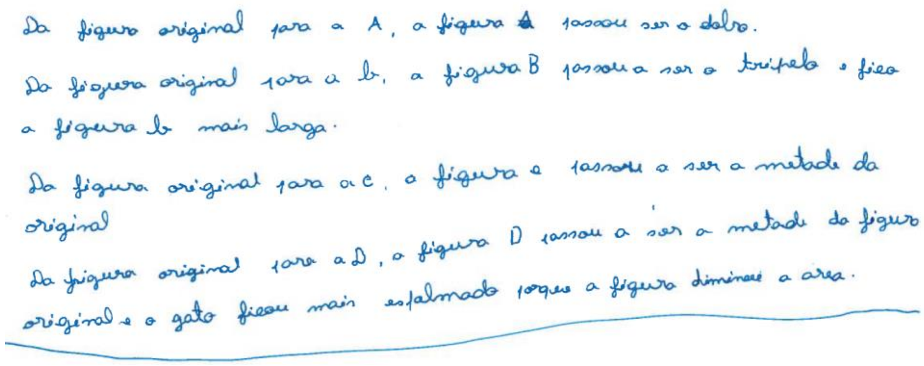


Figura 47: Primeira resposta de Mário para comparar o desenho original com as imagens

Por insistência da professora, os alunos deixam de comparar as áreas e começam a referir que aumentou/diminuiu o/a comprimento/largura, sem sentirem, no entanto, necessidade de diferenciar a resposta por exemplo relativamente a duas das imagens, A e B, que embora aumentando ambas nas suas duas dimensões, a situação não é exatamente a mesma. A reformulação da resposta apresentada por Mário (figura 48) é disso um exemplo.

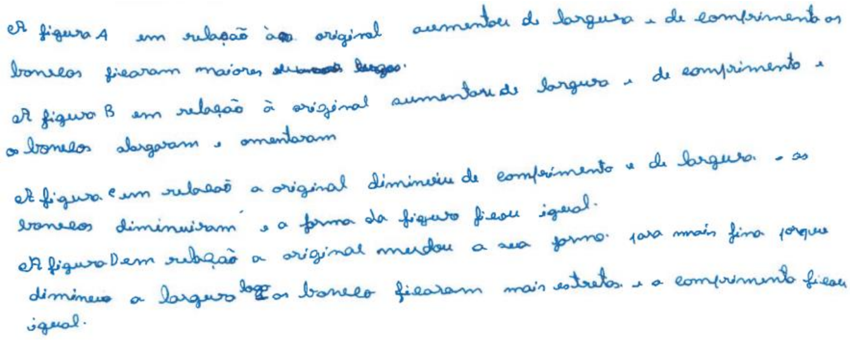

A figura A em relação ào original aumentou de largura e de comprimento os
bonecos ficaram maiores ~~[illegible]~~ largos.
A figura B em relação à original aumentou de largura e de comprimento e
os bonecos alargaram e omentaram
A figura C em relação a original diminuiu de comprimento e de largura e os
bonecos diminuiram e a forma da figura ficou igual.
A figura D em relação a original mudou a sua forma para mais fina porque
diminuiu a largura logo os boneco ficaram mais estreitos e o comprimento ficou
igual.

Figura 48: Segunda resposta de Mário para comparar o desenho original com as figuras

Na discussão conjunta (episódio 1), a professora aprofunda o trabalho realizado pelos alunos, procurando que as suas respostas se vão completando e permitam salientar que existem ideias fundamentais para que duas imagens sejam, ou não, semelhantes.

> Professora – Ana, o que é que escreveram, vocês?
> Ana – Da original para a A, aumentou a imagem na largura e no comprimento.
> Professora – O que ela disse está certo. Aumentou a imagem na largura e no comprimento. Quem é que completou?
> (Alexandre e Filipe colocam o dedo no ar.)
> Filipe – Eu pus, a figura A em relação à figura original, aumentou para baixo e para cima e, por isso, aumentaram de tamanho em relação aos bonecos da figura original.
> Professora – Aumentou para baixo e para cima, o que é que ele quer dizer aqui? Para os lados, o comprimento e a largura. Mas também não acrescenta muito! É o que ela disse. Quem é que tem mais completo?
> (Alexandre volta a levantar o braço com o dedo no ar.)
> Professora – Alexandre.
> Alexandre – Da original para a figura A, a professora aumentou a imagem, mas como aumentou igualmente o comprimento e a largura, os bonecos não ficaram achatados mas aumentaram de tamanho e a imagem continua quadrada.
> Professora – Concordam com o que ele disse?
> [...]
> Professora – Está certo. Está, ou não está, certíssimo? O que ele disse é: a professora aumentou a imagem, mas como aumentou o mesmo para a largura e para o comprimento os bonecos não ficaram achatados. Nem ficaram gordos (afasta as mãos num gesto alusivo), nem ficaram aqueles mais achatados (junta as mãos para ilustrar que a figura se estreitou). E ele disse aqui outra coisa importante: A figura mantém-se...
> (Espera que os alunos respondam.)
> Alunos (alguns) – Quadrado.
> Professora – Um quadrado.

Episódio 1: Como condições mais elaboradas vão surgindo numa discussão conjunta

A professora introduz a terminologia de imagem semelhante/deformada e os alunos concluem que ficaram semelhantes ao desenho original, as imagens A e C, que estas imagens são quadradas, que a imagem A é uma "réplica maior" do original, que é uma ampliação, e que a imagem C, relativamente ao desenho original, é mais pequena, é uma redução. No entanto, das nove respostas contabilizadas nesta parte da tarefa (o trabalho foi realizado a pares e registado de igual forma pelos dois elementos), apenas uma, a do par formado por Alexandre e Hugo, explicita se a forma se mantém ou não, como se constata na figura 49, quando referem "a imagem continua quadrada".

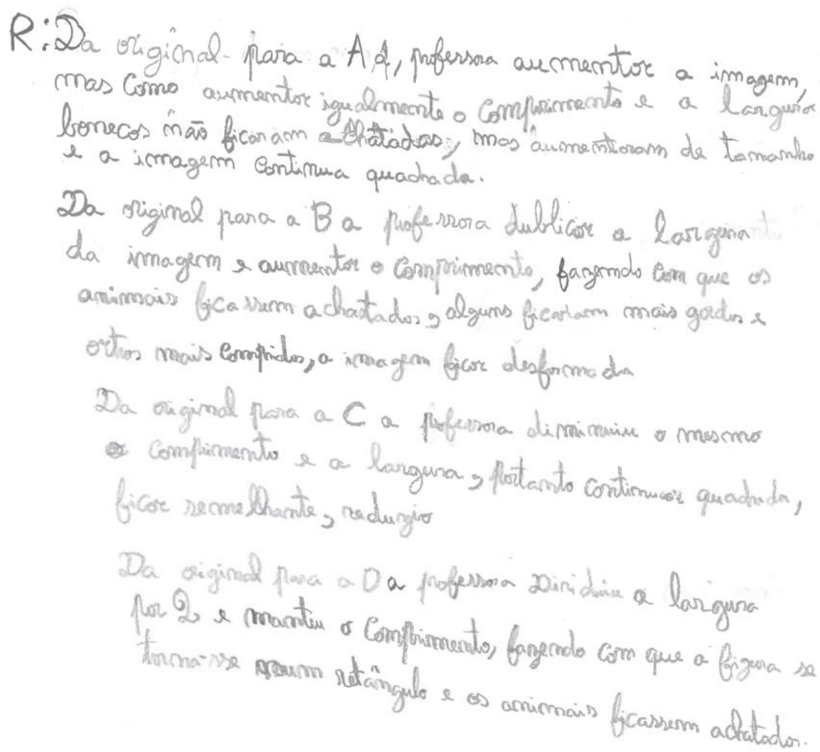

R: Da original para a A, professora aumentou a imagem, mas como aumentou igualmente o comprimento e a largura os bonecos não ficaram achatados, mas aumentaram de tamanho e a imagem continua quadrada.
Da original para a B a professora dublicou a largura da imagem e aumentou o comprimento, fazendo com que os animais ficassem achatados, alguns ficaram mais gordos e outros mais compridos, a imagem ficou deformada
Da original para a C a professora diminuiu o mesmo comprimento e a largura, portanto continuou quadrada, ficou semelhante, redução
Da original para a D a professora dividiu a largura por 2 e manteve o comprimento, fazendo com que a figura se tornasse num retângulo e os animais ficassem achatados.

Figura 49: Resposta de Alexandre e Hugo

Redimensionar – Multiplicando. Quantificam-se individualmente as respostas dos alunos (dezoito, no total) no que diz respeito, quer à escolha da lupa, quer ao fator de comparação a completar porque existem algumas diferenças de registo nos grupos.

Para obter a imagem A a partir do desenho original, todos os alunos escolhem corretamente a lupa de ampliar e o fator de comparação correspondente. A quase totalidade prefere representar o fator de comparação sob a forma decimal (1,5), um aluno representa-o sob a forma de numeral misto ($1\frac{1}{2}$) e um outro representa-o simultaneamente sob a forma de numeral misto, fração e percentagem ($1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 150%).

Para obter a imagem B a partir do desenho original, no que diz respeito à largura repete-se a situação anterior e, embora todos escolham a lupa certa (ampliar), dois alunos registam como fator de comparação 2,5 e outros dois registam 2 (depois de riscarem 0,5). Quem regista aqui o fator 2, regista também, na parte referente ao comprimento, o fator de comparação como sendo 1. Neste caso, antes de efetuada a alteração de 0,5 para 2, parece haver indícios de coerência no procedimento utilizado – comparação aditiva em que ao comprimento original acrescentam, no primeiro caso, 0,5, e, no segundo, 1. No caso das respostas em branco (sem assinalar a lupa e sem registar o fator) não há ligação entre si porque não correspondem aos mesmos alunos. No entanto, os alunos que não respondem corretamente manifestam inconsistência nas respostas relativas às figuras A e B.

Para obter a imagem C a partir do desenho original, apenas catorze alunos escolhem a lupa de reduzir. Os restantes, ou não respondem ou escolhem a lupa de manter. Quanto ao fator de comparação, de entre as respostas consideradas válidas, todas revelam um fator menor que a unidade, mas enquanto dez alunos escolhem o valor correto, apenas divergindo na forma de o representar (em fração ou em decimal), oito alunos respondem que o fator corresponde a $\frac{1}{4}$. Este valor é exatamente o que se retira ao comprimento original para se obter o comprimento de C, raciocinando em termos de comparação aditiva ($\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$) e um deles afirma até que "esta parte [aponta na folha] saiu".

Para obter a imagem D a partir do desenho original, no que respeita à largura, dezassete alunos escolhem corretamente a lupa (manter) e apenas um erra ao escolher a lupa de reduzir; no que respeita ao comprimento, quinze alunos escolhem a lupa correta (reduzir) e três não assinalam nenhuma. Quanto ao fator relativo à lupa de manter, há um aluno que escreve "0" (zero) e quatro que deixam o espaço em branco; na lupa de reduzir, todos os alunos representam corretamente o fator e quinze deles utilizam a representação decimal. Apenas um aluno escreve o fator de duas maneiras: "$\frac{1}{2}$ ou 0,5".

Na figura 50 podemos observar como um aluno utiliza a tira de cartolina para medir o lado de uma das imagens e também como a tira surge dobrada e a imagem C apenas cobre algumas dessas quatro partes.

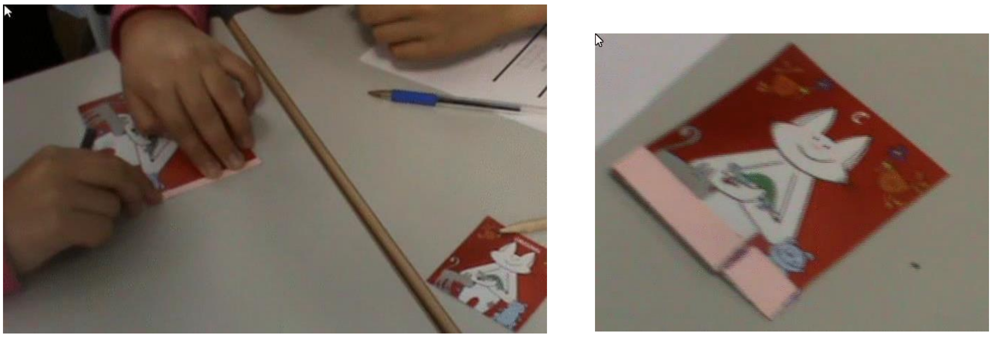


Figura 50: Os alunos utilizam tiras de cartolina

Redimensionar – Aumentar e reduzir com percentagem. Todos os pares, oito[17], identificam na janela 1 (J1) a figura D. Apenas um par sente necessidade de registar a relação entre as expressões do programa *Paint*, horizontal e vertical, e as dimensões das figuras, comprimento e largura, respetivamente. Nos outros está implícita esta relação pelas respostas que apresentam e, como tal, para uns a vertical é o comprimento e a horizontal a largura, para outros é o contrário, como mostra a figura 51.

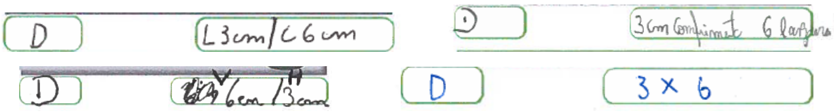


Figura 51: Registo das dimensões da figura D

Na justificação das suas escolhas, dois alunos fazem corresponder, através de uma seta, uma unidade a 100 (no redimensionar na vertical) e $\frac{1}{2}$ a 50 (no redimensionar na horizontal) e relacionam separadamente as percentagens, 100% e 50%, e os valores absolutos, 6 e 3, utilizando a divisão por 2 e a multiplicação em que um dos fatores é 2, como se observa na figura 52.

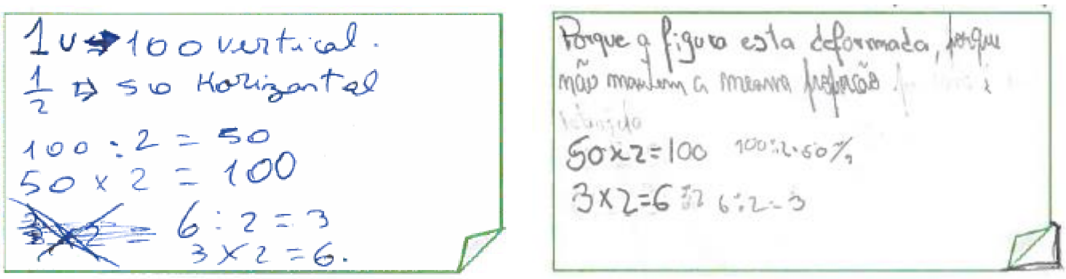


Figura 52: Relações entre percentagens e entre valores absolutos

[17] Estão presentes nesta aula dezasseis alunos.

Alguns alunos elaboram pequenas justificações das suas respostas. Uns, como os pares Manuel e Filipe e Daniel e Raquel, redigem um pequeno texto (figura 53, em cima); outros, como os pares Renato e Francisco e Mário e Isabel, mostram um registo numérico (figura 53, em baixo).

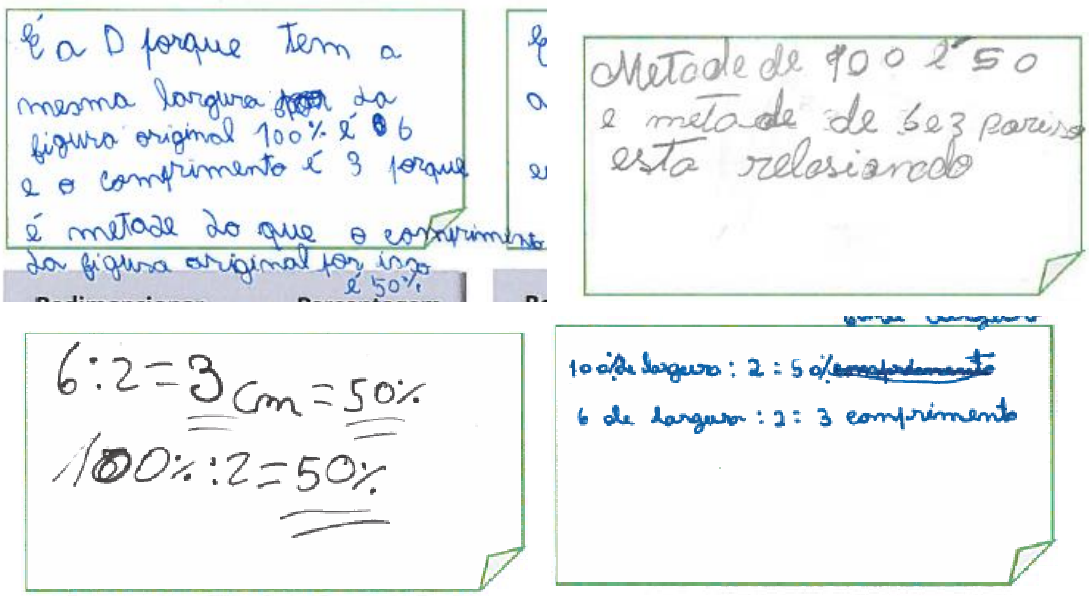


Figura 53: Textos de Manuel e de Daniel e registos numéricos de Francisco e de Mário

Francisco apresenta duas divisões por 2, mas enquanto a segunda, relacionada com valores de percentagem, está correta, a primeira apresenta incorreções porque, por um lado, a unidade de medida de comprimento utilizada (cm) só surge no quociente e, por outro, iguala este valor a 50%. A ideia de que 50% corresponde a 3 cm parece ser reforçada pelo duplo sublinhado. Mário especifica que 100% e 6 se referem à largura, mas quando obtém 50% e 3 de quociente, relaciona-os com o comprimento. Ainda o risca na primeira divisão, mas deixa-o na segunda.

Para as outras situações de identificar a janela do programa *Paint* com as diferentes imagens e justificar a opção, os procedimentos são semelhantes e todos os pares mantêm o mesmo tipo de registo ao longo da resolução de toda a tarefa.

Comparar dimensões. Devido ao adiantado da hora, esta parte da tarefa foi resolvida individualmente como trabalho para casa e apenas três alunos (dois deles não estiveram presentes na aula) não a entregaram na aula seguinte, pelo que se recolheram quinze respostas.

Em seis delas estão indicadas as dimensões da folha de papel fotográfico de tamanho A4 e nas outras, não as explicitando, os alunos escolhem corretamente a dimensão da folha

(21 cm) que permite à Rita efetuar a maior reprodução possível do seu desenho, ou seja, fazer um quadrado. Todos trabalham, por isso, com o valor 21, com exceção de Alexandre que considera e trabalha (figura 54) as medidas de comprimento e largura da folha A4 com valores aproximados às décimas (21,1 e 29,8) e regista que as duas dimensões (c e l) da reprodução medem 21,1 cm.

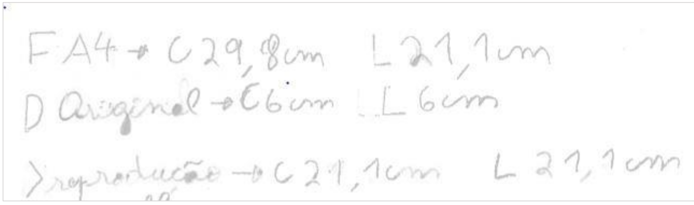


Figura 54: Dimensões da folha de papel A4, registadas por Alexandre

Para comparar a largura da folha de papel A4 relativamente às dimensões do desenho original, nove alunos representam duas razões, sob a forma de fração, $\frac{6}{6}$ e $\frac{21}{21}$, e Fernando e Manuel relacionam-nas entre si, através do sinal igual, e com a unidade, através de uma seta, como se pode observar na figura 55.

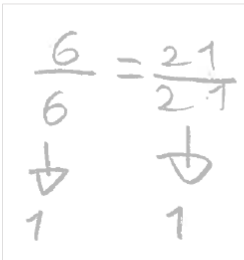


Figura 55: Como Fernando e Manuel relacionam as duas razões

Oito alunos determinam o fator de comparação entre 6 e 21 através da operação divisão, usando o algoritmo. Como se pode observar na figura 56, nem sempre o registo está completo: Filipe (à esquerda) não acrescenta nenhuma casa decimal ao dividendo, mas indica um quociente não inteiro; Helena (ao centro), acrescenta o zero no dividendo, mas indica a vírgula decimal apenas no quociente; Daniel (à direita) representa o algoritmo corretamente.

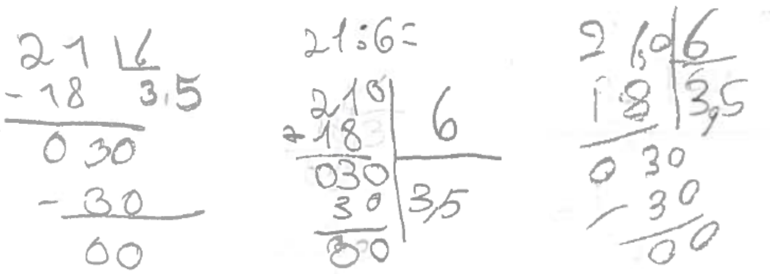
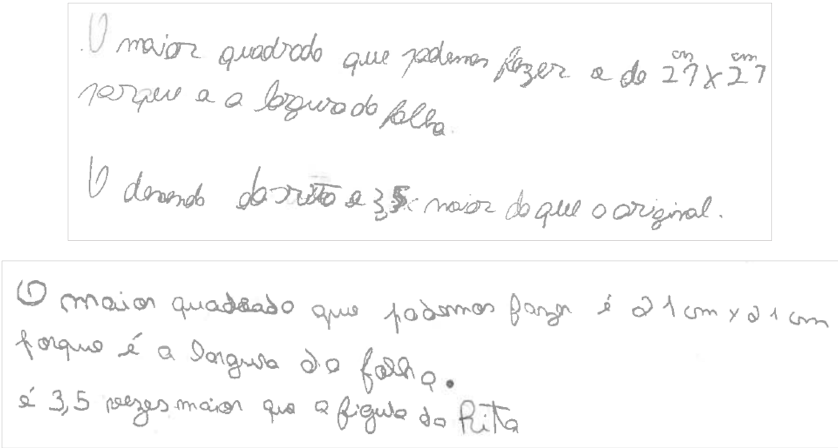


Figura 56: Representações do algoritmo da divisão

Os restantes sete alunos mencionam apenas o fator 3,5, sem qualquer indicação quanto à maneira como o determinam. Luís e Raquel (figura 57) retomam a ideia de comparar o desenho original e a figura, afirmando que "é 3,5 vezes maior que o original".


O maior quadrado que podemos fazer é do 27 cm x 27 cm
porque é a largura da folha.
O desenho da Rita é 3,5 maior do que o original.

O maior quadrado que podemos fazer é 21 cm x 21 cm
porque é a largura da folha.
é 3,5 vezes maior que a figura da Rita

Figura 57: Respostas de Luís e de Raquel relativamente ao fator de comparação

Em síntese. As primeiras abordagens de comparação de uma figura relativamente a outra (parte 1) são baseadas na comparação de áreas, por sobreposição, e substituídas, após a intervenção da professora, por comparações ligadas às suas dimensões lineares. Nas descrições iniciais, os alunos utilizam expressões do tipo aumentar ou diminuir. Depois, quando no grupo turma, chegam ao conceito de figuras semelhantes, apenas dois mencionam manter a forma como uma condição de semelhança.

Na parte 2, os alunos escolhem, para cada situação, quase sempre as lupas corretas, ligando-as aos conceitos de ampliar, reduzir e manter. A ampliação/redução é traduzida depois simbolicamente através da identificação do respetivo fator, escrito maioritariamente sob a forma decimal. De entre os quatro casos, aquele que originou mais confusão foi o de obter a imagem C a partir do desenho original. Pode-se, no entanto, identificar nas produções de vários alunos um esquema de evolução conceptual/procedimental da comparação multiplicativa, que se inicia na resposta à questão "Quanto é que retiramos ao comprimento do original para obtermos o comprimento de C?", e progride para a resposta à questão crucial de relacionar multiplicativamente duas medidas de comprimento "Quantas vezes o comprimento do original cabe no comprimento de C?".

Relativamente à parte 3, todos os alunos conseguiram identificar as imagens nas respetivas janelas e indicar as suas dimensões. As justificações vão desde representações simbólicas em linguagem natural até à linguagem matemática, predominando o registo horizontal das operações divisão e multiplicação, consideradas em separado para os valores absolutos e para as percentagens, como se pôde observar no exemplo da figura 53.

Na quarta e última parte, o valor escolhido pelos alunos (21 cm) sugere que interiorizaram a ideia de manter a forma para obter uma imagem semelhante e, como tal, percebem que o maior quadrado possível numa folha de papel fotográfico de tamanho A4 vai ter como dimensões a largura da folha. Na questão que envolve relacionar 21 e 6, os alunos utilizam preferencialmente procedimentos multiplicativos, através da operação divisão (21 : 6), cujo valor determinam a partir do uso do algoritmo.

5.1.3 Tarefa 4: Fazer limonadas

Problema 1. A primeira parte desta tarefa consiste em comparar o sabor de duas limonadas confecionadas com concentrado de limão e água, de acordo com os dados numéricos da ilustração. Nove alunos apresentam no início da resolução a resposta à pergunta “Concordas com eles?”, não se percebendo pelos seus registos se foi, de facto, isso que escreveram primeiro ou se voltaram atrás para que a resposta ficasse indicada naquele sítio da folha; cinco respondem na última linha da resolução do problema; quatro não respondem.

“Eu concordo com eles”, “concordo” ou, simplesmente, “sim” é a resposta de nove alunos dos quais seis apresentam uma justificação, não copiada do quadro, para a sua opção; Luís e Ana respondem “as limonadas não são iguais” e justificam; a resposta “eu não concordo” é registada por Mário e Isabel que copiam a justificação do quadro.

Os alunos relacionam o número de chávenas de concentrado de sumo de limão com o número de litros de água de cada mistura, de acordo com a sequência textual do próprio enunciado (limonada de sexta-feira: 3 chávenas de concentrado de limão e 4 litros de água; limonada de sábado: 4 chávenas de concentrado de limão e 5 litros de água).

Alexandre (figura 58) e Hugo respondem “eu concordo com eles”, referem que “as frações não são equivalentes”, explicam porquê e traduzem em linguagem matemática a ideia de que as duas razões são diferentes. Alexandre assinala um arco orientado entre os primeiros termos das razões (3 e 4) e um outro entre os segundos (4 e 5), ambos legendados pelos fatores respetivos (“× 1,33…” e “× 1,25”). Indica as operações, 4 : 3 e 5 : 4, e determina o resultado por aplicação do algoritmo da divisão apenas na primeira.

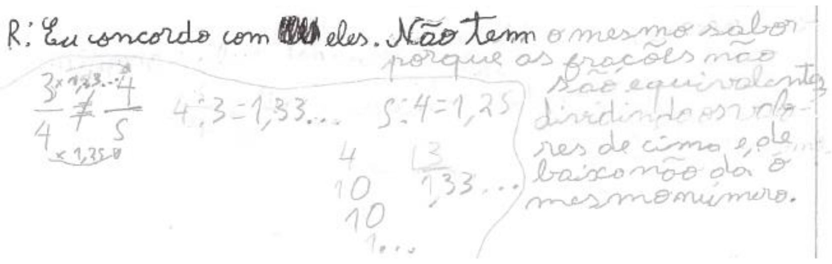


Figura 58: Resolução de Alexandre

José (figura 59) responde “sim” e justifica a sua resposta. Apresenta duas linhas numéricas duplas, uma referente à mistura de sexta-feira e outra à de sábado. Os valores de uma e outra surgem através da sequência dos múltiplos naturais dos números iniciais. Na linha de sexta-feira, indica os múltiplos de 3 até 18 e os de 4 até 24; na linha de sábado, regista os múltiplos de 4 até 20 e os de 5 até 25. Na sua resposta não surge nenhuma indicação de quais são, de facto, as razões que vai comparar para retirar uma conclusão.

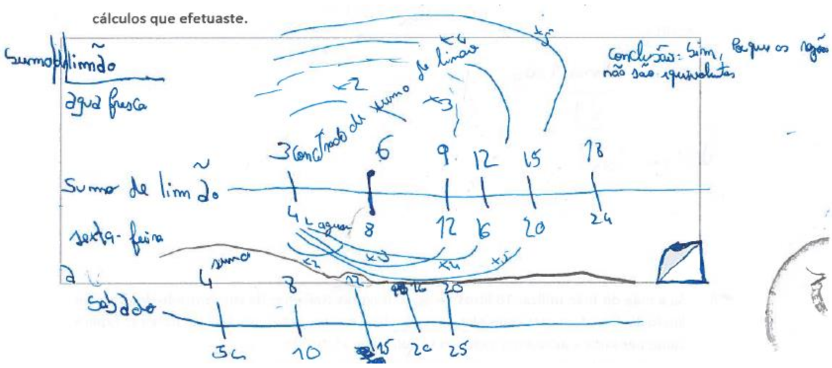


Figura 59: Linhas numéricas duplas de José

Apenas quando é convidado a ir ao quadro José explica o que fez (episódio 2) e a professora, perante algumas das suas imprecisões de linguagem, procura clarificar o seu procedimento.

> Professora – Ele agora vai-me explicar, depois... como é que... Então, a partir daí o que é que tu depois pensaste, José?
>
> José – Eu vi aqui... estes dois eram quase iguais [parece que aponta apenas para a segunda linha do 12 para 15]. Eu primeiro pensava que eram equivalentes porque pensava que o doze era... vá, como era igual no sumo, pensava que daria igual, mas depois vi que o 15 e o 16 não eram bem igual e, então, a conclusão a que che...que... a... [olha para a sua folha de resposta, mas não acrescenta nenhuma ideia].
>
> Professora – Vá que eu ajudo. Ele está a dizer: olhou para aqui [aponta nas duas linhas] e viu que o doze era igual ao doze e pensou “Ah! Isto é igual”. Mas depois foi ver cá em baixo e viu que aqui [aponta] estava dezasseis e aqui [aponta] quinze. Então, o que é que isto significa?
>
> José – As razões não são equivalentes.

Professora – As razões não são equivalentes. Porquê? Na razão de sexta-feira [aponta sexta-feira], se eu puser doze de concentrado... Oh, Hugo! Se eu puser doze de concentrado, quantos litros de água tenho que por?
José – Dezasseis.
Professora – Dezasseis litros de água. Se for para o sábado [aponta sábado], o que é que acontece? Se eu puser doze de concentrado, quanta água é que leva?
José – Quinze.
Professora – Quinze litros de água [aproveita para escrever (L) à frente de água, em cada uma das linhas]. Então, o que é que acontece? Então, o que é que eu daqui depreendo? Que...
José – As razões...
A professora – A limonada não vai ser...
José – A mesma.
Professora – A mesma.

Episódio 2: Explicação de José, no quadro

Renato (figura 60), depois de riscar a sua primeira resposta "Não. Porque a mãe", escreve "sim", traduz os dados iniciais para uma tabela, em que cada coluna corresponde a um dia (sexta-feira e sábado) e cada linha a unidades de medida de grandezas ("chávenas de concentrado" e "litros de água"). Averigua se o fator que relaciona 3 com 4 (números de chávenas de concentrado de sumo de limão, na sexta e no sábado) é o mesmo que relaciona 4 com 5 (números de litros de água, na sexta e no sábado). Calcula os quocientes não inteiros de 4 : 3 e 5 : 4, através da aplicação do algoritmo da divisão, e legenda os arcos orientados indicados na tabela ("1,(3)" e "1,25"). Ao contrário de Alexandre, Renato não explicita que as duas razões são diferentes.

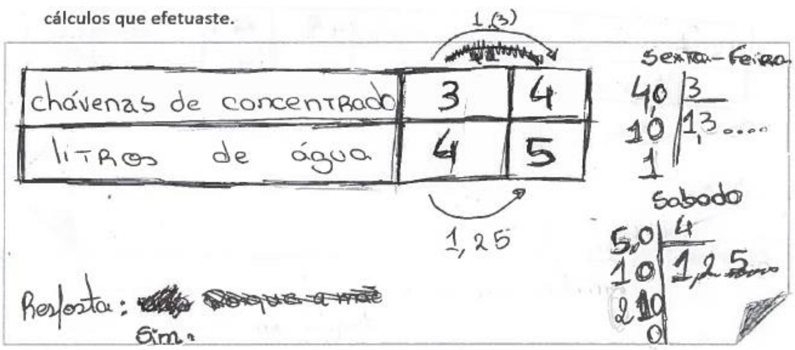


Figura 60: Tabela de razões de Renato

Quando vai ao quadro apresentar e explicar a sua resolução, Renato (episódio 3) começa por dizer que relaciona os valores das duas grandezas no dia de sexta-feira, mas a intervenção da professora, após verificar o que ele tem escrito na sua folha de resposta, fá-lo mudar de discurso e relacionar os valores de cada uma das grandezas, consecutivamente na sexta e no sábado.

Professora – Explica lá, Renato. O que é que tu foste ver?
Renato – Fiz quatro a dividir por três [aponta o 4 (de litros de água) e o 3 (de chávenas de concentrado de limão) indicados na primeira coluna].
Professora – Ai, foi assim que fizeste?!
[Renato abana a cabeça para dizer sim.]
Professora – Mas tu tens aqui... tens aí [olha para a folha de resposta de Renato] uma coisinha assim [assinala, no quadro, dois arcos orientados da primeira para a segunda coluna, uma em cima e outra em baixo].
Renato – [Inaudível, mas no quadro aponta com o dedo do 3 para o 4, no sentido em que está a seta.]
Professora – Ah! Já me estavas a... Então, foi ver o quê? Quantas vezes é que o três ... [No quadro, aponta em linha, do 3 para o 4.]
Aluno – Cabia no quatro.
Professora – Cabia no quatro. E depois foste ver o quê mais? Vá, então, continua lá.
[Renato regista o algoritmo nas duas divisões.]
Professora – O Renato primeiro foi ver quantas vezes o três cabia no quatro e depois foi ver quantas vezes o quatro cabia no cinco.
[De volta às divisões, Renato indica o primeiro quociente como '1,3...' e o segundo, depois de uma ajuda da professora, como '1,25'.]
Professora – Então, o que é que ele vê aqui? Daqui para aqui [aponta, em linha, do 3 para o 4] multiplica-se por quanto?
Renato – Um vírgula três.
Professora [apontando o quociente 1,3...] – Isto é uma dízima quê?
Alunos – Infinita.
Professora – Infinita, não é? Pronto. Vai ser sempre três, três, três,... Então aqui [aponta a seta da parte superior] multiplica por... (...)
Professora – Então, pergunto: multiplicámos pelo mesmo fator?
Alunos – Não.
Professora – Então posso dizer que as misturas são iguais?
Alunos – Não.
Professora – Ai, pois não!

Episódio 3: Explicação de Renato, no quadro

Mariana e Sara respondem "eu concordo" e registam os dados iniciais numa tabela (figura 61), mas não conseguem avançar e optam por copiar a resolução do quadro. Sara acrescenta uma coluna para o "domingo" e indica, como legenda dos arcos orientados entre cada duas colunas consecutivas, "1 cha" (na primeira linha) e "1 ℓ" (na segunda linha).

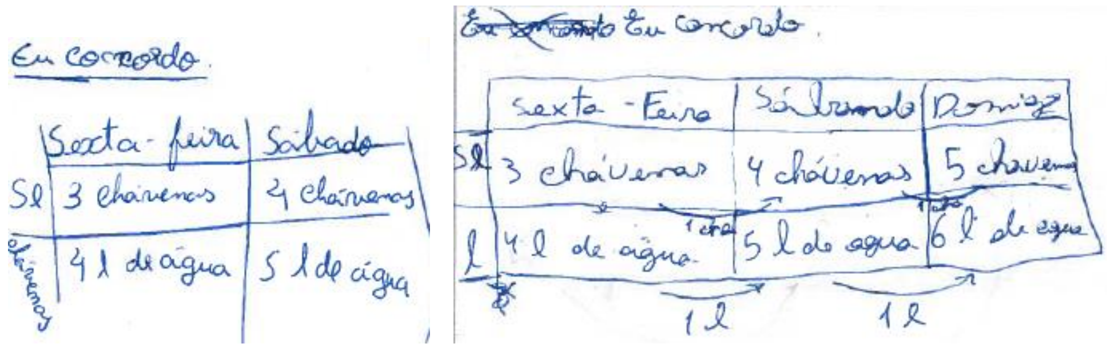


Figura 61: Tabelas de razões de Mariana e de Sara

Oito alunos ou não respondem ou respondem apenas à questão expressa no final do enunciado do problema e apresentam como justificação uma cópia de uma das resoluções apresentadas no quadro.

Problema 2. A segunda parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão unitária quando, simultaneamente, é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, neste caso, o sabor da limonada confecionada no sábado. Dezasseis alunos resolvem o problema e dois não o conseguem fazer. No entanto, enquanto onze não apresentam uma resposta explícita, cinco registam-na na linha que delimita a parte da folha dedicada à resolução, com indicação de um valor e de uma unidade de medida, como por exemplo: “São 1,250 litros”, “Devia ter usado 1,25 litros de água”, “Ela terá de usar 1,25 litros de água” e “1,250 ml”.

Nas suas resoluções, oito alunos representam uma linha numérica dupla, utilizando sete deles uma com apenas dois pontos, seis representam a razão sob a forma de fração (quatro indicam uma razão em que desconhecem um termo e substituem-no por um ponto de interrogação), dois indicam apenas divisões por quatro e dois representam uma tabela de razões. Os dois alunos que não conseguem apresentar uma resposta trabalham com uma linha numérica dupla errada.

Alexandre e Hugo representam uma linha numérica dupla com dois pontos, mas tal como os restantes colegas (com exceção de Filipe) que utilizam esta representação, não mantêm a posição natural dos números (da esquerda para a direita, por ordem crescente). São os únicos que registam a relação inversa entre dividir por 4 e multiplicar por $\frac{1}{4}$. Hugo, na sua folha de resposta, legenda os arcos orientados com “: 4” e “$\times \frac{1}{4}$”. Alexandre, na sua folha de resposta (figura 62, em cima), apresenta um dos resultados sob a forma de numeral decimal e de numeral misto e, no quadro (figura 62, em baixo), regista o mesmo que Hugo.

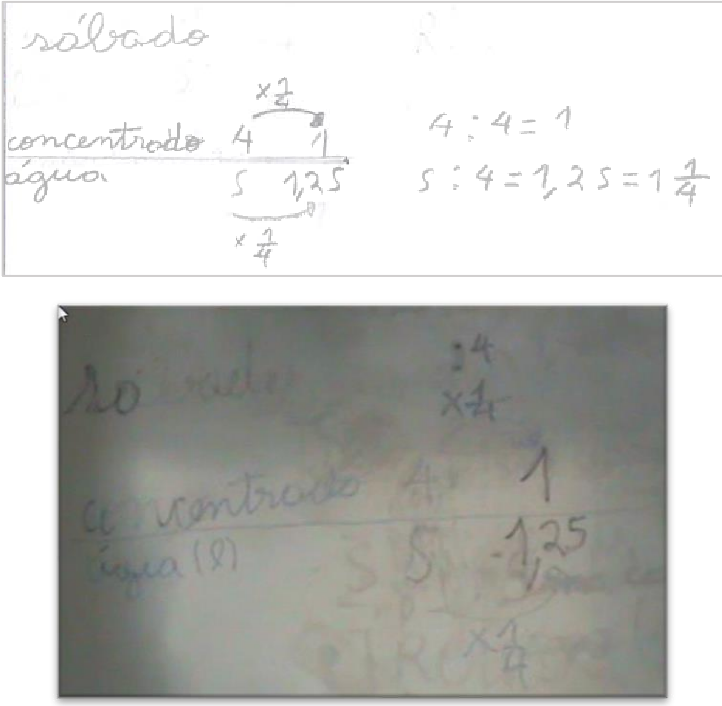


Figura 62: Resoluções de Alexandre, na sua folha e no quadro

Alexandre explica o seu raciocínio e a professora aproveita (episódio 4) para que todos recordem uma relação entre a multiplicação e a divisão.

Professora – Alexandre, explica lá um bocadinho alto, para se ouvir. Vamos lá tomar atenção. O Alexandre... vá...
Alexandre – No sábado havia quatro de concentrado e...
[A professora bate as palmas para impor silêncio à turma.]
Professora – No sábado havia...
Alexandre – Quatro de concentrado e cinco litros de água [aponta na linha numérica dupla] e eles querem só com um de concentrado [aponta o 1 na linha numérica dupla]. Portanto, temos que ver por quanto é que temos que multiplicar ou dividir o quatro para dar um.
Professora – Pronto. Quatro para um, o que é que eu fiz? Dividi por...
Aluno – Quatro.
Professora – Por quatro. Todos pensaram nisto. Vou dividir por quatro e vai-me dar um. Então, fizeram praticamente isto e puseram... então vou dividir o cinco por quatro também. Mas o Alexandre... podes sentar[-te] Alexandre. Obrigada. O Alexandre fez aqui uma coisa que nenhum fez.
Alunos – Vezes um quarto.
Professora – Que nós já vimos que dividir por quatro é o mesmo do quê?
Daniel – Vezes... fazer... vezes um quarto.
Professora – Multiplicar por um quarto. Porquê?
Aluno – Pelo inverso.
Professora – Pelo inverso.
Daniel – Pelo inverso.

Episódio 4: A relação entre dividir por 4 e multiplicar por $\frac{1}{4}$

Filipe tem os números colocados corretamente na reta, mas risca-os e fica com um registo similar ao dos colegas (figura 63). Indica que divide $\frac{4}{5}$ por 4 e que obtém como resultado $\frac{1}{1{,}25}$. Entretanto, na linha numérica dupla regista, como legenda correta dos arcos, o procedimento de dividir cada termo da razão inicial por 4 para obter os termos correspondentes da razão à direita.

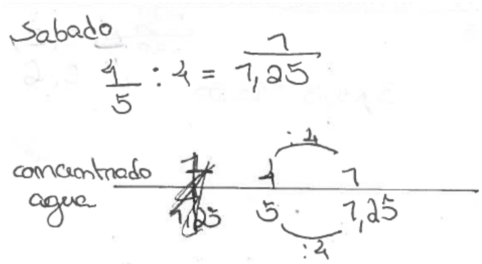


Figura 63: Resolução de Filipe

Manuel apresenta (figura 64) uma linha numérica dupla com vários pontos em que os números surgem colocados de forma crescente da esquerda para a direita. Não passa imediatamente de 4 para 1 e de 5 para 1,25, mas indica os valores intermédios respetivos, 2 e 2,5. No entanto, nos cálculos ao lado indica as divisões de 4 e 5 por 4 que surgem depois de ter riscado e corrigido as divisões de 4 e 5 por 3. Como não há nenhum registo de diálogo entre Manuel e a professora ou os colegas, pressupõe-se que deu pelo erro e corrigiu ele próprio a sua estratégia. Os pontos que surgem nesta linha numérica dupla situam-se tanto à direita, como à esquerda, do ponto correspondente à razão inicial. Assim, à direita surgem os pontos correspondentes a múltiplos naturais de 4 e 5 e à esquerda os que correspondem a quocientes (inteiros e não inteiros) de sucessivas divisões por 2.

Figura 64: Linha numérica dupla e indicação de cálculos de Manuel

Mariana e Sara apresentam uma linha numérica dupla intitulada “sábado” em que, no caso de Mariana (figura 65, em cima, à esquerda), os valores que surgem estão todos corretos e, no caso de Sara (figura 65, em cima, à direita), o registo “dezasseis para quinze” não está correto. Não existem dados que permitam afirmar se é apenas um erro de cálculo ou se esse valor foi copiado da colega que, entretanto, o corrigiu. Na linha numérica dupla que corresponde a “uns dias depois” as duas alunas apresentam em cima a sequência dos primeiros quatro naturais e em baixo registam os respetivos dobros. Sara realça um par de números ("um para dois") e não responde certo ao solicitado.

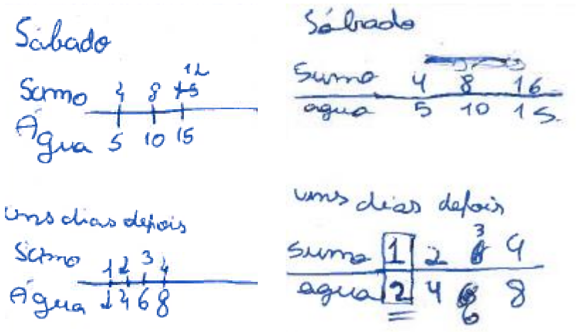


Figura 65: Registos de Mariana e de Sara

Renato e Francisco representam uma tabela de razões e, no final, Renato indica o valor certo para a resposta, mas menciona uma unidade de medida (mililitro) errada. Esta confusão pode ter tido origem na discussão conjunta (episódio 5). A professora constata alguma dificuldade nos alunos na determinação do quociente de 5 : 4 e, uma vez que a unidade de medida em causa é o litro, propõe-lhes que considerem a fração $\frac{5}{4}$ como cinco quartos de litro, apliquem os conhecimentos já adquiridos sobre a unidade de medida de capacidade e algumas das suas partes e traduzam simbolicamente essas relações sob as formas de fração, numeral misto e decimal. A correspondência entre a divisão por 4 e a multiplicação pelo seu inverso, $\frac{1}{4}$, a adição de frações com o mesmo denominador e a multiplicação de um inteiro por um não inteiro representado sob a forma de fração são abordadas no sentido de contextualizar, ultrapassar as dificuldades iniciais e fazer prevalecer o cálculo mental.

Professora – (...) A minha pergunta é... eu vi-vos aí muito aflitos a fazer o cinco a dividir por quatro. Houve alunos com muitas dificuldades a fazer o cinco a dividir por quatro e a minha pergunta é: Não era mais fácil terem feito cinco vezes um quarto? Vamos lá ver uma coisa. Quanto é que é um quarto de litro?
Aluna – Zero vírgula vinte e cinco.
Alexandre – Duzentos e cinquenta mililitros.
Professora – São duzentos e cinquenta mililitros. É, ou, não é?
Alunos – É.
Professora – Então aqui [volta para o quadro e faz uma seta, $\downarrow$, a partir do '5']... quantos quartos é que eu tenho aqui... aqui no cinco? Ana ou Rita e Tiago, quantos quartos é que eu tenho aqui? [Aponta '5'.]
Tiago – Quatro.
Professora – Quatro quartos e depois ainda tenho mais um quarto [ao mesmo tempo que vai falando, escreve '$\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$'], que vai dar os cinco quartos [regista '$\frac{5}{4}$'a seguir ao sinal igual para ficar '$5 \times \frac{1}{4}$'].

Então eu tenho... quatro quartos será quantos litros? Um litro... é um litro, certo?

Aluno – Sim.

Professora – ... e mais um quarto de litro [ao mesmo tempo que vai falando, escreve ‘1 litro + $\frac{1}{4}$ litro’ para obter a igualdade ‘$\frac{4}{4}+\frac{1}{4}$ =1 litro + $\frac{1}{4}$ litro’]. Se eu quiser escrever em numeral misto o que é que... como é que eu ponho?

Aluno – Um, um quarto.

Professora – Um, um quarto [escreve no quadro ‘1 $\frac{1}{4}$’], exatamente. Um, um quarto. E se vocês virem... psst... tenho um litro [aponta o ‘1’ no numeral misto e no numeral decimal], cá está. E quanto é que é o quarto do litro [aponta ‘$\frac{1}{4}$’ no numeral misto]? [Enquanto fala vai registando novamente ‘1,250’.] Cá está, os vinte e cinco centilitros ou duzentos e cinquenta mililitros.

Episódio 5: Dividir 5 por 4

Francisco, na tabela da figura 66, nomeia as colunas (“sábado” e “dias depois”) e as linhas somente com as unidades de medida (“chávena” e “litros”). Esquematiza o procedimento a efetuar entre cada uma das grandezas de “sábado” para “dias depois”, mas a não indicação de quaisquer cálculos e de resposta, leva a pressupor que alguns registos foram escritos já durante a correção no quadro.

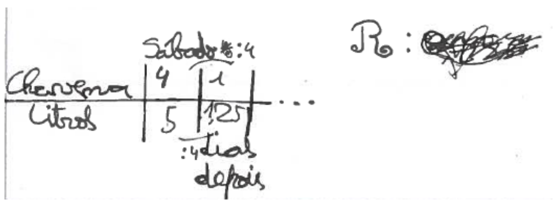


Figura 66: Tabela de razões de Francisco

Luís e Ana indicam duas razões, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{?}$, em que o termo que desconhecem na segunda está substituído por um ponto de interrogação. Assinalam o procedimento a efetuar (dividir ambos os termos da primeira razão por quatro para obter os termos correspondentes da outra), auxiliam-se de arcos orientados da primeira para a segunda razão e registam o algoritmo da divisão de 5 por 4. No entanto, Luís engana-se na indicação horizontal da operação e escreve “4 : 5 = 1,25” (figura 67, à esquerda). Ambos riscam o sinal igual entre $\frac{1}{?}$ e $\frac{1}{1{,}25}$, e Ana substitui-o por uma seta horizontal (figura 67, à direita).

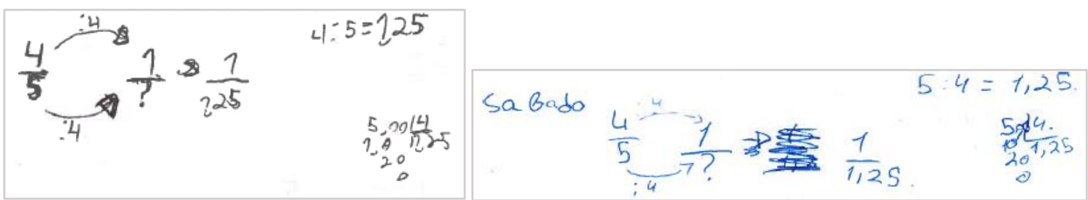


Figura 67: Resoluções de Luís e de Ana

Mário e Isabel registam uma razão correspondente à mistura de sábado ($\frac{4}{5}$), o algoritmo da divisão para 4 : 4 e 5 : 4, mas não representam a razão que corresponde à mistura feita uns dias depois. Mário (figura 68) na divisão 4 : 4, regista num passo intermédio o valor do produto do quociente pelo divisor; na divisão 5 : 4, o número de casas decimais que regista no dividendo e no quociente não está em concordância, mas a resposta está correta. A utilização de três casas decimais no número de litros indicado na resposta parece ter sido influenciada pela discussão apresentada anteriormente (episódio 5), quando este problema foi corrigido no quadro.

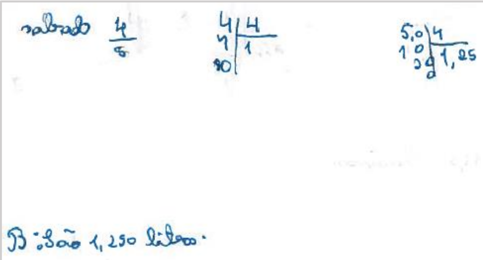


Figura 68: Resolução de Mário

Problema 3. A terceira parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão quando, simultaneamente, é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, neste caso, o sabor da limonada confecionada no sábado. Doze alunos utilizam a razão $\frac{4}{5}$ que traduz em linguagem matemática os dados da tarefa relativos à limonada feita no sábado (quatro chávenas de concentrado de sumo de limão misturadas com cinco litros de água). Seis alunos trabalham com a razão unitária, $\frac{1}{1,25}$, encontrada no problema anterior, que indica que para uma chávena de concentrado de sumo de limão temos que juntar um vírgula vinte e cinco litros de água para obter uma limonada igual à de sábado, ou seja, com o mesmo sabor.

Dos alunos que resolvem este problema partindo da razão $\frac{4}{5}$, uns fazem-no através de uma tabela com quatro células ou de uma linha numérica dupla com dois pontos. Manuel identifica (figura 69) o termo desconhecido de uma das razões com um ponto de interrogação e, para o determinar, calcula primeiro o quociente não inteiro de 9 : 4, através do algoritmo da divisão (sem indicação do resto) e, de seguida, efetua a multiplicação de 5 por 2,25, sem quaisquer indicações de cálculo e em que apenas surge o resultado, 11,25. Complementa a linha numérica dupla, em cima e em baixo, com dois arcos orientados legendados com "× 2,25". No final, o ponto de interrogação é igualado ao valor encontrado, considerado como resposta ao problema.

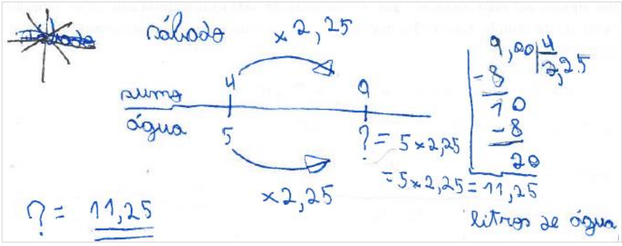


Figura 69: Resolução de Manuel

Outros alunos, iniciando a sua resolução também com a razão $\frac{4}{5}$, utilizam unicamente a representação sob a forma de fração. Mário calcula (figura 70) primeiro o quociente não inteiro de 9 a dividir por 4 através do algoritmo da divisão e, depois, calcula 5 × 2,25, por aplicação do algoritmo da multiplicação. Regista, lado a lado, as duas razões e liga os primeiros e os segundos termos com dois arcos legendados com o procedimento a efetuar para, partindo da primeira, obter os termos respetivos da última, "× 2,25".

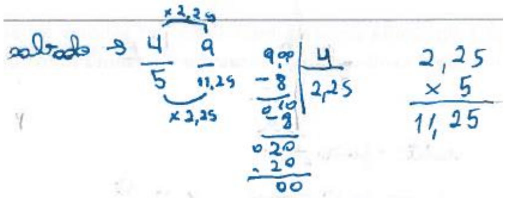


Figura 70: Resolução de Mário

Raquel, quando é convidada pela professora para ir ao quadro apresentar a sua resolução, explica (episódio 6) e complementa a de Mário.

> Professora – (...) Vamos agora ver… Renato!... Como é que a Raquel fez. Vá lá Raquel, explica lá.
>
> Raquel – Eu primeiro descobri quanto é que fiz daqui para aqui [na tabela que está representada no quadro, aponta do 9 para o 4], então dividi o nove pelo quatro.
>
> Professora – A Raquel foi ver quantas vezes é que o quatro cabia no nove.
>
> Raquel – E deu-me dois vírgula vinte e cinco. E depois aqui, multipliquei.
>
> Professora – Exatamente. [A professora acrescenta o sinal "×" antes de 2,25 colocado sob a seta na parte inferior da tabela]. Foi aqui e fez... lá está, multiplicou pelo mesmo fator. [Aponta "× 2,25", em cima e em baixo.]

Episódio 6: Explicação de Raquel, no quadro

Tiago e Rita indicam a razão $\frac{4}{5}$ correspondente à mistura de sábado, mas depois, sem qualquer nota, registam a multiplicação e o resultado: "1,25 × 9 = 11,25". Tiago resolve-a através do algoritmo (figura 71, à esquerda) e Rita não o regista (figura 71, à direita), mas os números que surgem riscados no canto superior direito, levam a crer que o aplica "de cabeça".

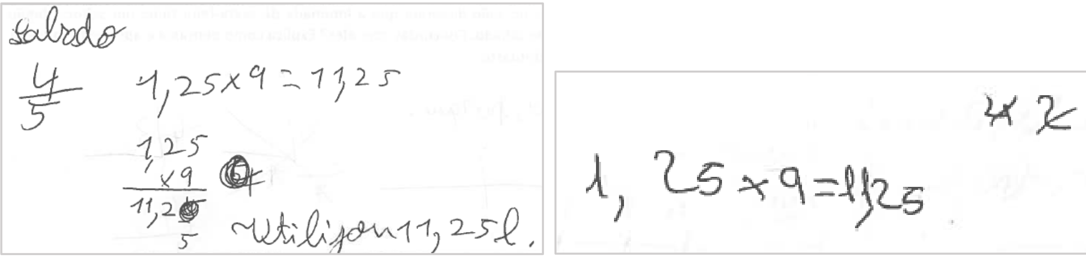


Figura 71: Algoritmo da multiplicação de Tiago e de Rita

Fernando explica, no quadro, a sua resolução (episódio 7) e é neste momento que se percebe claramente que trabalha com o resultado obtido no problema anterior.

> Professora –Fernando, explica lá então como é que fizeste.
> Fernando – Eu fiz, a medida do sábado é quatro quintos. Depois um copo de água tinha um vírgula vinte e cinco... e depois...
> Professora – Calma. Como é que tu sabes isto? [Aponta '1 copo de água – 1,25 *ℓ*'] De onde é que tu...
> Fernando – Da questão anterior.
> Professora – Ah! É que o Fernando e a Rita foram à resposta anterior [pega na folha de resposta de Fernando para a mostrar a toda a turma] e, na resposta anterior, eles tinham visto que para cada copo de concentrado era um litro e mais um quarto. Então, eles foram pegar nisto [aponta '1,25 × 9 = 11,25']. Nove copos de concentrado, é só multiplicar, e está muito bem. Está certo.

Episódio 7: Fernando confirma que utiliza o resultado do problema anterior

Perante as duas resoluções que estão em simultâneo, no quadro, a de Raquel (episódio 6) e a de Fernando (episódio 7), os alunos emitem a sua opinião sobre qual é a mais acessível, mas não há consenso. Uns dizem (episódio 8) que é a de Fernando e outros a de Raquel.

> Alunos – Assim era mais fácil... assim era mais contas...
> Professora – Eu também acho que era... Qual é que acham mais simples?
> Aluno – Aquela. [Referindo-se à resolução apresentada por Fernando.]
> Aluno – Nós chegámos mais facilmente a esta. [Referindo-se à resolução de Raquel.]

Episódio 8: Qual era a resolução mais simples?

Alexandre é o único aluno que efetua os cálculos de uma forma não algorítmica. Apresenta (figura 72), à esquerda da sua folha de resposta, uma resolução semelhante à de outros colegas que também utilizam a linha numérica dupla com dois pontos, sem especificar como obtém o fator 2,25, mas confirma, à direita, que esse valor é o correto. Decompõe o número 2,25 na sua parte inteira e decimal, substituindo de imediato 0,25 por

$\frac{1}{4}$ e aplica, sem a nomear, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, nos dois casos: 4 × 2,25 e 5 × 2,25. Na primeira expressão, o não colocar as duas parcelas entre parenteses vai originar um resultado que não coincide com o valor pretendido, mas Alexandre não faz referência a tal facto. Na segunda expressão, embora a omissão de parenteses se repita, as parcelas decorrentes de cálculos intermédios, 10 e 1,25, estão corretas e o resultado final também.

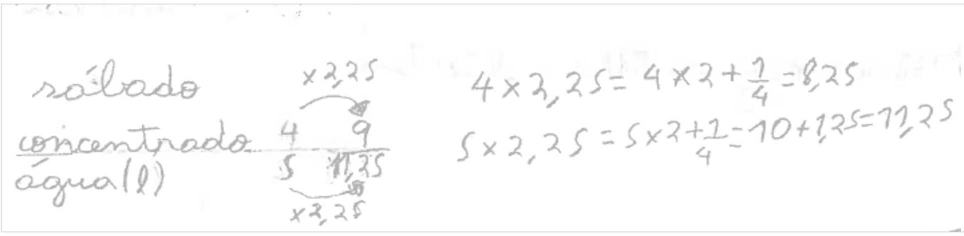


Figura 72: Como Alexandre confirma que o fator é 2,25

Problema 4. A quarta parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão, quando simultaneamente é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, isto é, o sabor da limonada confecionada na sexta-feira. Todos os alunos, exceto um, trabalham com os dados iniciais da tarefa (três chávenas de concentrado de sumo de limão misturadas com quatro litros de água). Daniel, influenciado talvez pelo problema anterior, trabalha com uma linha numérica dupla correspondente à mistura de sábado. Além dele, mais sete alunos registam uma linha numérica dupla com dois pontos, mas corretamente com os dados relativos à limonada de sexta feira. Raquel representa (figura 73) a linha numérica dupla e dois arcos orientados, legendados com "× 4,5". Determina este valor ao dividir 18 por 4, aplicando o algoritmo da divisão. Efetua a multiplicação de 3 vezes 4,5, através do algoritmo e, ao lado, regista um auxiliar de memória do reagrupamento em dezenas do produto das unidades, "1". No final, escreve a resposta.

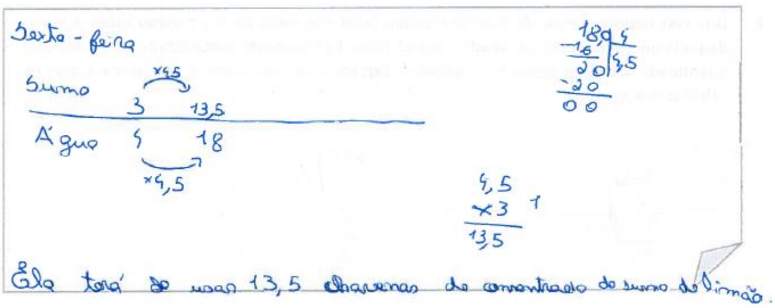


Figura 73: Resolução de Raquel

A professora solicita a Isabel que explique (episódio 9) a sua resolução depois de a ter escrito no quadro. Ela justifica porque decide dividir dezoito por quatro e não por três, ou seja, refere que a posição dos valores das grandezas que estavam em jogo nas duas razões consideradas a influenciou.

> Professora – (...) Então vamos lá, como é que fizeste? Diz lá.
>
> Isabel – Então ...aa...
>
> Professora – Porque é que fizeste o dezoito a dividir por quatro? (Aponta o cálculo registado por Isabel) Olha lá, aqui (aponta o dividendo) quando acrescentamos temos que por aqui a vírgula que é para depois surgir além a vírgula. (Raquel acrescenta a vírgula em falta.) Exato. Então vá. Psst! Porque é que eu fui... foi fazer dezoito a dividir por quatro?
>
> Raquel – Então porque se dividisse por três ia achar um litro de água.
>
> Professora – Ah! Ela disse... Pronto! Então, quando é assim... A Raquel está aqui a dizer uma coisa importante e a Ana no início tinha mal por causa disso... Oh!... Eu estou a falar! A Raquel estava a dizer: eu dividi por quatro... Oh, Fernando! (grito)... A Raquel disse aqui baixinho: eu dividi por quatro, porque se eu dividisse por três era o concentrado (aponta o ‘3’ em ‘$\frac{3}{4}$’, que está no quadro) e não era[m] os litros. Se eu aqui tenho concentrado (coloca na razão $\frac{3}{4}$, C, por cima do 3, e A, por baixo do 4) e aqui tenho água, o que é que significa? [Faz um traço à frente da razão.] Que os dezoito têm que estar aqui ou aqui? [Aponta em cima e em baixo do traço.]
>
> Aluno – Em baixo.
>
> Professora – Exatamente. Por isso é que ela estava a dizer que não podia fazer dezoito a dividir por três. Então o dezoito... [escreve ‘18’ por baixo do traço]. Tomem atenção, isto tem que ser sempre. As dimensões têm que estar... psst! Se eu tenho concentrado em cima, tenho que por concentrado em cima; se tenho água em baixo, tenho que por água em baixo. A Ana tinha posto o dezoito aqui [aponta a parte por cima do traço] e depois viu que tinha mal. Está entendido? Então, o que é que a Raquel foi fazer? Foi ver quantas vezes é que o quatro cabia no dezoito [aponta a divisão efetuada por Isabel]. No fundo ela foi ver o que é que passa... o que é que se passava daqui para ali. [Representa, em baixo, um arco orientado de $\frac{3}{4}$ para $\frac{}{18}$.) E ela viu que cabia quatro vezes e meia [aponta o quociente de 18 : 4]. Certo?
>
> Alunos – Sim.

Episódio 9: Resolução de Isabel

Alexandre repete a estratégia de resolução (figura 74), os procedimentos e os registos do problema anterior e encontra o valor 4,5 que coloca como legenda dos arcos orientados, sem explicar, mais uma vez, como efetua os cálculos. Confirma o fator 4,5 nas duas multiplicações que efetua e decompõe-o mentalmente na sua parte inteira e decimal. Aplica, sem a nomear, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição a “3 × 4,5”. No passo intermédio regista na primeira parcela “3 × 4” e na segunda o resultado de 3 × 0,5, “1,5”. Representa os mesmos procedimentos para calcular “4 × 4,5”, mas no último passo não efetua a adição e, por isso, o resultado não coincide com 18, o valor mencionado no enunciado.

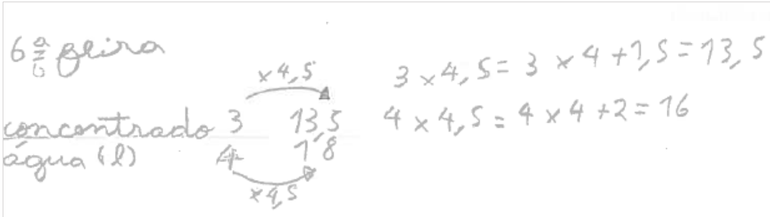


Figura 74: Como Alexandre confirma que o fator é 4,5

Quando é solicitado pela professora, Alexandre explica (episódio 10) como determina mentalmente 4,5, o valor necessário para encontrar a quantidade de chávenas de concentrado de limão que deve misturar aos dezoito litros de água para obter uma limonada com o mesmo sabor da de sexta-feira.

> Professora – Alexandre, queres dizer como é que tu viste que havia quatro vezes e meia? Ele não fez conta.
> Alexandre – Quatro vezes quatro é dezasseis. E depois, mais metade de quatro.
> Professora – Então, quatro vezes quatro são dezasseis. Do dezasseis para o dezoito falta-me o quê? Falta-me metade do quatro. Por isso, quatro vezes e meia. Está certo. Pronto, por isso ele não fez sequer a conta, fez o cálculo de cabeça.

Episódio 10: Cálculo mental desenvolvido por Alexandre

Oito alunos resolvem este problema representando a razão correspondente à mistura de sexta-feira através de uma fração, $\frac{3}{4}$, e cinco deles representam também a razão que permite traduzir em linguagem matemática este problema, $\frac{13,5}{18}$. Alguns, como é o caso de Mário, igualam esta razão à primeira. No espaço reservado à resolução e à resposta, Mário escreve (figura 75), no canto superior esquerdo, o dia mencionado no problema; ao lado regista a igualdade entre as duas razões; a seguir, representa o algoritmo da divisão e ligeiramente afastado o algoritmo da multiplicação; para terminar, indica a resposta.

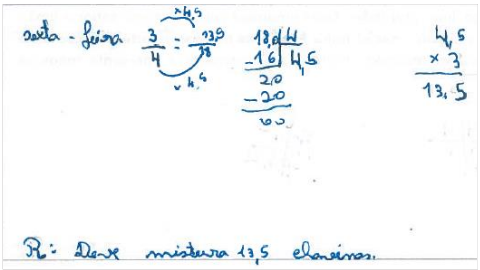


Figura 75: Resolução de Mário

Francisco e Renato são os únicos alunos que representam uma tabela com duas linhas e duas colunas. Por um lado, os registos de cálculo riscados e incompletos de Francisco (figura 76, à esquerda) levam a pressupor que a resposta foi copiada do quadro (de notar que surgem riscados na tabela valores que parecem ser da razão referente à mistura de sábado); por outro lado, os registos de cálculo de Renato (figura 76, à direita) referem-se apenas à divisão, não havendo quaisquer indicações na determinação da resposta que está escrita no final. Renato representa a razão (da qual desconhece um termo) na primeira coluna e os dois arcos orientados, da direita para a esquerda, legendados com os procedimentos a efetuar "× 4,5".

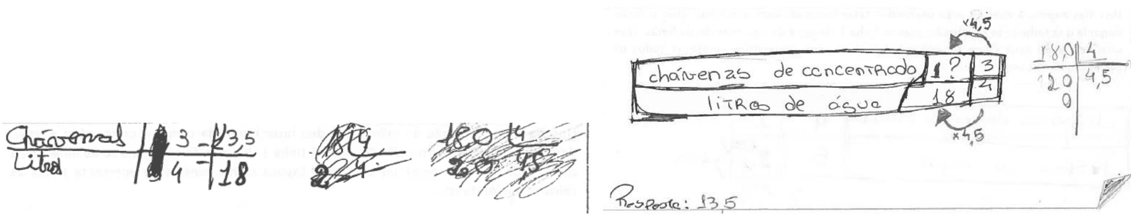


Figura 76: Tabelas de razões de Francisco e de Renato

Discussão final da tarefa. Uma vez que já passava da hora de terminar a aula e em jeito de conclusão das resoluções de alguns dos problemas propostos nesta tarefa, a professora realça sozinha que os procedimentos utilizados permitem determinar um termo desconhecido de uma razão quando conhecemos uma outra que lhe é igual: "E reparem... José, senta-te... e com esta tarefa já todos me parece que ficaram a saber como é que se descobre um termo que falta a partir de outra razão que temos, não é?"

Em síntese. O ato de misturar descrito na tarefa origina uma unidade composta (sabor da limonada) que nunca é considerada pelos alunos de forma autónoma como um todo, isto é, como um objeto único. Tal como nas tarefas anteriores, estamos em presença de dois espaços de medida (concentrado de sumo de limão e água), em que uma das grandezas é densa (unidade de medida: chávena) e a outra contínua (unidade de medida: litro).

As razões registadas na forma de fração, na linha numérica dupla (com dois ou mais pontos) ou na tabela de razões com quatro células, seguem sequencialmente a descrição do texto do enunciado da tarefa.

No problema 1, a estratégia de resolução mais usada baseia-se na procura de um fator que relacione os valores em cada um dos dois espaços de medida. Quatro dos alunos dividem os termos correspondentes das duas razões e comparam os quocientes, o que lhes permite concluir que as duas limonadas têm sabores diferentes. Um aluno considera sequências de razões iguais às das limonadas de sexta-feira e de sábado e compara as frações resultantes, sabendo que são diferentes se as duas tiverem o mesmo denominador e numeradores diferentes, e como tal, conclui que as duas limonadas não têm o mesmo sabor. No final, apenas uma aluna relaciona aditivamente os termos correspondentes de várias razões.

No problema 2, a estratégia de resolução que predomina é a divisão de ambos os termos da razão inicial por 4. A relação entre dividir por 4 e multiplicar por $\frac{1}{4}$ é mencionada como algo já conhecido e que apenas dois alunos registam.

No problema 3, a maioria dos alunos escolhe trabalhar com uma razão correspondente aos dados iniciais da tarefa, $\frac{4}{5}$. Não evidencia, por isso, propensão para relacionar o resultado obtido no problema anterior (razão unitária, $\frac{1}{1,25}$), optando por utilizar estratégias repetitivas e procedimentos que não são facilitadores do cálculo.

No problema 4, a estratégia de resolução mantém-se. Para determinar o termo desconhecido de uma razão a partir de uma outra que é dada, os alunos procuram primeiro, através da divisão, o fator (não inteiro) que permite relacionar os termos correspondentes das duas razões. Depois, multiplicam o termo correspondente que conhecem e o fator encontrado.

O procedimento de multiplicar cada um dos termos da razão por um mesmo fator positivo, inteiro ou não inteiro, leva os alunos implicitamente ao conceito de razão escalar. Os cálculos realizados são maioritariamente apoiados nos algoritmos escritos das operações divisão e multiplicação. Um aluno, por um lado, determina os múltiplos naturais dos números envolvidos e, por outro, efetua sucessivas divisões por 2. Apenas um aluno realiza os cálculos baseado na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e na decomposição de um número na sua parte inteira e decimal.

Os registos analisados e a transcrição da aula permitem também afirmar que os alunos recorrem a linhas numéricas duplas (com dois ou mais pontos), a tabelas de razões com quatro células e a razões representadas exclusivamente sob a forma de fração em que os termos podem ser, ou não, números inteiros. Esta última representação vai tendo cada vez mais adeptos à medida que os problemas vão avançando. Os arcos orientados e legendados com os procedimentos a efetuar, em cada um dos termos da razão para obter o termo correspondente numa outra ou nos valores duplos correspondentes a um ponto da linha numérica para obter um outro ponto, são um registo muito comum que se mantém ao longo da resolução de toda a tarefa.

5.1.4 Tarefa 5: Qual devo comprar?!

Parte 1. Perante a tarefa e respetiva ilustração (figura 77) em que se pretende identificar uma opção de compra e justificá-la, a professora e os alunos discutem o significado de comprar "o mais barato" (episódio 11).

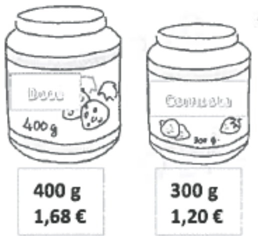


Figura 77: Os frascos de doce e de compota (2015/16)

Nem sempre é suficiente a comparação direta dos preços e, como tal, torna-se necessário comparar os preços de uma mesma quantidade.

> Professora – [...] Quando vamos ao supermercado qual... o que é que pretendemos?
> Alunos [vários em coro] – O mais barato.
> Professora – Levar o mais barato, não é? Oiçam lá uma coisa. O mais barato aqui...
> Aluno – [impercetível]
> Professora – Ah!...
> Aluno – Levar a mesma quantidade e mais barato.
> Professora – Então tem que haver aqui... temos que relacionar a quantidade com o preço [em simultâneo com alguns alunos].

Episódio 11: O que significa "o mais barato"

Alguns alunos, influenciados provavelmente pela resolução de problemas anteriores, propõem determinar o preço de um grama de cada um dos produtos. No entanto, perante os valores em causa a professora questiona-os (episódio 12) se esta quantidade será a mais propícia para trabalhar, sob o ponto de vista do próprio contexto e dos cálculos a efetuar.

> Professora – E com isso vais achar o quê?
> Ana – [impercetível]
> Professora – O preço de uma grama?! Tu já viste... Podem fazer assim. Vocês fazem como quiserem. Podem fazer assim. Mas tu já viste que quatrocentas gramas é só um euro e sessenta e oito? Uma graminha vai ser o quê? Vai ser um preço muito quê?
> Ana – Muito barato.

> Professora – Muito barato, muito baixinho. Será que tu consegues lá chegar? Será que faz muito sentido? Pronto, vá, resolvam lá como acharem... vá.

Episódio 12: Para quê calcular o preço de um grama?!

A sugestão inicial de calcular o preço de um grama não é seguida. Nove alunos determinam e comparam os preços de 400 g de doce e de compota. Seis determinam e comparam os preços de 100 g dos dois produtos. Um determina e compara os preços de uma quantidade que é múltipla das duas que estão indicadas na ilustração. Dois alunos apresentam uma resolução incompleta do problema.

Alexandre compara os preços da mesma quantidade (400 g) de doce e de compota, explicita os seus procedimentos, escreve e fundamenta corretamente a sua resposta (figura 78). Começa por escrever $\frac{400}{1,68} \neq \frac{300}{1,20}$ e depois, para justificar esta afirmação, determina o preço de 100 g de compota, dividindo por 3 ambos os termos da razão $\frac{300}{1,20}$, e regista horizontalmente as divisões, 300 : 3 = 100 e 1,20 : 3 = 0,40. À direita da primeira divisão, na mesma linha, adiciona a quantidade de compota indicada no início e o quociente, 300 + 100 = 400; à direita da segunda, na mesma linha, adiciona o preço dado no enunciado e o quociente, 1,20 + 0,40 = 1,60. Calcula, assim, o preço de 400 g de compota (1,60€). Por baixo, regista uma igualdade de razões que relacionam quantidades e preços relativos à compota: $\frac{300}{1,20} = \frac{400}{1,60}$. Ao lado, após inverter as razões onde o primeiro termo é 400, compara as duas razões resultantes e escreve em linguagem matemática: $\frac{1,68}{400} > \frac{1,60}{400}$.

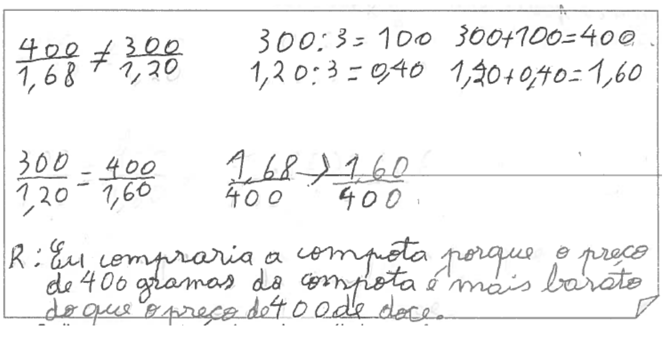


Figura 78: Resolução de Alexandre

Manuel, tal como Alexandre, compara os preços da mesma quantidade (400 g) de doce e de compota, mas a sua resposta está apenas correta na opção de compra ("seria mais barato comprar a compota") e não na justificação ("porque o doce deveria custar 1,60€"). Manuel começa por uma dupla igualdade (figura 79) que, de facto, não existe e em que realça a razão do meio, $\frac{300}{1,20}$. Divide ambos os termos desta razão por 3, regista horizontalmente as divisões, 300 : 3 = 100 e 1,20 : 3 = 0,40, e resolve a última através do algoritmo. Ao lado, escreve outra vez uma dupla igualdade de razões, cujos termos surgem por ordem crescente. Indica dois arcos legendados com os cálculos a efetuar da primeira para cada uma das outras duas razões, quer entre os primeiros, quer entre os segundos termos. A razão $\frac{100}{0,4}$ aparece da divisão por 3 de ambos os termos de $\frac{300}{1,20}$, mas nos rótulos dos arcos está o procedimento inverso: "× 3". É também a partir da razão $\frac{100}{0,4}$ que faz surgir a outra, $\frac{400}{1,60}$, multiplicando ambos os seus termos por 4.

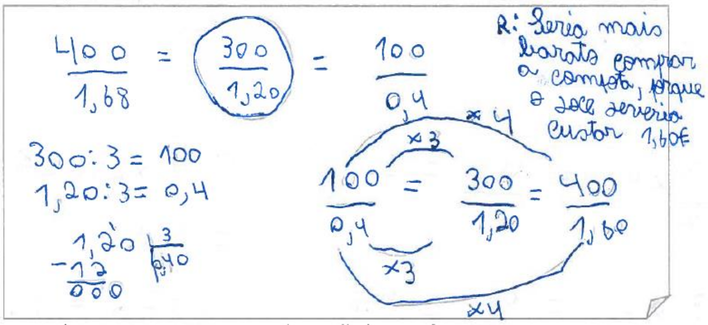


Figura 79: Resolução de Manuel

Filipe explica (episódio 13) os procedimentos que ele e o colega, Manuel, efetuaram para encontrar uma razão igual a $\frac{300}{1,20}$, mas com a informação do preço de 100 g de compota.

> Professora – Então, vamos lá ver aqui o Duarte [C.], o que é que o Duarte [C.] fez.
>
> Filipe [Apontando a primeira igualdade.] – Professora, eu fiz, primeiro... vá... pus aqui... vá... [Aponta a linha de cima do seu registo (onde está a dupla igualdade).]
>
> Professora – Vamos lá ouvir o que o Duarte fez. Para já [vai até ao quadro e aponta a razão $\frac{300\,g}{1,20€}$], isto aqui é o... da compota. E aqui [aponta em arco de $\frac{300\,g}{1,20€}$ para $\frac{100}{0,4}$], o que é que foste fazer?
>
> Filipe – Dividi por três para achar as cem gramas.
>
> Professora [Continuando a apontar, com o dedo, o 100 em $\frac{100}{0,4}$.] – Cem gramas de compota. Então cem gramas de compota quanto é que dá? [Aponta 0,4 em $\frac{100}{0,4}$, virada para a turma.]
>
> Filipe – Zero vírgula quatro.

Episódio 13: Exposição oral do procedimento efetuado por Filipe

Perante a dupla igualdade que Filipe escreveu no quadro e que está também no início do registo escrito da resolução de Manuel (figura 79), a professora mostra-se surpreendida e apela à correção. Filipe concretiza facilmente a substituição do sinal igual (episódio 14).

Professora – Calma lá. Isto aqui é igual?! [Aponta $\frac{400\,g}{1{,}68€} = \frac{300\,g}{1{,}20€}$.]
Filipe – Não.
Professora – Ah! [Fica parada e espantada a olhar para a igualdade em causa.] Então se não é igual... o que é que... pelo menos... o que é que tem que ficar aqui? [Aponta no sinal igual entre $\frac{400\,g}{1{,}68€}$ e $\frac{300\,g}{1{,}20€}$.] Meus amigos [afasta ligeiramente Filipe para o lado para que todos possam ver o que está escrito e, de frente para a turma, começa a relatar como surgiu o registo que está no quadro], vamos lá olhar todos para aqui. O Duarte começou por pôr a proporção [razão] do doce [aponta $\frac{400\,g}{1{,}68€}$], quatrocentas gramas custavam um euro e sessenta e oito, e a proporção... e a razão do... [aponta $\frac{300\,g}{1{,}20€}$] preço, custo do... da compota, trezentas centímetros [gramas] um euro e vinte. Depois chegou à conclusão que a proporção não é... [Abana a cabeça para um lado e para o outro, em sinal de negação.]
Filipe – Igual.
Professora – Se não é igual, o que é que isto... [aponta o sinal igual em $\frac{400\,g}{1{,}68€} = \frac{300\,g}{1{,}20€}$] Isto pode estar aqui?
Filipe – Não. [Simultânea e repetidamente faz um gesto com a caneta no sentido de fazer um risco em cima do sinal igual para o transformar no sinal diferente.]
Professora – Então, se faz favor, vamos por o sinal quê?
[Filipe concretiza o traço que antes tinha apenas imaginado.]
Alunos – Diferente.
Professora – Diferente. [Aponta para o sinal que já lá estava.] Pronto.

Episódio 14: Substituição de = por ≠

Fernando considera (figura 80, à esquerda) uma proporção que relaciona quantidades e preços do doce e na qual desconhece um termo que representa por *x*. Assinala, entre os primeiros termos das duas razões, $\frac{400}{1{,}68}$ e $\frac{100}{x}$, um arco legendado com o procedimento a efetuar, ": 4". Regista horizontalmente a divisão 1,68 : 4 e, por baixo, resolve-a através do respetivo algoritmo, embora com uma incorreção a nível do número de casas decimais do quociente. No seu registo horizontal, o valor que faz corresponder a *x* está correto ($x \to 0{,}42$). Ao lado (figura 80, à direita), Fernando coloca uma outra proporção que relaciona agora quantidades e preços da compota e na qual o termo desconhecido volta a ser representado por *x*. Mais uma vez, a razão do primeiro membro da igualdade traduz os dados do enunciado e a do segundo membro tem como primeiro termo 100 e como segundo *x*, representando o preço desconhecido e a determinar. Assinala dois arcos legendados com o procedimento de dividir por 3 ambos os termos de $\frac{300}{1{,}20}$. Regista horizontalmente a divisão 1,20 : 3 e, por baixo, resolve-a por aplicação do respetivo algoritmo. O quociente encontrado não apresenta, novamente, as casas decimais corretas, mas quer o resultado indicado no registo horizontal da operação, quer o valor que faz corresponder ao x ($x \rightarrow 0, 40$) estão corretos. Por fim, escreve a resposta com a opção de compra e a justificação baseada na comparação de preços para a mesma quantidade de doce e compota.

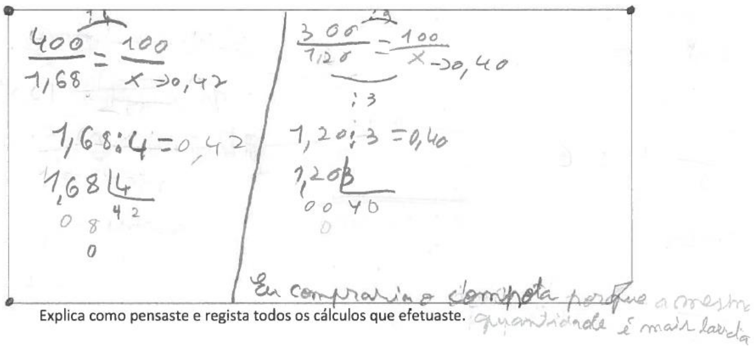


Figura 80: Resolução de Fernando – proporções

Mário apresenta (figura 81, à esquerda), tal como Fernando, uma proporção referente à relação entre quantidades e preços do doce, em que o termo desconhecido é representado por x. Imediatamente abaixo, multiplica 1,68 por 100 e representa o número inteiro do resultado sob a forma de numeral decimal, com duas casas decimais. Assinala, como rótulo dos dois arcos, a divisão de ambos os termos da razão por 4 e regista, ligeiramente à direita, o algoritmo para calcular 1,68 : 4. Seguindo exatamente a mesma representação, Mário escreve (figura 81, à direita) uma outra proporção que relaciona quantidades e preços da compota, em que desconhece um termo e o representa por x. Por baixo, multiplica 1,20 por 100 e o número inteiro do resultado aparece, outra vez, sob a forma de numeral decimal com duas casas decimais. Ao lado apresenta o algoritmo para dividir 300 por 1200 e obtém incorretamente como quociente 0,4. Por fim, responde baseado no tamanho do frasco ("Eu comprava o frasco mais pequeno") e na condição do preço ("era mais barato").

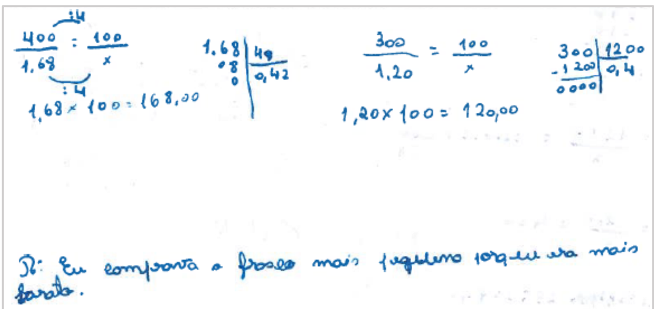


Figura 81: Resolução de Mário – proporções

Raquel (figura 82) e Daniel, tal como os dois colegas anteriores, registam duas proporções, uma que relaciona quantidades e preços da compota e outra que relaciona quantidades e preços do doce. Em cada uma o termo desconhecido é representado por *x*. Aplicam a regra das proporções para determinar os valores de *x*, mas não especificam como efetuam as últimas divisões. Respondem que "O mais barato é a compota" e Raquel justifica "porque 100 g custam 0,40€", sem explicitar qual o preço da mesma quantidade de doce.

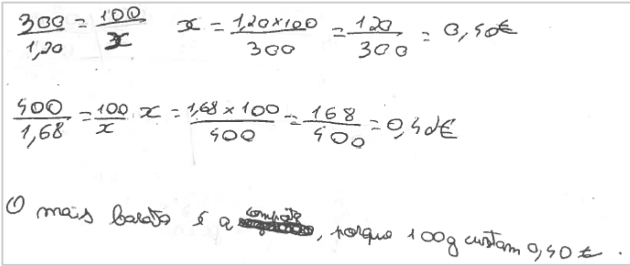


Figura 82: Resolução de Raquel

Hugo, como ele próprio explica no quadro (episódio 15), procura nas respetivas tabuadas um múltiplo comum a 3 e a 4, para determinar depois os preços do doce e da compota para uma mesma quantidade. Determina 1200 através de duas adições de parcelas iguais, uma a 400 e outra a 300. Calcula os preços considerando outras adições de parcelas iguais aos respetivos preços.

> Professora – Vamos lá ver o que é que o Hugo pensou.
>
> Hugo [Interrompe a sua escrita e ao começar a falar vira-se de frente para a turma.] – Eu primeiro fui à tabuada do três e do quatro a ver qual era... hum... onde é que havia... vá... assim um número... um número igual.
>
> Professora – Então, se foste à tabuada do três e do quatro ver onde é que havia um número igual, o que é que tu foste achar?
>
> Hugo – Ah! Fui achar o máximo... não, o mínimo múltiplo comum [a resposta surge sem grande convicção].
>
> Professora – Pois, foste aos múltiplos, não é? Foi aos múltiplos do número trezentos e do quatrocentos... foste do três e do quatro, pronto! [Hugo abana a cabeça em sinal de concordância.] Ele foi do três e do quatro, porquê? Porque era trezentos e quatrocentos [em simultâneo com Hugo]. E foi ver onde é que havia além um número... e o que ... chegaste a que conclusão?
>
> Hugo – Cheguei à conclusão que o... vá ... que o doze está na tabuada dos dois... o doze está na tabuada dos dois.
>
> Professora – Então e depois aí, o que é que pensaste?
>
> Hugo – Então, fui somar os preços. Um três vezes e o outro quatro e depois deu-me o resultado. E a compota é a que devíamos comprar.

Episódio 15: Explicação de Hugo

Hugo, tal como o seu colega Alexandre, começa por escrever que as duas razões que traduzem diretamente os dados do problema são diferentes (figura 83). Ao lado representa horizontalmente, também como Alexandre, a divisão de 300 por 3, mas muda de estratégia e, corroborando a explicação do episódio 15, regista, por baixo e lado a lado, a representação vertical das duas adições de três parcelas iguais a 400 e a 1,68; ligeiramente à direita, regista da mesma forma as duas adições de quatro parcelas iguais a 300 e a 1,20, respetivamente. Escreve a resposta e justifica, de maneira algo confusa, que a compota é barata e a quantidade é a mesma.

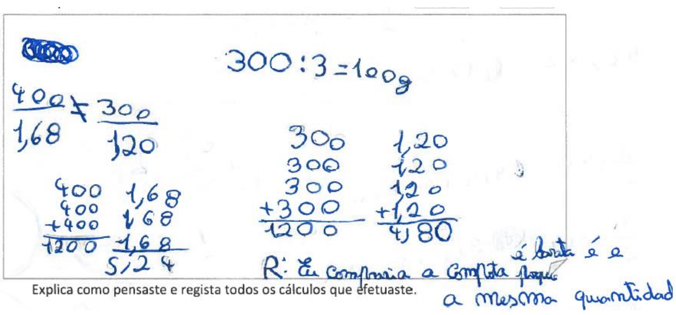


Figura 83: Resolução de Hugo

Renato (figura 84) e Francisco procuram calcular o máximo divisor comum entre 300 e 400. Decompõem os dois números em fatores primos através de um esquema em coluna e representam corretamente a sua fatorização prima (“$400 = 2^4 \times 5^2$” e “$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$”), mas erram no cálculo do máximo divisor comum quando, em vez de multiplicar, adicionam 2^2 e 5^2 e obtêm 29. De seguida, copiam do quadro uma das resoluções em discussão e terminam escrevendo que compram “a compota porque adicionamos 0,8 cêntimos ao doce de morango”.

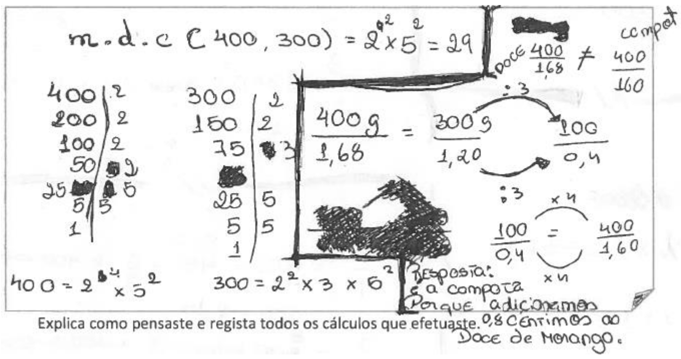
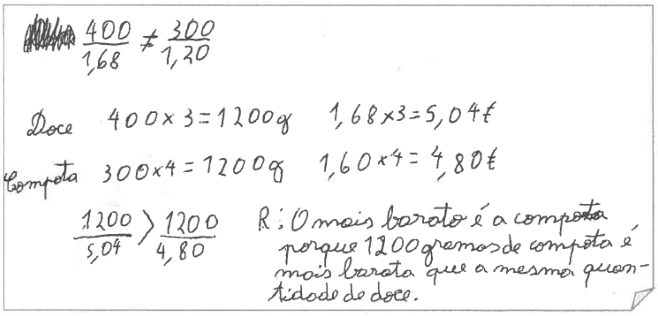


Figura 84: Resolução de Renato

Parte 2. Pretende-se que os alunos apresentem uma resolução diferente da anterior. Seis não resolvem esta parte da tarefa: dois começam por registar duas multiplicações (“400 × 3 = 1200” e “300 × 4 = 1200”), mas não prosseguem; dois repetem a proporção indicada no início da parte 1 e não continuam; dois deixam o espaço destinado à resolução totalmente em branco. Cinco alunos comparam os preços de 1200 g de doce e de compota, quando antes tinham comparado os preços de 400 g dos dois produtos.

Por exemplo, Alexandre começa por registar (figura 85) que as razões criadas diretamente da leitura do enunciado são diferentes, tal como fez na parte 1 (figura 78). Depois, para justificar esse facto procura agora comparar os preços de uma mesma quantidade (diferente das indicadas no enunciado) de doce e de compota. Para isso, denomina uma linha por doce e outra por compota. Na primeira, multiplica por 3 a quantidade inicial de doce (400) e o preço (1,68); na segunda, multiplica por 4 a quantidade inicial de compota (300) e o preço (1,60). Regista as quatro operações horizontalmente, sem mostrar qualquer procedimento de cálculo. Para finalizar, indica e compara as razões $\frac{1200}{5,04}$ e $\frac{1200}{4,80}$. Talvez influenciado pela resposta e pelo procedimento de comparação de duas razões na parte 1, traduz incorretamente em linguagem matemática a relação entre as duas razões.


$\frac{400}{1,68} \neq \frac{300}{1,20}$

Doce $400 \times 3 = 1200g$ $1,68 \times 3 = 5,04€$

Compota $300 \times 4 = 1200g$ $1,60 \times 4 = 4,80€$

$\frac{1200}{5,04} > \frac{1200}{4,80}$ R: O mais barato é a compota porque 1200 gramas de compota é mais barata que a mesma quantidade de doce.

Figura 85: Resolução de Alexandre

Manuel e Filipe comparam os preços de 400 g de doce e de compota, repetindo o que tinham desenvolvido na parte 1. Alteram apenas a representação e, no canto superior esquerdo, surge um esquema da regra de três simples, em substituição da igualdade de razões. Para determinar o valor de *x* indicam os procedimentos de cálculo comuns à referida regra. Manuel efetua a multiplicação através do algoritmo (figura 86) e representa o número inteiro do produto sob a forma de numeral decimal, com uma casa decimal. Não apresenta quaisquer indicações sobre como transforma $\frac{120}{300}$ no numeral decimal 0,4. Considera a razão $\frac{100}{0,4}$ que iguala a outra, $\frac{400}{1,60}$, após ter multiplicado por 4 ambos os seus termos.

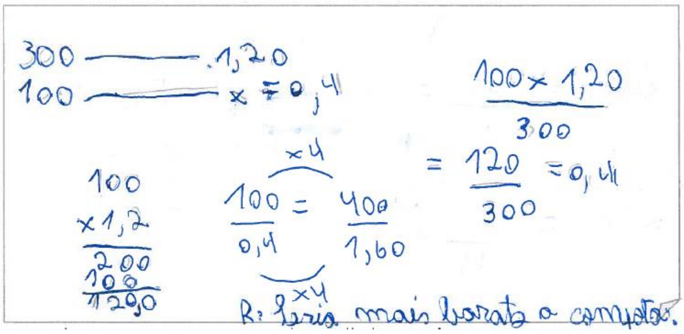


Figura 86: Resolução de Manuel

Mário (figura 87) e Isabel comparam novamente os preços de 100 g de doce e de compota, mas apresentam esquemas da regra de três simples, em substituição das proporções consideradas na parte 1 (figura 81). As correspondências indicadas nos dois esquemas relacionam medidas de grandezas dentro de um mesmo espaço de medida. Ao contrário dos colegas mencionados imediatamente antes, Mário não indica todos os procedimentos de cálculo. À direita dos esquemas regista horizontalmente as duas multiplicações e representa os números inteiros dos produtos sob a forma decimal, com duas casas decimais. Calcula os quocientes não inteiros através do algoritmo da divisão, mas nem sempre os números implicados são os corretos ou estão corretamente representados.

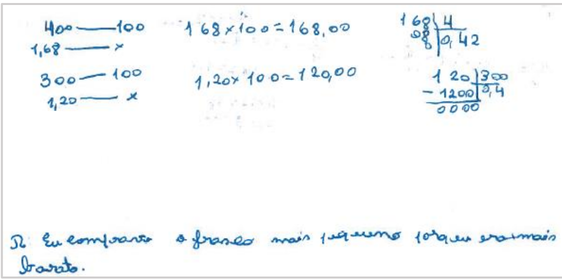


Figura 87: Resolução de Mário – esquemas

Fernando (figura 88) e Rita, depois de resolverem a parte 1 através de duas proporções em que desconhecem um dos termos, exploram agora duas linhas numéricas duplas para relacionarem proporcionalmente as quantidades e os preços do doce e da compota. Em cada uma, os valores do ponto mais à esquerda correspondem à relação entre 100 g e o preço respetivo, determinada na parte 1 (figura 80). Na linha numérica de cima, Fernando marca mais dois pontos e os valores correspondentes surgem da multiplicação de cada um dos valores iniciais respetivamente por 2 e por 3. Ao lado indica horizontalmente as multiplicações efetuadas. Na outra linha, Fernando marca mais três pontos em que os valores correspondentes surgem da multiplicação de cada um dos valores iniciais respetivamente por 2, 3 e 4. Ao lado indica horizontalmente as multiplicações efetuadas. Em cada linha numérica dupla, os valores correspondentes ao último ponto marcado coincidem com os do enunciado. Desta forma, Fernando não realça nenhum ponto e não responde, por isso, ao solicitado.

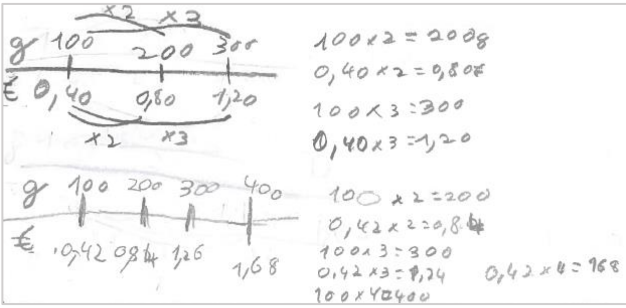


Figura 88: Resolução de Fernando – linhas numéricas duplas

Hugo compara os preços de 400 g, repetindo a resolução que Alexandre apresentou na parte 1, quando antes tinha sido o único aluno a comparar os preços de 1200 g de doce e de compota.

Em síntese. Os alunos compreendem que para comprar "o mais barato" não é suficiente comparar diretamente os preços indicados na ilustração, porque as quantidades de doce e de compota não são as mesmas em ambos os frascos. Tendo em atenção que não são fornecidos dados relativamente à qualidade dos produtos, comprar "o mais barato" significa, para estes alunos, pagar menos pela mesma quantidade.

Os alunos determinam, portanto, os preços relativamente a uma mesma quantidade de doce e compota e comparam-nos, considerando três quantidades diferentes: 400 g (mencionada no enunciado), 100 g (determinada mentalmente) e 1200 g (múltipla das duas indicadas inicialmente).

Dos alunos que comparam os preços de 400 g de doce e de compota, todos determinam primeiro o preço de 100 g de compota, dividindo ambos os termos da razão $\frac{300}{1{,}20}$ por um mesmo número inteiro positivo. Com exceção de um, todos utilizam o procedimento inverso para, perante a razão $\frac{100}{0{,}40}$, encontrar $\frac{400}{1{,}60}$. Com as duas razões $\frac{400}{1{,}68}$ e $\frac{400}{1{,}60}$ facilmente efetuam a escolha daquela que representa uma melhor relação quantidade e preço.

Os alunos que comparam os preços de 100 g de doce e de compota representam duas proporções em que designam os termos desconhecidos por *x*. Para determinar os valores de *x*, a maioria apresenta procedimentos idênticos aos mencionados atrás e baseados num raciocínio do tipo: se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma razão pelo mesmo número inteiro (positivo), obtemos uma razão igual. Apenas dois registam e aplicam a regra de cálculo das proporções, num esquema de regra de três simples.

Um aluno relaciona implicitamente 300 e 400 com 3 e 4, respetivamente, e procura nas tabuadas um múltiplo comum aos dois últimos, para a seguir o relacionar com 1200. Determina as quantidades e os respetivos preços através de adições de parcelas iguais, demonstrando uma relação aditiva dos números em causa.

Os cálculos efetuados são quase sempre baseados nos algoritmos das operações divisão e multiplicação. Quando o resultado da multiplicação é um número inteiro, a sua representação sob a forma de numeral decimal torna evidente a aplicação de regras de cálculo relacionadas com o número de casas decimais dos fatores e do produto.

A representação de razões surge maioritariamente sob a forma de fração e o registo de arcos (orientados ou não) e legendados com os procedimentos a efetuar é também comum. Os procedimentos indiciados permitem sempre efetuar relações dentro de um mesmo espaço de medida, ou seja, são procedimentos escalares.

Quando solicitados para apresentar outra resolução, muitos alunos indicam procedimentos idênticos aos que já tinham usado, mas com valores diferentes. Outros trabalham com os mesmos valores, mas com outra representação (as proporções são substituídas por linhas numéricas duplas).

5.2 Segundo ciclo da experiência de ensino

Tal como no primeiro ciclo da experiência de ensino, evidencio em cada tarefa as estratégias de resolução, o tipo de números, as relações numéricas, as propriedades das operações e as representações utilizadas pelos alunos.

5.2.1 Tarefa 1: Misturas de chocolates

Questão 1. Cada aluno escolhe a sua mistura composta por dois dos três tipos de pastilhas de chocolate à sua disposição e identifica-a nos dois quadrados em branco na folha de resposta. Nenhum utiliza uma representação icónica da mistura escolhida e a tradução simbólica apresenta, como se pode observar na figura 89, um misto de linguagem natural (palavras completas e a inicial de pastilha) e linguagem matemática (algarismos).

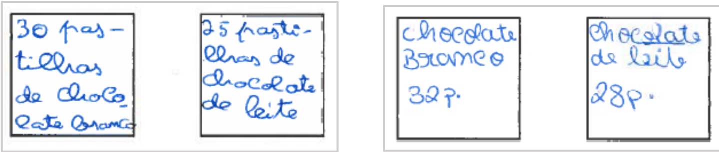


Figura 89: Registos de Bruno e de Rita – misturas

Após a professora ter chamado a atenção, antes do início da resolução por parte dos alunos, para a necessidade de quantificar, apenas Telmo não quantifica as pastilhas que escolheu e limita-se a identificar o seu tipo (figura 90).

Figura 90: Registo de Telmo – mistura não quantificada

Deste modo, foram propostas pelos alunos dezassete misturas iniciais, oito usando números pares e sete ímpares, todos diferentes. Estas misturas são, portanto, formadas por quantidades de diferentes tipos de pastilhas de chocolate representadas por dois números inteiros de um, dois ou três dígitos (ver tabela 5).

Tabela 5: Quantidade de dígitos dos números inteiros escolhidos nas misturas (2016/17)

Número de	
Dígitos (nos dois números)	misturas
1	3
1 e 2	4
2	9
2 e 3	0
3	1

Depois de cada aluno ter escolhido a sua mistura, discute com o colega do lado, com o qual forma um par de trabalho, qual será aquela que ambos vão considerar nas questões seguintes, e registam-na, completando a frase “A minha mistura é…”. Dalila e Gabriel completam a frase com uma mistura que não coincide com nenhuma das que tinham indicado; Rita e Beatriz escolhem a mistura composta por duas quantidades pares, em detrimento das duas quantidades ímpares escolhidas por uma delas; André e Laura preferem duas quantidades ímpares (5 e 3) em detrimento dos outros valores (10 e 5) e vão ser os únicos que começam a trabalhar com dois números de apenas um dígito; os restantes pares escolhem a mistura composta sempre por múltiplos de cinco. Com exceção de Pedro e Telmo que escolhem uma mistura com a mesma quantidade de pastilhas (chocolate preto e chocolate branco), todos ficam com a mistura que tem mais pastilhas, isto é, parece não existir qualquer preocupação em escolher os menores valores, mas sim em evidenciar as maiores quantidades. No início, Pedro e Telmo mostram-se (episódio 16) pouco confortáveis com a sua mistura, não por o número escolhido ter três dígitos (100), mas porque são iguais as quantidades dos dois tipos de pastilhas.

> Professora – [...] Então, não dá porquê?!
> Telmo – ... são os dois... [impercetível]
> Professora – Tu tens é... eles puseram mais de um do que de outro e tu tens a mesma quantidade [com as duas mãos viradas para cima e os braços dobrados faz um gesto de equilíbrio]. Então e agora?! Vamos lá.

Episódio 16: Como Telmo encara a sua mistura

Andreia e Rodrigo apresentam logo à partida a mesma mistura, mas com quantidades diferentes (figura 91) e Rodrigo chega mesmo a referir essa situação em voz alta “Nós temos igual”. No entanto, isso não invalida que trabalhem, tal como os restantes colegas, com os maiores valores para cada um dos tipos de pastilhas de chocolate.

Figura 91: Registos de Rodrigo e de Andreia – misturas

Depois de cada par ter registado a mistura escolhida, a professora pede-lhes que um deles vá ao quadro representar aquela que será então designada como “a mistura do par”. Como se pode ver na figura 92 as representações utilizadas são sempre frases num misto de linguagem matemática e linguagem natural, com e sem abreviaturas.

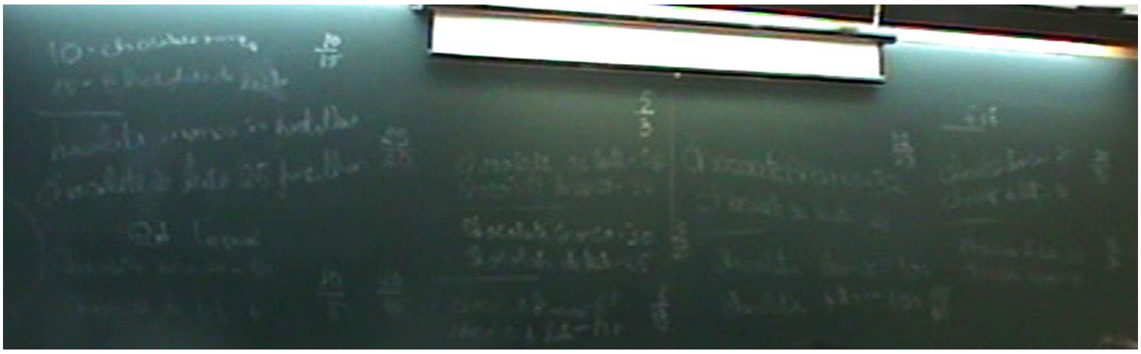


Figura 92: Registo conjunto das misturas, no quadro (2016/17)

A professora lança então o desafio de averiguar se há, ou não, misturas repetidas, e no episódio 17 podemos notar que primeiro Rodrigo identifica somente o tipo de pastilhas de chocolate que cada par escolheu, e que depois Bruno procura, nas várias misturas, quantidades iguais do mesmo tipo de chocolate, mas não consegue referir se as misturas são, ou não, iguais.

> Professora – Rodrigo, diz lá... estavas a dizer...
> Rodrigo – Chocolate de leite, chocolate branco; chocolate branco, chocolate de leite.
> Professora – Ah! Estás-me a falar do tipo de pastilhas! Ah! Exato! (...) Mas não é disso que eu agora estou a falar. Estou a falar... é verdade... só temos aqui um grupo que escolheu o preto [vira-se ligeiramente para o quadro para confirmar o que diz]... mais ninguém, pronto!
> Telmo – Fui eu.
> Professora – Então toda a gente escolheu chocolate de leite e chocolate branco. Mas as quantidades são as mesmas?
> Alunos [vários] – Não.
> Professora – Não. A minha pergunta era esta: será que há aqui algum grupo que, por acaso, tem a mesma mistura? [aponta para Bruno] Bruno, diga.
> Bruno – Aquele tem chocolate de leite, vinte e cinco, e aquele tem chocolate de leite, vinte e cinco.

Episódio 17: Como Rodrigo e Bruno respondem ao desafio de encontrar misturas iguais

Esta situação leva a professora a ler, em voz alta, os registos que estão no quadro "(…) tenho vinte e cinco pastilhas de chocolate de leite para vinte de chocolate branco (…)" e a registar, posteriormente, em linguagem matemática uma razão, na sua representação em fração, $\frac{25}{20}$, sem nunca explicitar o termo razão.

Com base numa discussão com os alunos, em que Bruno teve um papel ativo, a professora regista as várias razões comparando sempre o número de pastilhas de chocolate branco com o número de pastilhas de chocolate de leite. Mantém no primeiro termo a quantidade de pastilhas de chocolate branco e no segundo a quantidade de pastilhas de chocolate de leite. Ao observar estes registos uma aluna refere que "ali em baixo, chocolate branco tem dez e ali em cima tem também dez". A professora aproveita esta intervenção para questionar se as misturas são iguais, uma vez que numa existem quinze pastilhas de chocolate de leite e na outra cinco e para frisar, no final, que são diferentes.

Beatriz identifica, no quadro, duas razões da mesma mistura, propostas por pares diferentes: $\frac{10}{5}$ e $\frac{20}{10}$. A sua justificação baseia-se, primeiramente, na ideia errónea de uma ser o dobro da outra e é depois alterada para a noção de dobro de cada uma das quantidades ("O dobro de dez é vinte; o dobro de cinco é dez"). Surge, assim, um procedimento que permite manter uma mistura e alterar as quantidades.

Questão 2. Considerar um frasco de tamanho S (*Small*). Todos os pares resolvem corretamente esta questão, com exceção de Gabriel que, utilizando um procedimento aditivo, diminui a quantidade de pastilhas da mistura, menos 5 de cada tipo (figura 93). O frasco desenhado à esquerda esquematiza a razão indicada para o tamanho S.

Figura 93: Registo de Gabriel – frasco de tamanho S

Os alunos utilizam nas suas respostas a representação da razão sob a forma de fração, corretamente justificada na equivalência de frações. Dividem ou multiplicam ambos os termos da razão da mistura por um mesmo número inteiro positivo e registam este procedimento de diferentes maneiras. Fábio e Eva indicam separadamente as divisões efetuadas com o número inicial de pastilhas de chocolate branco e de chocolate de leite, ao lado a igualdade das razões e, por baixo, explicitamente o frasco de tamanho S (figura 94).

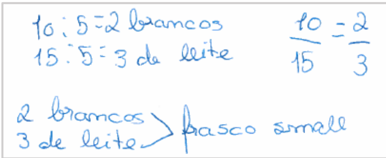


Figura 94: Registo de Eva – frasco de tamanho S

Bruno e Vítor, tal como outros seis pares, dividem ambos os termos da razão da mistura escolhida pelo mesmo número. No entanto, registam este procedimento com a ilustração de cinco frascos, todos com a mesma quantidade de pastilhas de chocolate branco e de leite, complementada pela decomposição aditiva de 30 e 25 em cinco parcelas iguais, 6 e 5, respetivamente (figura 95). A ideia de esgotar as pastilhas de chocolate da sua mistura torna-se assim evidente, embora não necessária.

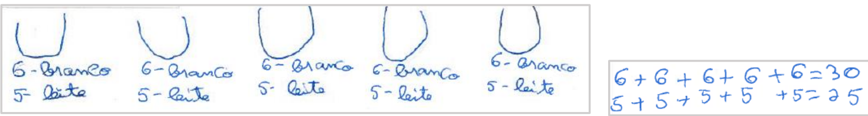


Figura 95: Registo de Bruno – frasco de tamanho S

Da mesma forma, Ricardo e Paula dizem que com a sua mistura inicial obtêm 10 sacos, cada um com 4 pastilhas de chocolate branco e 3 de chocolate de leite (figura 96). Na sua resolução o divisor utilizado é o máximo divisor comum dos dois números, 40 e 30, e vai ser interpretado como o número de sacos a obter.

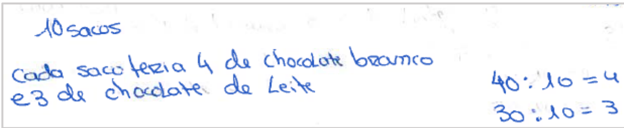


Figura 96: Registo de Paula – frasco de tamanho S

Ainda com a preocupação de esgotar a quantidade de pastilhas da mistura (100 de chocolate branco e 100 de chocolate preto) na distribuição equitativa de vários frascos de tamanho S, Pedro e Telmo desenham (figura 97), em cima à esquerda, um frasco de tamanho S em que registam “10 de cada = a 20”. Em baixo, desenham dez frascos, referindo que cada um tem 20 pastilhas, e indicam um total de 200 pastilhas de chocolate. Registam, no entanto, uma razão ($\frac{20\ B}{20\ P}$) que mantém a mistura, mas que não corresponde ao que ilustram nem aos cálculos que também apresentam e que parece ter sido obtida num primeiro cálculo, que está riscado, de dividir 100 por 5 (em cima à direita).

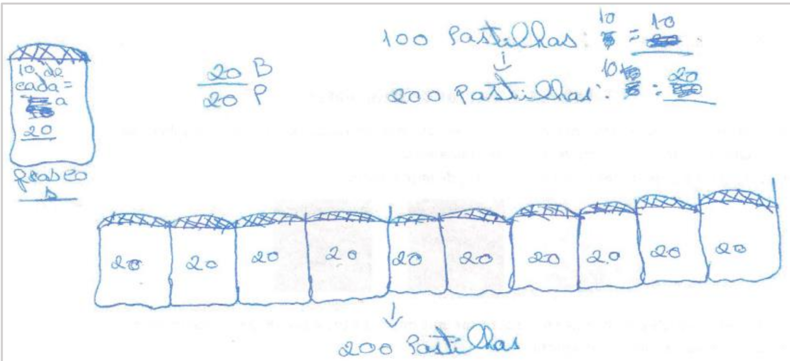


Figura 97: Registo de Telmo – frasco de tamanho S

Rita e Beatriz registam de maneiras diferentes a ideia de dividir ambos os termos da razão correspondente à sua mistura por 2, para obterem a quantidade de pastilhas do frasco de tamanho S. Rita assinala expressamente (figura 98) a igualdade de razões e utiliza um registo auxiliar usual no trabalho com frações equivalentes em que assinala dois arcos, não orientados, legendados com “: 2”, evidenciando a operação a efetuar em cada um dos termos da primeira para os termos respetivos da segunda. Explica depois como é composto um frasco de tamanho S e também dois frascos de tamanho S, confundido quantidade de frascos com quantidade de pastilhas da mistura escolhida.

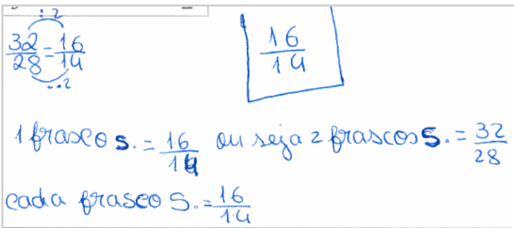


Figura 98: Registo de Rita – frasco de tamanho S

Beatriz, na sua preocupação de registar tudo, comete algumas incorreções totalmente compreensíveis nesta fase, uma vez que ainda não sabe nem adicionar números escritos sob a forma de fração, nem dividir um número escrito sob a forma de fração por um número inteiro. A sua estratégia é “adicionar a mistura” e, por isso, adiciona os termos correspondentes das “razões parcelas” para obter os termos respetivos da “razão soma” e na ideia de “dividir a mistura ao meio”, divide cada termo da “razão dividendo” por dois e obtém como quociente uma razão cujos termos respetivos são metade dos anteriores (figura 99).

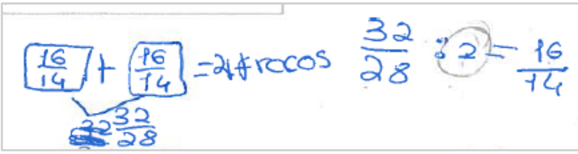


Figura 99: Registo de Beatriz – frasco de tamanho S

A ideia de que as razões são iguais e apenas varia multiplicativamente a quantidade de pastilhas de um e outro tipo parece não estar ainda totalmente interiorizada nesta aluna.

Além do registo auxiliar de arcos para enfatizar como se relacionam os termos respetivos de duas razões iguais (multiplicando-os ou dividindo-os pelo mesmo número, diferente de zero), André e Laura consideram ainda necessário um esquema (figura 100), baseado nas iniciais de branco (b) e de leite (L) e muito semelhante ao utilizado pela professora no quadro.

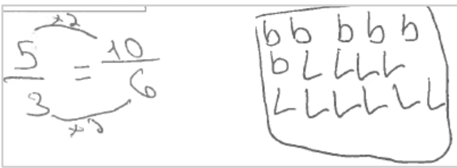


Figura 100: Registos de André – frasco de tamanho S

Andreia e Rodrigo dão um nome à sua loja (figura 101) e enquanto ela se limita a fazer um registo não numérico do frasco de tamanho S, ilustrando (com um traço horizontal) que as pastilhas que tem na sua mistura são suficientes para dois frascos, Rodrigo desenha o frasco e indica no seu interior as iniciais dos seus verdadeiros nomes (G e E) e as quantidades de um e outro tipo de pastilhas, sem qualquer indicação de como esses valores (10 e 5) surgem.

Figura 101: Registos de Andreia (à esquerda) e de Rodrigo (à direita) – frasco de tamanho S

Carla e Júlia consideram que a quantidade de pastilhas escolhidas na mistura é a correta para o frasco de tamanho S e, como tal, limitam-se a escrever a resposta (figura 102).

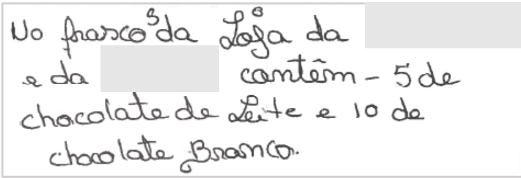


Figura 102: Registo de Júlia – frasco de tamanho S

Questões 3 e 4. Pretende-se que os alunos escolham dois frascos de tamanhos diferentes e determinem a quantidade de cada tipo de pastilhas, mantendo a mistura. Na maioria dos casos (8 pares em 10) os frascos escolhidos apresentam dois tamanhos seguidos: M e L (2); L e XL (5); XL e L (1). Dois pares escolhem sequencialmente os tamanhos M e XL.

Seis dos dez pares consideram que no primeiro frasco escolhido, qualquer que seja o tamanho, a quantidade de pastilhas de cada um dos tipos vai coincidir com a que tinham indicado inicialmente na sua mistura. Fábio e Eva limitam-se a escrever a razão correspondente ao frasco de tamanho M, sem explicitarem a que corresponde cada um dos seus termos (figura 103, à esquerda); Bruno e Vítor fazem exatamente o mesmo, mas acrescentam um esquema do frasco de tamanho L, em que identificam o número total de pastilhas de chocolate (figura 103, ao meio, à esquerda); Pedro e Telmo desenham o frasco de tamanho XL em que indicam a quantidade total de pastilhas e também o frasco dividido ao meio com a quantidade correspondente a cada tipo, nomeiam na razão o tipo de pastilhas (figura 103, ao meio, à direita); Inês e Jorge indicam a razão, explicitam o tipo de pastilhas correspondente a cada termo e ilustram o frasco preenchendo-o com as iniciais de branco (B) e de leite (L) (figura 103, à direita).

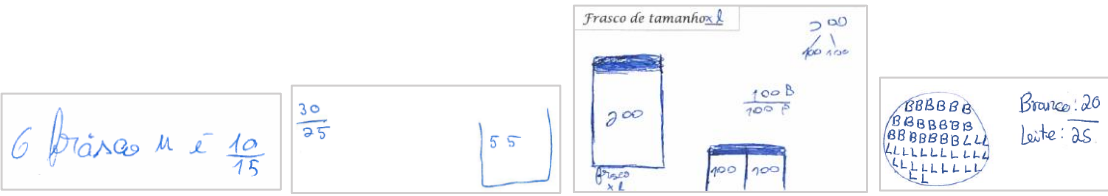


Figura 103: Registos de Fábio, de Bruno, de Pedro e de Inês – frasco de tamanho M

Rita e Beatriz consideram que as quantidades do primeiro frasco escolhido (tamanho M) vão coincidir com as da mistura inicial e determinam-nas através das quantidades do frasco de tamanho S. Desta forma, se na questão anterior dividem ambos os termos da razão correspondente à mistura inicial por dois para obter as quantidades referentes ao frasco de tamanho S (figura 104, à esquerda), agora, de forma inversa, multiplicam os termos desta razão por dois para dar origem aos termos correspondentes da razão que se refere ao frasco de tamanho M (figura 104, ao meio). Estas alunas optam por trabalhar sempre com a última razão considerada e, em cada caso, especificam a operação efetuada nos termos de uma para obter os termos correspondentes da outra razão, auxiliando-se de arcos não orientados e legendados, normal no trabalho com frações equivalentes neste nível de ensino. Na figura 104, à direita, repetem o procedimento de multiplicar ambos os termos da razão anterior por dois para obterem as quantidades de pastilhas de chocolate do frasco de tamanho L.

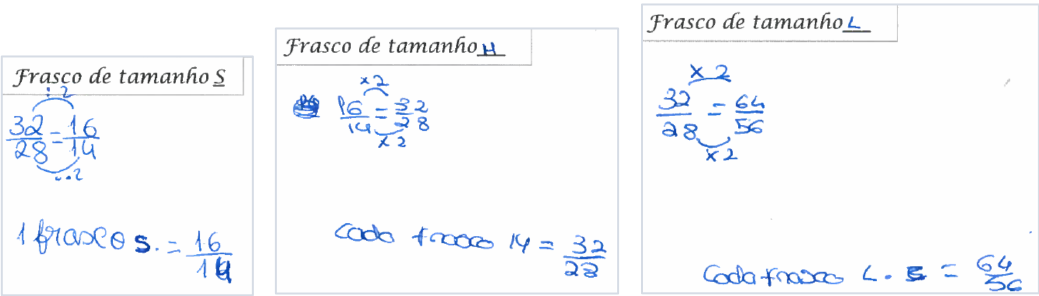


Figura 104: Registos de Rita e Beatriz – frascos de diversos tamanhos

Carla e Júlia escolhem também como fator de comparação o 2. Referem que “temos de ir fazer o dobro” e especificam esse procedimento na quantidade de pastilhas de cada tipo, como se pode comprovar na figura 105, em que surge, para cada frasco de tamanho diferente (L e XL) um cálculo em cadeia complementado pelos arcos orientados e legendados. Não consideram importante evidenciar, através do sinal “=”, a relação de igualdade entre as várias razões.

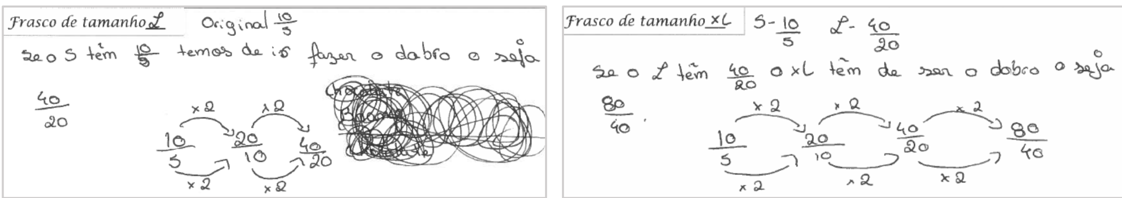


Figura 105: Registo de cálculos de Júlia para obtenção de razões

Ao contrário de Carla e Júlia, André e Laura trabalham sempre em relação à razão da sua mistura inicial, “5 – chocolate de leite e 3 – chocolate branco”. No entanto, André começa por relacionar as razões relativas às quantidades de pastilhas dos frascos de tamanho S e L, mas risca e adota a ideia de Laura (figura 106, à esquerda). Para determinar as quantidades de pastilhas do frasco de tamanho XL, repetem o procedimento, mas com o fator 8 (figura 106, à direita). Identificam a relação entre as quantidades da mistura e dos frascos de vários tamanhos através da sequência dos primeiros quatro naturais pares: 2, 4, 6 e 8.

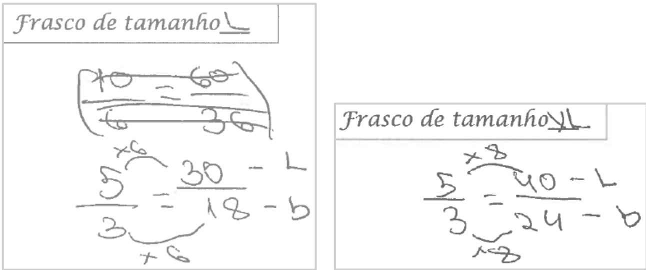


Figura 106: Registo de cálculos de André para a obtenção de razões iguais

Fábio e Laura são os únicos alunos que, antes de a professora o solicitar, sentem necessidade de resumir o seu raciocínio. Fazem-no através de um registo algébrico elementar, em que cada um dos quatro tamanhos disponíveis dos frascos (S, M, L e XL) é, respetivamente, igual a “vezes dois”, “vezes quatro”, “vezes seis” e “vezes oito” (figura 107).

Figura 107: Resumo algébrico de André

Este registo parece estar relacionado com os procedimentos indicados nas respostas da figura 106 onde, em cada uma, multiplicam sempre os dois termos da razão inicial da mistura por um mesmo fator para obterem os termos correspondentes da nova razão.

Da mesma forma, Ricardo e Paula trabalham com os valores da mistura e, ao contrário dos colegas, nunca utilizam a notação de razão. Indicam as divisões efetuadas, sem recurso ao algoritmo escrito, e identificam a composição em cada caso do “saco” (figura 108). Como se pode observar, os divisores são números inteiros que, perante os valores considerados na mistura, facilitam o cálculo mental.

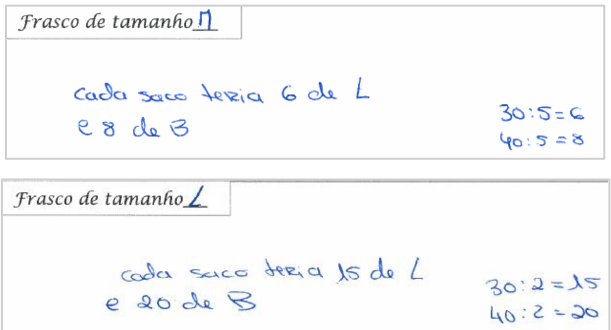


Figura 108: Registos de Paula – frascos de tamanhos M e L

Conclusão da tarefa. Depois de apresentadas e discutidas no quadro algumas das resoluções, a professora propõe que organizem a informação numa tabela para permitir uma consulta mais rápida e eficiente. Assim, com um dos exemplos explorados, cria uma tabela de razões horizontal (em que as duas linhas correspondem ao tipo de pastilhas de chocolate escolhido e as quatro colunas à mistura original e aos diferentes tamanhos dos frascos) e preenche-a conjuntamente com os alunos, evidenciando os fatores de comparação utilizados relativamente à mistura e também entre os frascos de diferentes tamanhos.

De seguida, cada par é convidado a criar a sua própria tabela de razões e todas são registadas na horizontal (tal como a professora tinha exemplificado). No entanto, como se pode observar na figura 109, enquanto oito alunos se limitam ao preenchimento das células (exemplo de André, em cima, à esquerda), onze têm o cuidado de explicitar os procedimentos a efetuar, relacionando a coluna da mistura com cada uma das outras (exemplo de Andreia, em cima, à direita) ou relacionando colunas consecutivas (exemplo de Beatriz, em baixo).

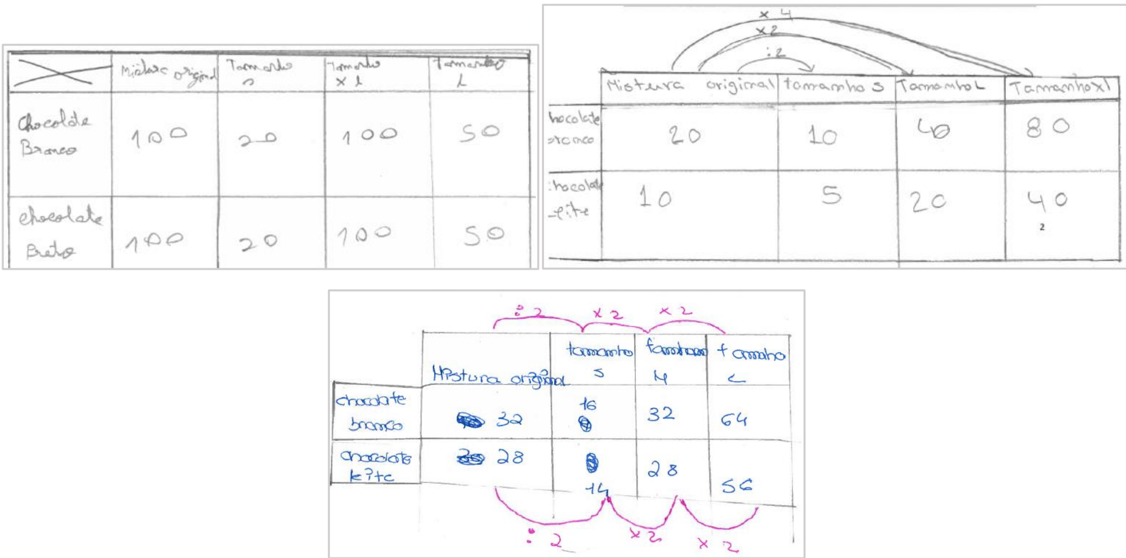


Figura 109: Tabelas de razões de André, de Andreia e de Beatriz

De notar que Jorge e Inês, no caso em que o tamanho do frasco (L) coincide com a mistura original, legendam os arcos respetivamente com “original” e “: não dividi”, não fazendo referência à divisão ou à multiplicação por um (figura 110). Jorge é o único que coloca a coluna da mistura original em último lugar (figura 110, à esquerda), o que faz com que a sua tabela tenha uma interpretação confusa porque a leitura umas vezes é feita da esquerda para a direita e outras em sentido contrário.

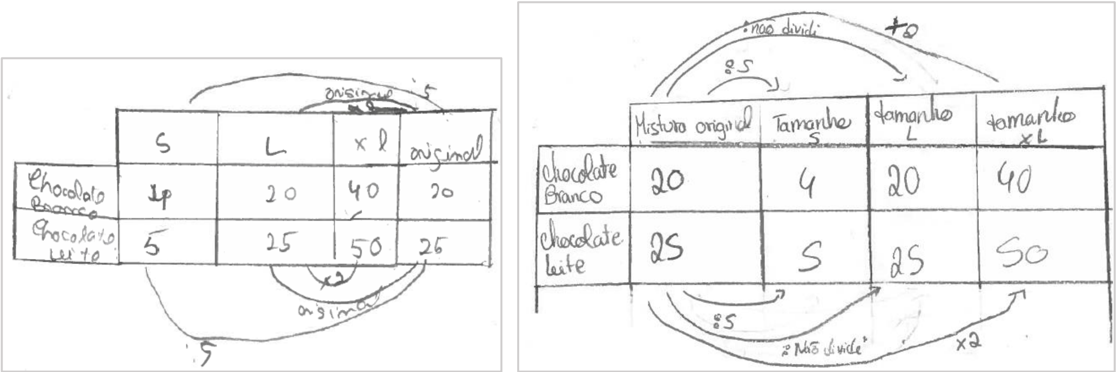


Figura 110: Tabelas de razões de Jorge e de Inês

Todos os alunos, exceto três, têm a sua tabela de razões completa e correta.

Para finalizar, os alunos são convidados a escrever uma frase sobre o que aprenderam nesta aula. Quase todos se referem ao conceito de mistura e às operações que foram utilizadas, multiplicação e divisão, mas nem sempre as conexões entre o que é uma mistura de pastilhas de chocolate, o que significa manter uma mistura e qual o papel das operações parece interiorizado. Por exemplo, Bruno e Paula afirmam (figura 111) que para fazer uma mistura podem ou necessitam utilizar a multiplicação e divisão.

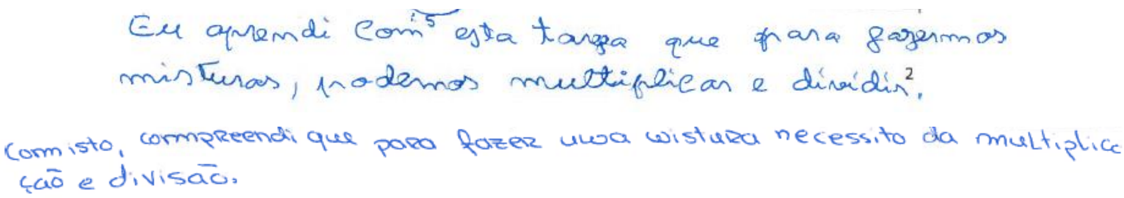


Figura 111: Entendimento que Bruno e Paula apresentam da tarefa

Beatriz e Rita mencionam (figura 112) que aprenderam a organizar dados e uma acrescenta que aprendeu a fazer misturas e a outra a pensar sobre quantidades.

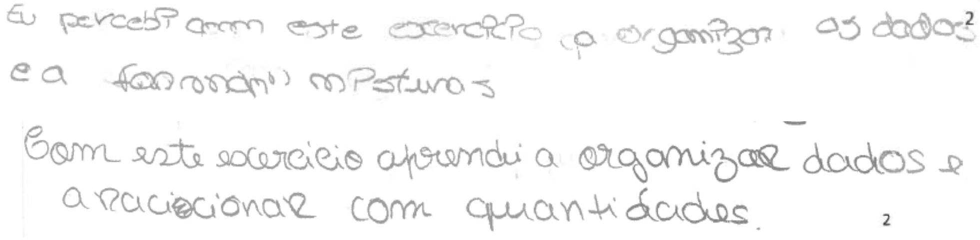
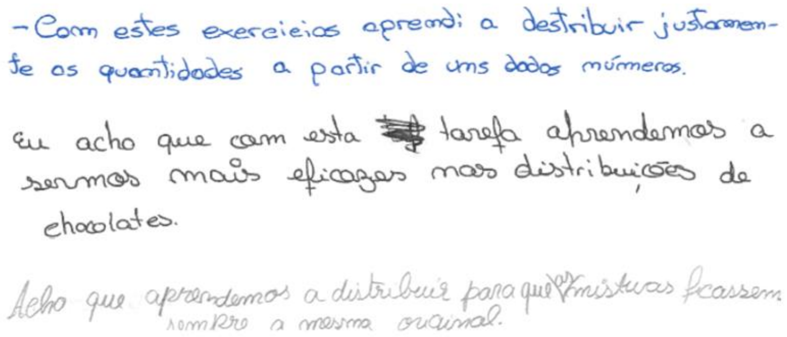


Figura 112: Entendimento que Beatriz e Rita apresentam da tarefa

Carla, Júlia e Laura realçam (figura 113) a ideia de efetuar uma distribuição que deverá ser justa e eficaz.



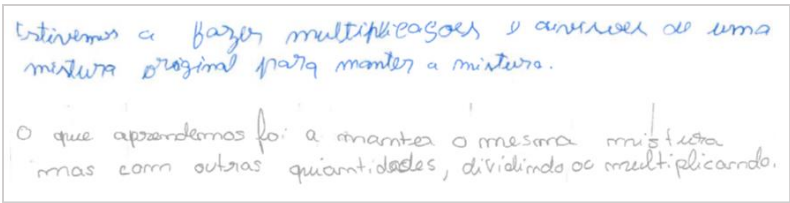
- Com estes exercícios aprendi a distribuir justamente os quantidades a partir de uns dados números.

Eu acho que com esta tarefa aprendemos a sermos mais eficazes nas distribuições de chocolates.

Acho que aprendemos a distribuir para que as misturas ficassem sempre a mesma original.

Figura 113: Entendimento que Carla, Júlia e Laura apresentam da tarefa

Laura faz referência à manutenção da mistura inicial, mas apenas Fábio e Eva mencionam (figura 114) a relação entre o efetuar das operações multiplicação e divisão e o objetivo de manter a mistura inicial, em que Eva afirma que a ideia era alterar as quantidades mantendo a mistura.



Estivemos a fazer multiplicações e divisões de uma mistura original para manter a mistura.

O que aprendemos foi a manter a mesma mistura mas com outras quantidades, dividindo ou multiplicando.

Figura 114: Entendimento que Fábio e Eva apresentam da tarefa

Em síntese. A necessidade de quantificar as pastilhas de chocolate escolhidas para a mistura inicial foi mencionada pela professora como algo indispensável e apenas um aluno não traduz essa ideia na sua folha. As pastilhas de chocolate de dois tipos diferentes, exemplificam dois espaços de medida, num contexto discreto (pastilhas de chocolate indivisíveis), e as produções dos alunos permitem identificar um esquema de evolução do conceito/procedimento de comparação multiplicativa, em que o raciocínio predominante é do género: se multiplicarmos ou dividirmos a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate por um mesmo número (inteiro), obtemos um frasco com uma quantidade maior (ou menor), mas mantemos a mistura. Este raciocínio vai ser desenvolvido na resolução das questões 2 a 4, mas o que escrevem sobre o que aprenderam na aula é algo ambíguo quanto ao que significa “manter uma mistura”. As representações utilizadas são baseadas num misto de linguagem natural (texto) e de linguagem matemática (numerais e outros símbolos matemáticos). A razão surge representada sob a forma de fração, onde os números utilizados são, na sua maioria, inteiros múltiplos de cinco, de um ou dois dígitos (com uma exceção em que o valor escolhido é 100). No final, a tabela de razões, é introduzida pela professora como sendo uma maneira de resumir a resolução de toda a tarefa. Apenas três dos alunos não constroem corretamente a sua tabela. Todos a apresentam na horizontal, em que as duas linhas correspondem ao tipo de pastilhas de chocolate e as quatro colunas à mistura inicial e aos tamanhos dos frascos. A representação de arcos (orientados ou não) e legendados com os procedimentos a efetuar, de multiplicar ou dividir, é utilizada por muitos alunos e a grande maioria relaciona as quantidades de pastilhas dos frascos dos vários tamanhos com as da mistura inicial. Não há registo de cálculos auxiliares explícitos, provavelmente porque os alunos não sentiram necessidade de os usar, tendo em conta os números com que estavam a trabalhar. A equivalência de frações é um conceito que os alunos já conhecem e que utilizam na construção de razões iguais e evidenciam, por isso, trabalhar dentro de um mesmo espaço de medida, ou seja, estabelecem sempre relações escalares. O fator multiplicativo mais comum é "× 2" e traduz o conceito "dobro de", "2 ×", mencionado oralmente várias vezes. Esta situação permite ilustrar a utilização da propriedade comutativa da multiplicação. Os números 5 e 10 surgem também com alguma frequência como fatores, quer através da multiplicação, quer da divisão.

5.2.2 Tarefa 2: Redimensionar/comparar dimensões

Redimensionar – Quatro imagens do mesmo desenho. Todos os alunos interpretam sem dificuldade a expressão do enunciado da tarefa de comparar "a olho nu" como "é só a olhar" sem utilizar nenhum material auxiliar. Quinze alunos registam as suas ideias numa tabela de dupla entrada, em que treze a representam na vertical e dois na horizontal. Seis deles consideram o desenho original como fazendo parte da tabela, mas cinco deixam estas células em branco. Quatro alunos apresentam duas tabelas separadas, uma para as semelhanças, outra para as diferenças e, neste caso, todos englobam o desenho original. A figura 115 mostra um desses exemplos, em que Laura indica na tabela de semelhanças uma primeira coluna intitulada "original", cujas linhas surgem preenchidas com expressões (imagem, quadrada e cores) que são repetidas na íntegra nas colunas intituladas "A" e "C". Nas linhas das colunas intituladas "B" e "D" surgem apenas as palavras "imagem" e "cores", numa alusão implícita a que, nestes casos, a forma da imagem não se mantém. Na tabela de diferenças, a coluna relativa ao "original" é preenchida com as expressões tamanho e forma. A expressão tamanho é repetida ao longo da primeira linha e a expressão forma é substituída, na segunda linha, por quadrado ou retângulo. Como se pode observar, de uma tabela para outra, há características (quadrada) que coincidem e que, como tal, tornam a informação incoerente.

Semelhanças

Original	A	B	C	D
imagem	imagem	imagem	imagem	imagem
quadrada	quadrada		quadrada	
cores	cores	cores	cores	cores

Diferenças

Original	A	B	C	D
tamanho	tamanho	tamanho	tamanho	tamanho
forma	quadrada	retângular	quadrada	retângular

Figura 115: As tabelas de semelhanças e diferenças de Laura

Trabalhando em pares e num trio[18], os alunos particularizam as ideias e verbalizam-nas numa discussão que a professora estimula. Tenta, assim, que Laura e Rita lhe expliquem oralmente (episódio 18) o preenchimento inicial das tabelas e as alunas referem ideias importantes que depois não registam, como é o caso de as imagens terem a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

> Professora – O que é que tu queres dizer, imagem, imagem, imagem? [Aponta para a tabela que Laura intitulou de *Semelhanças*.]
> Laura – É as semelhanças.
> Rita – As imagens são todas iguais.
> Professora – AH! O que tu queres dizer é que os bonequinhos... tem um gatinho, tem um cãozinho... é isso que tu estás a dizer? Pronto. Ok!
> (...) [Rita dá a imagem A à professora e as duas arrumam-nas lado a lado.]
> Professora – Vamos lá. O que é que tu dizes que é semelhante?
> Laura – ... [impercetível]
> Professora – Hum?! Fala mais alto Laura, que eu não te consigo ouvir.
> Laura – Estas são as duas quadradas.
> Professora – AH! Estás-me a dizer que aqui [contorna a imagem original com o dedo] tens um quadrado e aqui [contorna a imagem A com o dedo] tens outro quadrado. É isso? Muito bem. Mais?
> Rita – Uma é maior, outra mais pequena.

Episódio 18: A interpretação de Laura e Rita na tabela que apresentam

Na comparação da imagem A com o desenho original, no que diz respeito a semelhanças, dezoito alunos referem que tem as mesmas "imagens", treze que mantém a forma de um quadrado, um que é um retângulo e oito que continua com as mesmas cores. Quanto a diferenças, dez alunos dizem que é maior e alguns especificam isso para cada um dos

[18] Estão presentes nesta aula dezanove alunos.

bonecos, oito mencionam que aumentou e um diz que é mais larga e mais alta. No que respeita ao registo escrito, na comparação das restantes imagens (B, C e D) com o desenho original, quer no que diz respeito a semelhanças, quer a diferenças, os alunos mantêm quase sempre o mesmo tipo de resposta. No entanto, quando conversam com a professora surgem outras ideias, como no caso de Bruno (episódio 19) que faz prevalecer a comparação de áreas, por sobreposição, entre o desenho original e a imagem B.

> Bruno – Aqui na original e na B eu acho que... que a... a [pega em original]... aqui na original, cabe três vezes a original [coloca-o em cima da imagem B] para fazer a B. Fazemos uma aqui [coloca a original em cima de B, de forma a coincidirem os lados esquerdos e as bases, respetivamente]; depois, a segunda aqui [desliza a original para a direita] e, depois eu pensei assim, dividimos isto ao meio [imagem original] e pomos uma metade aqui [indica na imagem B a parte que sobra por cima da original] e a outra metade aqui [indica na imagem B a parte que sobra, ao lado do anterior].
>
> Professora – Estás a falar em termos da área ocupada, é isso? [Volta a colocar as imagens, original e B, lado a lado.]
>
> Bruno – Sim.

Episódio 19: Como Bruno compara as áreas das imagens B e original

No caso de Gabriel (episódio 20) que relaciona a imagem A com a original e a D, tentando preencher a primeira, por sobreposição, com as duas últimas.

> Gabriel [pega nas imagens original e D] – A figura original mais a D [junta-as lado a lado, relativamente ao comprimento] faz o mesmo comprimento que daqui aqui [aponta o comprimento da imagem A]. E se pusermos em cima [roda a imagem D e desloca-a para o lado de cima da imagem A], faz o mesmo comprimento daqui aqui [aponta a largura da imagem A].
>
> Professora – Pronto! Mas tu estás a falar da área ocupada. Nós não estamos agora a falar da área [separa as duas imagens que Gabriel tinha colocado lado a lado], estamos a olhar para as imagens, para os bonequinhos que estão cá dentro, temos gatinhos, temos cãezinhos... é, ou não é?... uma tartaruga.
>
> Gabriel – Passarinhos.

Episódio 20: Como Gabriel compara a imagem A com a original e a D

No decorrer da discussão com a turma e da apresentação conjunta no quadro, a professora realça a terminologia de imagem deformada, por oposição a imagem semelhante, e os alunos aplicam-na nas imagens B e D com as expressões: “espalmada”, “desfocada” (que a professora corrige para “desformatada”, numa alusão à tecnologia, mas que considera não ser aqui muito adequada), “esticada” e “magra”.

Já na aula seguinte, ao retomar a tarefa, a professora resume com os alunos o que aconteceu de facto no desenho original para se obterem as várias imagens e regista essa informação no quadro, sob a forma de um esquema em árvore, com o intuito de completar e verificar se a informação está, ou não, de acordo com o que tinham escrito na tabela. Laura (figura 116) e os restantes colegas copiam o registo para a folha de resposta.

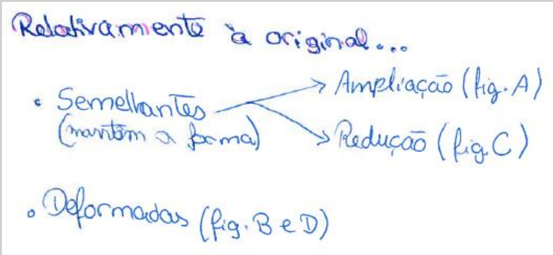


Figura 116: Esquema em árvore de Laura (copiado do quadro)

Redimensionar – Multiplicando. No que diz respeito à escolha da lupa e ao fator de comparação a completar, os registos não diferem muito dentro dos grupos, mas para manter o texto coerente (com o ciclo anterior da experiência) considera-se um total de dezanove respostas[19].

Para obter a imagem A a partir do desenho original, todos os alunos escolhem corretamente a lupa de ampliar e o fator de comparação associado. Doze representam-no sob a forma de numeral misto ($1\frac{1}{2}$), quatro simultaneamente sob a forma de numeral misto, fração e decimal ($1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 1,5), um sob a forma de decimal (1,5), um em simultâneo sob a forma de numeral misto e fração ($1\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$) e um outro, conjuntamente sob a forma de numeral misto e decimal ($1\frac{1}{2}$ e 0,5).

Rodrigo e Andreia explicam no quadro (episódio 21), para toda a turma, porque escolheram aquela lupa e como chegaram ao fator indicado com a ajuda das tiras de cartolina.

> Rodrigo [encolhe os ombros e Andreia sorri] – Ok! Tínhamos três hipóteses. [Começa a desenhar as lupas no quadro, mas depois apaga-as com a mão.] Tínhamos três lupas: uma era de manter, aumentar e diminuir [Andreia desenha as três lupas e circunda a que tem o sinal +]. Da figura original para a figura ma… para a figura A, nós aumentámos. Ampliámos a figura.
> Professora – Nós tínhamos que ver quantas vezes é que... cabia, não era?
> Rodrigo – Sim. [Olha para a folha que tem na mão.]
> Professora – Sim. Vocês deviam dizer isso logo.

[19] Estão presentes nesta aula dezanove alunos.

Rodrigo – Sim. Cabia um, um meio. [Escreve $1\frac{1}{2}$.]
(...)
Professora – Colocaram a tira e ...
Andreia – Colocámos a tira em cima da imagem original, tinha este comprimento [aponta na sua folha o retângulo da esquerda] e depois colocámos uma e meia porque era o tamanho de uma fita e metade da outra.

Episódio 21: Escolha da lupa e a determinação do fator de ampliação da imagem A

Para obter a imagem B a partir do desenho original, no que diz respeito quer à largura, quer ao comprimento, todos os alunos escolhem a lupa certa, ampliar, e quatro trocam de posição os fatores correspondentes. Dos quinze alunos que têm esta resposta correta, nove representam o fator relacionado com a largura apenas sob a forma de numeral misto ($1\frac{1}{2}$), dois em simultâneo sob a forma de numeral misto, fração e decimal ($1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 1,5), dois sob a forma de numeral misto e decimal ($1\frac{1}{2}$ e 0,5), um sob a forma de numeral misto e fração ($1\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$) e um sob a forma de decimal (1,5). Os alunos que registam este fator sob diferentes formas são aqueles que já o tinham feito relativamente à imagem A.

Para obter a imagem C a partir do desenho original, todos os alunos escolhem a lupa de reduzir e apenas num caso há uma substituição da lupa de manter, que surge riscada, para a correta. O fator de comparação é registado por treze alunos sob a forma de fração ($\frac{3}{4}$), por três sob a forma de decimal (0,75) e também por três em simultâneo sob a forma de decimal e fração (0,75 e $\frac{3}{4}$).

André e Laura são convidados a ir ao quadro apresentar aos colegas o seu raciocínio para chegar à resposta (episódio 22) que, no final, todos têm registada.

Laura – Reparámos que continua um quadrado, mas...
Professora – Fala para eles que eu já...
Laura – Mas reduziu, ficou mais pequena. E nós reparámos também que... nós dobrámos ao meio a fitinha e não deu. [Com a mão direita dobra a tira de cartolina.]
Professora – Estamos a falar desta, não é? Da C. Estamos a falar desta e ela estava a dizer: nós reparámos que... [André circula a lupa com o sinal -.] ficou mais...
Laura – Pequena.
Professora – Ficou mais pequenina. Pronto. O André já chegou ali e pôs logo lá uma lupa. [Risos de André e outros alunos.] Reduziu. Bem, agora, quantas vezes, não é? Vamos lá ver o que é que aconteceu.
Laura – Reduziu e metade da fitinha não dava para ocupar o comprimento. [Com a tira de cartolina na mão direita, dobrada ao meio, olha atentamente para a sua folha de resposta.] ... Sim!

Professora – Ou seja, chegaram à conclusão que não reduziu para metade. É isso que me estás a dizer?
Laura [abana a cabeça em sinal de confirmação] – Sim [baixinho].
(...)
Laura – Então nós dobrámos e voltámos a dobrar ao meio.
Professora – Então quando tu dobras ao meio e voltas a dobrar ao meio [dobra a tira de cartolina tal como Laura tinha indicado], ficamos com quê?
Bruno – Quatro quartos.
Professora – Ficamos com...
Laura – Quartos.
Bruno – Um quarto.
Professora – Ficamos com quatro quartos. Cada uma das partes é um...
Bruno – Quarto.
Professora – Um quarto. É isso? [Laura abana a cabeça em sinal de concordância.] Dobraram ao meio, dobraram ao meio outra vez, ficaram com quartos. Muito bem. Para quê? Pega lá. [Dá a tira de cartolina vincada a Laura e afasta-se do quadro. Repreende André que tem estado a fazer desenhos e diz-lhe que deve acompanhar e ajudar a colega na explicação à turma.]
Laura [Coloca a folha do enunciado em cima da mesa de Vítor e fica com a imagem C e a tira de cartolina viradas para a turma.] – Temos que ter duas fitinhas... temos que ter duas fitinhas: uma delas dobramos ao meio e colocamos, depois pegamos noutra fitinha e dobramos ao meio e voltamos a dobrar ao meio.
(...)
Laura – Uma delas, dobramos ao meio e a outra dobramos em quatro partes. [Enquanto fala vai dobrando a tira de cartolina que tem na mão.]
André – Iguais.

Episódio 22: Escolha da lupa e a determinação do fator de redução da imagem C

Para obter a imagem D a partir do desenho original, no que respeita à largura, dezassete alunos escolhem a lupa de manter e em dois casos há uma substituição da lupa de reduzir, que surge riscada, para a correta. Dois alunos escolhem a lupa de reduzir. Em relação ao comprimento, a lupa escolhida por dezassete alunos é a de manter, em que um deles substitui a de aumentar pela correta. Dois alunos (os que para a largura tinham escolhido a lupa de reduzir) indicam a lupa de manter. Quanto ao fator de comparação da largura, dos dezassete alunos que escolhem a lupa correta, quinze registam corretamente um (1) e dois assinalam zero (0); dos dois alunos que escolheram a lupa errada, um escreve um meio ($\frac{1}{2}$) e o outro um (1). Relativamente ao fator de comparação do comprimento, dezassete alunos indicam o valor certo, onze escrevem-no sob a forma de fração ($\frac{1}{2}$), dois sob a forma de decimal (0,5) e quatro de ambas as formas (0,5 e $\frac{1}{2}$). Dois alunos indicam fatores não corretos: 1,5 e 1.

Redimensionar – Aumentar e reduzir com percentagem. No início desta parte da tarefa, a professora em diálogo com os alunos (episódio 23), recorda que a cinquenta por cento corresponde metade da unidade e que a cem por cento corresponde a unidade. Sem qualquer dificuldade, a imagem D é assinalada na janela 1 e Carla justifica as suas dimensões (3 cm × 6 cm), substituindo a percentagem pelo respetivo valor inteiro/não inteiro que utiliza nos cálculos.

> Professora – (...) O que é que vocês acham que aconteceu? Cinquenta por cento é o quê, em relação à unidade?
> Paula – É metade.
> Professora – É metade. E cem por cento?
> Paula – É a unidade.
> Professora – Qual é que acham que é a figura que em relação... que em relação à unidade... diz.
> Carla – Eu acho que é a D.
> Professora – Achas que é a D?!
> Carla e mais alunos – A D.
> Professora – Explica lá porquê.
> Carla – A D tem uma... é deformada.
> (...)
> Carla – A figura D... nós pusemos a figura D aqui porque se... neste lado sabemos que o cinquenta é o três já que a unidade, o cem, é o seis. E este aqui [com a mão esquerda segura a imagem D e com a direita aponta no sítio respetivo], este lado, tem seis centímetros que é o cem por cento.
> Professora – Então tu dizes-me que cem por cento [escreve no quadro]... cem por cento... o que é que me dizes?
> Carla – Cem por cento é igual a seis centímetros.
> Professora – É igual a seis centímetros. Ou seja, cem por cento de seis é igual a quanto? [Escreve no quadro '100% × 6 =' e volta-se ligeiramente de lado à espera da resposta.]
> Carla – Seis.

Episódio 23: Relação do todo/parte com percentagens

No quadro, a professora traduz numericamente o que vai ouvindo e todos os alunos copiam a informação para a sua folha de resposta. Os registos de Carla (figura 117) são disso um exemplo, em que além da relação já referida entre 100% e a unidade, surge a igualdade entre 50% e $\frac{1}{2}$.

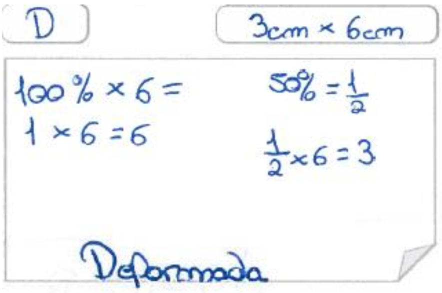


Figura 117: Registos de Carla

Depois de os alunos medirem a largura e o comprimento das várias imagens com uma régua, a professora regista os valores numa tabela, no quadro. Agora, nos respetivos grupos, vão tentar responder às outras três questões.

Na janela 2, todos os alunos identificam corretamente a imagem C e as respetivas dimensões (4,5 cm × 4,5 cm). Para justificar os valores indicados e as percentagens do enunciado, oito alunos representam 75% sob a forma de fração, $\frac{3}{4}$, e calculam o produto através do procedimento algorítmico para a multiplicação de frações (multiplicar os numeradores e os denominadores dos fatores para obter, respetivamente, o numerador e o denominador do produto), como se pode ver na resolução de Rita (figura 118) em que 6 é substituído pela fração $\frac{6}{1}$.

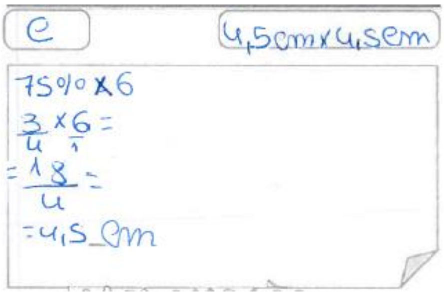


Figura 118: Como Rita calcula 75% × 6

Nove alunos representam 75% através de um numeral decimal (0,75) e, sem quaisquer cálculos, indicam o resultado da multiplicação (figura 119, à esquerda). Apenas Fábio apresenta, neste caso, o algoritmo da multiplicação (figura 119, à direita).

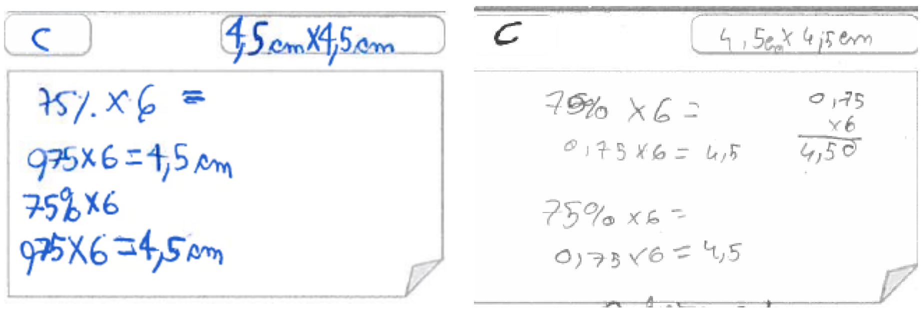


Figura 119: Como registam e calculam 75% × 6

Jorge é o único que, no final, apresenta uma resposta incorreta ao calcular 4,5 × 100%. No entanto, antes da discussão e correção no quadro, seis alunos têm registado 75% × 4,5 e três 100% × 4,5 que riscaram, para mostrarem depois uma resposta certa.

Na janela 3, todos os alunos identificam corretamente a imagem A e as respetivas dimensões (9 cm × 9 cm). O valor 150% é exclusiva e corretamente relacionado com o numeral decimal 1,5. No registo escrito, duas alunas não escrevem o símbolo de percentagem, o que torna a igualdade considerada, “150 = 1,5”, incorreta. Não há especificação de cálculos e apenas dois alunos apresentam o algoritmo da multiplicação (Fábio já o tinha feito na situação anterior). A figura 120 mostra como Paula resolve a operação e como assinala, ao lado, um valor intermédio do cálculo algorítmico.

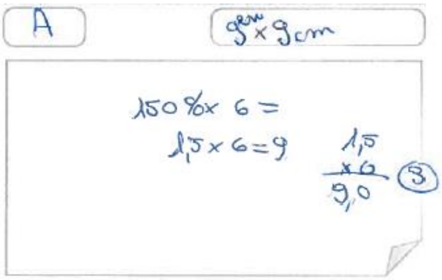


Figura 120: Como Paula calcula 150% × 6

Na janela 4, os dezanove alunos identificam corretamente a imagem D e as respetivas dimensões (12 cm × 9 cm). Dezoito registam duas expressões numéricas, uma em que o fator está representado em percentagem, 200%, e a outra em que é substituído pelo inteiro 2. Catorze apresentam um registo deste género para a substituição do fator 150% por 1,5. E todos se limitam a indicar os cálculos na horizontal, sem especificarem como os realizam, como no exemplo da resolução de Rita (figura 121). Um aluno deixa em branco o espaço dedicado às justificações.

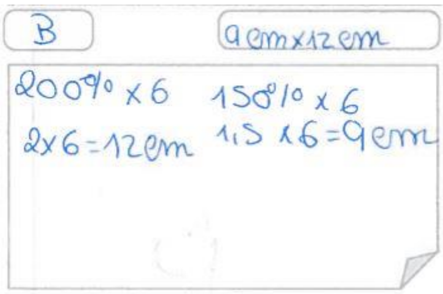


Figura 121: Como Rita indica os cálculos

Comparar dimensões. Uma vez que esta parte da tarefa foi resolvida já na aula seguinte, a qual não foi gravada por não me ser possível estar presente, apenas se analisam as resoluções dos alunos (dezoito).

Catorze alunos indicam as dimensões da folha de papel fotográfico de tamanho A4 (21 cm e 30 cm); quatro não especificam a medida de comprimento, mas dois deles referem-se à largura como sendo a dimensão que permite não deformar a imagem original, como é o caso de Beatriz (figura 122), e dois indicam um valor incorreto (18) para a medida do lado do quadrado.

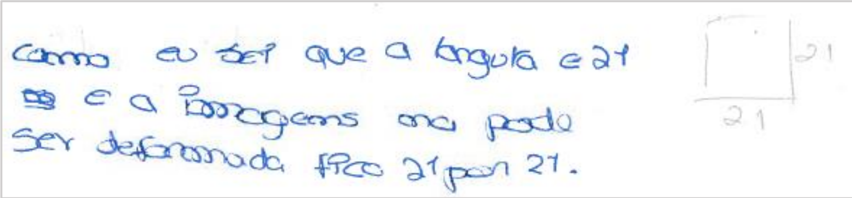


Figura 122: Justificação de Beatriz para a escolha de 21

Ricardo é ainda mais minucioso quando se refere quer à medida máxima possível, quer à forma (quadrado) que é necessário manter para obter uma reprodução do desenho da Rita (figura 123).

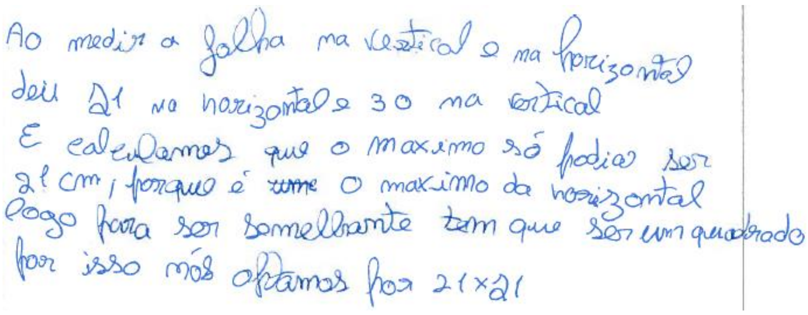


Figura 123: Justificação de Ricardo para a escolha de 21

Quinze alunos indicam que a maior reprodução do desenho da Rita, numa folha fotográfica de tamanho A4, tem por dimensões 21 cm × 21 cm; dois registam que o quadrado deve ter 18 cm de lado; e um aluno não faz qualquer referência às dimensões da possível reprodução.

Na comparação entre a largura da folha de papel fotográfico A4 (21 cm) e as dimensões do desenho original (6 cm), dez alunos apresentam um esquema baseado nas tiras de cartolina utilizadas na aula anterior. Desses, seis ligam-nas topo a topo até perfazer 21 e, para isso, esquematizam, tal como Pedro na figura 124, três tiras de comprimento 6 cm e uma de comprimento 3 cm. No entanto, Pedro acrescenta uma outra decomposição aditiva de 21, ao considerar uma tira correspondente a 12 e uma outra a 9.

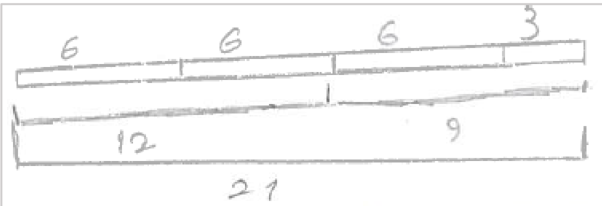


Figura 124: Como Pedro esquematiza a utilização das tiras de cartolina

Bruno e um outro aluno (cuja folha não está identificada) optam por ligar as tiras de cartolina através do símbolo da operação adição (+). Ambos legendam o interior dos retângulos com o valor correspondente ao comprimento das tiras e Bruno completa esta representação icónica (figura 125, à esquerda) com chavetas horizontais que vão ligar cada tira à respetiva representação simbólica cujo total iguala a 21.

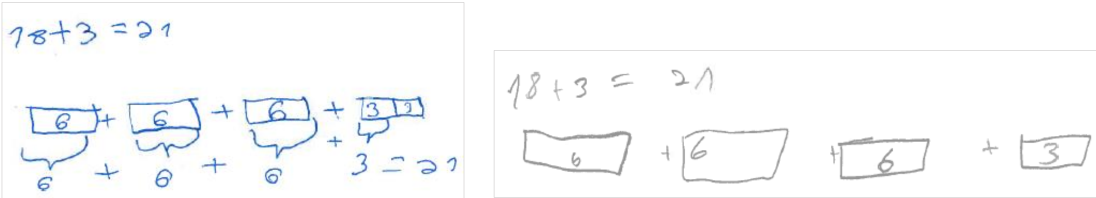


Figura 125: Representação icónica das tiras de cartolina e respetiva tradução simbólica

Paula, depois de justificar que a maior reprodução do desenho tem que ser um quadrado de dimensões 21, representa, na mesma linha, quatro tiras de cartolina (não unidas) e identifica a medida de comprimento, 6, por cima das três primeiras. Divide cada tira em quatro partes (congruentes) e legenda-as, no interior, com 1,5, o que sugere que identifica este valor como sendo a quarta parte de 6. Por baixo indica, auxiliada por chavetas horizontais, a percentagem relativa à totalidade ou apenas a metade da tira, 100% e 50%, respetivamente, como se vê na figura 126.

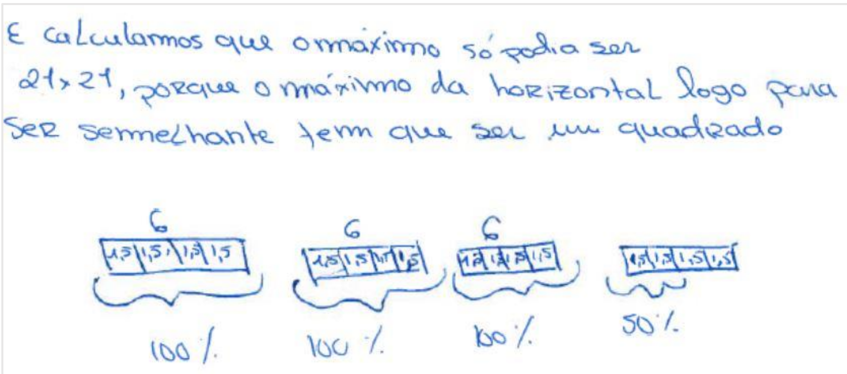


Figura 126: Como Paula relaciona inteiros, e não inteiros, e percentagens

Ricardo usa uma representação idêntica à de Paula, apresenta (figura 127) quatro tiras de cartolina (não unidas), numa linha, e identifica a medida de comprimento, 6, por cima das três primeiras, e 3 por cima da quarta. Divide cada tira em seis partes (congruentes) e começa por legendá-las, no interior, com o valor errado 1,5, o que torna a sua resolução não coerente uma vez que não relaciona corretamente o número de divisões indicadas na tira de cartolina e o valor que regista no interior de cada pedaço. Por baixo indica ainda as percentagens 100% e 50%, sem especificar a que parte da tira correspondem.

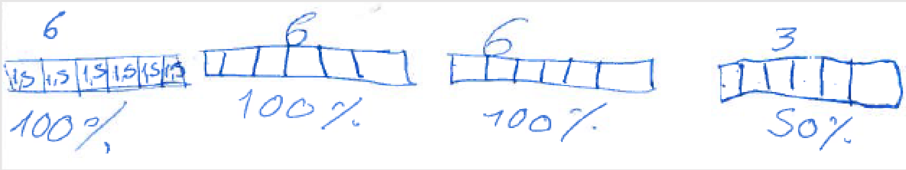


Figura 127: Como Ricardo relaciona, incorretamente, inteiros e não inteiros

Telmo e Vítor são os únicos que colocam as tiras topo a topo, na vertical, e esquematizam o quadrado que será a reprodução do desenho.

André e Laura apresentam (figura 128) as dimensões do desenho original (6 × 6) e determinam a sua medida de área, indicando erradamente como resultado 12. Determinam também a medida de área da folha de papel A4, 630, e calculam depois a diferença entre os dois valores. Laura representa ainda um quadrado de lado 21 e, tal como André, compara 21 com 6 calculando a diferença entre 21 e 6.

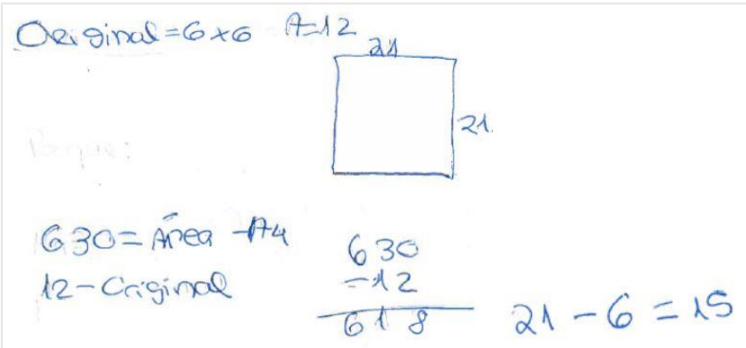


Figura 128: Resolução de Laura

Cinco alunos registam 3,5 quando comparam as dimensões do desenho original (6) e da sua maior reprodução numa folha de papel A4 (21). Três deles justificam este valor indicando uma multiplicação cujos fatores são 6 e 3 e uma adição cujas parcelas são 18 e 3. Dois acrescentam que “3 é metade de 6” (figura 129, à esquerda) e um escreve incorretamente que “3 é metade de 21” (figura 129, à direita).

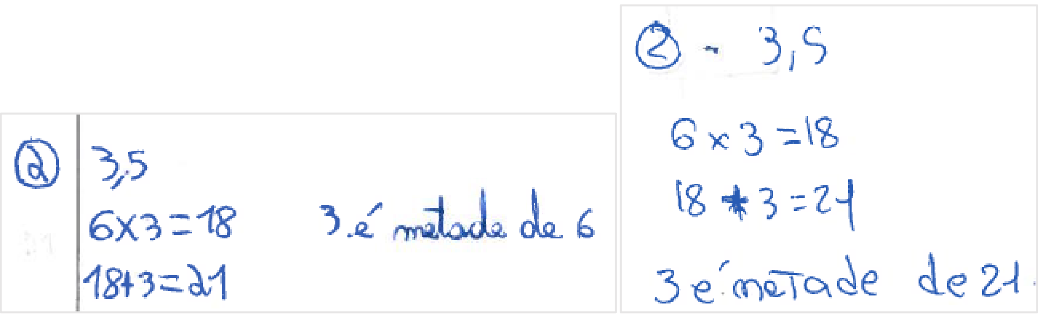


Figura 129: Justificações para a indicação do fator 3,5

Os outros dois alunos, Telmo e Rita, dividem primeiro 21 por 6 e a seguir multiplicam 3,5 por 6. Telmo apresenta (figura 130) o algoritmo da divisão (sem o resto) e Rita indica apenas os cálculos e os resultados.

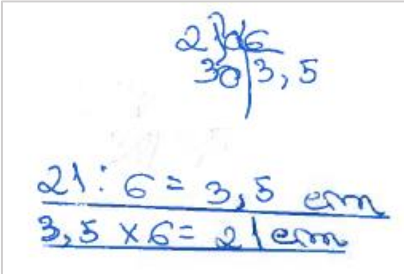


Figura 130: Resolução de Telmo

Rodrigo (figura 131) e Andreia, quando respondem que a reprodução aumentou em relação ao desenho original, ilustram a sua resposta com o esquema das tiras de cartolina e são os únicos que representam o valor simultaneamente sob a forma de numeral misto, fração e percentagem.

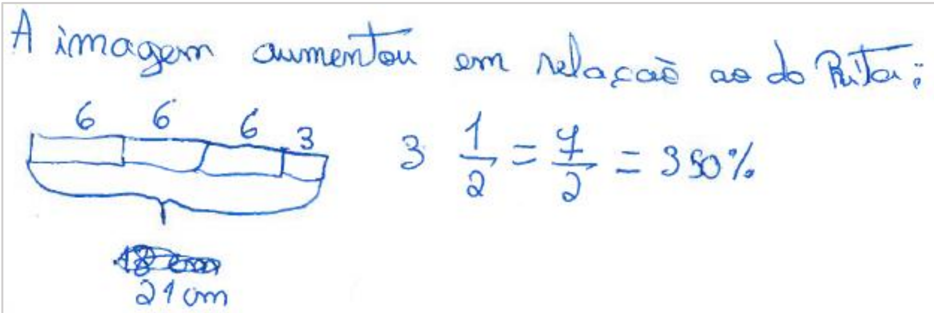


Figura 131: Como Rodrigo responde à comparação das dimensões

Dois alunos, Beatriz (figura 132) e Pedro, justificam em texto porque é que na sua opinião a reprodução do desenho aumentou 6,5 (valor incorreto que surge após 3,5 ser alterado). Esta substituição pode ter tido origem numa confusão entre 6 (medida de comprimento do desenho original) e 3 (número de vezes que o 6 cabe no comprimento da reprodução).

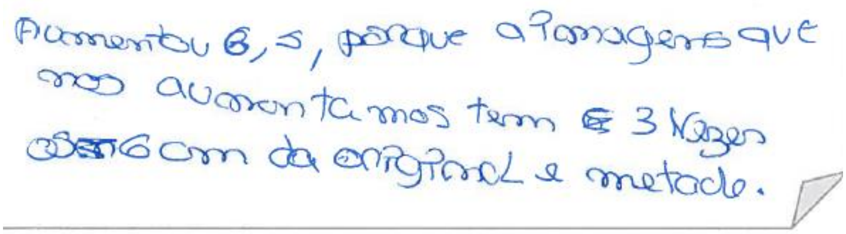


Figura 132: Como Beatriz responde à comparação das dimensões

Em síntese. Na primeira parte, os alunos registam numa tabela de dupla entrada o que consideram semelhante/diferente, em cada uma das imagens (A, B, C e D), relativamente ao desenho original. Mencionam características como a cor e as ilustrações do desenho (gato, cão, pássaros, …) e referem também se o tamanho aumentou/diminui e se a forma se manteve ou não, mas nos registos escritos esta ideia não transparece. Oralmente surge a ideia de comparar áreas, por sobreposição do desenho original com a imagem B e do preenchimento total da imagem A com a original e a D. Identificam, num esquema em árvore proposto pela professora, que as imagens A e C são semelhantes à original e as imagens B e D estão deformadas relativamente à original.

Na parte 2, todos os alunos escolhem as lupas corretas para as imagens A, B e C e apenas dois não o fazem relativamente à largura da imagem D. Associam as lupas aos conceitos de ampliar, reduzir e manter. Maioritariamente, o fator associado à lupa de ampliar é representado sob a forma de numeral misto ($1\frac{1}{2}$); o fator associado à lupa de reduzir é representado sob a forma de fração ($\frac{3}{4}$). Vários alunos utilizam as dobragens nas tiras de cartolina para justificarem os fatores apresentados, responderem à questão "Quantas vezes cabe o comprimento original no/na comprimento/largura da imagem?" e assim relacionarem multiplicativamente os valores da grandeza em causa.

Em relação à parte 3, a professora, em discussão conjunta com os alunos, identifica a imagem e as respetivas dimensões na janela 1 e regista numa tabela, no quadro, as dimensões de todas as imagens. Nas restantes janelas, todos os alunos identificam as imagens certas e indicam corretamente as respetivas dimensões. As justificações surgem sempre em linguagem matemática, mas na maioria não está explícita a maneira como chegam aos resultados, limitando-se à indicação horizontal das operações. Os que especificam os procedimentos de cálculo utilizam os algoritmos da multiplicação de frações ou da multiplicação de um decimal por um inteiro.

Na quarta e última parte, todos os alunos indicam que a maior ampliação possível do desenho deve ter as dimensões coincidentes com a largura da folha de papel fotográfico A4 (21 cm). Isso sugere que os alunos interiorizaram a importância de manter a forma para que duas imagens sejam semelhantes. Na questão que envolve relacionar 21 e 6, os alunos utilizam preferencialmente procedimentos aditivos que derivam diretamente dos esquemas com as tiras de cartolina. Apenas dois alunos apresentam procedimentos multiplicativos, ou seja, indicam $21 : 6 = 3{,}5$ e $6 \times 3{,}5 = 21$, e apenas um determina o resultado da divisão por aplicação do algoritmo.

5.2.3 Tarefa 3: Cálculos e mais cálculos…

Parte 1. Pretende-se calcular, da forma mais conveniente, um primeiro grupo de expressões do tipo: 12 × □. A professora começa por reforçar que o objetivo da tarefa não é apenas efetuar os cálculos, mas estimular o cálculo mental, "mostrarem como é que pensam para fazer este cálculo". Assim, na abordagem inicial da tarefa, no cálculo da primeira expressão, a discussão surge à volta do fator representado sob a forma de numeral misto, $1\frac{1}{2}$. Fábio sugere (episódio 24) a sua substituição por uma fração, $\frac{3}{2}$, obtida através da aplicação de uma regra que conhece.

> Professora – (...) Assim, de forma rápida na tua cabeça, será que mentalmente, eu consigo logo fazer isto?
> Alunos – Não.
> Professora – Não?!
> Fábio – Sim.
> Professora – Não sai! Consegues?
> Fábio – Sim. Sim!
> Professora – Como?
> Fábio – Fazendo no numeral misto... ahm... multiplicamos o denominador e a unidade e somamos o numerador.
> Professora – Isso estás-me a dizer como é que se calcula um numeral misto.
> Fábio – Sim.
> Professora – Ok!
> Fábio – E depois fazemos uma multiplicação normal.
> Professora – Ok! Muito bem! Outra forma de fazer.

Episódio 24: Como Fábio substitui o numeral misto por uma fração

Bruno, de braço no ar, expõe oralmente (episódio 25) a ideia de substituir a fração do numeral misto por um numeral decimal (0,5) e de efetuar o cálculo.

> Professora – Então eu consigo saber quanto é... e eu consigo mentalmente fazer isso? Uma unidade e meia de outra?!
> Bruno [com o braço levantado] – Sim. Sim.
> Professora – Diz.
> Bruno – Então podemos ir... hum... hum... a nossa... nós aqui temos doze vezes uma unidade. Uma unidade é um e depois um meio é zero vírgula cinco.
> Professora – Hum! Hum!
> Bruno – Então nós fazemos o doze vezes um, vai dar doze. E depois doze vezes zero vírgula sei... zero vírgula cinco, ou seja, vai dar seis. É metade.

Episódio 25: Como Bruno substitui o numeral misto e efetua os cálculos

A professora traduz, no quadro, o procedimento de Bruno e aproveita para questionar qual a propriedade da multiplicação que estão a aplicar. Carla responde que é a "distributiva". De seguida, os alunos copiam para a sua folha de resposta o que está no quadro e, por isso, os vinte registos de resolução são todos similares e baseados no mesmo raciocínio. A resolução de Paula (figura 133) é disso um exemplo.

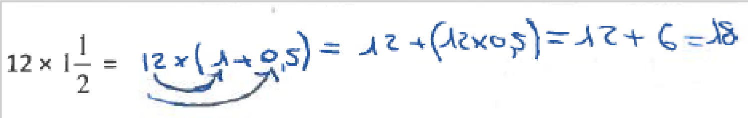


Figura 133: Resolução de Paula para calcular $12 \times 1\frac{1}{2}$

A trabalhar em pares, os alunos calculam o valor da segunda expressão. Bruno repete oralmente a relação de igualdade entre $\frac{1}{2}$ e 0,5, a professora recorda que $\frac{1}{2}$ pressupõe de imediato a determinação de "metade de qualquer coisa" e, por isso, sempre que surge o fator 0,5 não é necessário efetuar o algoritmo da multiplicação. Bruno concorda e diz "é metade, é dividir por dois". Após estas intervenções, da professora e de Bruno, as resoluções dos vinte alunos são todas baseadas na decomposição decimal de 1,5 e no procedimento já utilizado na expressão anterior. O registo de Gabriel (figura 134) exemplifica-o.

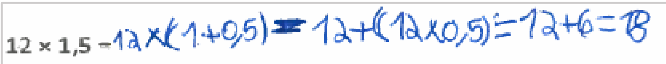


Figura 134: Resolução de Gabriel para calcular $12 \times 1,5$

Rodrigo nota, de forma audível para toda a turma, que "vai sempre tudo dar o mesmo" e a professora aprova a sua observação. Numa outra discussão conjunta com os alunos, retoma a ideia de substituir o numeral misto pela fração correspondente e aproveita para tentar que a esclareçam sobre o porquê do funcionamento da regra que Fábio tinha mencionado. Carla explica (episódio 26).

> Carla [com o braço no ar] – (...) Acho que o um, a unidade, pode ser considerada dois... ham... dois sobre dois [com o indicador direito levantado, desenha no ar: dois, traço, dois].
> Professora – Ou seja, dois meios. [Rodrigo levanta o braço.]
> Carla – Sim.
> Professora – Porque uma unidade... estamos a trabalhar em meios, a unidade é dois meios. E agora?
> Carla – Mais...
> Professora – Mais o quê?
> Carla – Um meio.
> Professora – Um meio, que está aqui. Quanto é que isto vai dar?
> Carla – Três meios.

Episódio 26: Explicação de Carla da regra de transformar um numeral misto numa fração

Alguém afirma que a seguir é fazer “a multiplicação normal” e Rita elucida (episódio 27) o significado da expressão como sendo a aplicação da regra da multiplicação de dois números escritos sob a forma de fração.

> Rita [estica o braço direito e aponta para o quadro] – É o denominador vezes o denominador e o numerador vezes o numerador.
> Professora – Então quanto é que isto dá?
> Rita – Trinta e seis meios.

Episódio 27: Explicação de Rita sobre a "multiplicação normal"

Perante esta resposta, a professora solicita que lhe indiquem o resultado final e Bruno diz “fazemos o trinta e seis a dividir por 2”. Este cálculo não parece acessível a todos os alunos e, como tal, a professora insiste que lhe indiquem um processo, sem “fazer a divisão ao lado”, que permita rapidamente encontrar a solução. Bruno fala em “decompor o número”, ela corrobora e realça que a decomposição decimal do número pode facilitar o cálculo. No caso em apreço (episódio 28), a divisão de cada valor de posição por 2 e a adição dos resultados permite-nos ultrapassar dificuldades de cálculo (caso existam) e chegar à resposta.

> Professora – Quanto é que é trinta e seis?
> Bruno – Dezoito mais dezoito. [Com risos à mistura.]
> Rodrigo – É trinta mais seis.
> Professora – É trinta mais seis. [Regista à direita do sinal igual “(30 + 6)”.] Reparem, o dezoito... o trinta... já pareço o Bruno. O número é trinta mais seis.
> Aluno – Sim.
> Professora – Quando eu tenho dificuldade em calcular metades, quartas partes e etc., posso fazer de outra maneira. Eu sei que trinta e seis é trinta mais seis [aponta 30 + 6] e depois eu quero dividir por dois, verdade? [Escreve à direita “: 2 =”.]
> Rodrigo – Metade de trinta...
> Professora – Quanto é que é metade de trinta e metade de seis?
> Alunos – É quinze... é três.
> Professora – O que vou fazer é trinta a dividir por dois mais o quê? Mais seis a dividir por dois. [Escreve à direita “(30 : 2) + (6 : 2) =”.] Ou seja, faço por partes. Então, quanto é que dá trinta a dividir por dois?
> Alunos – Quinze.
> Professora – É quinze [regista “15”] mais [aponta o sinal + da expressão anterior] três [em simultâneo com alguns alunos e regista “+ 3”]. Isto é igual a dezoito [em simultâneo com alguns alunos e escreve “= 18”]. Isto é só para quem tinha alguma dificuldade em calcular metades.

Episódio 28: Decomposição decimal de um número para facilitar o cálculo

Todos os alunos calculam o valor da terceira expressão através do procedimento baseado na regra de multiplicar um número inteiro por um número escrito sob a forma de fração.

Catorze especificam depois a decomposição decimal do numerador do produto (36) e a divisão de cada uma das parcelas por dois, como na resolução de Eva (figura 135, em cima). Três, entre os quais André (figura 135, ao meio), não explicitam como substituem $\frac{36}{2}$ por 18. Dois utilizam o procedimento de simplificação de frações, dividindo ambos os termos de $\frac{36}{2}$ por um mesmo número (2), como no registo de resolução de Rodrigo (figura 135, em baixo). Inês é a única que apresenta o algoritmo da divisão para justificar que $\frac{36}{2}$ é igual a 18.

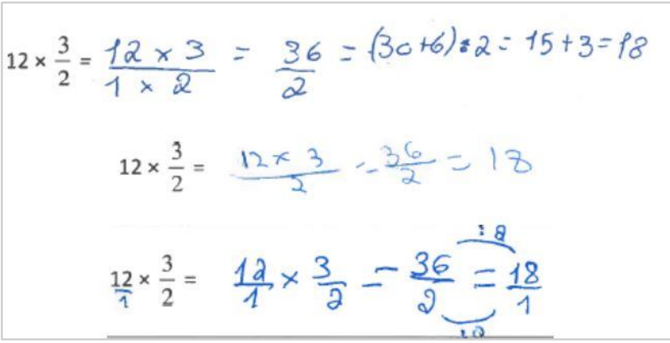


Figura 135: Resoluções de Eva, de André e de Rodrigo para calcular $12 \times \frac{3}{2}$

Para calcular o valor da quarta expressão, a professora realça que os procedimentos não devem ser a repetição integral dos utilizados anteriormente. Bruno olha atentamente para a sua folha de resposta e lança a ideia (episódio 29), acompanhada com entusiasmo por uma colega, de calcular primeiro doze vezes um meio e depois multiplicar por três.

> Bruno – Então, podemos fazer o doze vezes um meio, que dá seis.
> Aluna – Yah!
> Bruno – Depois, seis vezes três, dá dezoito.
> Aluna – Yah! Yah!

Episódio 29: Bruno explica oralmente como calcular $12 \times 3 \times \frac{1}{2}$

Uma outra aluna, em resposta à solicitação da professora para identificarem a propriedade da multiplicação utilizada por Bruno, menciona que estão a aplicar a "propriedade troca-tiva", expressão que sugere o que foi feito e é motivo de risota.

Dezanove alunos, entre os quais Bruno (figura 136, em cima), apresentam o registo da resolução que ele propôs e que foi transcrito pela professora no quadro. Dois destes alunos (Rodrigo e Telmo) não indicam, no entanto, o fator 3 no primeiro passo da resolução (figura 136, ao meio). André é o único que resolve a multiplicação mantendo a ordem dos fatores (figura 136, em baixo).

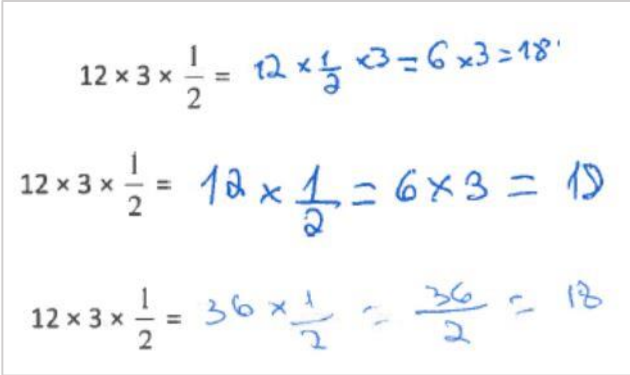


Figura 136: Resoluções de Bruno, de Rodrigo e de André para calcular $12 \times 3 \times \frac{1}{2}$

Perante o segundo grupo de expressões do tipo $20 \times \square$, na determinação do valor da primeira, dezoito alunos registam, como resultado do primeiro passo da resolução, $\frac{60}{4}$ e depois, como resultado final, 15. Aplicam a regra de multiplicação de números escritos sob a forma de fração, tal como se observa no registo de resolução de Ricardo (figura 137) que, ao contrário de todos os seus colegas, não apresenta a resposta, 15.

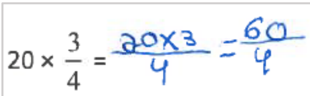


Figura 137: Resolução de Ricardo para calcular $20 \times \frac{3}{4}$

Dois alunos, Pedro e Bruno, transformam a fração $\frac{3}{4}$ na divisão 3 : 4 (figura 138) e efetuam os cálculos na sequência com que surgem.

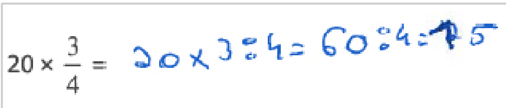


Figura 138: Resolução de Bruno para calcular $20 \times \frac{3}{4}$

Rita descreve oralmente (episódio 30) o seu processo de resolução para calcular 60 : 4. Simultaneamente, a professora transcreve-o no quadro, discute as incongruências obtidas e faz apelo ao uso de registos cuidados.

> Rita [de lápis no ar, em direção ao quadro] – Nós pusemos entre parenteses sessenta a dividir por dois. [Silêncio enquanto a professora escreve no quadro.] Fecha parenteses. É igual a trinta.
> Professora – A trinta.
> Bruno – A trinta sobre dois.
> Professora – Vamos só olhar para isto [(60 : 2) = $\frac{30}{2}$]. Isto [60 : 2] é igual a isto [$\frac{30}{2}$]?
> Alunos – Não.
> Professora [abana a cabeça em conformidade] – Não! [Com a mão apaga o dois do denominador da fração.] O que tu queres dizer é o

quê? Sessenta a dividir por dois e deu-te trinta [o indicador continua no quadro a pontar para o 30] e depois... o que é que tu queres dizer? Pegaste no trinta e colocaste a dividir por dois, é isso que queres dizer? [À frente de 60 : 2 = 30, regista a outra igualdade “30 : 2 = 15”.] Portanto, o que é que vocês fizeram? Dividiram por dois e depois outra vez por dois, para dividir no final... estão a dividir por quanto?

Aluno – Por quatro.

Professora – Para achar a quarta parte, não é? O quinze está quantas vezes no sessenta?

Aluno – Quatro.

Professora [olha para o que está no quadro] – Está quatro vezes no sessenta. Muito bem!

Episódio 30: Explicação de Rita para calcular 60 : 4

No final, as resoluções de Rita (figura 139, em cima) e de Telmo (figura 139, em baixo) apresentam ainda as fragilidades realçadas pela professora e que não foram corrigidas.

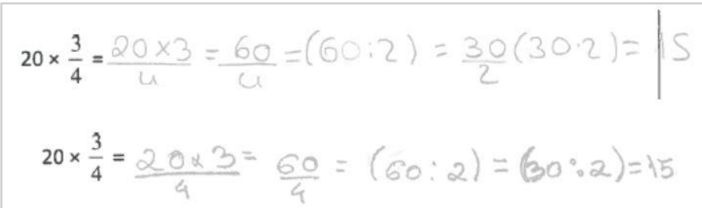


Figura 139: Resoluções de Rita e de Telmo para calcularem $20 \times \frac{3}{4}$

Para chegar ao resultado final (15), oito dos alunos que indicam $\frac{60}{4}$ utilizam os procedimentos de simplificação de frações, já do seu conhecimento. Andreia é uma das alunas que regista pormenorizadamente todos os passos (figura 140), tal como a professora, no final, representou no quadro.

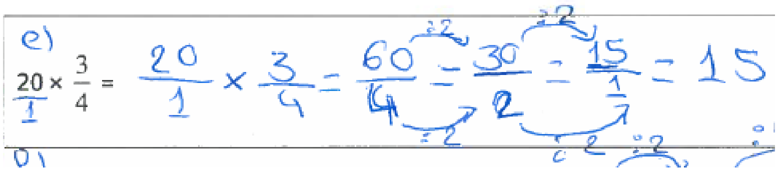


Figura 140: Simplificação de $\frac{60}{4}$ apresentada por Andreia

André refere (episódio 31) o mesmo procedimento, apenas diferindo no último passo em que determina o resultado de trinta a dividir por dois.

André [gesticulando com as duas mãos e os braços fletidos] – Professora, nós pensámos assim: nós tínhamos que passar os sessenta quartos para uma fração equivalente, dava trinta meios. E depois dividi o trinta meios, vai dar quinze.

Professora – Ok!

Episódio 31: Explicação de André na simplificação de $\frac{60}{4}$

Três alunos indicam sucessivas divisões por dois, “60 : 2 : 2”, dois relacionam aditivamente sessenta e quinze, “60 = 15 + 15 + 15 + 15”, dois não apresentam quaisquer justificações e Inês usa, mais uma vez, o algoritmo da divisão.

Para calcular o valor da segunda expressão, treze alunos trocam a posição dos fatores $\frac{1}{4}$ e 3, efetuam os cálculos na sequência natural e obtêm, tal como na expressão anterior, $\frac{60}{4}$, como se pode observar na resolução de Júlia (figura 141). Esta aluna não indica o resultado final, que surge nas resoluções das outras duas expressões, mas quase todos os outros alunos o explicitam sem, no entanto, apresentarem cálculos auxiliares.

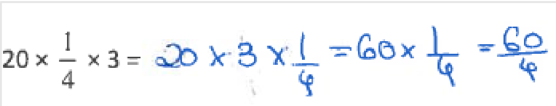


Figura 141: Resolução de Júlia para calcular $20 \times \frac{1}{4} \times 3$

André explica oralmente (episódio 32) para toda a turma esta resolução, mencionando corretamente a propriedade da multiplicação que utilizaram.

> André – Nós fiz... nós fizemos a... a propriedade comutativa, metemos o vinte vezes o três, mudámos o três com o um quarto...
>
> Professora – Portanto, vocês preferiram fazer isto [Escreve “$20 \times 3 \times \frac{1}{4}$ =”.], não era? Assim [aponta para o que acaba de escrever], foi isto? Ficou quanto?
>
> André – Depois fizemos vinte vezes três que deu sessenta vezes um quarto [a professora regista “$60 \times \frac{1}{4}$=” e fica à espera que André continue]. Depois o sessenta vezes um quarto deu sessenta quartos [a professora regista “$\frac{60}{4}$”] e dividimos o sessenta por quatro que deu quinze.

Episódio 32: Explicação de André para calcular $20 \times \frac{1}{4} \times 3$

Jorge (figura 142) é o único que substitui $\frac{1}{4}$ por um numeral decimal, 0,25, e mantém a ordem dos fatores. Apresenta depois, sem que se perceba o que fez, um resultado incorreto.

Figura 142: Resolução de Jorge para calcular $20 \times \frac{1}{4} \times 3$

A ordem dos fatores é também mantida por mais seis alunos, entre eles Bruno (figura 143), que primeiro determinam $\frac{20}{4}$ e depois multiplicam por 3, para obterem $\frac{60}{4}$, antes do resultado final.

Figura 143: Resolução de Bruno para calcular $20 \times \frac{1}{4} \times 3$

Pedro considera que esta última questão é resolvida ao contrário da de André e explica-a oralmente, enquanto a professora a transcreve no quadro (episódio 33).

> Pedro – Nós fizemos ao contrário deles.
> Professora – O que é... o que é que é isso de fazer ao contrário? Explica lá.
> Pedro [estica o braço direito e aponta para o que está escrito no quadro] – Nós começámos logo por fazer o vinte vezes um quarto.
> Professora – Ok! Ou seja, mantiveram e começaram por fazer primeiro o que aparecia primeiro [por baixo dos dois fatores surge um traço em V para os ligar], é isso? E então?
> Pedro – Deu-nos vinte quartos.
> (...)
> Professora – Fizeram assim, foi? [Escreve "$\frac{20}{4} \times 3 =$"]
> Pedro [baixinho] – Sim.
> Professora – E depois mantiveram o três, foi isto? E agora?
> Pedro – Deu-nos sessenta...
> Professora – Portanto, vocês, o que fizeram foi... fizeram a multiplicação, [aponta rapidamente os numeradores] vinte vezes um é vinte... [aponta rapidamente a zona dos denominadores] quartos e depois vezes três. E depois aqui, vinte a dividir por quatro...
> Pedro – Deu-nos sessenta e depois sobre...

Episódio 33: Explicação de Pedro para calcular $20 \times \frac{1}{4} \times 3$

Para calcular o valor da terceira expressão, onze alunos substituem 0,75 por $\frac{3}{4}$ e utilizam exatamente os procedimentos de resolução das outras duas expressões. Rodrigo decompõe aditivamente 0,75 (0,75 = 0,25 + 0,50), mas baralha-se na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição o que origina alguma confusão (episódio 34).

> Rodrigo – O zero vírgula setenta e cinco é igual a zero vírgula vinte cinco mais zero vírgula cinquenta.
> Professora – Mas dita-me lá o que é que escreveste.
> [A professora escreve no quadro "20 × 0,75 = 0,25 + (20 × 0,50)", deixando o 0,25 ligeiramente afastado do sinal igual e à frente continua a escrever "= 0,25 × 10". Rodrigo vai ao quadro explicar.]

Rodrigo – Então, o zero vírgula setenta e cinco é igual a zero vírgula vinte e cinco mais zero vírgula cinquenta. [Por baixo de 0,75 faz um traço em V invertido e escreve, em cada extremidade, “0,25” e “0,50” e, no meio, “+”.] (...) Agora coloquei o 0,25 [aponta o 0,25 que tinha acabado de escrever para a seguir apontar o 0,25 na expressão copiada da sua folha], e para facilitar pus vinte vezes zero vírgula cinquenta [aponta com o giz (20 × 0,50)], que ia dar zero vírgula vinte e cinco... [aponta para 0,25].

Professora – Não! Zero vírgula vinte e cinco... é vinte e cinco centésimas é um número... e depois apareceu aí um dez! [Rodrigo está de lado, meio virado para o quadro, meio virado para a turma.] (...) Ele apareceu-lhe aqui este dez [aponta em sequência do 10 para 20 × 0,50 e, meio de lado, olha para a turma]. É fácil ver que é dez ali, ou não?

Alunos [vários] – Sim... sim...

Professora – Porquê? Porque é que é fácil de ver?

Bruno – Então, zero vírgula cinquenta...

Professora – É metade. Porque é que eu sei que isto é metade de vinte? [Aponta alternadamente de 0,50 para 20.] (...)

Bruno – Dividir por dois.

Professora – É metade, é dividir por dois. [Por baixo de 0,50 coloca uma seta e representa $\frac{1}{2}$.] Portanto, ele pôs lá o dez. Até aí tudo bem, verdade?

Alunos [baixinho] – Sim.

Professora – Então e depois? [Afasta-se do quadro.] Há ali qualquer coisa! Não lhe está a dar o valor! Ele sabe que dá quinze e não lhe está a dar. Alguma coisa aconteceu ali. Quem é que quer ajudar? [Silêncio.] Vamos lá olhar desde o princípio. O que é que aconteceu? O que é que ele fez? [Silêncio.]

Bruno [virado para trás para falar diretamente para a professora] – Então... separou-os.

Professora – Separou-os. De qualquer maneira foi?

Alunos – Não.

Bruno – Não! Pôs um entre parenteses e outro solto.

Professora – Então e o que ele pôs entre parênteses... O que ele colocou entre parênteses foi as cinco décimas, cinquenta centésimas. Está certo aquilo? [Silêncio.] Está sozinho, cinquenta centésimas? [Silêncio.] Ou está com alguma coisa? [Silêncio.] Está com quê? Está com quem, entre parênteses?

Alunos + professora – Com o vinte.

Professora – E as vinte e cinco centésimas?!

Alunos – As vinte e cinco centésimas... à solta...

Professora – Está à solta e fresca, não é? Anda solta... portanto, está tudo bem?! Então eu estou a calcular metade só de cinquenta centésimas...

Rodrigo – No final é isto [aponta para a expressão numérica 0,25 × 10], agora vamos buscar o zero vírgula vinte e cinco!

Episódio 34: Propriedade distributiva da × em relação à +, aplicada por Rodrigo

Cria-se um impasse e, por fim, após vários comentários, a professora escreve no quadro “20 × (0,25 + 0,50)”. Fábio refere então corretamente (episódio 35) como funciona esta propriedade da multiplicação e, em simultâneo, a professora regista no quadro. Bruno parece duvidar do procedimento, mas incentivados pela professora, os alunos vão dizendo os resultados intermédios e chegam à expressão “5 + 10 = 15”, que lhes permite confirmar o resultado final.

> Fábio – Vinte vezes o zero vinte e cinco [a professora assinala uma seta curva de 20 para 0,25 e regista “(20 × 0,25)”] e depois o... o... o vinte outra vez vezes o zero cinquenta [a professora assinala outra seta curva de 20 para 0,50 e continua a escrever “+ (20 × 0,50)”].
> Alunos – Ham!
> Bruno – Assim estás a repetir o vinte.
> Professora [com a boca aberta de espanto] – O que é que é a propriedade distributiva?! Vinte vezes isto [segue a seta com o indicador direito] e vezes isto [segue a outra seta com o indicador direito] e o que ele fez... Então, vamos ver, não sei se dá ou não. Vamos ver. Isto é o quê? Olha! Isto é a mesma coisa que ter o quê? [Aponta com o indicador direito 0,25.] Mas eu sei que vinte e cinco centésimas é a mesma coisa que ter o quê? [Coloca uma seta a partir de 0,25 e regista em letra mais pequena $\frac{1}{4}$.] Um quarto, é ou não é?
> Alunos – Sim.
> Professora - Quanto é um quarto de vinte?
> Alunos – É cinco.
> Professora – Metade da metade. [Regista numa outra linha, por baixo de 20 × 0,25, “5”.]

Episódio 35: Propriedade distributiva da × em relação à +, aplicada por Fábio

Na folha de resposta de Rodrigo (figura 144) é possível ver os seus registos iniciais riscados e substituídos pelos dos procedimentos que foram referidos por Fábio.

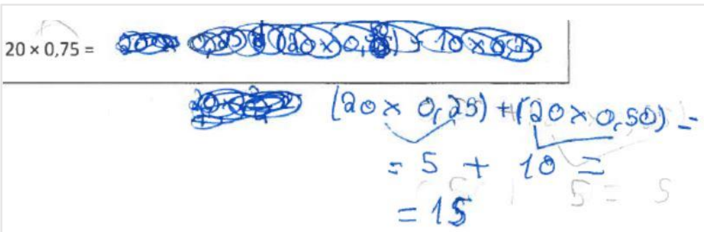


Figura 144: Resolução de Rodrigo para calcular 20 × 0,75

Mais dois alunos indicam esta decomposição aditiva, copiada do quadro. Quatro alunos deixam em branco esta expressão e dois indicam cálculos, sem nexo, que indiciam uma mistura de tudo o que foi entretanto dito na aula.

Relativamente ao terceiro grupo de expressões, 25 × □, para determinar o valor da primeira, treze alunos efetuam a multiplicação e registam $\frac{25}{2}$. Muitos deles, tal como Fábio (figura 145), indicam a seguir o resultado final sem qualquer justificação.

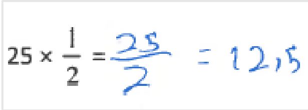


Figura 145: Resolução de Fábio para calcular $25 \times \frac{1}{2}$

Quatro alunos substituem $\frac{1}{2}$ por 0,5. Três indicam simplesmente o resultado (12,5) e Bruno apresenta (figura 146) também a decomposição decimal de 25 (25 = 20 + 5). Num passo intermédio esquece-se do fator 0,5, mas isso não invalida que os valores a seguir e a solução estejam corretos.

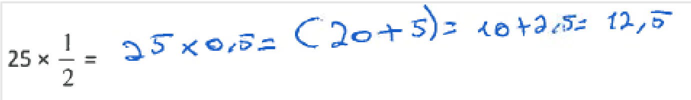


Figura 146: Resolução de Bruno para calcular $25 \times \frac{1}{2}$

Três alunos não respondem.

Na determinação do valor da segunda expressão, onze alunos limitam-se a apresentar o resultado (12,5). Cinco substituem 0,5 por $\frac{1}{2}$ e quatro deles aplicam a regra da multiplicação de dois números escritos sob a forma de fração, como é o caso de Laura (figura 147).

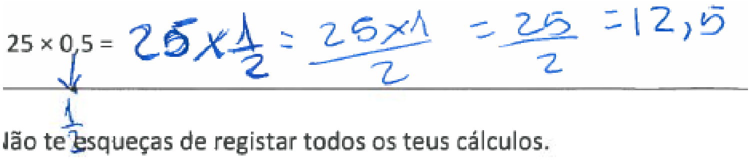


Figura 147: Resolução de Laura para calcular 25 × 0,5

Quatro alunos não respondem a este problema, três dos quais também não tinham respondido ao anterior.

Parte 2. Evidenciam-se as relações proporcionais entre os termos de uma multiplicação, em esquemas e numericamente. A aula começa pela interpretação conjunta, da professora e dos alunos (episódio 36), sobre o esquema, a respetiva tradução simbólica e as consequentes três igualdades das relações proporcionais entre os termos da multiplicação 6 × 2 =12 (apresentada como exemplo no enunciado). Os alunos relacionam as expressões “um meio de” e “um sexto de”, respetivamente, com “metade de” e “a sexta parte de”, e as operações multiplicação e divisão.

> Professora – Vamos lá, então o que é que quer dizer... se eu tenho seis vezes dois é igual a doze, então seis é igual a quê? [Escreve, por baixo da igualdade 6 × 2 = 12, “6 =”]
> Rodrigo – A um meio vezes doze.

Professora [aproximando-se de Rodrigo] – Metade de ...
Alunos – Doze.
Professora – De doze. É verdade? Seis é metade de doze?
Alunos – Sim! É!
(…)
Professora – Então e se eu tiver o dois? [Escreve, por baixo das outras duas igualdades “2 =”] Dois é igual a quê?
Bruno – Um sexto de doze.
Professora – É um sexto de doze [escreve à frente do sinal igual “$\frac{1}{6} \times 12$”]. Como é que nós podemos dizer isto de outra maneira?
Rodrigo – É a sexta parte de doze.
Professora [abana a cabeça em sinal de concordância] – É a sexta parte de doze. Então, como é que eu escrevo a sexta parte de doze? [Silêncio.] Aqui é o quê? [Aponta $6 = \frac{1}{2} \times 12$] Aqui é metade de doze? Estávamos há pouco a dizer. Como é que eu posso escrever metade de doze? [Com a mão direita apoiada no quadro aguarda que alguém responda.]
Bruno – Doze a dividir por dois.
Professora [repete e escreve “12 : 2”] – Doze a dividir por dois. Está certo?
Aluno – Sim.
Professora – É metade de doze, é doze a dividir por dois. E ali, diz o Gonçalo, e bem, é a sexta parte do doze. Como é que é a sexta parte?
Aluno – Doze a dividir por seis. [Em simultâneo a professora escreve “12 : 6”.]
Professora – Então, vamos lá ver, estes números estão todos relacionados entre si? Estão, ou não?
Aluno – Sim.

Episódio 36: Interpretação conjunta do exemplo do enunciado

De seguida, perante o esquema 1, todos os alunos indicam corretamente os fatores e os divisores aí omissos, com exceção de um que deixa em branco a segunda parte. Também todos os alunos registam as três igualdades que traduzem as relações proporcionais entre os termos da multiplicação 4 × 7 = 28. No entanto, três deles trocam o sinal igual com o símbolo da multiplicação (figura 148).

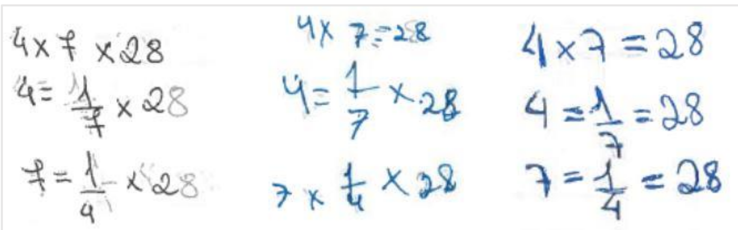


Figura 148 : Trocas entre o sinal igual e o símbolo da multiplicação

Vítor é o único que explica (episódio 37) que chegou a 7 e a 4 através das respetivas tabuadas.

Vítor – Ahm...Porque eu fui à tabuada do quatro e... logo depois... e fiz quatro até chegar ao vinte e oito.
Professora – Sim. Pensaste na tabuada, foi isso? Sete vezes quatro, vinte e oito. E agora eu tenho vinte e oito [aponta do 28 para o 4, sobre a seta respetiva], para eu chegar aqui ao quatro, o que é que eu faço?
Vítor – Divide-se por sete.
Professora – Se eu multiplico... se eu ali multiplico, depois faço o quê?
Vítor – Tem que dividir...
(...)
Professora – Muito bem!
(...)
Vítor – É a mesma coisa, tem que se ir do sete até ao vinte e oito, na tabuada, e... é o quatro.

Episódio 37: Justificação de Vítor baseada nas tabuadas

O esquema 2 pretende ilustrar as relações proporcionais entre os termos da multiplicação $15 \times 3 = 45$, novamente três números inteiros, mas onde os valores omissos estão agora numa outra posição. Dezoito alunos preenchem corretamente os espaços em branco, um, na segunda parte, escreve "× 3" em vez de "× 15", e outro deixa este espaço em branco. Em relação às três igualdades, todos as indicam corretamente, exceto um que regista o fator "$\frac{1}{5}$" em vez de $\frac{1}{15}$ e outro que regista, tal como no esquema anterior, apenas as igualdades: "$15 = \frac{1}{3} \times 45$" e "$3 = \frac{1}{15} \times 45$". Fábio e Jorge apresentam (figura 149), além das três igualdades pretendidas, uma outra onde trocam a posição dos fatores iniciais e também duas divisões, com divisores 15 e 3, que parecem estar relacionadas com as igualdades onde um dos fatores é igual ao produto inicial vezes o inverso do outro fator.

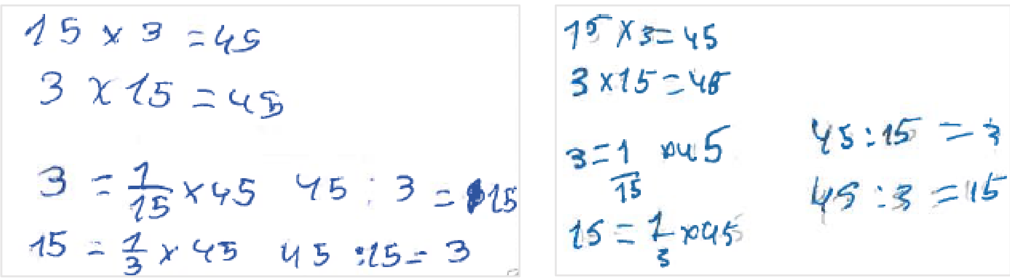


Figura 149: Registos de Fábio e de Jorge

Carla ao explicar no quadro a sua resolução (episódio 38), refere que ela e Júlia raciocinaram por analogia com as situações anteriores, mas não consegue justificar o porquê. André auxilia-a e relaciona corretamente a multiplicação (um terço vezes…) com a divisão por três.

Carla – Depois, nós percebemos que... ahm... um terço vezes quarenta e cinco dava quinze [à medida que fala aponta os números a que se refere, em $15 = \frac{1}{3} \times 45$]. Nós também fomos um bocado pela... pela lógica de... por exemplo, o três ficava sempre aqui [aponta o denominador de $\frac{1}{3}$ em 15 = $\frac{1}{3}$ × 45]. Nós fomos muito por essa lógica. Por exemplo, agora, aqui como vem quinze vezes três [aponta o esquema]... nós quando passa a esta parte [aponta 15 = $\frac{1}{3}$ × 45], nós vimos que era sempre... ficava sempre com esse número em baixo.

Professora – Mas porque é que... porque é que fica aí em baixo? É só porque atrás... é só porque nos outros exercícios também estava aí em baixo?

Carla – Hum!...

Professora – Mas está aí porquê? Porque é que eu escrevo em vez... porque é que eu escrevo um terço e não escrevo três vezes quarenta e cinco, Carla? É só porque em cima também estava um... um... no caso é um meio?

Carla – Não, st'ora.

Professora – Foste copiar... ou tem... ou isso tem alguma lógica na tua cabeça?

Carla – Foi ... tem...

Professora – Qual é? Diz lá, André.

André – Porque se tivesse só três vezes quarenta e cinco já não dá. Como tem um terço vezes quarenta e cinco é o mesmo que na divisão.

Professora – É o mesmo que a divisão.

Episódio 38: Explicação de Carla e a justificação de André

O esquema 3 difere dos anteriores porque os números em causa (10 e 15) relacionam-se multiplicativamente entre si através de um fator não inteiro (1,5). A primeira parte do esquema é preenchida corretamente por vinte alunos, a segunda é preenchida corretamente por dezanove e apenas um deixa os espaços em branco. Dezasseis indicam 10 × 1,5 = 15; um regista 1,5 × 10 = 15; dois indicam as duas igualdades, trocando a ordem dos fatores; e um não regista uma igualdade inicial (tal como já tinha acontecido nos casos anteriores). Dezassete alunos indicam 10 = $\frac{1}{1,5}$ × 15 e três apresentam respostas incorretas (10 = $\frac{1}{10}$ × 15, 10 = $\frac{3}{2}$ × 15 e 10 × $\frac{1}{1,5}$ = 15). Dezanove registam 1,5 = $\frac{1}{10}$ × 15 e um, que considera sempre o produto igual a 15, escreve incorretamente 1,5 × $\frac{1}{10}$ = 15.

Depois de Bruno representar, no quadro, o inverso de 1,5 escrito sob a forma de fração, a professora realça (episódio 39) o trabalho num novo "campo de números" em que as frações deixam de ser consideradas apenas como uma forma de representar a divisão de números inteiros que traduzia, por exemplo, a partilha equitativa de pizas.

Professora – Então aqui não posso calcular também o inverso?!

Bruno + colega [baixinho] – Sim. [A restante turma mantém-se em silêncio.]

Professora – Mas o que é que está aqui de diferente em tudo o que vocês habitualmente costumavam ter?

Aluno – É que... ahm... o... o dividendo é... é um número decimal.
Professora – Ele está a dizer divisor, não é? É um número decimal. É. Só que nós agora estamos a entrar noutro campo e estamos... e vai começar a aparecer este tipo de coisas. Vocês realmente é a primeira vez que estão a ver isto acontecer. Nós temos estado a trabalhar com as frações e...ahm... o que acontece é que nós utilizávamos as frações para dividir pizzas em partes iguais, portanto não aparecia nunca o número decimal. Mas agora estamos a estabelecer outro tipo de relações diferentes, está bem? (...) Então, se nós esquecermos o... que... ahm... estivemos a estudar as frações até agora e que utilizámos sempre os números inteiros, aquela relação está certa? [Silêncio. Bruno poisa o giz no suporte do quadro e mete as mãos no bolso.] É o inverso... o inverso de um número, está certo?
Alunos [em coro] – Sim.
Professora – O um e meio, está certo?
Alunos – Sim.
Professora – Está. Então um e meio é igual ao inverso de dez vezes quinze. Também está?
Alunos – Sim.

Episódio 39: Representação do inverso de 1,5

Alguns alunos não parecem totalmente satisfeitos com esta resolução. Beatriz e Paula propõem representar 1,5 primeiro sob a forma de numeral misto e depois sob a forma de fração e a professora lança o desafio de trabalharem com esta última representação. Rodrigo realça (episódio 40) que o procedimento é o mesmo, isto é, inverter os números em causa, 10 e $\frac{3}{2}$, obter, respetivamente, $\frac{1}{10}$ e $\frac{2}{3}$, e multiplicar cada um por 15.

Professora – Dez é igual a quê? [Regista no quadro "10 =" e aguarda uma resposta.]
Rodrigo – Dois terços vezes quinze.
Professora – Porquê?
Rodrigo – Porque... no exercício atrás invertíamos o sete, aqui invertemos os três meios.
Professora – O que nós estamos a fazer é o quê? É o inverso de um número [com os dois indicadores roda-os um sobre o outro.] Qual é o inverso de três meios?
Rodrigo + colegas – É dois terços.
Professora – É dois terços! Então dois terços de quinze. [À frente de 10 = regista "$\frac{2}{3}\times 15$" e volta-se para a turma.]

Episódio 40: Como Rodrigo inverte $\frac{3}{2}$

Após o episódio anterior, nove alunos registam as três igualdades da relação proporcional, onde 1,5 surge substituído por $\frac{3}{2}$ (em cinco destes casos, primeiro 1,5 é substituído por $1\frac{1}{2}$ e depois por $\frac{3}{2}$) e três escrevem apenas o 10 como o produto de $\frac{2}{3}$ vezes 15, tal como tinha sugerido Rodrigo, e também $\frac{3}{2}$ como o produto de $\frac{1}{10}$ vezes 15. Rodrigo e Andreia justificam (figura 150) que as igualdades estão corretas por aplicação, no segundo membro, do algoritmo da multiplicação de racionais escritos sob a forma de fração e da simplificação de frações, que lhes permite obter o valor do primeiro membro.

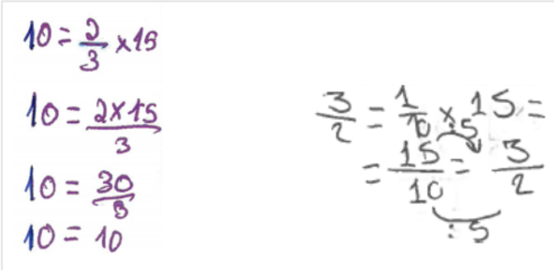


Figura 150: Como Rodrigo justifica $10 = \frac{2}{3} \times 15$ e Andreia justifica $\frac{3}{2} = \frac{1}{10} \times 15$

No esquema 4 surgem indicados, como fatores iniciais, um número inteiro (3) e um não inteiro representado sob a forma decimal (2,5), e está omisso o produto, que é também um número não inteiro. Vinte alunos preenchem os espaços da primeira parte com os valores corretos; dezoito preenchem corretamente os da segunda e dois deixam um dos dois espaços em branco. Dezassete alunos indicam todas as igualdades das relações proporcionais entre os termos da multiplicação $3 \times 2{,}5 = 7{,}5$; um (tal como em esquemas anteriores) não indica a igualdade inicial; um aluno regista duas duplas igualdades não corretas (“$3 = \frac{1}{2{,}5}$.=7,5” e “$2{,}5 = \frac{1}{3} = 7{,}5$”) e outro uma dupla igualdade também incorreta “3 = 2,5 = 7,5”.

A tentativa de resolução de Beatriz e Paula leva a professora a lançar (episódio 41) novamente o desafio de representação de 2,5 de uma outra forma, em que Bruno e Rodrigo iniciam a resposta, Paula baralha-se e Fábio completa-a.

> Professora – [...] Ou seja, em vez de ter dois e meio, elas querem ali aquilo sob a forma de fração. [Deixa as duas alunas às voltas com a sua ideia e aproxima-se de Bruno.] Estavam a tentar fazer isto.
> Bruno – Duas unidades e um meio.
> Professora – É duas unidades e um meio.
> Rodrigo – Pois é!
> (...)
> Professora [diretamente para Paula] – Quanto é que deu então?
> Paula – Quatro meios.
> Professora – Quatro meios?! Então vocês dizem que duas unidades e um meio são quatro meios, é isso? [Regressa ao quadro.] O que é que elas estão a tentar fazer outra vez?
> Fábio – Estão a tentar... a usar... a calcular o número decimal na forma de fração.

Professora [virada para o quadro a escrever] – Então tenho duas unidades e meia é igual a quê? [Regista "2,5 =".]
Fábio – Ééé... dois... duas unidades e um meio.
Professora – Duas unidades e um meio. Sob a forma... isto é numeral misto [aponta o que registou "$2\frac{1}{2}$"]... fica quanto?
Fábio – Fica...cinco... cinco meios.
Professora – Cinco meios [escreve por baixo "= $\frac{5}{2}$"]. Está certo? [Dirigindo-se à turma.]
Alunos [em coro] – Sim.

Episódio 41: Substituição de 2,5 por $\frac{5}{2}$

Dezasseis alunos registam na sua folha as relações proporcionais entre os termos da multiplicação utilizando agora uma representação de 2,5 sob a forma de fração. O produto continua, contudo, escrito sob a forma decimal. Inês considera (figura 151, à esquerda), tal como nove dos seus colegas, que pode substituir 2,5 por $2\frac{1}{2}$ e depois por $\frac{5}{2}$ e regista corretamente as relações proporcionais, sem quaisquer cálculos auxiliares, e Laura confirma (figura 151, à direita), no final, que $\frac{5}{2}$ é igual a 2,5, através do algoritmo da multiplicação de frações aplicado à situação em que um dos termos é um não inteiro. Sete alunos substituem diretamente 2,5 por $\frac{5}{2}$ e apresentam as três igualdades corretas.

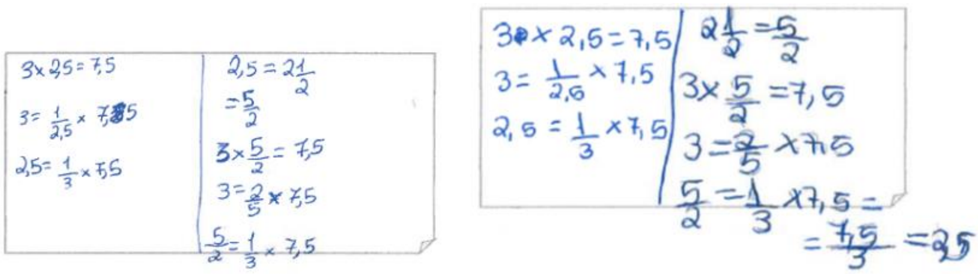


Figura 151: Resoluções de Inês e de Laura

No esquema 5, o fator não inteiro surge representado sob a forma de uma fração ($\frac{7}{5}$). Dezoito alunos preenchem corretamente os espaços em branco e quatro utilizam uma representação decimal de $\frac{7}{5}$, 1,4, sem no entanto especificarem como a determinaram, tal como a resolução de Fábio exemplifica na figura 152.

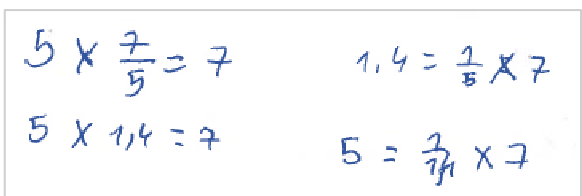


Figura 152: Como Fábio substitui $\frac{7}{5}$ por 1,4

Uma vez que a aula termina, não houve oportunidade para explorar o esquema 6 relativo às relações proporcionais entre os termos da multiplicação $3 \times \frac{2}{3} = 2$, em tudo similar ao anterior.

Em síntese. Relativamente à primeira parte (calcular da forma mais conveniente), os alunos compreendem que, em cada grupo, as expressões numéricas têm todas o mesmo resultado e o que difere é um dos fatores ter várias representações (numeral decimal, numeral misto ou fração). Quando o fator está representado sob a forma de numeral misto ou decimal, surge frequentemente a decomposição do número na sua parte inteira e não inteira e a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, sem que a sua nomeação seja, no entanto, explícita. Quando o fator é representado sob a forma de fração, os cálculos efetuados são baseados nas regras de multiplicação de frações. Vários alunos substituem o número inteiro pela correspondente fração de denominador um para, pormenorizadamente, registarem os procedimentos de cálculo. A fração resultante é, muitas vezes, simplificada através de divisões sucessivas de ambos os seus termos por um mesmo número. A ordem dos fatores é mantida, originando situações que, de uma forma ou de outra, se tornam repetitivas. A maioria dos alunos não escolhe os procedimentos que simplificam os cálculos através do trabalho com números mais pequenos.

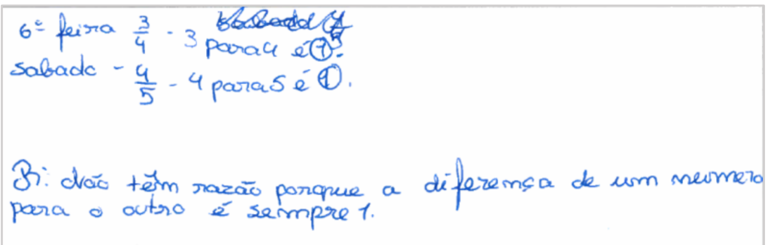
Na segunda parte (relações proporcionais entre os termos de uma multiplicação), depois de interpretado o esquema e as igualdades das relações proporcionais do exemplo, a quase totalidade dos alunos preenche, sem dificuldades, os espaços em branco dos dois primeiros esquemas e apresenta também as igualdades das relações proporcionais de forma correta. O inverso de um número é abordado na sua representação sob a forma de fração e, se no caso de um número inteiro a situação é bem aceite pelos alunos (o inverso de um dado número inteiro é representado através de uma fração em que o numerador é um e o denominador é o número inicial), no caso de um número não inteiro (esquemas três e quatro) parece que alguns alunos não interiorizam a similitude destas situações com as outras. A representação de um número sob a forma de fração em que o denominador é um decimal suscita, portanto, algumas reservas e, por isso, dois dos alunos propõem que a representação decimal do número inicial seja substituída pela representação em fração o que lhes permite aplicar a regra que já conhecem: o inverso de uma fração (numerador e denominador são números inteiros) é ainda uma fração em que numerador e denominador trocam de papéis. Mais uma vez, os alunos usam diferentes representações de um número.

5.2.4 Tarefa 4: Fazer limonadas

Problema 1. A primeira parte desta tarefa consiste em comparar o sabor de duas limonadas confecionadas com concentrado de limão e água, de acordo com os dados numéricos da ilustração. Dos dezanove[20] alunos que respondem, treze dizem “Eu não concordo (…)”, “Nós não concordamos (…)”, “Eles não têm razão (…)” ou, simplesmente, “não” e justificam a sua opção; cinco não apresentam uma resposta explícita (embora um deles tenha riscado “eu concordo com eles…”); e um diz que “sim (…)”, justificando a sua resposta com um pequeno texto.

Os alunos relacionam o número de chávenas de concentrado de sumo de limão com o número de litros de água de cada mistura, de acordo com a sequência textual do próprio enunciado (limonada de sexta-feira: 3 chávenas de concentrado de limão e 4 litros de água; limonada de sábado: 4 chávenas de concentrado de limão e 5 litros de água).

Eva responde que “Não têm razão (…)” (figura 153, nesta página) e, sem apresentar quaisquer cálculos, justifica a sua opção com a diferença, sempre igual a um, entre as quantidades dos dois ingredientes da mistura. Paula responde “Nós não concordamos com os amigos do João (…)” (figura 153, na página seguinte) porque ao aumentar o número de chávenas também se aumentou o número de litros, mas não especifica se o aumento foi, ou não, o mesmo. Refere, no entanto, que a limonada ficou “com um sabor equilibrado”, sem se perceber o significado que atribui a esta expressão.



[20]Um aluno não entregou a sua folha de resposta.

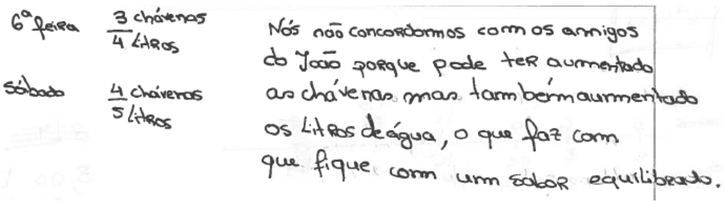


Figura 153: Respostas de Eva e de Paula

Rodrigo (figura 154) e Andreia apresentam uma tabela em que as duas linhas de cima estão intituladas "chávenas sexta" e "chávenas sábado", e as duas de baixo "litros sexta" e "litros sábado". Em cada linha, os primeiros valores indicados correspondem aos do enunciado e os restantes três surgem sucessivamente sempre por adição de uma unidade. Afirmam que o sabor da limonada é o mesmo nos dois dias e que a diferença está apenas na quantidade de água, menos um litro na sexta do que no sábado.

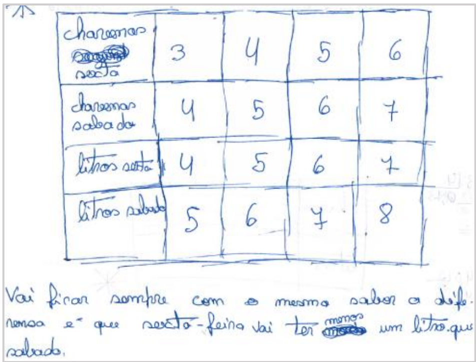


Figura 154: Tabela e resposta de Rodrigo

André (figura 155) e Laura são os únicos alunos que, além de indicarem duas razões sob a forma de fração, correspondentes às limonadas de sexta-feira e de sábado, representam também, por baixo, duas outras razões iguais às anteriores, mas com o mesmo denominador. Relacionam-nas corretamente entre si, traduzindo essa situação através do símbolo correspondente.

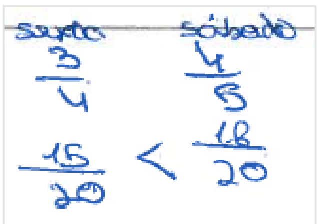


Figura 155: Resolução de André

Estes alunos são interpelados pela professora e convidados a ir ao quadro explicar como pensaram para chegar à resposta que mencionaram oralmente e não escreveram. No quadro, Laura regista a sua resolução e explica-a para toda a turma (episódio 42). A estratégia destes dois alunos baseia-se na comparação de frações equivalentes com o mesmo denominador. Para isso, consideram frações com um denominador comum que ligam às razões iniciais através de uma seta, comparam os dois numeradores e Laura conclui que "o sabor poderia ser diferente". Esta expressão de incerteza é substituída por uma justificação mais convincente com a ajuda da professora e de André, perante o silêncio da turma.

> Laura [baixinho] – Penso que tinham razão. (...) Então, nós estivemos... ahm... a calcular para acharmos o mesmo denominador [aponta ligeiramente com a folha na direção do que tinha acabado de escrever.]. Então isto passou para quinze vinte avos [coloca uma seta ↓ e escreve "$\frac{15}{20}$" por baixo de $\frac{3}{4}$] e este [coloca uma seta ↓ e escreve "$\frac{16}{20}$" por baixo de $\frac{4}{5}$] para dezasseis vinte avos. E nós reparámos que aqui [virada para a turma, aponta com a folha $\frac{15}{20}$] as chávenas são menos do que ali [aponta com a folha $\frac{16}{20}$].
> Professora – Então?!
> Laura – Logo o sabor poderia... poderia ser diferente.
> Professora – Poderia ou é mesmo, não é? Se eu junto dezasseis chávenas e ali junto quinze chávenas, para a mesma quantidade de água, o sabor vai ser diferente. Mais doce, sabe mais a limão, não é? Pronto! Se o limão estiver açucarado, está mais doce, sim! Silêncio profundo!
> [Laura sorri e a turma está de facto em silêncio olhando atenta e algo admirada para o que ela escreveu no quadro.]
> Professora – O que é que isto quer dizer? [Alguns alunos riem-se.] O que é que vocês acham? O que é que... porque é que eles foram encontrar o mesmo denominador? O que é que vos levou a irem encontrar o mesmo denominador, ali? O que é que vos levou a irem encontrar ali o vinte? Porquê? Para que é que vocês foram fazer isso?
> André – Para... assim era mais fácil para comparar.
> Professora – É mais fácil para comparar. Eu assim estou a trabalhar com a mesma quantidade de... vinte representa o quê?
> Aluna – Água.
> Professora – Os litros de água. [Silêncio.] É ou, não é? Eu tenho vinte litros de água. Está certo?
> Aluno – Sim.
> Professora – E assim é mais fácil de comparar. Tenho a mesma quantidade de água... Se eu tivesse vinte litros de água, eu tinha quinze chávenas; se eu tivesse vinte litros de água... do outro lado, eu tinha dezasseis de... dezasseis chávenas.

Episódio 42: Explicação de Laura

Gabriel é o único que responde "sim… têm um sabor diferente" (figura 156), mas a sua justificação baseia-se somente na comparação de quantidades em que erradamente relaciona a do sumo com a da água, no sábado.

Figura 156: Resposta de Gabriel

Perante a relutância de alguns alunos em alterarem a sua opinião, mostrando que a situação não está totalmente compreendida, a professora faz uma analogia com a resolução de tarefas anteriores (tarefas 2 e 1), com a situação real de confecionar um bolo, com determinada receita para um número diferente de pessoas: “se quiser duplicar a receita”, “se quiser fazer um bolo três vezes maior”. Representa, de seguida, no quadro uma linha numérica dupla que traduz a relação do número de chávenas de concentrado de limão para o número de litros de água na limonada feita na sexta-feira. Propõe-lhes que a preencham com vários pontos e representem uma outra, referente à limonada de sábado, para que, mais uma vez e com outro tipo de registo, cheguem à conclusão já referida por Laura e André (episódio 42). Cada aluno faz o seu registo no verso da folha e na figura 157 podemos observar o que Gabriel escreve e como realça, nas linhas numéricas duplas, os dois pontos a comparar.

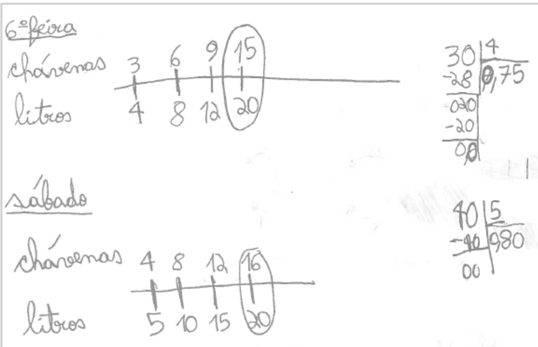


Figura 157: Registos de Gabriel

Gabriel regista, ao lado da linha numérica respetiva, o algoritmo da divisão entre os primeiros e os segundos termos das duas razões iniciais. Isso permitia-lhe evidenciar, de um outro modo, que as limonadas de sexta e sábado não têm o mesmo sabor porque 0,75 é diferente de 0,80, mas ele não faz uso dessa informação.

Problema 2. A segunda parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão unitária quando, simultaneamente, é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, neste caso, o sabor da limonada confecionada no sábado. Uma vez que existia, da parte dos alunos, alguma dificuldade em iniciar a resolução deste problema, a professora regista no quadro uma razão correspondente à limonada de sábado, $\frac{4}{5}$, e ao lado uma outra em que é desconhecido um termo e que, por isso, fica com um espaço em branco, "$\frac{1}{\ }$". Faz novamente referência (episódio 43) às linhas numéricas duplas que ainda estão visíveis no quadro, apontando diretamente os vários pontos e os registos dos procedimentos a efetuar. Encoraja-os a descobrir o termo em falta, agora numa situação em que a quantidade de concentrado diminui e, como consequência, a quantidade de água também, mas em que a proporcionalidade se mantém.

> Professora – Oh, meninos, desculpem lá! Vamos lá outra vez aqui. Nós estamos a aumentar... aqui as quantidades estão aumentando de forma proporcional, ou seja, duas vezes, cresceu duas vezes [com o indicador direito aponta, na linha numérica dupla correspondente a sexta feira, o arco do 3 para o 6], eu aqui também [aponta o arco do 4 para o 8]; três vezes [rapidamente, aponta o arco do 3 para o 9], aqui também [rapidamente, aponta o arco do 4 para o 12]; quatro vezes... de forma proporcional... vai crescendo sempre da mesma forma [com o braço direito gesticula em concordância, fazendo arcos no ar]. Se eu aumento de uma determinada forma os litros de água, tenho que aumentar da mesma forma o quê? O concentrado de...
> Telmo – Limão.
> Professora – ... limão. Está bem? (...) Agora aqui, o que é que nos está a acontecer? Eu estou a fazer uma quantidade maior ou menor?
> Fábio – Menor.
> Professora – Menos quantidade de sumo, de...
> Fábio – Concentrado.
> Professora – ... de limonada. Menos... Sim! Menos concentrado... [aponta para o quadro], menos concentrado, vou ficar com mais ou menos quantidade, no total, depois, no fim? Menos, mas porquê? Porque eu vou fazer o quê? Eu tenho menos concentrado, então a água, para ficar com o mesmo sabor, tem que ser mais ou menos do que aquela que eu juntei no sábado?
> Fábio – Tem que ser menos.
> Professora – Agora temos que descobrir é quanto. Eu tenho que descobrir é quanto. (...) Olha, se nós fizermos... Shuu!... Shuu! Se nós colocarmos os mesmos litros de água... Paula, vamos lá pensar! Se nós colocarmos ali os mesmos litros de água, cinco litros de água, para um de concentrado, eu fico com o mesmo sabor?
> Bruno – Não.
> Professora – (…) Tenho de pôr menos quantidade de água. Agora, o que é que eu tenho que fazer? Se eu só tenho uma caneca... eu quero o mesmo sabor, o que é que eu vou fazer? (...) Do quatro para o um, aconteceu o quê?
> Fábio – Do quatro para o um, vai dividir por quatro.
> Professora – Por quanto?
> Fábio – Por quatro.

Episódio 43: Como descobrir o termo desconhecido numa razão

A seguir, todos os alunos determinam a quantidade de água necessária para fazer uma limonada com o mesmo sabor da de sábado, quando apenas dispomos de uma chávena de concentrado de limão. Quinze não apresentam uma resposta explícita e quatro apresentam-na na linha que delimita o espaço destinado ao registo da resolução, como é o caso de Telmo (figura 158). Este aluno representa as duas razões sob a forma de fração, os dois arcos legendados com o procedimento a efetuar, ": 4", e, provavelmente por lapso, o sinal de dividir entre as razões. Como ele, mais oito alunos não pormenorizam como calculam o quociente não inteiro de 5 : 4.

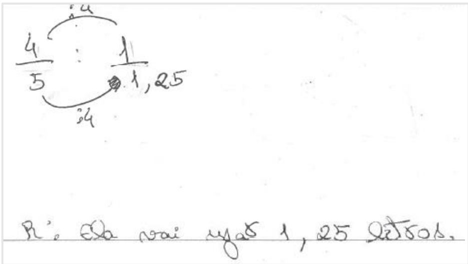


Figura 158: Resolução de Telmo

Nove dos alunos indicam somente, como Laura na figura 159, as duas razões sob a forma de fração, lado a lado, e os dois arcos (umas vezes orientados, outras não) maioritariamente legendados com o procedimento a efetuar (dividir por quatro, ": 4").

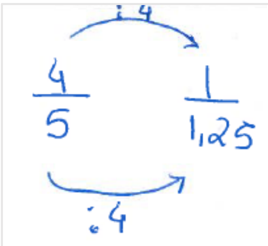


Figura 159: Resolução de Laura

Quatro alunos representam, lado a lado, as duas razões sob a forma de fração e ainda o algoritmo da divisão para determinar o quociente não inteiro de 5 : 4. Destes, Beatriz (figura 160) e Paula apresentam as razões referentes à limonada de "sábado" e de "agora", o algoritmo da divisão e também o da multiplicação, como forma de confirmar o primeiro resultado.

Figura 160: Resolução de Beatriz

Pedro apresenta (figura 161) uma linha numérica dupla em que os três pontos correspondem a limonadas com o sabor da de sexta-feira. No entanto, ao lado, regista o algoritmo da divisão que lhe permite obter a resposta que não escreve.

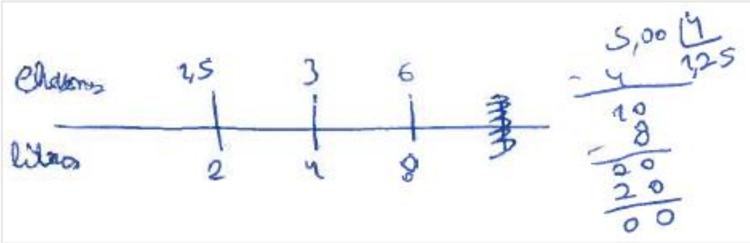


Figura 161: Linha numérica dupla e o algoritmo da divisão de Pedro

Três alunos apresentam somente uma linha numérica dupla. Bruno (figura 162) e Andreia optam por representá-la com dois pontos e com os dois arcos orientados, da direita para a esquerda, legendados pelo procedimento de dividir por quatro, “: 4”, sem qualquer pormenor de como efetuam o cálculo. Bruno realça o ponto da reta que corresponde à solução do problema, circundando os dois valores com uma só linha.

Figura 162: Resolução de Bruno

Rodrigo começa por indicar (figura 163) o dia da semana que está em causa, escrevendo “6º”, mas os três pontos que marca têm, corretamente, valores que correspondem a limonadas com o mesmo sabor da de sábado. Considera quatro arcos de dupla orientação legendados em duplicado com os procedimentos de multiplicar por dois, “× 2”, e dividir por dois, “: 2”. Mais uma vez, não existe explicitação de cálculos.

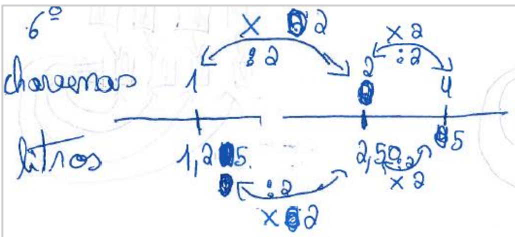


Figura 163: Resolução de Rodrigo

Fábio (figura 164) e Jorge apresentam a igualdade de duas razões, o algoritmo da divisão, a linha numérica dupla com dois pontos, os dois arcos orientados, da direita para a esquerda, e legendados com o procedimento de dividir por quatro, “: 4”.

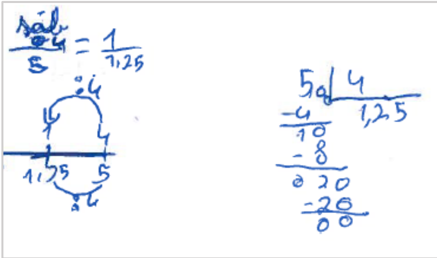


Figura 164: Resolução de Fábio

Problema 3. A terceira parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão quando, simultaneamente, é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, neste caso, o sabor da limonada confecionada no sábado. Todos os alunos resolvem o problema. Onze utilizam a razão $\frac{4}{5}$ que é uma tradução em linguagem matemática, como já foi referido, dos dados relativos à limonada feita no sábado. Oito trabalham com a razão unitária, $\frac{1}{1{,}25}$, determinada no problema anterior.

Dos alunos que resolvem este problema considerando a razão $\frac{4}{5}$, seis apresentam uma linha numérica com dois pontos e dois arcos orientados e legendados com o procedimento a efetuar, "× 2,25". Andreia determina (figura 165), tal como os outros, o valor deste fator através do algoritmo da divisão aplicado a 9 : 4. Multiplica, na margem esquerda da sua folha, 5 por 2,25 através, mais uma vez, do algoritmo e regista, como auxiliar de cálculo, os valores intermédios dos reagrupamentos.

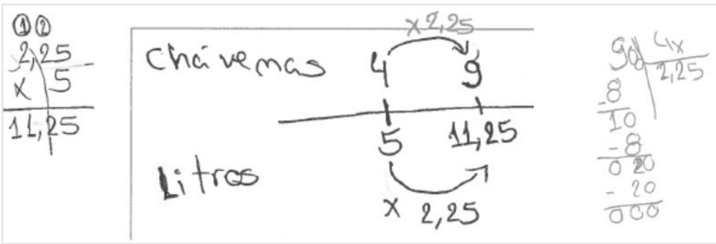


Figura 165: Resolução de Andreia

Os outros cinco alunos registam apenas as razões, inicial e final, ligadas pelos arcos (orientados, ou não) legendados com o procedimento a efetuar, "× 2,25", e não as relacionam entre si com o sinal igual. Eva apresenta (figura 166), por exemplo, o algoritmo da divisão em que omite, tal como Andreia, a vírgula no dividendo. Para confirmar o quociente obtido efetua, à direita da divisão, uma adição de quatro parcelas todas iguais a 2,25. Resolve a multiplicação, à esquerda da divisão, através do algoritmo. Escreve uma resposta em que surge o valor "9,25", baralhado com o que seria correto, 11,25.

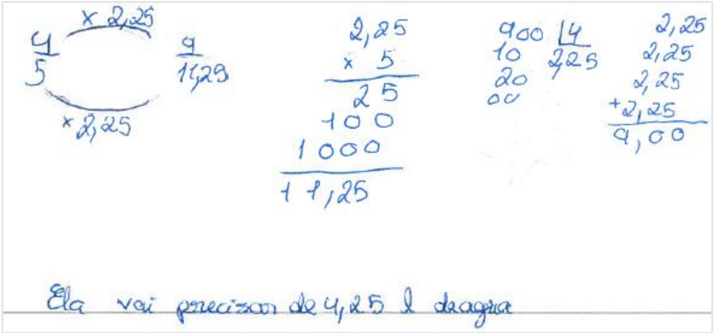


Figura 166: Resolução de Eva

No quadro, Rodrigo expõe à professora e aos colegas os vários procedimentos que efetuou para resolver o problema. Explica como relaciona o número de chávenas mencionado neste problema e o utilizado na limonada de sábado:

> "Peguei no nove, que era as chávenas que ele tinha, e nas quatro que era o que ele tinha no sábado [aponta o 4 na linha numérica dupla] e dividi [aponta o quociente da divisão de 9 por 4]. Foi dar dois vírgula vinte e cinco. Então, tinha que fazer quatro vezes dois vírgula vinte e cinco [com o giz aponta o arco entre 4 e 9] que ia dar nove chávenas. Depois, como era cinco litros [com o giz aponta o 5 na linha numérica dupla], tinha que fazer também, como em cima [aponta × 2,25 no arco de cima], dois vírgula vinte e cinco... vezes dois vírgula vinte e cinco. Depois foi fazer a conta [aponta com a mão direita a multiplicação], que deu-me onze vírgula vinte e cinco. E esse é o resultado [aponta 11,25 na linha numérica dupla]."

Quatro alunos trabalham com a razão unitária encontrada no problema anterior e representam uma linha numérica dupla com dois pontos, dois arcos orientados e legendados com o procedimento a efetuar, "× 9". Bruno (figura 167), sem escrever a resposta, circunda o ponto que relaciona 9 chávenas de concentrado de limão com 11,25 litros de água para obter uma limonada com o sabor igual à de sábado.

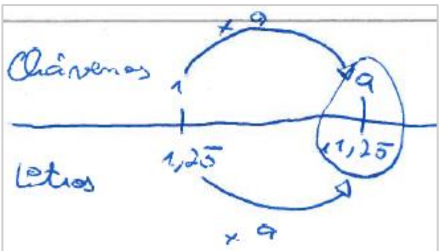


Figura 167: Resolução de Bruno

Bruno não indica, de facto, como efetuou a multiplicação, embora explique (episódio 44), quando interpelado pela professora no quadro, de onde partiu e porquê.

> Professora – Partiu de onde?
> Bruno [com o indicador direito, aponta na linha numérica dupla o 1 e depois o 1,25] – De... do resultado que nos tinha dado no exercício anterior.
> Professora – Muito bem! Porquê? Porque é que foste pegar nesse?
> Bruno – Então, porque eu achei que era o mais fácil. Pensei logo mentalmente um vezes nove era nove. [Com o indicador direito contorna o arco do 1 até ao 9.] E a nossa... aqui no problema pedia ahm... nove chávenas... que ela tinha que juntar nove chávenas.

Episódio 44: Justificação de Bruno na escolha dos números

Mais quatro alunos trabalham também a partir de razão $\frac{1}{1,25}$, mas sem representar a linha numérica dupla. Neste grupo, André e Laura (figura 168) são os únicos que consideram três razões em que a segunda surge da primeira pela multiplicação de cada um dos termos por 3 e o mesmo se passa com a segunda e a terceira. Assinalam os arcos orientados legendados com o procedimento a efetuar "× 3", mas não relacionam as razões através do símbolo igual.

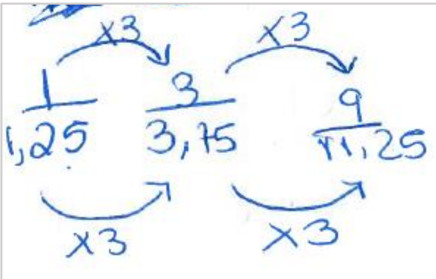


Figura 168: Resolução de Laura

Perante os dois processos de resolução discutidos no quadro, a professora realça que ambos estão corretos, mas o de Bruno, que trabalha com a razão unitária encontrada no problema anterior, torna-se mais "direto" porque basta determinar o produto 9 × 1,25, ou, como Beatriz afirma, é mais "eficaz".

Problema 4. A quarta parte desta tarefa consiste em determinar um dos termos de uma razão, quando simultaneamente é conhecido o outro e indicada a relação multiplicativa a manter, isto é, o sabor da limonada confecionada na sexta-feira. Dez dos alunos trabalham a partir da razão correspondente à limonada de sexta-feira através de uma linha numérica dupla com dois pontos e nove representam-na sob a forma de fração.

Quinze resolvem o problema determinando, primeiro, o quociente não inteiro da divisão 18 : 4 (4,5) e multiplicando, depois, cada um dos termos da razão inicial, $\frac{3}{4}$, pelo fator 4,5. Telmo foi escolhido para ir ao quadro apresentar aquela que, como afirma a professora, é a estratégia de resolução escolhida pela maioria (episódio 45). Telmo utiliza a denominação dos números escritos sob a forma de fração, "três quartos", tem em atenção uma razão da qual não sabe um dos termos e calcula-o efetuando sequencialmente a divisão e a multiplicação já referidas.

> Telmo – Nós... nós estávamos... no exercício quatro dizia que eles tinham quatro litros de água. Então nós fizemos três quartos [com o indicador direito aponta genericamente $\frac{3}{4}$] e depois pusemos o dezoito [com o indicador direito aponta 18 em $\frac{13,5}{18}$] e depois aqui não sabíamos o número e tínhamos que descobrir [com o indicador direito aponta 13,5 em $\frac{13,5}{18}$]. Então fizemos o dezoito a dividir por quatro para chegar aqui [com o indicador direito aponta 13,5 em $\frac{13,5}{18}$].
> Professora – Dava quatro e meio, era isso?
> Telmo [olha para a sua folha e coça a cabeça] – Sim.
> Professora – Vocês foram...
> Telmo – Depois...
> Professora – Diz, diz.
> Telmo – Deu-nos quatro e meio, depois multiplicámos para ver que número deu. [Aponta o arco do 3 para o 13,5 entre as razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{13,5}{18}$] e fica a olhar para a professora.]
> Professora – Pronto!

Episódio 45: Explicação de Telmo

Muitos destes alunos apresentam apenas os resultados das duas operações, não sendo por isso possível perceber como os determinam. Telmo representa (figura 169) as duas razões sob a forma de fração, lado a lado, dois arcos legendados com o procedimento a efetuar, "× 4,5". Mais à direita indica somente a divisão e o resultado, "18 : 4 = 4,5", e, no final, escreve a resposta.

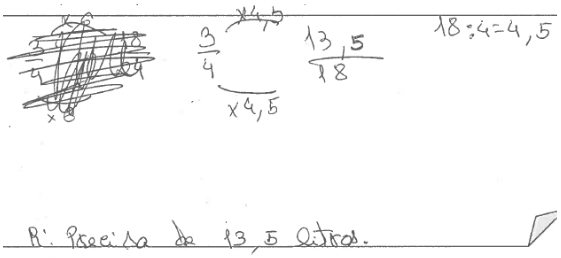


Figura 169: Resolução de Telmo

Os alunos que explicitam os procedimentos de cálculo baseiam-se, maioritariamente, nos respetivos algoritmos.

Quatro alunos optam por obter duas razões iguais a $\frac{3}{4}$. Primeiro, dividem ambos os seus termos por 2 e, de seguida, multiplicam os dois termos de $\frac{1,5}{2}$ por 9. Bruno utiliza esta estratégia e representa-a, como é seu hábito, através de duas linhas numéricas duplas com dois pontos (figura 170). Na primeira indica dois arcos orientados da direita para a esquerda e legenda-os com o procedimento ": 2"; na segunda representa também dois arcos orientados, mas da esquerda para a direita, e legenda-os com o procedimento "× 9".

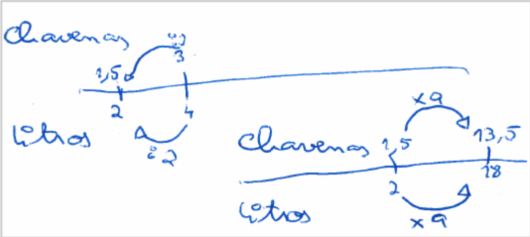


Figura 170: Resolução de Bruno

Bruno não explicita os cálculos efetuados, mas justifica oralmente, para toda a turma, a sua estratégia e os seus procedimentos (episódio 46). Os conhecimentos já adquiridos de múltiplos e divisores de um número natural, permitem-lhe afirmar que 2, ao contrário de 4, é fator de 18 e, por isso, escolhe-o para construir uma sequência de procedimentos que originam, na sua opinião, cálculos intermédios mais acessíveis.

> Bruno – Então, eu fui pegar neste número aqui [com o indicador direito aponta 4 na linha numérica dupla onde surgem os pontos correspondentes às razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{1{,}5}{2}$] e fui dividir por dois porque eu pensei logo de cabeça que dois vezes nove era dezoito [aponta rapidamente para a linha numérica de baixo, onde surgem os pontos correspondentes às razões $\frac{1{,}5}{2}$ e $\frac{13{,}5}{18}$] e então fui achar uma equivalência para ser mais fácil para os meus cálculos. E depois, deu-me... eu fiz o três a dividir por dois deu-me um vírgula cinco e o quatro a dividir por dois deu-me dois. Depois...
>
> Professora – (...) O que o Bruno fez foi... na cabeça dele... ele começou a pensar: Ora bem, eu tenho dezoito, ali tenho um quatro, quatro vezes não sei quê, nada dá dezoito, assim de repente... Sei lá! Nós já vimos que dá.
>
> Bruno – Sim. Sim, mas de repente...
>
> Professora – É aquela coisa de pensarmos nos números inteiros, não é? Ok! Então ele pensou: Eh pá, mas o dois dava-me jeito. Então, o que é que ele fez? Foi encontrar ali uma quantidade... em termos de quantidade... de sumo total era menor, ele ali só juntava dois litros de água para um e meio de... concentrado... de chávenas.
>
> Bruno – Sim.
>
> Professora – Mas o sabor era o mesmo ou não era o mesmo?
>
> Bruno – Era.
>
> Professora – Era o mesmo. Eu mantenho sempre... proporcionalmente é o mesmo... com o mesmo sabor. E agora ele pegava então nesse valor, um e meio... uma chávena e meia para duas de água e depois...
>
> Bruno – Multiplicava por nove.

Episódio 46: Explicação de Bruno

Discussão final da tarefa. A aula termina e a professora, perante as resoluções e as discussões dos quatro problemas propostos nesta tarefa, parece satisfeita com a evolução, quer a nível de raciocínio, quer de procedimentos de cálculo que os seus alunos demonstraram.

Em síntese. A contextualização desta tarefa baseada numa mistura de dois ingredientes originários de espaços de medida diferentes (concentrado de sumo de limão e água) permite dar origem a uma *unidade composta* (sabor da limonada). No entanto, nenhum aluno encara o sabor da limonada como uma entidade que pode ser observada, de forma autónoma, como um só objeto.

Todos os alunos seguem sequencialmente a descrição do texto do enunciado dos problemas para representarem as razões das várias misturas, quer na forma de fração, quer na linha numérica dupla (com dois ou mais pontos).

No problema 1, a maioria dos alunos raciocina em termos de uma comparação aditiva concretizada na ação de adicionar a mesma quantidade de cada ingrediente (uma chávena de concentrado e um litro de água) para obter uma limonada com o mesmo sabor. Apenas dois alunos comparam multiplicativamente as razões. Consideram frações equivalentes com o mesmo denominador e aplicam conhecimentos que lhes permitem concluir que duas frações com o mesmo denominador e numeradores diferentes são diferentes e, como tal, os sabores das limonadas de sexta-feira e sábado também são diferentes. A professora introduz a representação da razão através da linha numérica dupla e propõe ainda a comparação das duas razões através do cálculo do quociente não inteiro entre os dois termos de cada uma. A maioria dos alunos efetua a divisão através do algoritmo e compara os valores obtidos sob a forma decimal.

No problema 2, a professora induz a representação das razões em fração, em que numa delas o termo desconhecido fica em branco, mas alguns alunos representam uma linha numérica dupla com dois pontos. Em qualquer dos casos, a estratégia de resolução predominante é a divisão de ambos os termos da razão inicial por 4, por aplicação do respetivo algoritmo. Apenas um aluno apresenta uma estratégia baseada no mesmo raciocínio, mas em que divide ambos os termos da razão inicial sucessivamente por 2, para obter $\frac{1}{1,25}$.

No problema 3, a maioria dos alunos trabalha com uma razão correspondente aos dados iniciais da tarefa, $\frac{4}{5}$. Não relaciona o resultado obtido no problema anterior (razão unitária,

$\frac{1}{1,25}$) e escolhe estratégias repetitivas e procedimentos que não facilitam os cálculos. Os alunos que trabalham com $\frac{1}{1,25}$, multiplicam de imediato ambos os termos da razão por 9 e, em apenas um passo, respondem ao solicitado. Destes, dois substituem o fator 9 pela aplicação sucessiva do fator 3, originando valores intermédios mais acessíveis ao cálculo.

No problema 4, a estratégia de resolução mantém-se. Para determinar um termo desconhecido de uma razão a partir de outra que é dada, os alunos procuram primeiro, através da divisão, o fator (não inteiro) que lhes permite relacionar os termos correspondentes das duas razões. De seguida, multiplicam esse valor pelo termo que conhecem para encontrar o correspondente e que lhes é desconhecido.

O procedimento de multiplicar cada um dos termos de uma razão por um mesmo fator positivo, inteiro ou não inteiro, permite que os alunos trabalhem implicitamente com o conceito de razão escalar. Os cálculos realizados são, na sua grande maioria, apoiados nos algoritmos das operações divisão e multiplicação. Poucos alunos escolhem os números de maneira a que o cálculo mental prevaleça. Apenas um aluno refere relações numéricas baseadas em conhecimentos anteriores relacionados com o conceito de divisor de um número inteiro.

Os registos analisados e a descrição da aula permitem ainda afirmar que aproximadamente metade dos alunos recorre a razões representadas exclusivamente sob a forma de fração, em que os termos podem, ou não, ser números inteiros. As linhas numéricas duplas (principalmente com dois pontos) são também uma representação utilizada por muitos e que permanece ao longo de toda a tarefa. Os arcos orientados e legendados com os procedimentos a efetuar, em cada um dos termos da razão para obter o termo respetivo de outra razão ou nos valores duplos correspondentes a um ponto da linha numérica para obter um outro ponto, são um registo muito comum que se mantém ao longo da resolução de toda a tarefa.

5.2.5 Tarefa 5: Qual devo comprar?!

Parte 1. Perante a tarefa e a respetiva ilustração (figura 171), a professora e os alunos[21] discutem qual será, de facto, a melhor opção de compra e porquê.

[21] Estão presentes nesta aula dezanove alunos.

Figura 171: Os frascos de doce e de compota (2016/17)

Comparar dois produtos que se apresentam com quantidades e preços diferentes nem sempre é fácil, como ilustram as opiniões manifestadas pelos alunos no episódio 47. Carla expõe a sua ideia baseada numa possível diferença de sabores, Ricardo refere uma quantidade maior em que a diferença de preço pode compensar, Rodrigo baseia-se simplesmente nos preços indicados, André aparece condicionado pelo dinheiro que imagina ter disponível na carteira e Gabriel lança a ideia de comparar os preços de uma mesma quantidade.

Carla – Eu comprava a compota.
Professora – Tu compravas a compota. Porquê?
Carla – Porque tem de... apesar de ser... de ter menos é uma... digamos que não é a marca branca, é uma mais específica. St'ora, a Mutela tem a marca Mutela e a marca branca e... não sei, apesar de serem praticamente iguais têm sabores diferentes. [Enquanto fala gesticula com as duas mãos.]
Professora – Ok! Então, no teu caso escolheste pelo sabor e não porque era mais barato ou mais caro. Muito bem! Mas agora vamos supor: há marcas brancas que são muito semelhantes, ou quase iguais às outras.
(...)
Ricardo – Eu escolhia o doce porque tem mais quantidade e também é só dezasseis cêntimos de diferença.
Professora – Sim! Então, assim à partida, tu achavas que valia a pena comprar... tu ias pelo doce. Mais opiniões.
Rodrigo [de braço no ar] – Eu comprava a compota.
Professora – Porque...
Rodrigo – É mais barata.
Professora – É mais barata... e é verdade!
(...)
André – St'ora, escolheria o doce porque imagine: eu levo dez euros na... na carteira... para a família que está em casa... vale mais a pena comprar o doce porque tem mais e...
Professora – Ficas com uma quantidade maior em casa, é isso? [André abana a cabeça em sinal de concordância.] É assim, é verdade... é verdade que o doce tem quatrocentas gramas, é mais. Será que, mas será que fica mais em conta, ou não? [André abana novamente a cabeça, em sinal de concordância.] Têm a certeza absoluta?
(...)
Gabriel – St'ora, eu sei! Podíamos aumentar o frasco de doce e o da compota para darem depois o mesmo conjunto de gramas.
Professora – Se calhar... Se calhar esta é uma estratégia!

Episódio 47: Opções de compra e justificações iniciais

Seis alunos comparam os preços de 100 g de doce e de compota. Quatro escolhem determinar e comparar os preços de 400 g dos dois produtos. Seis determinam e comparam os preços de uma quantidade que é múltipla das duas que estão indicadas na ilustração (1200 g). Dois tentam encontrar os preços de 50 g de doce e de compota, mas não chegam a nenhuma conclusão. Um não responde ao solicitado.

Beatriz e Paula determinam e comparam os preços de 100 g dos dois produtos. Paula indica (figura 172) no canto superior esquerdo os dados do problema referentes ao doce e à compota. Ligeiramente à direita, divide, através do algoritmo, o preço do doce indicado na ilustração por 4 e o da compota, também indicado no enunciado, por 3. Obtém quocientes não inteiros que liga aos dados iniciais com uma seta horizontal. A divisão de 1,80 por 3 não está resolvida corretamente, mas isso não invalida que a resposta esteja correta e justificada de acordo com os valores obtidos para os preços de 100 g de doce e de compota.

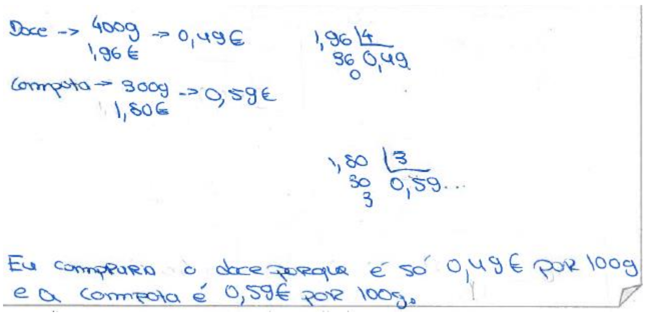


Figura 172: Resolução de Paula

As duas alunas explicam a sua resolução à professora (episódio 48) que, entretanto, se aproximou.

> Paula – Nós fomos… ahm... então, nós fomos achar...
>
> Beatriz – Nós fomos achar qual era o preço de um grama... de cem gramas... ahm... então fizemos ahm... o preço de quatrocentas gramas, a dividir por quatro [aponta com a esferográfica a divisão efetuada através do algoritmo].
>
> Paula – E o preço [aponta o algoritmo da divisão (errado) onde registou 1,80 : 3] era mais caro... de cem gramas.
>
> Professora – Então, escreveram: [lê a resposta escrita por Paula] eu compraria o doce porque é só quarenta e nove cêntimos por cem gramas e a compota é tal [está escrito cinquenta e nove cêntimos] por cem gramas. Chegaram a esta conclusão desta forma. Ok! Vamos tentar agora de outra maneira. Muito bem, essa é uma estratégia.

Episódio 48: Explicações de Beatriz e Paula

Depois, quando são convidadas a ir ao quadro apresentá-la a toda a turma (figura 173), especificam as operações que realizaram, corrigem o quociente da segunda divisão e verbalizam as suas conclusões (episódio 49).

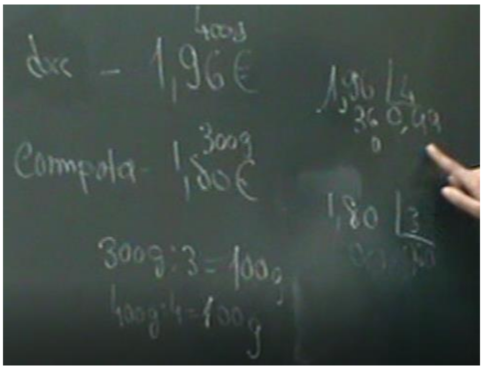


Figura 173: Resolução de Beatriz, no quadro

Beatriz [no quadro] – Nós pegámos no... no valor do preço e fomos dividir por quatro que... Se nós... que é para acharmos o valor de cem gramas... ahm... e dividimos e deu zero vírgula quarenta e nove...
Paula – Cêntimos.
Beatriz – Cêntimos, sim! Eeee... depois fizemos a mesma coisa com a compota só trocámos aqui o número [aponta o divisor, na divisão de 1,80 por 3] porque ali eram trezentas gramas [aponta 300 no registo de informação do frasco de compota].
Professora – Ok!
Beatriz [aponta o quociente da divisão de 1,80 por 3] – Deu zero vírgula sessenta. E assim concluímos que... ahm... o doce ficava...
Aluno – Mais barato!
Beatriz – Mais barato do que a compota.

Episódio 49: Explicação de Beatriz, no quadro

Inês também calcula diretamente os preços de 100 g de doce e de compota, por aplicação do algoritmo da divisão (figura 174). Por baixo de cada divisão, iguala os quocientes encontrados a “100 g de doce” e a “100 g de compota” e repete esta informação realçando-a no interior de um retângulo. Na sua resposta está explícito que, ao comparar 100 g dos dois produtos, o doce é mais barato. Na margem direita da folha adiciona os preços de 300 g e 100 g de compota, iguala esta soma a “400 g de compota” e volta a responder, justificando agora com os preços de 400 g, que a compota seria a mais cara.

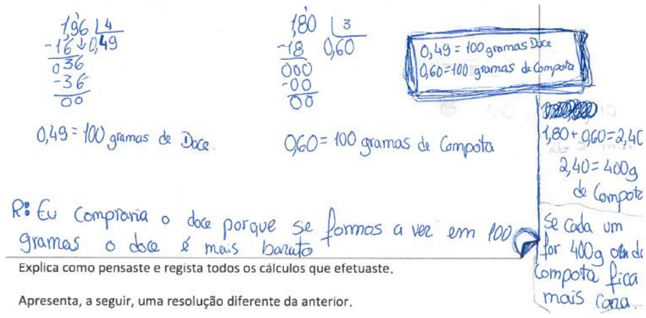


Figura 174: Resolução de Inês

Depois da apresentação de Beatriz e Paula, a professora propõe a Inês que partilhe a última parte da sua resolução com todos (episódio 49), realçando a comparação de preços de 400 g de ambos os produtos. Uma vez que a parte inicial é semelhante à das colegas e parece existir ainda quem não tenha percebido a resolução proposta, Rodrigo reforça que basta comparar os preços de 100 g.

> Professora – Inês, o que é que vocês ainda pensaram no fim? (...)
>
> Inês – Nós vimos que... hum... se nós formos ver as cem gramas da compota, dá sessenta cêntimos. Se nós juntarmos mais cem gramas que é para dar as quatrocentas gramas... hum... nós ficamos com dois e quarenta, ou seja... hum... o doce fica mais barato que a compota, com quatrocentas gramas.
>
> Aluno – Ele não percebeu!
>
> Professora – Eu também acho que não percebeu. É assim, para percebermos, então... para percebermos, ou estamos mesmo muito concentrados ou passa-nos ao lado, não percebemos nada do que ela está a dizer. O que é que ela está a dizer? Ela fez isto como as colegas [aponta para os registos de Beatriz e Paula]. Vocês fizeram isto, não foi?
>
> Inês – Sim.
>
> Professora – E depois, o que é que vocês pensaram? [Silêncio.] Ora bem... diz lá... outra vez!
>
> Inês – Ficaram quatrocentas gramas de compota mais cara que o doce. Nós juntámos sessenta cêntimos ao... de compota, fica...
>
> Professora – Espera aí só um bocadinho! Quatrocentas gramas de doce, quatrocentas gramas de compota, era isto que ela queria. [Escreve, no canto superior direito do quadro, ‘d.’, por baixo ‘400 g’ e ao lado ‘c.’, por baixo ‘400 g’.] Não é? Ok! Vocês, aqui sabem o quê? [Aponta para os registos de Beatriz e Paula.] Que cem gramas era quanto?
>
> Beatriz – Sessenta cêntimos.
>
> Professora – Cem gramas era sessenta cêntimos, de quê? De compota ou de doce?
>
> Aluno – Compota.
>
> Professora – Sessenta cêntimos [escreve ‘0,60/100 g’ por baixo de 400 g referente a compota]. Mas aqui são cem e agora?
>
> Inês – Para a compota ser quatrocentas gramas, vai-nos dar dois euros e quarenta.
>
> Professora – Vai dar dois euros e quarenta. Já está! Já apanharam a ideia?
>
> Bruno – Sim, sim!

Professora – Eu acho que há gente que ainda não percebeu!
Rodrigo – Eu já percebi, st'ora, mas eu fiquei-me por aqui.
Professora – Eu fiquei-me por aqui, mas ficaste por aí, porquê? Não sei o que é que é o ficaste por aí.
Rodrigo – Pelas cem gramas.

Episódio 50: Explicação de Inês e reforço de Rodrigo

Eva, Rita, Telmo e Carla comparam os preços de 400 g de doce e de compota. Para tal, começam por determinar o preço de 100 g de compota e a seguir adicionam-no ao preço do frasco de compota indicado no enunciado. No canto superior esquerdo (figura 175), Eva faz um registo horizontal da divisão de 1,80 por 3 e iguala 100 g ao quociente obtido ("0,60€"). Ligeiramente à direita, indica horizontalmente duas adições cujas somas são a quantidade de compota, 400 g, e o respetivo preço, 2,40€. Por baixo, nomeia duas linhas, "Doce" e "Compota", e à frente iguala 400 g aos respetivos preços. Na resposta afirma que "compensa mais comprar o doce".

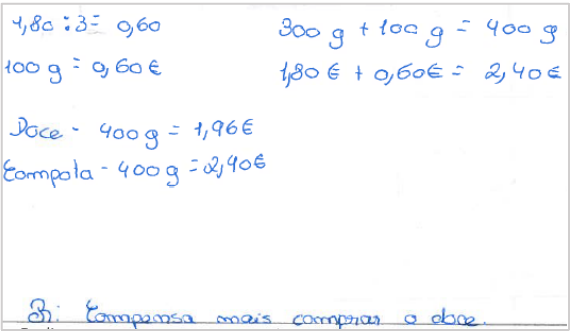


Figura 175: Resolução de Eva

Dalila e Gabriel determinam e comparam os preços de 1200 g de doce e de compota. Gabriel considera (figura 176) sucessivamente diferentes quantidades de frascos (um, dois, três e quatro), iguala esse número à respetiva quantidade de doce e, por baixo, indica, sem quaisquer indicações de como efetua os cálculos, o preço. Mais abaixo, faz o mesmo tipo de registo, mas para a compota. Circunda em cada grupo, de doce e de compota, o número de frascos a que corresponde a mesma quantidade (1200 g) e o preço. No entanto, não escreve qual dos produtos compraria.

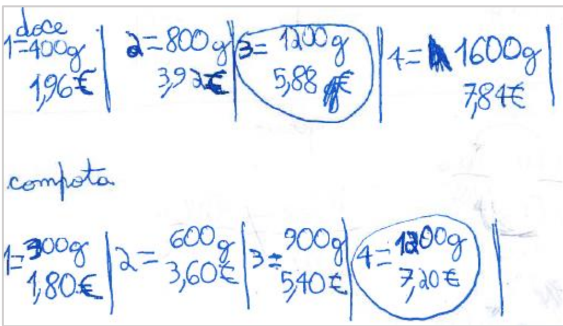


Figura 176: Resolução de Gabriel

No quadro (figura 177), Gabriel regista a resolução tal como tinha feito na sua folha de resposta.

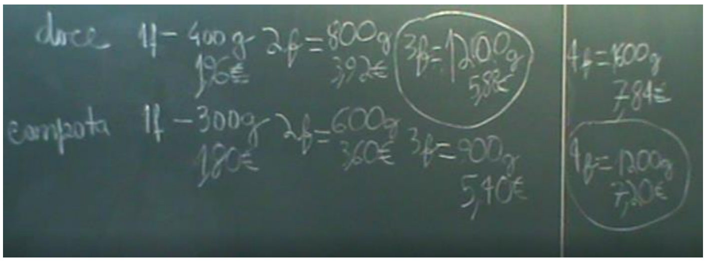


Figura 177: Resolução de Gabriel, no quadro

Depois de tudo ter sido escrito em pormenor, Gabriel dá por terminado seu trabalho, mas a professora faz-lhe sentir que é necessário explicar como pensou (episódio 51). No final, a sua opção de compra é evidente quando refere "o doce é mais barato" e fica assim completa a versão escrita do seu trabalho.

Gabriel – Já está!
Professora – Já está o quê? Tens que explicar. Imagina que... Olha, Oh, Gabriel!
Gabriel – Sim.
Professora – Vamos imaginar que tu estás a falar para meninos que não perceberam nada do que está aí. Como é que tu explicas isso? Explica lá, aos meninos.
Gabriel [apontando diretamente no quadro] – Três frascos têm novecentos gramas e custam cinco euros e quarenta. Três frascos de [aponta ligeiramente para cima]... este era de compota. Três frascos de doce têm mil e duzentos gramas e custam cinco euros e oitenta e oito. Depois, quatro frascos de... doce têm mil e seiscentos gramas e custam sete euros e oitenta e quatro. Ahm... e depois, quatro frascos de compota têm mil e duzentos gramas, sete euros e vinte.
Professora – Então, porque é que puseste uma bolinha à volta desse?
Gabriel [apontando diretamente para as expressões que tinha circundado] – Porque mil e duzentos... ter quatro frascos de... de compota e três frascos de doce têm os mesmos gramas (...) O doce é mais barato.
Professora – Ou seja... ou seja, o que ele foi ali fazer, foi acrescentando frasquinhos.

Episódio 51: Explicação de Gabriel

Andreia, Rodrigo, Bruno e Pedro também determinam e comparam os preços de 1200 g de doce e de compota. Na figura 178, em baixo, Bruno escreve os números relacionados com a compota e com o doce, tal como surgem na ilustração do enunciado. Para descobrir um múltiplo comum a 400 e a 300 relaciona, sem explicar, 400 com 4 e 300 com 3, e o registo de "12 = 1200 g" permite comprovar esta ideia. Em cima à esquerda, considera os primeiros múltiplos naturais de 4 e de 3 e representa-os, incorretamente, sob a forma de dois conjuntos finitos, no qual o último elemento sublinhado em cada um é o mínimo múltiplo comum entre 4 e 3. Para obter 1200 g de cada um dos produtos multiplica as quantidades iniciais por 3 e 4, respetivamente e, em simultâneo, o preço que estava indicado (1,96 € e 1,80 €). Representa o seu procedimento simbolicamente, com auxílio de arcos orientados e legendados com "× 3" e "× 4". Em cima à direita, responde qual é a sua opção de compra.

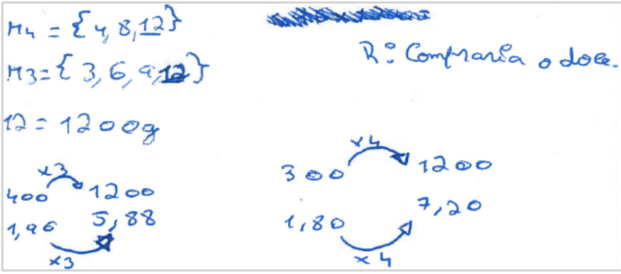


Figura 178: Resolução de Bruno

Bruno refere (episódio 51) que a sua resolução é diferente da de Gabriel. A professora convida-o a ir ao quadro e aproveita para evidenciar registos distintos para estratégias de resolução semelhantes. Bruno explica que, por uma questão de facilidade de cálculo, considera os múltiplos de 3 e de 4, em substituição de 300 e 400. Identifica 12 como o menor múltiplo comum entre 3 e 4 e relaciona-o, por sua vez, com 1200.

> Professora – Bruno... vocês... tu disseste que não fizeste assim.
> Bruno – Pois não!
> Professora – Então?!
> Bruno – Quer dizer, foi parecido, mas não... não andei a fazer um frasco, dois frascos, três frascos [com o braço direito fletido e apoiado na mesa, abana-o para a direita e para a esquerda].
> Professora – Então fizeste o quê? Faz lá aqui, num instante... explica lá aqui, num instante, o que é fizeste. (...) O Gabriel foi arranjando frascos; o Bruno foi assim... Deixa lá ver o que é que ele está a pensar.
> (...)
> Professora – Sim. Oh, Bruno! Mas o Bruno chamou quatro e três, mas eu não tenho quatro e três, eu tenho quatrocentos e trezentos.
> Bruno – Mas eu simplifiquei, mais ou menos, tirei os zeros, para ser mais fácil e depois aqui no doze [aponta '12 = 1200']... ahm... é que eu pus os mil e duzentos.
> (...)
> Professora – É lógico que... ele estava a dizer... aquilo que eu fiz foi simplificar. O que ele estava a arranjar eram os múltiplos de quatrocentos e os múltiplos de... de...
> Alunos – Trezentos.
> Professora – Trezentos. E, portanto, ele no fim acaba por não considerar o doze que é comum, mas sim o quê? Mil e duzentos [em simultâneo com alguns alunos]. A estratégia que ele teve de fazer para

simplificar o raciocínio e o cálculo, não é? Muito bem! Então e depois, ali aquele mil e duzentos é o quê, Bruno?

Bruno – É... são as gramas...ahm... a mesma quantidade de gramas.

Episódio 52: Registos diferentes para estratégias de resolução semelhantes

A professora considera útil representar, sob a forma de fração, as duas razões que relacionam 1200 g e o preço de cada um dos produtos, $\frac{1200}{5,88}$ e $\frac{1200}{7,20}$, realçar que são diferentes e registar no quadro "$\frac{1200}{5,88} \neq \frac{1200}{7,20}$". A leitura oral das duas razões leva de imediato à resposta da questão de saber qual era o produto mais vantajoso. Propõe que representem, em conjunto, as tabelas de razões que traduzem a resolução de Beatriz e Paula que está no quadro (figura 179, à esquerda) e que as aproveitem para traduzir também a comparação de preços de outras quantidades de doce e de compota (figura 179, à direita).

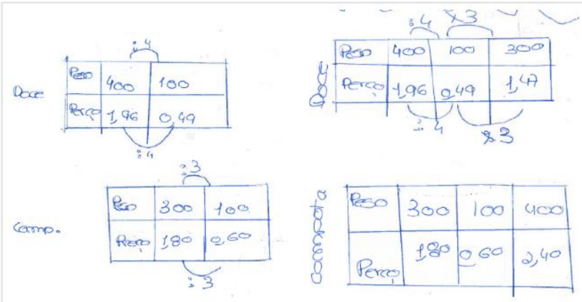


Figura 179: Tabelas de razões

Jorge e Fábio tentam determinar e comparar os preços de 50 g de doce e de compota. Em relação à compota, Jorge indica (figura 180) duas igualdades entre quantidades e os respetivos preços. E, relativamente ao doce, representa horizontalmente a divisão de 400 sucessivamente por 4 e por 2. Não apresenta nenhuma conclusão.

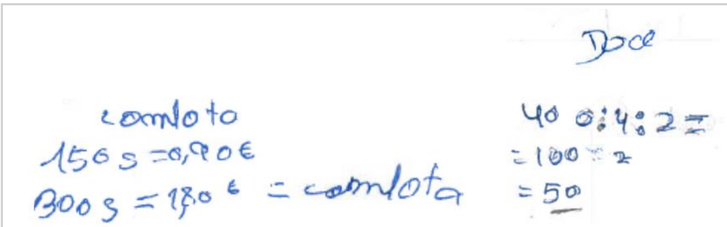


Figura 180: Resolução de Jorge

Nos seus registos, Fábio indica (figura 181), entre outras, três igualdades sobre quantidades e preços da compota. Em cada uma, ambos os membros surgem implicitamente de sucessivas divisões por 2 e determina, por isso, o preço de 50 g (0,30 €). Não indica o preço de 50 g de doce que surge, no canto superior direito, igualado a um ponto de interrogação. Apresenta uma divisão de 1,96 sucessivamente por 4 e por 2, em que surge apenas um resultado parcial, 0,49. Também não regista nenhuma conclusão.

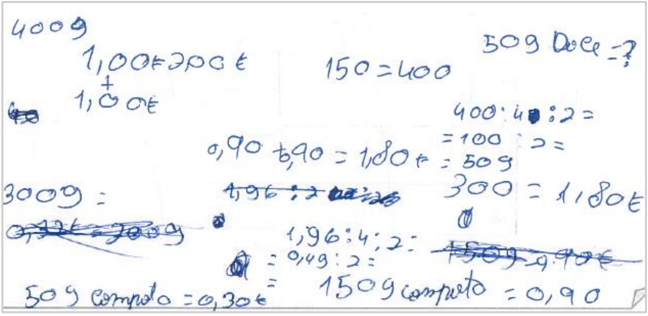


Figura 181: Resolução de Fábio

André considera (figura 182) que todos os números indicados no enunciado são inteiros e apresenta a decomposição em fatores primos de cada um, num esquema em coluna. Representa 400 e 300 através da respetiva fatorização prima. Escolhe os fatores primos comuns de maior expoente e também os não comuns para os multiplicar e determinar o mínimo múltiplo comum entre 400 e 300. Indica um valor errado (12) como resultado da potência 2^4 e aplica a propriedade associativa da multiplicação a "12 × 3 × 25", ao substituir "3 × 25" por 75. Multiplica 12 por 75 e acrescenta, no penúltimo passo dos cálculos, a parcela 300. No final, a soma é igual a 1200. Não representa 196 e 180 na sua factorização em fatores primos. Depois destes registos, não responde ao solicitado e não indica nenhuma opção de compra.

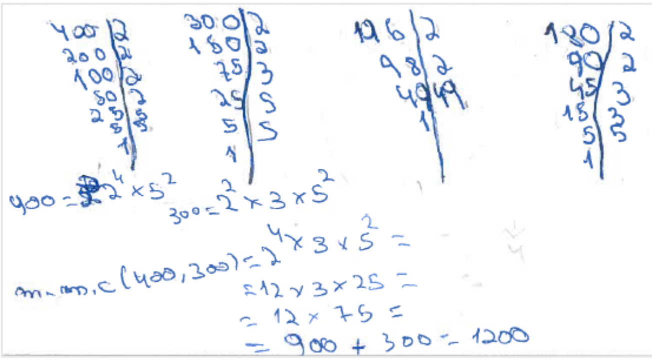


Figura 182: Resolução de André

Parte 2. Pretende-se que os alunos apresentem uma resolução diferente da anterior. Onze alunos não têm tempo para resolver esta parte da tarefa. Cinco registam uma das três resoluções apresentadas e discutidas no quadro. Três mantêm a comparação de preços para a mesma quantidade de doce e de compota, reforçando a sua diferença, como é o caso de Telmo (figura 183) que regista a subtração na vertical e responde, realçando a diferença obtida e não apresentando uma outra estratégia de resolução.

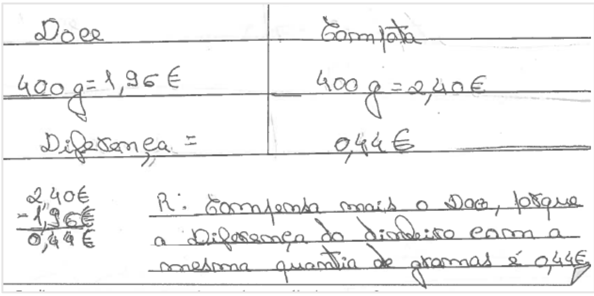


Figura 183: Resolução de Telmo

Em síntese. Depois de uma discussão inicial sobre qual a melhor opção de compra entre os dois produtos ilustrados na tarefa, os alunos admitem, com o pressuposto de a qualidade ser semelhante e a quantidade a mesma, que o melhor é comprar por um preço inferior.

Desta forma, os alunos determinam e comparam os preços em relação a uma mesma quantidade de doce e de compota. Consideram basicamente três quantidades diferentes: 400 g (mencionada no enunciado), 100 g (determinada mentalmente) e 1200 g (múltipla das duas indicadas inicialmente).

Os que consideram 100 g dos dois produtos e comparam os respetivos preços apenas indicam os cálculos das divisões que englobam números não inteiros. Nessas situações surge registado o algoritmo da operação; nos outros casos a divisão nem sequer é apresentada.

Quando comparam os preços de 400 g de doce e de compota, os alunos determinam primeiro o preço de 100 g de compota e depois adicionam esta quantidade e o respetivo preço aos valores indicados no enunciado do problema.

Para comparar os preços de 1200 g dos dois produtos alguns alunos relacionam implicitamente 300 com 3 e 400 com 4, indicam, em notação de conjunto, os primeiros múltiplos de 3 e 4 e relacionam depois o menor deles com 1200. Assim, para obter 1200 g de cada um dos produtos e os respetivos preços, multiplicam, em simultâneo, as quantidades e os preços iniciais por 3 e 4. Outros alunos contabilizam o número de frascos de maneira a que no final a quantidade de cada produto seja igual a 1200 g e, ao mesmo tempo, indicam, sem especificar como efetuam os cálculos, os preços respetivos.

Os alunos, por sua iniciativa, representam os dados do problema com arcos de correspondência e os cálculos que efetuam são maioritariamente por aplicação dos algoritmos das operações divisão e multiplicação. A operação adição, quando aplicada, aparece apenas no seu registo horizontal. A representação de uma razão sob a forma de fração ou de uma tabela de razões é utilizada somente após sugestão da professora. Os registos surgem das relações efetuadas dentro de um mesmo espaço de medida, isto é, são considerados traduções de procedimentos escalares.

Quando solicitados a resolver de outra forma (parte 2), a maioria deixa o espaço de resposta em branco, visivelmente por falta de tempo. Quem responde, apresenta algo copiado do quadro ou determina a diferença de preços entre os 400 g de doce e de compota.

Capítulo 6

Conclusão

Esta investigação tem como objetivo compreender o modo como alunos do 6.º ano de escolaridade desenvolvem a proporcionalidade, num contexto de exploração de tarefas de comparação multiplicativa. Deste objetivo emergem duas questões: (i) como se caracteriza a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa? (ii) o que caracteriza as conexões entre a compreensão de aspetos proporcionais das estruturas multiplicativas, em particular, dos conceitos de razão e de proporção, e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações?

A metodologia de investigação é baseada em *design*, na modalidade de experiência de ensino, e concretizada em dois ciclos de experiência, com duas turmas de 6.º ano de escolaridade, no início dos anos letivos 2015/16 e 2016/17. Em particular, a conjetura que orientou a definição desta experiência está relacionada, por um lado, com a comparação multiplicativa e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações utilizadas pelos alunos e, por outro lado, com o modo como as tarefas são exploradas numa cultura de sala de aula.

Este último capítulo, dedicado a conclusões, está dividido em duas secções. Na primeira, apresento as conclusões da investigação, baseadas naquele que foi o seu objetivo e as respetivas questões. Por um lado, saliento a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa e, por outro, as conexões entre os conceitos de razão e proporção e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações. Na segunda secção, elaboro uma reflexão global sobre o trabalho desenvolvido e destaco alguns aspetos e implicações futuras.

6.1 Conclusões da investigação

Do objetivo da investigação emergem, como já referi, duas questões. Na primeira, com preocupações a nível conceptual, pretendo caracterizar a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa. Na segunda, proponho-me evidenciar conexões entre o processo de compreensão, pelos alunos, dos conceitos específicos de razão e proporção e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações por si construídas e utilizadas.

6.1.1 Evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa

A caracterização da evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa foi analisada sob duas perspetivas que englobam, por um lado, as estratégias de resolução, os modos de representação e as respetivas conexões e, por outro lado, a persistência quer de estratégias, quer de representações.

6.1.1.1 Estratégias de resolução, representações e suas conexões

Uma primeira conclusão da investigação diz respeito ao modo como os alunos lidam com os dois espaços de medida em jogo nas situações de proporcionalidade. O facto de os alunos, nas suas resoluções, operarem exclusivamente dentro de um mesmo espaço de medida, evidenciando o uso de estratégias que se baseiam em procedimentos escalares, apesar de os contextos das várias tarefas (com exceção da tarefa 3) serem considerados em dois espaços de medida, constitui uma característica comum aos dois ciclos da experiência. Esta conclusão confirma a hipótese, lançada e também confirmada por Vergnaud (1983), de que um procedimento escalar seria mais fácil e mais frequentemente utilizado pelos alunos do que um procedimento funcional e isso justifica-se pelo facto de a contextualização relacionada com grandezas (que podem ser discretas ou contínuas) dar mais sentido ao primeiro do que ao segundo.

A análise dos dados permitiu identificar três ideias ligadas às estratégias de resolução que marcaram a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa: a importância da quantificação, o uso de estratégias aditivas e de estratégias multiplicativas. Em ligação com cada uma, permitiu igualmente caracterizar o modo de representação utilizado (Bruner, 1966), mais especificamente as representações simbólicas (Greer, 1992), e discutir possíveis conexões entre estratégias e representações.

O esquema da figura 184 caracteriza o percurso seguido por vários alunos e ilustra a evolução da aprendizagem da comparação multiplicativa. Saliento, no entanto, que poucos percorreram todas as etapas assinaladas: não quantificação, quantificação, estratégias aditivas e estratégias multiplicativas. Muitos deles começaram numa fase em que já quantificavam e seguiram, de imediato, para a utilização de estratégias multiplicativas.

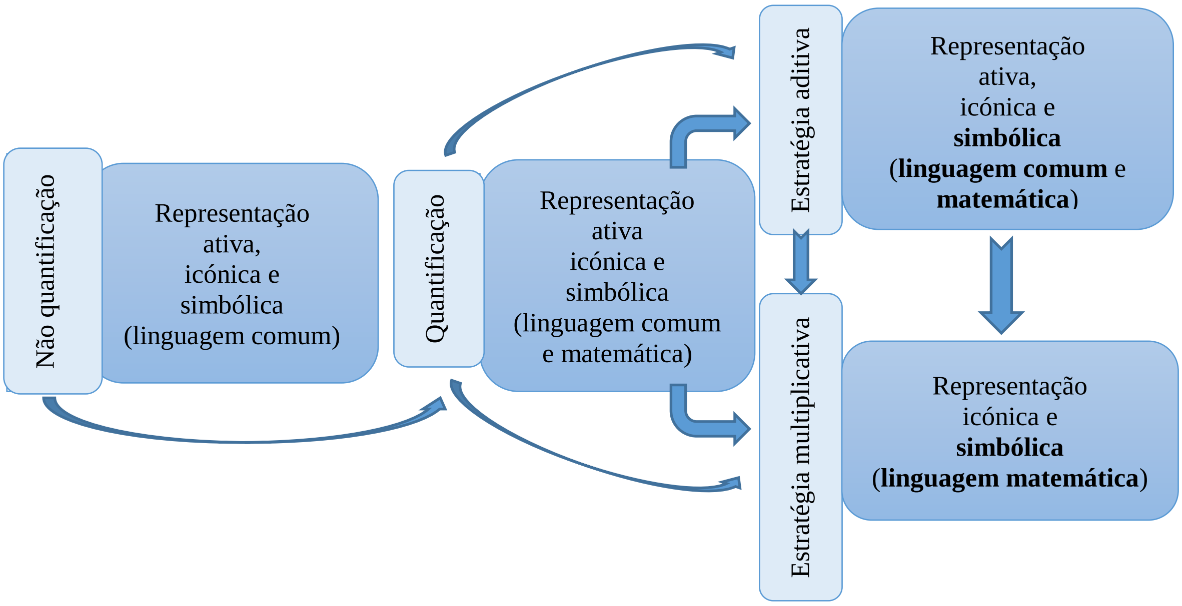


Figura 184: Esquema – estratégias de resolução, representações e suas relações

A não quantificação surgiu inicialmente nos dois ciclos da experiência. De facto, vários alunos não sentiram necessidade de quantificar, isto é, de contabilizar, e a sua preocupação baseou-se na identificação de atributos qualitativos. A intervenção das professoras foi determinante para que alterassem a sua abordagem e passassem a considerar a quantificação como relevante. No entanto, enquanto no primeiro ciclo da experiência, a professora discutiu as respostas que os alunos tinham registado por escrito, no segundo, a professora assumiu uma orientação prévia sobre a necessidade de identificar as quantidades. Neste caso, a quantificação não foi assumida pelos alunos como podendo ser uma amostra, mas sim como uma coleção em que o exibir a maior quantidade possível seria determinante. A situação de realçar, numa primeira abordagem, atributos qualitativos ou simplesmente referir que aumentou ou diminuiu, é mencionada por van Galen *et al*. (2008) como natural. Tal como, em momentos posteriores, também é comum que os alunos evidenciem expressões de comparação do género “passou a ser o dobro” ou “cabe três vezes” (Freudenthal, 2002), numa tentativa de fazer surgir relações numéricas, tal como aconteceu com vários dos alunos estudados.

A inexistência da necessidade de quantificar parece estar relacionada com os contextos das duas primeiras tarefas em que não estavam expressos dados numéricos. Nas restantes tarefas, o contexto dos problemas envolvia a explicitação de dados numéricos e a quantificação foi tida pelos alunos, em todas as estratégias de resolução, como factual, pelo que esta fase inicial ficou ultrapassada.

Relativamente às representações, nas situações de não quantificação, nos dois ciclos da experiência, a possibilidade de usar figuras em papel e tiras de cartolina parece ter promovido a representação ativa (Bruner, 1966), que os alunos utilizaram como ferramenta quando organizaram, compararam por sobreposição, dobraram e riscaram. Somente no segundo ciclo da experiência alguns alunos desenharam, em traços simples, objetos reais de uma forma pouco realista e preencheram-nos com as iniciais das palavras de identificação das grandezas, evidenciando a utilização de representações icónicas (Bruner, 1966; Thomas *et al.*, 2002). A tradução simbólica do raciocínio efetuado foi depois registada sob a forma textual.

Da situação de não quantificação para a de quantificação, a nível de representações a diferença surgiu apenas nas representações simbólicas em que a linguagem natural, sob a forma de texto, foi substituída pela linguagem matemática, que veio a prevalecer. Esta mudança num mesmo modo de representação (simbólico) pressupõe, de acordo com Behr *et al*. (1992), compreensão dos conceitos em jogo.

Na concretização de situações de quantificação, os alunos utilizaram estratégias com características aditivas e multiplicativas. Em alguns casos, as estratégias aditivas foram tidas como uma primeira abordagem que evoluiu para as estratégias multiplicativas; em outros casos, as estratégias multiplicativas surgiram logo no princípio.

As estratégias aditivas foram reconhecidas na resolução de várias tarefas, mas num número pouco significativo de alunos (com exceção de uma parte da tarefa 2). Em concreto, estas estratégias surgiram quando os alunos: (1) adicionaram duas vezes a mesma quantidade; (2) subtraíram o mesmo valor às duas grandezas que se relacionavam proporcionalmente; (3) retiraram uma parte a uma figura que tinha sido redimensionada; (4) compararam medidas de comprimento, com recurso à operação adição; (5) consideraram constante a diferença de valores entre duas grandezas.

Estas estratégias continuaram a ser influenciadas pela utilização de representações ativas, icónicas e simbólicas. A ênfase foi, no entanto, colocada nas representações simbólicas que surgiram em linguagem natural, sob a forma de pequenos textos, e em linguagem matemática, sob formas meramente numéricas, tabelas e linhas numéricas duplas. Quer as tabelas, quer as linhas numéricas duplas surgiam, por vezes, complementadas com arcos (orientados ou não) e legendados com os procedimentos a efetuar.

Relativamente às estratégias multiplicativas, elas foram dominantes na resolução de todas as tarefas, nos dois ciclos da experiência. Especificamente os alunos: (1) criaram razões iguais através de múltiplos, na maioria das vezes, via o procedimento "× 2"; (2) compararam de forma relativa, ou seja, multiplicativamente, duas dimensões; (3) utilizaram as operações multiplicação e divisão na procura do fator escalar de comparação.

Nas representações utilizadas nestas estratégias, nos dois ciclos da experiência, sobressaíram as do tipo simbólico. Em particular, a representação de razão sob a forma de fração foi unanimemente escolhida, em detrimento da representação sob a forma de quociente. Muito do trabalho para construir razões iguais, representadas sob a forma de fração, foi registado com arcos (orientados ou não) legendados com o procedimento que pretendiam efetuar, tal como Vergnaud (1983) utiliza nos seus esquemas. Este tipo de acessório continuou a ser assinalado quando consideravam quer tabelas de razões, quer linhas numéricas duplas, e era uma forma de tornar visível a estratégia, como defendem van Galen *et al*. (2008). A representação icónica permitiu ilustrar também, na relação entre o todo (contínuo) e uma sua parte, o significado de algumas percentagens.

Em síntese, enquanto a quantificação não foi tida como fundamental nas estratégias de resolução dos alunos, as representações ativas, icónicas e simbólicas (sob a forma textual) foram escolhidas. A adoção da representação simbólica, em linguagem matemática, surgiu, de um modo mais persistente, quando os contextos dos diferentes problemas mencionavam explicitamente determinadas quantidades. A evolução ao nível da aprendizagem da comparação multiplicativa foi, de facto, marcada pelo modo como os alunos relacionavam as quantidades, contextualizadas em dois espaços de medida, e referidas nas diversas tarefas. As estratégias, que procuravam encontrar relações dentro dos mesmos espaços de medida, começaram por ser aditivas (embora num número muito diminuto de alunos) e tinham como apoio representações ativas e icónicas, mas foram sendo substituídas por estratégias multiplicativas que se desenvolveram muito em torno de representações simbólicas, somente em linguagem matemática. Em particular, as razões surgiram representadas sob a forma de fração, em tabelas (de preferência de duas linhas e duas colunas) ou em linhas numéricas duplas (de preferência com apenas dois pontos).

Em ambos os ciclos da experiência de ensino, os alunos abordaram as várias tarefas (com exceção da tarefa 3 que apenas foi proposta no segundo ciclo) de modo muito similar, quer a nível das estratégias de resolução, quer das representações utilizadas. Os dados sugerem que, embora pudesse haver uma dependência mútua entre as estratégias de resolução e os modos de representação, parece que foram as representações a dar um impulso e um sentido às estratégias de resolução dos alunos em tarefas contextualizadas de forma para eles pouco habitual, ou até desconhecida.

6.1.1.2 Persistência de estratégias de resolução e de representações

O esquema da figura 185 caracteriza a persistência dos alunos a nível de estratégias de resolução e de representações.

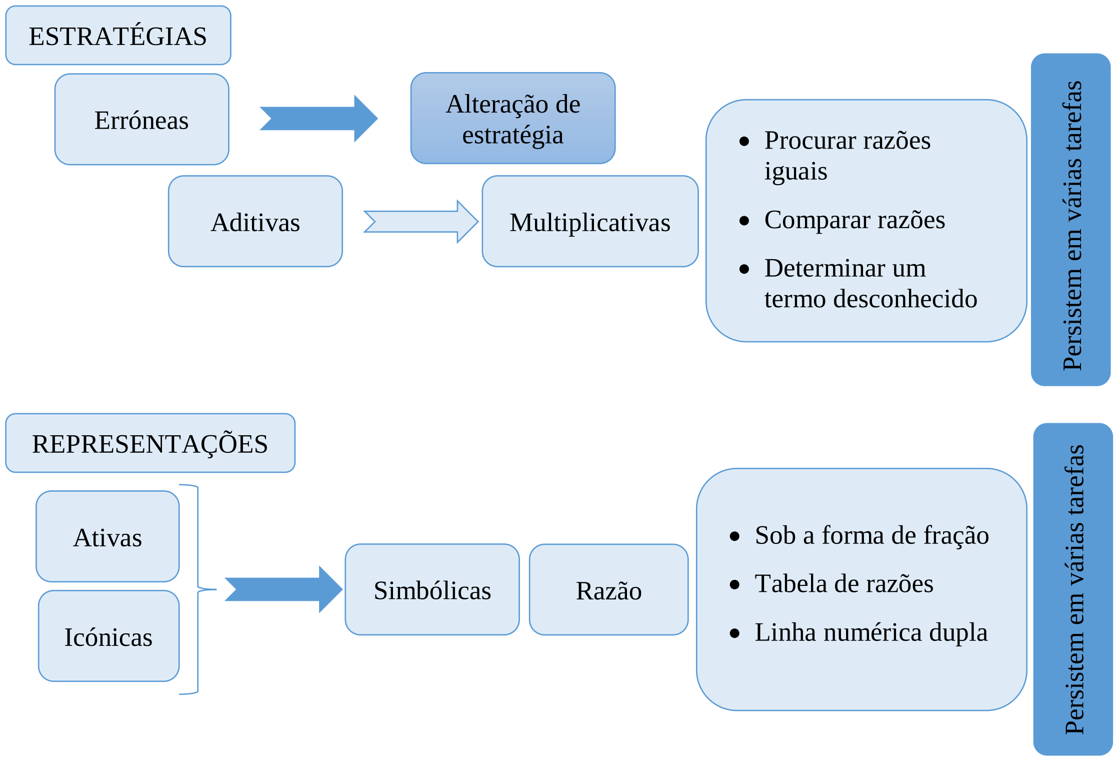


Figura 185: Esquema – persistência de estratégias de resolução e de representações

Tal como referido anteriormente, perante uma estratégia errónea, como por exemplo, a de não considerar a quantificação, e tendo compreendido que ela não permitia resolver a tarefa, os alunos, nos dois ciclos da experiência, substituíram-na por uma correta e, como tal, não persistiram na inicial.

Nos casos pontuais de utilização de estratégias aditivas, os alunos não persistiram nessas estratégias de resolução não adequadas quando, posteriormente, resolveram outras tarefas, e substituíram-nas por estratégias multiplicativas, em ambos os ciclos da experiência.

Relativamente às estratégias multiplicativas que, na resolução das tarefas em causa, foram tidas como dominantes, foi possível identificá-las em três problemas tipo: procurar razões iguais, comparar razões e determinar um termo desconhecido numa razão, conhecendo o outro e a relação multiplicativa a manter. Lamon (2007) refere-se aos dois últimos como sendo habituais nos livros de texto, nos processos de avaliação em larga escala e na investigação, mas admite que várias estratégias podem ser utilizadas, tal como é possível exemplificar com estes dados.

Nos dois ciclos da experiência, na construção de razões iguais, os fatores, sempre escalares, surgiram através dos múltiplos e permanentemente ligados à operação multiplicação, e essa foi uma opção que os alunos mantiveram. Quando procuravam o fator de comparação, determinaram-no através do quociente entre os termos correspondentes de duas razões apresentadas e repetiram, em situações análogas, esta estratégia. Na determinação de um dos termos de uma razão, a operação divisão surgiu como estratégia, apenas quando a razão em causa era a unitária, e somente um aluno destacou a relação entre dividir por um número e multiplicar pelo seu inverso; caso contrário foi a multiplicação que foi usada. Foi novamente possível perceber que a estratégia de resolução adotada não sofreu alteração de tarefa para tarefa.

Os alunos mantiveram-se, portanto, fiéis a uma determinada estratégia de resolução, sempre que ela tivesse sido validada e, de uma forma ou de outra, repetiram-na na resolução de outras tarefas, não existindo diferenças significativas de um ciclo da experiência para o outro.

De forma análoga, a análise dos dados permitiu, nos dois ciclos da experiência, encarar a persistência das representações, relativamente aos três modos: ativa, icónica e simbólica. No que diz respeito às representações simbólicas, em linguagem matemática, foi especificada a representação da razão sob a forma de fração, em tabelas de razões e em linhas numéricas duplas.

Os modos de representação ativa e icónica, nos dois ciclos da experiência, foram utilizados somente nas duas primeiras tarefas e o contexto das restantes pode ter promovido a mudança de representações definitivamente para o modo simbólico. Esta substituição sugere, segundo Behr *et al*. (1992), compreensão e reinterpretação dos conceitos. A razão foi representada sob a forma de fração, em detrimento da forma de quociente. Depois de terem sido introduzidas pelas professoras, alguns alunos utilizaram tabelas de razões ou linhas numéricas duplas, muitas vezes, com apenas duas linhas e duas colunas ou somente com dois pontos, respetivamente, e mantiveram-se maioritariamente coerentes com o esquema escolhido. No entanto, na resolução das duas últimas tarefas, no primeiro ciclo da experiência, foi mais evidente a igualdade de razões, representadas sob a forma de fração, ou seja, a construção de proporções, representadas expressamente através do sinal igual. No segundo ciclo, os alunos continuaram a preferir trabalhar com a linha numérica dupla, normalmente com dois pontos, e a igualdade de razões, representadas sob a forma de fração, através de uma proporção com o sinal igual entre as duas razões, raramente foi registada. Os alunos colocavam as razões lado a lado, mas sem as ligarem com o sinal igual.

Em síntese, nos dois ciclos da experiência, os dados sugerem que, maioritariamente, os alunos persistiram nas suas estratégias multiplicativas de resolução. A mudança de estratégias aditivas para as multiplicativas permite perspetivar um momento de consolidação da comparação multiplicativa, em particular, dos conceitos de razão e proporção. Da mesma forma, foi identificada a persistência nas representações utilizadas, em particular, no que diz respeito às diferentes maneiras de representar simbolicamente uma razão ou uma igualdade de razões, uma proporção. A mudança dentro do modo de representação simbólico foi nítida a nível das linguagens, da natural para a matemática. Depois, adotada uma representação simbólica, em linguagem matemática, ela veio, na maioria das vezes, a prevalecer ao longo de várias tarefas o que, em certa medida, sugere que há ainda um caminho a percorrer até que a alteração de representação, consoante o contexto/situação e os valores envolvidos, se torne significativa para os alunos.

6.1.2 Conexões entre os conceitos de razão e de proporção e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações

As conexões entre o processo de compreensão dos conceitos de razão e de proporção e a flexibilidade de estratégias de resolução e de representações foram analisadas em articulação com o ponto anterior, evolução conceptual da aprendizagem da comparação multiplicativa, com especial atenção a: (1) tipo de números e respetivas representações; (2) relações numéricas multiplicativas; (3) propriedades da operação multiplicação.

O esquema da figura 186 sintetiza os três pontos no que respeita a estratégias de resolução multiplicativas (as mais significativas), à esquerda, e a representações simbólicas em linguagem matemática (as mais utilizadas), à direita.

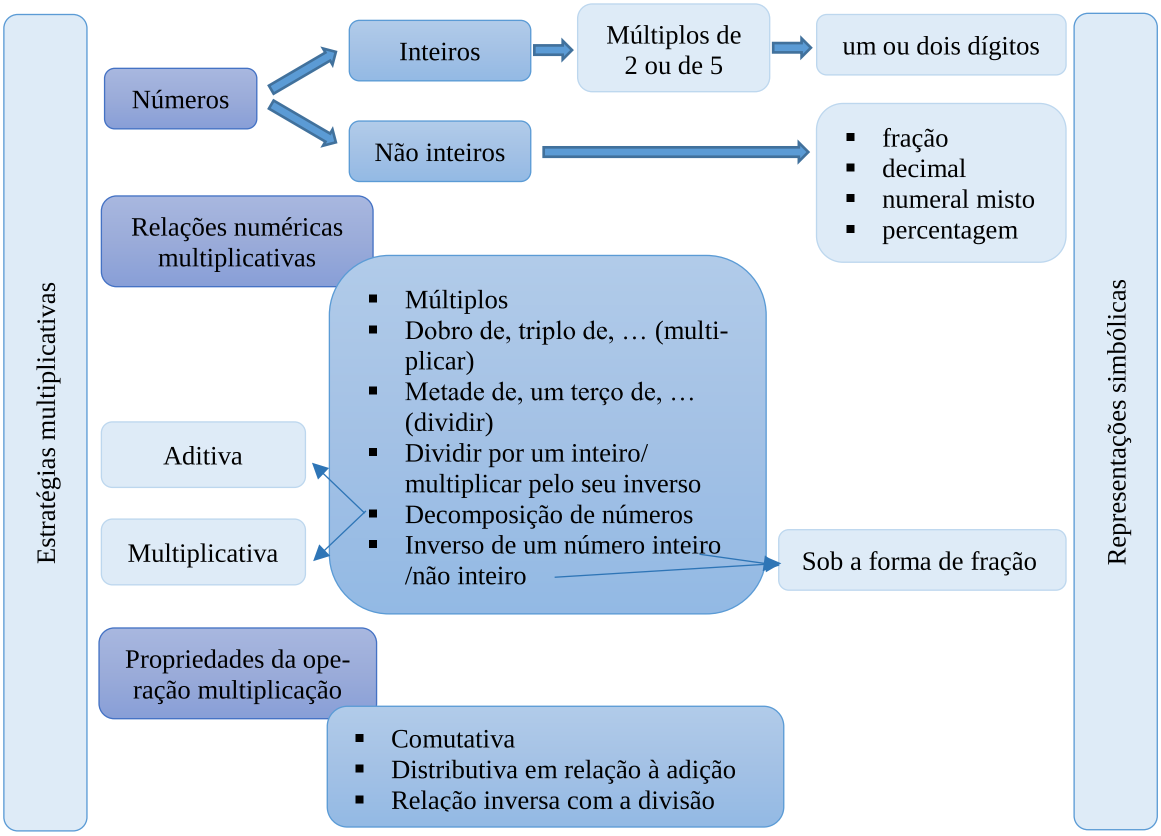


Figura 186: Esquema – números, relações numéricas multiplicativas e propriedades da operação multiplicação

Na análise dos dados, o tipo de números usados dividiu-se, primeiramente, em torno de números racionais inteiros e não inteiros e, numa fase posterior, em diferentes interpretações dos não inteiros. O contexto das tarefas incentivou uma abordagem inicial de trabalho com números inteiros (os dois espaços de medida eram conjuntos discretos) que, progressivamente, se estendeu ao universo dos não inteiros (pelo menos um dos dois espaços de medida era um conjunto contínuo). A exceção relativamente ao contexto surgiu na tarefa 3, que foi proposta, como já referi, apenas no segundo ciclo da experiência.

Nos dois ciclos da experiência, os números inteiros escolhidos pelos alunos foram, na sua maioria, números múltiplos de dois ou de cinco, com um ou dois dígitos. Estas escolhas pareciam sugerir o recurso ao cálculo mental. No entanto, isso nem sempre veio a acontecer, uma vez que vários alunos justificaram os cálculos, quase sempre, através da aplicação dos algoritmos das operações multiplicação e divisão. Dos fatores de comparação propostos pelos alunos, o mais utilizado, algumas vezes de forma repetitiva, foi o 2, muito provavelmente por estar ligado ao conceito já conhecido “dobro de”. Quando, na determinação do fator de comparação, a operação multiplicação era substituída pela divisão, os divisores mais utilizados foram o 2, o 5 e o 10, números que não suscitaram nenhuma perplexidade uma vez que podem ser considerados como números de referência.

Ainda nos dois ciclos da experiência, os números não inteiros surgiram representados sob a forma de fração, decimal, numeral misto e percentagem, consoante o contexto da tarefa ou, em alguns casos, a opção individual do aluno. A razão surgiu representada sob a forma de fração, em tabelas de razões ou em linhas numéricas duplas. Os fatores que permitiram averiguar a igualdade de razões, começaram por ser números inteiros para, no final, sem que isso tivesse sido um obstáculo para os alunos, serem não inteiros. Neste caso, consoante o contexto do problema, assim os fatores foram representados sob a forma decimal, de numeral misto ou de percentagem. As mudanças de uma representação para outra deste tipo de números não pareceu criar nenhum embaraço aos alunos.

A relação entre percentagem, principalmente, 50%, 75%, 100%, 150% e 200%, fração, decimal ou inteiro respetivo, foi muitas vezes especificada através do sinal igual, possivelmente porque os alunos já tinham interiorizado que cada número pode ter mais do que uma representação e, em alguns casos, a opção por uma ou por outra foi sua.

A procura de um fator comum entre os termos correspondentes de duas razões ou a determinação de razões iguais, foi sempre baseada em estratégias de resolução ligadas a um raciocínio escalar.

A análise de dados permitiu também concluir que as relações numéricas utilizadas por alguns alunos, nos dois ciclos da experiência, foram: (1) determinar múltiplos (calculados mentalmente); (2) considerar "dobro de; triplo de;…" (multiplicar, respetivamente, por 2, por 3, …) e "metade de; um terço de;…" (dividir, respetivamente, por 2, por 3, …); (3) dividir por um número inteiro e multiplicar pelo seu inverso; (4) decompor um número em fatores (iguais ou não); (5) decompor um número de forma aditiva, nas suas diferentes ordens ou não. De notar que estas relações numéricas, apesar de terem sido utilizadas apenas por alguns alunos, foram também por eles exploradas pontualmente e não de um modo persistente.

A extensão do conceito de inverso de um número inteiro a um outro universo numérico apenas aconteceu no segundo ciclo da experiência, no decorrer da tarefa 3. O conceito de inverso de um número inteiro, demasiado ligado à sua representação, sob a forma de fração, em que o numerador é 1 e o denominador coincide com o inteiro, dificultou, em alguns alunos, a sua extensão aos números não inteiros. Neste caso, o denominador já não era um número inteiro e alguns dos alunos consideraram errada essa representação. Esta questão foi ultrapassada pela transformação, sugerida por uma aluna, dos números escritos sob a forma decimal em números escritos, primeiro, sob a forma de numeral misto, e depois, sob a forma de fração. Agora, o inverso "já tinha sentido", era também um número escrito sob a forma de fração em que o numerador e o denominador "trocaram de papéis".

As propriedades da operação multiplicação identificadas na análise de dados, nos dois ciclos da experiência, são a comutativa e, de uma forma mais visível, a distributiva em relação à adição. Em situações contextualizadas na realidade, a aplicação da propriedade comutativa da multiplicação surgiu sem qualquer obstáculo a nível do cálculo, mas a interpretação do que realmente aconteceu nunca foi mencionada. As situações de contexto meramente numérico foram as que permitiram evidenciar, mais vezes, a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A utilização desta propriedade surgiu depois de um dos fatores ter sido considerado, a maioria das vezes, na sua decomposição decimal. No primeiro ciclo da experiência, em que a tarefa 3 não foi proposta, apenas um aluno aplica esta propriedade quando decompõe um fator não inteiro, representado na forma decimal, na sua parte inteira e decimal.

Os alunos trabalharam maioritariamente, nos dois ciclos da experiência, com os dados iniciais das tarefas, sem se preocuparem em relacionar resultados parciais obtidos anteriormente. Também os procedimentos de cálculo que, em momentos específicos, poderiam ter sido mais acessíveis, não foram muitas vezes uma opção. Em particular, a razão unitária, depois de ter sido determinada num problema, não foi utilizada, por alguns alunos, na resolução de um problema posterior.

Em síntese, os dados apontam para a influência do contexto das várias tarefas na utilização de números inteiros ou não inteiros. Com estes últimos, as diversas representações foram consideradas e transformadas umas nas outras sem que, nos dois ciclos da experiência, tenham sido evidenciadas dificuldades. A determinação de fatores de comparação foi baseada numa estratégia mais ligada à operação multiplicação, do que à operação divisão. A razão surgiu representada sob a forma de fração, em tabelas de razões e linhas numéricas duplas, e a resolução de problemas de comparação de razões ou de determinação de um termo numa razão, conhecido o outro e a relação entre ambos, esteve quase sempre relacionada com a representação escolhida de início e que, como já referi, se manteve ao longo das várias tarefas.

Ao retomar as ideias expostas no quadro 3, da secção 2.3, os dados analisados permitem referir que a evolução conceptual da comparação multiplicativa, nos conceitos de razão e de proporção, evidenciada por alguns alunos e ilustrada no quadro 5 (Cebola & Brocardo, 2019), se situa na exploração de tarefas contextualizadas em dois espaços de medida, em que a estratégia de utilização de duas sequências de adições de parcelas iguais, progrediu para o uso de números racionais (inteiros ou não inteiros), considerados como fatores para aumentar ou diminuir quantidades. Nesta etapa do seu percurso de aprendizagem, foi nítido que os alunos basearam as suas estratégias num raciocínio desenvolvido dentro de um mesmo espaço de medida, o que originou a utilização de fatores escalares. As representações, em concreto da tabela de razões e da linha numérica dupla, traduziram também relações escalares.

A flexibilidade é, portanto, assinalada pelas relações horizontais, de sentido duplo, entre as colunas, e pelas articulações verticais, de baixo para cima, que simbolizam o desenvolvimento conceptual da comparação multiplicativa. É este processo dinâmico no sentido de adaptação de estratégias de resolução e do uso de representações às características das tarefas, no qual as relações numéricas e as propriedades das operações têm um papel de destaque, que permite posicionar alguns dos alunos deste estudo, evidenciando uma etapa do percurso de compreensão conceptual da comparação multiplicativa.

Quadro 5: Evolução conceptual da comparação multiplicativa, evidenciada pelos alunos

EVOLUÇÃO CONCEPTUAL	(i) ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO	(ii) RELAÇÕES NUMÉRICAS E PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES	(iii) REPRESENTAÇÕES
Comparação funcional (função linear)			
Comparação multiplicativa (em dois espaços de medida)	Uso de números racionais (inteiros e não inteiros) como fator para aumentar ou diminuir quantidades (raciocínio/procedimento escalar)	• Relações numéricas multiplicativas (entre diferentes representações de números racionais) • Propriedades da multiplicação • Relação inversa entre a multiplicação e a divisão	Tabela de razões / linha numérica dupla (relações escalares)
	Uso de duas sequências de adições de parcelas iguais tendo em conta as relações proporcionais entre as duas quantidade (raciocínio/procedimento escalar)	Contagem usando o mesmo número de unidades compostas	Duas adições de parcelas iguais articuladas
Comparação multiplicativa (em um espaço de medida)			

6.2 Reflexão global

Ao terminar este estudo, não posso deixar de olhar para trás e organizar uma pequena reflexão sobre aspetos relativos à sua realização, destacando uns e identificando certas implicações que dele podem decorrer.

Começo por salientar que este trabalho de investigação, embora de carácter individual, surgiu no âmbito do projeto "Pensamento Numérico e Cálculo Flexível: aspetos críticos" e esse suporte foi, sem dúvida, uma mais valia para o seu desenvolvimento. O contacto com alguns textos de investigação, as discussões realizadas nas reuniões, sempre construtivas e animadas, e os incentivos de muitos dos elementos do grupo, foram em grande medida responsáveis por poder concretizar este estudo, que contribuiu de modo decisivo para o meu crescimento profissional, quer como investigadora, quer como docente.

O aprofundamento teórico, aliado a um maior refinamento do objetivo e das questões do estudo, e a concretização das tarefas a serem exploradas pelos alunos, passaram por várias fases de desenvolvimento, crítica, impasse e refinamento. Todo este processo se traduziu numa aprendizagem pessoal e numa reflexão constante, em que procurava articular um crescente conhecimento teórico com o foco do que me propunha investigar e com o que poderia ser operacionalizado com os alunos.

Destes aspetos resultou uma significativa evolução profissional pessoal, marcada por um maior conhecimento ao nível do modo de planear uma investigação. A sua concretização, permitiu-me entrar no espaço que viria a ser um dos pontos chave da investigação – a sala de aula – e, igualmente, progredir significativamente ao nível do meu conhecimento sobre o modo como os alunos exploram tarefas focadas na comparação multiplicativa e aperfeiçoar um método de recolha de dados que me possibilitou analisar em profundidade as questões que defini para o meu estudo.

O final de todo o processo desta investigação, traduzido no presente documento, leva-me também a fazer uma reflexão global, mas sucinta, sobre a temática investigada e os desafios que ela parece colocar.

Olhar para a comparação multiplicativa, com a "lente" da flexibilidade entre estratégias e representações, permitiu-me perceber como é difícil alterar uma atitude escolar vincada pelo uso de um método para resolver um certo tipo de problemas. Para os alunos estudados nos dois ciclos da experiência de ensino, embora evoluindo conceptualmente na aprendizagem da comparação multiplicativa, não foi fácil passar a "olhar" os números, a discorrer relações entre eles, a procurar e aplicar propriedades das operações, articulando este "olhar" com o uso flexível de estratégias e representações a cada situação particular.

Esta conclusão suscita-me uma reflexão sobre a dificuldade de desenvolver em todos os alunos a proficiência matemática como perspetivada pelo NRC (2001), em que importa desenvolver de modo articulado (*interwoven and interdependent*, no original): (i) compreensão conceptual; (ii) fluência procedimental marcada pelo uso flexível de procedimentos; (iii) competências estratégicas; (iv) raciocínio adaptativo; (v) uma apetência (*disposition*, no original) positiva. No entanto, as perspetivas curriculares atuais destacam que é fundamental que os alunos, tanto a nível da Matemática (NRC, 2001) como a nível geral (Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L. ... Rodrigues, S., 2017; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2018), sejam criativos e flexíveis. Deste modo, ser professor/educador hoje, em particular ser professor de Matemática ou educador matemático, inclui o enorme desafio de formar cidadãos com competências complexas marcadas, por exemplo, pela autonomia, liderança, curiosidade ou persistência e em que a flexibilidade é um aspeto integrante de todas.

A par deste desafio destaco, no entanto, que o estudo que realizei mostra que é possível desenvolver nos alunos uma compreensão conceptual da comparação multiplicativa marcada pela flexibilidade, tal como definida neste estudo (um processo dinâmico, no sentido de adaptação das estratégias de resolução e do uso de representações às características das tarefas, no qual as relações numéricas e as propriedades das operações têm um papel de destaque). Para que esta possibilidade abranja todos os alunos, importa realizar um trabalho prolongado e consistente que permita atenuar a sua dependência relativamente à utilização dos algoritmos das operações, em particular, da multiplicação e da divisão, e à tendência de procurar uma "regra a seguir" para responder a um determinado tipo de questões.

Esta reflexão articula-se com uma outra, relacionada com as normas, mais ou menos interiorizadas e/ou impostas pelos contextos de trabalho de cada professor. Esta experiência de ensino foi efetuada em dois ciclos, em que cada um diz respeito a professoras com características diferentes e a escolas em que se identificam, igualmente, aspetos muito distintos. No entanto, em ambos foi marcante a preocupação em "cumprir" o programa curricular nos moldes propostos e aprovados nas suas escolas e no qual persiste um apelo a terminologia e regras de cálculo específicas, aspetos em que se focavam as diretrizes de cada escola relativamente à avaliação sumativa. Também a clássica organização espacial dos alunos dentro da sala de aula, em filas de mesas (individuais ou a pares) era igualmente assumida como uma norma a cumprir. Deste modo, as professoras tiveram de gerir uma experiência em que lidavam com constrangimentos adicionais significativos, por não estarem a seguir a planificação padrão, definida pelo grupo disciplinar a partir da sua interpretação do programa. Apesar destes constrangimentos, destacaram características relevantes das tarefas que exploraram com os seus alunos e reconheceram a sua pertinência para a aprendizagem da comparação multiplicativa.

A experiência realizada sugere, deste modo, a pertinência de realizar outros ciclos de experimentação e/ou outras investigações focadas nesta temática, visando aprofundar as características de uma aprendizagem da comparação multiplicativa baseada na compreensão, em concreto na relação entre conceitos, símbolos e procedimentos, e desenvolvida em torno da flexibilidade de estratégias de resolução e modos de representação.

Referências bibliográficas

Abrahamson, D. (2006). *Mathematical representations as conceptual composites: Implications for design.* Paper presented at the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Merida, Mexico.

Abrahamson, D., & Cigan, C. (2003). A design for ratio and proportion instruction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *8*(9), 493-501.

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The *development of arithmetic concepts and skills – Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Baroody, A., & Tiilikainen, S. (2003). Two perspectives on addition development. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The *development of arithmetic concepts and skills – Constructing adaptive expertise* (pp. 75-125). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal of Research in Mathematics Education,* 46, 17-38.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: MacMillan.

Berk, D., Taber, S., Gorowara, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11, 113-135.

Billings, E. (2001). Problems that encourage proportion sense. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 7, 10-14.

Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*(3), 627-638.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, Lda.

Brocardo, J. (2014). Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning (Paper presented in ECER, Porto, Portugal).

Brown, A. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual procedural knowledge: the case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cebola, G., & Brocardo, J. (2019). Estratégias, representações e flexibilidade na resolução de tarefas de comparação multiplicativa. *Bolema*, *33*(64), 568-590.

Clements, D. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *1*(1), 45-60.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: an analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). New York, NY: Routledge.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6.ª ed.). London: Routledge.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Making connections: a case for proportionality. *Arithmetic Teacher*, *40*(6), 342-346.

Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 45-55.

Elia, I., Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 605-618.

Freudenthal, H. (2002). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Virginia: NCTM.

Gravemeijer, K. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2). 105-128.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp, &N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72-113).

Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: MacMillan.

Greer, B. (2009). Representational flexibility and mathematical expertise, *ZDM Mathematics Education*, 41, 697-702.

Hatano, G. (2003). Foreword. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The *development of arithmetic concepts and skills – Constructing adaptive expertise* (pp. xi-xii). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Heinze, A., Star, J., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, *ZDM Mathematics Education*, 41, 535-540.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM Mathematics Education*, 45, 167-181.

Kelly, A., & Lesh, R. (2000). Part III: Teaching experiments. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1993a). Ratio and proportion: Children´s cognitive and metacognitive process. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers – An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.

Lamon, S. (1993b). Ratio and proportion: Connecting content and children’s thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 146-165). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning – Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Langrall, C., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars – Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 6, 254-261.

Lemaire, P., & Siegler, R. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*(1), 83-97.

Lesh, R., & Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 263-343). Orlando: Academic Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

Levain, J.-P., & Vergnaud, G. (1994-95). Proportionnalite simple, proportionnalite multiple. *Grand N*, 56, 55-66.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13, 1, 17-32.

Lobato, J., Ellis, A., Charles, R., & Zbiek, R. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

Long, C., Dunne T., & Craig, T. (2010) – Proficiency in the multiplicative conceptual field: using Rasch measurement to identify levels of competence. *African Journal of Research in MST Education*, *14*(3), 79-91.

Mann, E. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Martins, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L. ... Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral da Educação.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8, 44.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). Especificidades e desafios da *design research*: uma experiência de ensino no 1.º ciclo. *Quadrante*, *XXV*(2), 51-75.

Miller, J., & Fey, J. (2000). Proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5, 310-313.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa e Metas Curriculares – Matemática (Ensino Básico)*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics [NCTM].

National Council of Teachers of Mathematics (1991/1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (versão portuguesa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática [APM].

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Versão Portuguesa. Lisboa: APM.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Nistal, A., Van Dooren, W., Clarebout, G., Elen, J., & Verschaffel, L. (2009). Conceptualising, investigating and stimulating representational flexibility in mathematical problem solving and learning: a critical review. *ZDM Mathematics Education*, 41, 627-636.

Organisation for Economic Co-operation and Development (2018). *The future of Education and Skills: Education 2030.* https://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf

Pepin, B. (2016). Mathematics teachers working as "designers": Developing operational knowledge and enhancing mathematical-didactical design capacity. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Eds.), *Livro de Atas do EIEM 2016, Encontro em Investigação em Educação Matemática*. Évora: Universidade de Évora.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação [GTI] (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Ponte, J., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *XXV*(2), 77-98.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & NCTM.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 877-891.

Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of* the *European Society for Research in Mathematics Education, CERME 8 – Eighth Congress of the European Society* *for Research in Mathematics Education* (pp. 353-362). Ankara: Middle East Technical University.

Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2015). Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of* the *European Society for Research in Mathematics Education, CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 339-345). Prague: Charles University in Prague.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 561-574.

Robinson, K., & LeFevre, J.-A. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 409-428.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 41-53). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates and Reston, VA: National Council of Teacher.

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145-173.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 619-625.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shield, M., & Dole, S. (2002). Investigating textbook presentations of ratio and proportion. In B. Barton, K. Irwin, M. Pfannkuch & M. Thomas (Eds.), *Proceedings Mathematics in the South Pacific. The 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 608-615). Auckland: University of Auckland.

Silvestre, A. (2012). *O Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional: Percursos de aprendizagem de alunos do 6.ºano de escolaridade*. (Tese de doutoramento não publicada). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Silvestre, A., & Ponte, J. (2012). Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: Uma abordagem exploratória. *INTERACÇÕES*, 20, 70-97.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M., & Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 35-41.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: MacMillan.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (vol. 1, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

Star, J., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280-300.

Star, J., & Newton, K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 557-567.

Steffe, L., & Thompson, P. (2000). Teaching experimental methodology: Underlying principles and essential elements. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University.

Thomas, N., Mulligan, J., & Goldin, G. (2002). Children´s representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 117-133.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction: Part 1. *Mathematics in School*, *28*(5), 2-4.

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 29-47.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 541-555.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 1-21.

Torbeyns, J., de Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. *ZDM Mathematics Education*, 41, 581-590.

Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2013). Efficient and flexible strategy use on multi-digit sums: a choice/no choice study. *Research in Mathematics Education*, *15*(2), 129-140.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de Ensino da Matemática* (pp.347-359). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática [SPIEM].

van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, Florida: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83-94.

Vergnaud, G. (2013). Conceptual development and learning. *Revista Qurriculum*, 26, 39-59.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.

Warner, L., Schorr, R., & Davis, G. (2009). Flexible use of symbolic tools for problem solving, generalization, and explanation. *ZDM Mathematics Education*, 41, 663-679.

Anexos

Portalegre, 6 de outubro de 2015

Ex.mo Senhor Diretor,
Agrupamento de Escolas de

Considerando que:

(1) Estou envolvida num Programa de Doutoramento em Educação, na especialidade Didática da Matemática, cuja investigação se foca na aprendizagem matemática e tem como objetivo compreender o modo como alunos de 6.º ano de escolaridade desenvolvem a comparação multiplicativa, mais especificamente, como resolvem tarefas de comparação multiplicativa, inter-relacionando os procedimentos que usam com o raciocínio flexível, isto é, com a utilização das características dos números e das propriedades das operações;
(2) Contactei, informalmente, a professora , docente do Agrupamento de Escolas de no presente ano letivo, que se mostrou disponível para trabalhar comigo;
(3) As condições do trabalho conjunto com a professora podem evidenciar-se em três linhas de ação:
    (i) Algumas das tarefas a propor aos alunos, na sala de aula, serão elaboradas/adaptadas e discutidas pelas duas (eu própria e a professora);
    (ii) As tarefas serão implementadas pela professora , durante o 1.º período letivo, na sua turma de 6.º ano de escolaridade de Matemática, de acordo com a planificação anual da Escola, e inserem-se no domínio de conteúdo – Álgebra (Proporcionalidade Direta), de acordo com o Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor;
    (iii) As aulas em que as tarefas forem implementadas serão discutidas e refletidas por ambas, no sentido de, se necessário, proceder a alterações em tarefas futuras, tendo em vista a progressão na aprendizagem dos alunos.

Venho, por este meio, solicitar autorização a V. Ex.ª para estar presente em algumas das aulas da turma , do 6.º ano, da disciplina de Matemática, no ano letivo 2015/16, a fim de proceder a registos áudio e vídeo que me possibilitem a recolha de dados, que serão objeto de análise no âmbito da investigação que me proponho desenvolver e que sumariamente referi.

Por fim, e para que não se levantem quaisquer problemas de ética profissional, declaro que os registos obtidos não serão divulgados nem utilizados para outros fins que não os explicitados neste documento.

Conforme a resposta de V. Ex.ª, estou à inteira disposição para proceder como considerar melhor, no sentido de cumprir o que superiormente está estipulado em relação a situações deste género.

Com os melhores cumprimentos,

____

Graça Maria Gaspar Cebola
(Professora Adjunta da Escola Superior de Educação
do Instituto Politécnico de Portalegre)

Autorização

, 12 de outubro de 2015

Exmo./a. Encarregado/a de Educação do/a aluno/a___________________________________
da turma do 6.º , que frequenta a disciplina de Matemática lecionada pela Professora
.

Encontro-me envolvida num Programa de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, no qual a investigação que me proponho realizar requer uma recolha de dados numa turma de Matemática do 6.º ano de escolaridade. Desta forma, em colaboração com a Professora decidi propor, em algumas das aulas de Matemática do 6.º , a exploração de um conjunto de tarefas ligadas ao tema Proporcionalidade Direta. As tarefas serão exploradas em continuação com o trabalho já realizado e tendo em atenção os documentos programáticos em vigor.
Assim, solicito a V. Ex.ª autorização para recolher, com meios áudio e vídeo, os dados sobre o modo como os alunos resolvem um conjunto de tarefas construídas, exploradas e analisadas em colaboração com a Professora , com os quais pretendo contribuir para um melhor conhecimento sobre a temática em estudo.
Mais declaro que as imagens e/ou som daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos.

Coloco-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos e agradeço, desde já, a compreensão de V. Ex.ª.

Com os melhores cumprimentos,

____
Graça Maria Gaspar Cebola
(Professora Adjunta da Escola Superior de Educação
do Instituto Politécnico de Portalegre)

(recortar)--

Declaro que autorizo o/a meu/minha educando/a _____________________________________
a participar na investigação desenvolvida pela Professora Graça Cebola no âmbito da sua tese de doutoramento.

______/______/______ (data)

____
(assinatura)

Autorização

, ____ de setembro de 2016

Exmo./a. Encarregado/a de Educação do/a aluno/a____________________________________
da turma do 6.º___, que frequenta a disciplina de Matemática lecionada pela Professora
.

Encontro-me envolvida num Programa de Doutoramento em Educação, na especialidade de Didática da Matemática, no qual a investigação que me proponho realizar requer uma recolha de dados numa turma de Matemática do 6.º ano de escolaridade. Desta forma, em colaboração com a Professora decidi propor, em algumas das aulas de Matemática do 6.º ___, a exploração de um conjunto de tarefas ligadas ao tema Proporcionalidade Direta.

Assim, solicito a V. Ex.ª autorização para recolher, com meios áudio e vídeo, os dados sobre o modo como os alunos resolvem um conjunto de tarefas construídas, exploradas e analisadas em colaboração com a Professora , com os quais pretendo contribuir para um melhor conhecimento sobre a temática em estudo.

Mais declaro que as imagens e/ou som daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos.

Coloco-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos e agradeço, desde já, a compreensão de V. Ex.ª.

Com os melhores cumprimentos,

____

Graça Maria Gaspar Cebola
(Professora Adjunta da Escola Superior de Educação e Ciências Sociais,
Instituto Politécnico de Portalegre)

(recortar)--

Declaro que autorizo o/a meu/minha educando/a ____________________________________
a participar na investigação desenvolvida pela Professora Graça Cebola no âmbito da sua tese de doutoramento.

______/______/______ (data)

____
(assinatura)

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 1 – Misturas de chocolates[22]

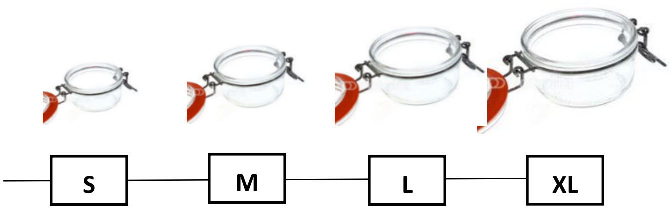
Imagina que vais abrir uma loja de chocolates. Um dos produtos da loja será pastilhas de chocolate vendidas em frascos de diferentes tamanhos.
Há três tipos de pastilhas de chocolate: branco, de leite e preto.



Escolhe dois tipos de pastilhas de chocolate e faz uma mistura a teu gosto. Regista-a de tal forma que o teu colega a consiga interpretar.

A minha mistura é ____

As pastilhas podem ser vendidas em frascos de quatro tamanhos diferentes – *Small* (S), *Medium* (M), *Large* (L) e *Extra Large* (XL).



Com a tua mistura, inventa a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate que deverias colocar num frasco de tamanho **S**. Regista a tua resposta e discute-a com o teu colega.

[22] Projeto Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos
Conceção da tarefa: Jean-Marie Kraemer, 2015.

Frasco de tamanho S

Escolhe outros dois frascos de tamanhos diferentes e determina a quantidade de cada tipo de pastilhas de chocolate em cada um. Regista as tuas respostas e discute-as com o teu colega.

Frasco de tamanho___

Frasco de tamanho___

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 2 – Redimensionar (Quatro imagens do mesmo desenho)[23]

A professora de Educação Visual ensinou os alunos da turma de Rita a usar o programa *Paint* para transformar os desenhos ou as fotografias que mais gostam.

Compara a olho nu o desenho original (ORIGINAL) com as reproduções A, B, C e D que a Rita fez com o programa *Paint*.
Numa tabela regista as semelhanças e as diferenças, classifica as reproduções e descreve a partir daí o que pode ter sido feito com o programa *Paint.*

[23] Projeto Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos
Conceção da tarefa: Jean-Marie Kraemer, 2015.

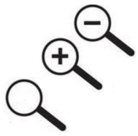
NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 2 – Redimensionar (multiplicando)

Completa a cadeia que mostra como Rita redimensionou o seu desenho para obter as imagens A, B, C e D:

- escolhe o símbolo (MANTER, AMPLIAR ou REDUZIR) que representa o que ela fez ao comprimento do desenho original e
- indica também quantas vezes o comprimento foi ampliado ou reduzido.

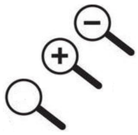
Comprimento ORIGINAL



…… vezes

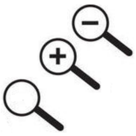
Comprimento A

Comprimento ORIGINAL



…… vezes

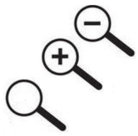
Largura B



…… vezes

Comprimento B

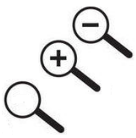
Comprimento ORIGINAL



…… vezes

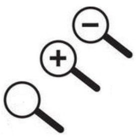
Comprimento C

Comprimento ORIGINAL



…… vezes

Largura D



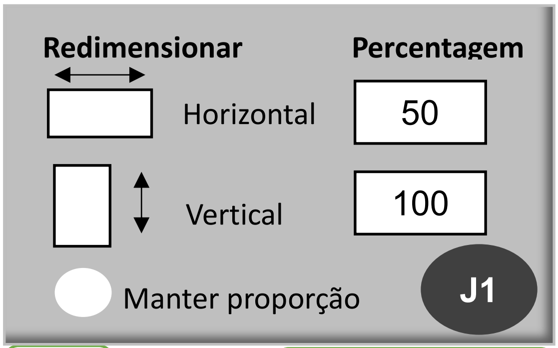
…… vezes

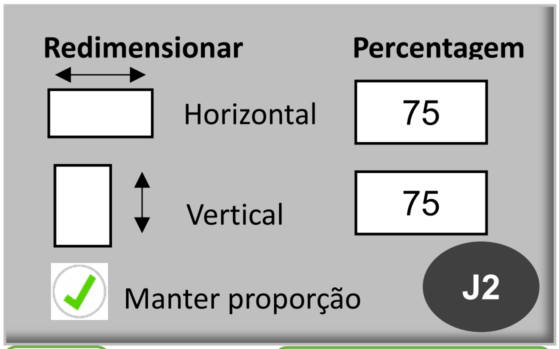
Comprimento D

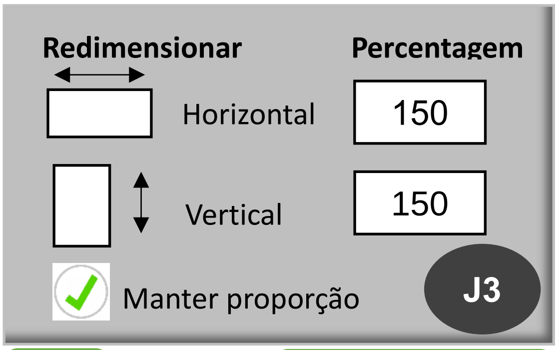
NOME: ____ DATA: __________

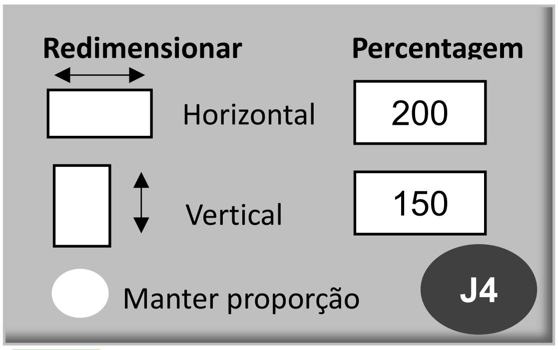
Tarefa 2 – Redimensionar (Ampliar e reduzir com percentagens)

As janelas do programa *Paint* (J1, J2, J3 e J4) mostram como a Rita redimensionou o seu desenho original para obter as imagens A, B, C e D.









1. Liga as janelas com as imagens correspondentes.
2. Mede e regista as dimensões do desenho original e das imagens para confirmares as ligações indicadas.
3. Encontra uma maneira de defenderes as escolhas efetuadas.

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 2 – Comparar dimensões

Como já sabes, as dimensões do desenho original da Rita são 6 cm × 6 cm.

1. Determina as dimensões da maior reprodução do desenho da Rita (imagem semelhante) que pode ser impressa numa folha de papel fotográfico de tamanho A4.

2. Compara as dimensões que indicaste relativamente às dimensões do desenho da Rita.

Regista a seguir a tua maneira de raciocinar e os cálculos que fizeste.

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 3 – Cálculos e mais cálculos…[24]

Parte 1

Depois de teres resolvido a tarefa 2 (Redimensionar) tenta agora calcular, da forma que considerares mais conveniente.

$12 \times 1\frac{1}{2} =$
$12 \times 1{,}5 =$
$12 \times \frac{3}{2} =$
$12 \times 3 \times \frac{1}{2} =$

$20 \times \frac{3}{4} =$
$20 \times \frac{1}{4} \times 3 =$
$20 \times 0{,}75 =$

$25 \times \frac{1}{2} =$
$25 \times 0{,}5 =$

Não te esqueças de registar todos os teus cálculos.

[24] Projeto Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos
Conceção da tarefa: Jean-Marie Kraemer, 2015

NOME: ____ DATA: __________

Parte 2

Como já reparaste, dados dois números podemos sempre relacioná-los multiplicativamente.

Por exemplo, se escolhermos o **6** e o **2**, temos que:

$$\boxed{6 \times 2 = 12}$$

$$\boxed{6 = \frac{1}{2} \times 12}$$

$$\boxed{2 = \frac{1}{6} \times 12}$$

$$\mathbf{6} \underset{:\,2}{\overset{\times\,2}{\rightleftarrows}} \mathbf{12}$$

$$\mathbf{2} \underset{:\,6}{\overset{\times\,6}{\rightleftarrows}} \mathbf{12}$$

Estas igualdades mostram-nos as relações proporcionais entre os termos de uma multiplicação.

Agora é a tua vez de completar os esquemas (a seguir apresentados), registando os números que faltam e indicando, ao lado, as relações proporcionais entre os termos da multiplicação respetiva.

$$\mathbf{4} \underset{:\,\dots}{\overset{\times\,\dots}{\rightleftarrows}} \mathbf{28}$$

$$\mathbf{7} \underset{:\,\dots}{\overset{\times\,\dots}{\rightleftarrows}} \mathbf{28}$$

$$\mathbf{15} \underset{:\,\dots}{\overset{\times\,\dots}{\rightleftarrows}} \mathbf{45}$$

$$\bigcirc \underset{:\,15}{\overset{\times\,\dots}{\rightleftarrows}} \mathbf{45}$$

$$\mathbf{10} \underset{:\,\dots}{\overset{\times\,\dots}{\rightleftarrows}} \mathbf{15}$$

$$\mathbf{1{,}5} \underset{:\,\dots}{\overset{\times\,10}{\rightleftarrows}} \mathbf{\dots}$$

$$\mathbf{3} \;\underset{: \ldots}{\overset{\times\, 2{,}5}{\rightleftarrows}}\; \square$$

$$\mathbf{2{,}5} \;\underset{: \,3}{\overset{\times \ldots}{\rightleftarrows}}\; \square$$

$$\mathbf{5} \;\underset{: \ldots}{\overset{\times \ldots}{\rightleftarrows}}\; \mathbf{7}$$

$$\frac{7}{5} \;\underset{: \ldots}{\overset{\times \ldots}{\rightleftarrows}}\; \mathbf{7}$$

$$\mathbf{3} \;\underset{: \ldots}{\overset{\times \ldots}{\rightleftarrows}}\; \mathbf{2}$$

$$\frac{2}{3} \;\underset{: \ldots}{\overset{\times \ldots}{\rightleftarrows}}\; \mathbf{2}$$

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 4 – Fazer Limonadas[25]

Quando o João e os amigos se juntam para brincar, a mãe dele faz limonada para todos, misturando concentrado de sumo de limão e água fresca.

Na sexta-feira, a mãe do João fez limonada e misturou 3 chávenas de concentrado de sumo de limão e 4 litros de água.

No sábado, na festa de anos do João, a mãe fez limonada e misturou 4 chávenas de concentrado de sumo de limão e 5 litros de água.

1. Alguns amigos do João disseram que a limonada de sexta-feira tinha um sabor a limão diferente da de sábado. Concordas com eles? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

2. Uns dias depois, a mãe do João pretendeu fazer limonada com o mesmo sabor a limão daquela que tinha feito no sábado, mas só tinha 1 chávena de concentrado de limão. Que quantidade de água devia ter utilizado? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

[25] Adaptado de *Using Proportional Reasoning in Mathematics Assessment Project* (2015). University of Nottingham & UC Berkeley.

3. Quando foram à excursão, a mãe do João voltou a fazer limonada com o mesmo sabor da que tinha feito no sábado e, nesse momento, misturou 9 chávenas de concentrado de sumo de limão com água. És capaz de dizer quantos litros de água utilizou? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

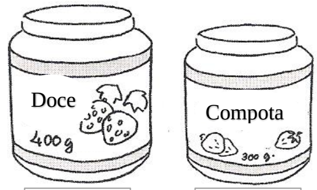
4. Se a mãe do João utilizar 18 litros de água, quantas chávenas de concentrado de sumo de limão deve misturar para que a limonada tenha o mesmo sabor que a de sexta-feira? Explica como pensaste e apresenta todos os cálculos que efetuaste.

NOME: ____ DATA: __________

Tarefa 5 – Qual devo comprar?![26]

Quando vamos ao supermercado temos muitas vezes que escolher entre dois produtos, por exemplo, entre o doce da marca da casa e a compota de uma marca específica.

Na prateleira das conservas estão expostos, para venda, doce e compota de morango em frascos de tamanhos diferentes e com preços também diferentes, como está ilustrado ao lado.



400 g **1.68 €**	**300 g** **1.20 €**

1. Se fosses ao supermercado, qual dos frascos comprarias? Porquê?

Explica como pensaste e regista todos os cálculos que efetuaste.

2. Apresenta, a seguir, uma resolução diferente da anterior.

Explica como pensaste e regista todos os cálculos que efetuaste.

[26] Adaptado de van Galen *et al*. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions*. Rotterdam: Sense Publishers.