ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ИНФОРМАТИКА

INFORMATICS

УДК 519.8
DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-147-150

Поступило в редакцию 09.10.2017
Received 09.10.2017

Член-корреспондент М. Я. Ковалев

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА С ФИКСИРОВАННЫМ ПРОШЛЫМ

Аннотация. Описывается новый подход к решению задач оптимального выбора в условиях динамической неопределенности, называемый абсолютной устойчивостью с фиксированным прошлым. Предлагается эффективный алгоритм решения основной задачи и некоторых ее вариантов. Подход может быть использован для решения других задач комбинаторной оптимизации в условиях динамической неопределенности.

Ключевые слова: исследование операций, математическое программирование, устойчивость, полиномиальный алгоритм

Для цитирования: Ковалев, М. Я. Абсолютная устойчивость в задачах оптимального выбора с фиксированным прошлым / М. Я. Ковалев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 2. – С. 147–150. DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-147-150

Corresponding Member Mikhail Y. Kovalyov

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ABSOLUTE ROBUSTNESS FOR OPTIMAL SELECTION PROBLEMS WITH FIXED PAST

Abstract. A novel approach to solving optimal selection problems under dynamic uncertainty is described. The approach is called absolute robustness with fixed past. An efficient algorithm is presented for the main problem and several its variants. The approach can be employed for solving other combinatorial optimization problems under dynamic uncertainty.

Keywords: operations research, mathematical programming, robustness, polynomial algorithm

For citation: Kovalyov M. Ya. Absolute robustness for optimal selection problems with fixed past. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 2, pp. 147–150 (in Russian). DOI: 10.29235/1561-8323-2018-62-2-147-150

Введение. При решении практических динамических задач оптимизации часто происходят ситуации, когда числовые входные данные, использованные при построении начального оптимального либо приближенного решения, изменяются в процессе реализации этого решения во времени, в силу чего качество решения может значительно ухудшаться. Такие ситуации называются ситуациями динамической неопределенности. Для борьбы с ними традиционно используются две основные теории: в случае отсутствия вероятностей значений изменяющихся входных данных используется теория абсолютной устойчивости (или минимакса), направленная на минимизацию последствий наихудшего случая, а при наличии вероятностей или их оценок – теория стохастического программирования, представляющая динамический процесс решения задачи в виде дерева, учитывающего возможные сценарии реализации входных данных во времени и описывающего его в виде задачи математического программирования. Обе теории имеют недостатки: абсолютно устойчивые решения во многих случаях являются слишком грубыми, а использование стохастического программирования либо не всегда возможно из-за отсутствия вероятностей и их оценок, а также в силу значительной размерности получаемой задачи. В работах Цицероне и соавт. [1], Эрера и соавт. [2] и Лиебхен и соавт. [3] предложен подход к решению задач в условиях динамической неопределенности, который позволяет избежать указанных недостатков. Этот подход получил название восстанавливаемой устойчивости (recoverable robustness). Он предполагает выполнение следующих основных условий: 1) изменения входных данных характеризуются набором сценариев, 2) в случае изменения входных данных допускается изменение исходного решения, описываемое заданными ограничениями либо классом алгоритмов, 3) предлагаемое к реализации решение является наилучшим во всех сценариях и при любых его изменениях в соответствии с пунктами 1) и 2), т. е. оно является абсолютно устойчивым. Пункты 1) и 2) предполагают значительную свободу для их реализации, которая должна учитывать практические особенности задачи.

В данном сообщении предлагается реализация нового подхода для решения задачи оптимального выбора в условиях динамической неопределенности, которую мы называем абсолютной устойчивостью с фиксированным прошлым. Подход позволяет построить решение, учитывающее отсутствие изменений входных данных в прошлом, что улучшает качество решения. При этом подход не требует наличия вероятностей значений входных данных. Его можно использовать при решении реальных задач наряду с подходом восстанавливаемой устойчивости.

Постановка задачи оптимального выбора в условиях динамической неопределенности. Рассматриваемая задача может быть описана следующим образом. Задано множество проектов $M = \{1, ..., m\}$, из которого нужно выбрать подмножество заданной мощности r, где $1 \le r \le m - 1$. Проектами могут быть, например, инвестиционные или деловые проекты, выбираемые для последующего финансирования. Подмножество мощности r называется допустимым решением. Процесс реализации допустимого решения состоит в последовательном выборе и реализации проектов во времени. Выбор проектов происходит в соответствии с некоторой их фиксированной последовательностью. Не ограничивая общности, предположим, что он происходит в порядке возрастания номеров проектов, когда проект с меньшим номером реализуется раньше. До начала реализации решения каждый из проектов характеризуется заданной стоимостью v_i, которая в процессе реализации решения может измениться в соответствии с некоторым сценарием. Измененная стоимость проекта i обозначается через w_i. Рассмотрим сценарии, при которых стоимость w_i может принимать любое значение из заданного интервала $[a_i, b_i]$, $i = 1, ..., m$. Вектор $w = (w_1, ..., w_m)$, $w_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, ..., m$, назовем интервальным сценарием и обозначим через W множество всевозможных интервальных сценариев. Предположим, что изменение стоимостей может произойти после того, как выбраны и реализованы ровно k, $1 \le k \le r$, проектов, чьи стоимости остаются без изменений, т. е. они равняются соответствующим значениям v_i. Стоимости других проектов могут измениться в соответствии с любым интервальным сценарием, т. е. они задаются неопределенными значениями w_i. Таким образом, предполагается, что изменение стоимостей не касается k проектов, выбранных первыми. Назовем такие проекты проектами прошлого (при заданном допустимом решении). Критерием является минимизация суммарной стоимости выбранных проектов после реализации соответствующего решения. Предполагается, что v_i, a_i и b_i являются неотрицательными числами, и $a_i \le b_i$, $i = 1, ..., m$.

Говоря формально, задано множество $X(r)$ булевых векторов $x = (x_1, ..., x_m)$ таких, что $|\{i \mid x_i = 1\}| = r$, где $x_i = 1$ означает, что проект i выбран, и $x_i = 0$ означает, что он не выбран. Рассмотрим вектор $x \in X(r)$. Обозначим через $P(k, x)$ множество проектов прошлого, включающее k выбранных проектов с наименьшими номерами в x. В качестве решения задачи выбора в условиях неопределенности предлагается рассмотреть вектор из $X(r)$, который минимизирует суммарную стоимость при наихудшем сценарии $w \in W$. Соответствующая задача может быть представлена в виде следующей задачи математического программирования:

$$\min_{x \in X(r)} \max_{w \in W} \{\Sigma_{i \in P(k, x)} v_i x_i + \Sigma_{i \in M \setminus P(k, x)} w_i x_i\}.$$

Поскольку максимум в приведенной выше формуле достигается при $w = (b_1, ..., b_m)$, указанная задача сводится к следующей задаче, обозначаемой как задача выбора с фиксированным прошлым (ВФП):

$$\min_{x \in X(r)} \{\Sigma_{i \in P(k,x)} v_i x_i + \Sigma_{i \in M \setminus P(k,x)} b_i x_i\}.$$

Задача ВФП состоит в выборе допустимого решения, для которого сумма стоимостей v_i первых k выбранных проектов (проектов прошлого) плюс сумма стоимостей b_i остальных $r - k$ выбранных проектов минимальна. Касперский и Зелинский [4] рассматривали похожую задачу, но с одним существенным отличием: количество проектов прошлого могло быть произвольным, то есть прошлое не фиксировалось. Бертсимас и Сим [5] также рассматривали похожую задачу, в которой количество проектов прошлого ограничивалось снизу и $w_i \in [a_i, a_i + d_i]$, $d_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$. Указанные отличия делают невозможным применение результатов статей [5] и [4] для решения задачи ВФП. Далее приводится полиномиальный алгоритм решения задачи ВФП.

Алгоритм. Рассмотрим подзадачу задачи ВФП, в которой наибольший номер проекта прошлого фиксирован и равен j, $j \in \{k, k + 1, ..., m\}$, $r - k \leq m - j$. Обозначим эту подзадачу через ВФП(j). Эта подзадача решается следующим образом. Определяем решение $x^{(j)}$, в котором среди проектов 1, ..., j выбраны k проектов с наименьшими значениями v_i и среди проектов $j + 1, ..., m$ выбраны $r - k$ проектов с наименьшими значениями w_i. Для выбранных проектов соответствующая компонента вектора $x^{(j)}$ равна 1, а для невыбранных она равна 0. Вектор $x^{(j)}$ с наименьшим значением суммарной стоимости выбранных таким образом r проектов является решением задачи ВФП.

Поскольку k-ая порядковая статистика набора из j чисел может быть найдена за время $O(j)$, см., напр., Блюм и соавт. [6], указанные выше k проектов с наименьшими значениями v_i могут быть найдены за такое же время, используя значение этой статистики. Аналогичным образом, $r - k$ проектов с наименьшими значениями w_i среди проектов $j + 1, ..., m$ могут быть найдены за время $O(m - j)$. Следовательно, решение $x^{(j)}$ и его суммарная стоимость могут быть найдены за время $O(m)$. Поскольку количество решаемых задач ВФП(j) равно $m - k + 1$, исходная задача ВФП может быть решена за время $O(m(m - k))$.

Заключение. Предложен новый подход к решению задач оптимального выбора в условиях динамической неопределенности – подход абсолютной устойчивости с фиксированным прошлым. Предложен полиномиальный по времени работы алгоритм решения этой задачи, основанный на предложенном подходе. В качестве фиксированного прошлого рассматривается заданное количество проектов прошлого, выбранных к моменту возникновения изменений.

Предложенный алгоритм нетрудно модифицировать для решения задачи, в которой фиксировано не прошлое, а будущее, в которой стоимости последних k выбранных проектов фиксированы, а также для решения задачи, в которой стоимости не определены для первых и последних выбранных проектов, а для всех средних они фиксированы. В первом случае достаточно перенумеровать проекты, тем самым поменяв прошлое и будущее местами. Во втором случае следует использовать два номера – j_1 и j_2 – вместо j для определения наименьшего и наибольшего номеров проектов прошлого.

В дальнейшем представляют интерес следующие направления исследований:

улучшение временной сложности решения задачи ВФП;

исследование задач оптимального выбора с другими определениями фиксированного прошлого, например, с прошлым, определяемым суммой связанных с проектами временных параметров;

рассмотрение сценариев неопределенности, отличных от интервальных, например, дискретных сценариев;

применение предложенного подхода к решению других задач комбинаторной оптимизации в условиях динамической определенности, таких как задача о кратчайшем пути и задача об остовном дереве минимального веса.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Информатика, космос и безопасность», задание 1.3.03 (ИК 303) «Модели, методы, алгоритмы и экспериментальные образцы наукоёмких компонентов информационных систем поддержки процессов управления, планирования, проектирования и инженерного анализа для сложных технических и экономических объектов».

Acknowledgements. The work has been performed within the framework of the State Research Program of the Public of Belarus «Informatics, Space and Safety», Task 1.3.03 (IS 303) «Models, Methods, Algorithms and Experimental Samples of Knowledge-Based Components of Information Systems, Planning and Engineering Analysis for Complex Technical and Economic Objects».

Список использованных источников

1. Robust algorithms and price of robustness in shunting problems / S. Cicerone [et al.] // Proceedings of the 7th workshop on algorithmic approaches for transportation modeling, optimization, and systems (ATMOS07). – Berlin, 2007. – P. 175–190.

2. Erera, A. L. Robust optimization for empty repositioning problems / A. L. Erera, J. C. Morales, M. Savelsbergh // Operations Research. – 2009. – Vol. 57, N 2. – P. 468–483. DOI: 10.1287/opre.1080.0650

3. The concept of recoverable robustness, linear programming recovery, and railway applications / C. Liebchen [et al.] // Robust and Online Large-Scale Optimization: Models and Techniques for Transportation Systems. – Berlin: Springer, 2009. – P. 1–27. DOI: 10.1007/978-3-642-05465-5_1

4. Kasperski, A. Robust recoverable and two-stage selection problems / A. Kasperski, P. Zielinski // Discrete Applied Mathematics. – 2017. – Vol. 233. – P. 52–64. DOI: 10.1016/j.dam.2017.08.014

5. Bertsimas, D. Robust discrete optimization and network flows / D. Bertsimas, M. Sim // Mathematical Programming Series B. – 2003. – Vol. 98, N 1–3. – P. 49–71. DOI: 10.1007/s10107-003-0396-4

6. Time bounds for selection / M. Blum [et al.] // Journal of Computer and Systems Sciences. – 1973. – Vol. 7, N 4. – P. 448–461. DOI: 10.1016/s0022-0000(73)80033-9

References

1. Cicerone S., D'Angelo G., Stefano G. D., Frigioni D., Navarra A. Robust algorithms and price of robustness in shunting problems. *Proceedings of the 7th workshop on algorithmic approaches for transportation modeling, optimization, and systems (ATMOS07).* Berlin, 2007, pp. 175–190.

2. Erera A. L., Morales J. C., Savelsbergh M. Robust optimization for empty repositioning problems. *Operations Research*, 2009, vol. 57, no. 2, pp. 468–483. DOI: 10.1287/opre.1080.0650

3. Liebchen C., Lubbecke M. E., Mohring R. H., Stiller S. The concept of recoverable robustness, linear programming recovery, and railway applications. *Robust and Online Large-Scale Optimization: Models and Techniques for Transportation Systems*. Berlin, Springer, 2009, pp. 1–27. DOI: 10.1007/978-3-642-05465-5_1

4. Kasperski A., Zielinski P. Robust recoverable and two-stage selection problems. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, vol. 233, pp. 52–64. DOI: 10.1016/j.dam.2017.08.014

5. Bertsimas D., Sim M. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming Series B*, 2003, vol. 98, no. 1–3, pp. 49–71. DOI: 10.1007/s10107-003-0396-4

6. Blum M., Floyd R. W., Pratt V., Rivest R. L., Tarjan R. E. Time bounds for selection. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 1973, vol. 7, no. 4, pp. 448–461. DOI: 10.1016/s0022-0000(73)80033-9

Информация об авторе

Ковалев Михаил Яковлевич – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, заместитель генерального директора по научной работе. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by.

Information about the author

Kovalyov Mikhail Yakovlevich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Deputy General Director for Research. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by.