Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 май–июнь Том 60 № 3

УДК 517.988.3

Член-корреспондент В. В. ГОРОХОВИК[1], М. А. ТРОФИМОВИЧ[2]

МИНИМАКСНОЕ И МАКСИМИННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

[1]Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
gorokh@im.bas-net.by
[2]Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Гомель, Беларусь
marvoitiva@tut.by

Для функций различных (непрерывных, липшицевых, разностно-сублинейных, кусочно-линейных) подпространств пространства положительно однородных функций доказано существование и указаны характеристические свойства двухиндексного семейства линейных функций, задающего одновременно минимаксное и максиминное представления таких функций.

Ключевые слова: положительно однородные функции, минимаксное представление, условие Липшица, разностная сублинейность, кусочная линейность.

V. V. GOROKHOVIK[1], M. A. TRAFIMOVICH[2]

MINIMAX AND MAXIMIN REPRESENTATIONS OF POSITIVELY HOMOGENEOUS FUNCTIONS THROUGH LINEAR FUNCTIONS

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
gorokh@im.bas-net.by
[2]P. O. Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Belarus
marvoitiva@tut.by

For functions, which belong to different (continuous, Lipschitz, difference-sublinear, piecewise-linear) subspaces of the space of positively homogeneous functions, we prove the existence and establish the characteristic properties of a two-index family of linear functions which provides simultaneously both minimax and maximin representations of such functions.

Keywords: positively homogeneous fonctions, minimax representation, Lipschitz condition, difference sublinearity, piecewise linearity.

Основным объектом исследования в данном сообщении являются положительно однородные функции, повышенный интерес к которым в последние десятилетия обусловлен развитием негладкого анализа. В теории дифференцирования негладких функций именно положительно однородные функции играют роль локальных аппроксимаций.

Функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется положительно однородной (первой степени), если $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ для всех действительных $\lambda > 0$.

Относительно стандартных алгебраических операций совокупность всех положительно однородных функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, является вещественным векторным пространством, которое будет обозначаться ниже символом $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Любая положительно однородная функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ однозначно определяется своим сужением на единичную сферу $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}$, при этом соответствие $p \leftrightarrow p_{|S}$ является алгебраическим и порядковым (относительно поточечного упорядочения) изоморфизмом между $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ и пространством $\mathbb{R}^S$ всех вещественнозначных функций, определенных на S. Следовательно, в пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ можно выделить столь много различных подпространств, сколько известно различных подпространств функций, определенных на компактных (и не только) множествах. В данном сообщении мы ограничиваемся рассмотрением только таких подпространств положительно однородных функций, которые наиболее часто находят приложения в негладком анализе. К таким подпространствам мы относим подпространство непрерывных положительно однородных функций $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$, подпространство липшицевых положительно однородных функций $\mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n)$, подпространство разностно-сублинейных функций $\mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n)$, подпространство кусочно-линейных функций $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n)$ и подпространство линейных функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Эти подпространства связаны между собой следующей цепочкой включений

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{PL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_{DC}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_L(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Каждое из выделенных векторных подпространств, за исключением подпространства линейных функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, содержит в себе поточечный минимум и поточечный максимум любого принадлежащего ему конечного семейства функций и, следовательно, является, кроме того, векторной решеткой. Отметим, что подпространство кусочно-линейных функций $\mathcal{PL}(\mathbb{R}^n)$ является наименьшей векторной решеткой, содержащей подпространство линейных функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Кроме векторных подпространств положительно однородных функций, представленных в цепочке (1), широкие приложения в негладком анализе имеют классы полунепрерывных снизу и полунепрерывных сверху положительно однородных функций ($\mathcal{P}_{lsc}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{P}_{usc}(\mathbb{R}^n)$ соответственно), а также классы сублинейных (выпуклых положительно однородных) и суперлинейных (вогнутых положительно однородных) функций ($\mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{P}_{conc}(\mathbb{R}^n)$ соответственно). Эти классы не являются векторными подпространствами пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, а образуют в нем выпуклые конусы.

Роль подпространства линейных функций $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ среди всех подпространств цепочки (1) особая. Эта особенность заключается в том, что из линейных функций как из элементарных «кирпичиков» путем последовательного применения операций поточечной нижней грани и поточечной верхней грани «строятся» функции всех других подпространств цепочки (1) до подпространства $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$ непрерывных положительно однородных функций включительно и даже, более того, функции содержащих $\mathcal{P}_C(\mathbb{R}^n)$ классов полунепрерывных сверху и полунепрерывных снизу положительно однородных функций.

Из классической теории двойственности Минковского [1] известно, что любой сублинейной функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ однозначно соответствует в пространстве $\mathbb{R}^n$ выпуклое компактное множество $\partial\varphi = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \le \varphi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n\}$, называемое *нижним субдифференциалом*, а чаще просто *субдифференциалом* функции φ, причем

$$\psi(x) = \min_{a\in\partial^+\psi} \langle a, x\rangle \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, любая сублинейная функция φ является поточечным максимумом семейства своих линейных минорант, образующих выпуклое компактное подмножество $\partial\varphi$.

Аналогично, любой суперлинейной функции $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ однозначно соответствует в пространстве $\mathbb{R}^n$ выпуклое компактное множество $\partial^+\psi = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \ge \psi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n\}$, называемое *верхним субдифференциалом* или *супердифференциалом* функции ψ, причем

$$\psi(x) = \min_{a\in\partial^+\psi} \langle a, x\rangle \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, любая суперлинейная функция ψ является поточечным минимумом семейства своих линейных мажорант, образующих выпуклое компактное подмножество $\partial + \psi$.

Рассмотрим теперь семейство сублинейных функций $\Phi \subset \mathcal{P}_{conv}(\mathbb{R}^n)$ и предположим, что

$$\inf_{\varphi\in\Phi} \varphi(x) > -\infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как сублинейные функции непрерывны на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, то в силу [2, с. 300] функция

$$p(x)=\inf_{\varphi\in\Phi}\varphi(x)\forall\ x\in\mathbb{R}^n$$

является положительно однородной и полунепрерывной снизу на $\mathbb{R}^n$. Подобным образом, если семейство суперлинейных функций $\Psi\subset\mathcal{P}_{conc}(\mathbb{R}^n)$ таково, что

$$\sup_{\psi\in\Psi}\psi(x)>+\infty\ \text{ для всех } x\in\mathbb{R}^n,$$

то функция

$$p(x)=\sup_{\psi\in\Psi}\psi(x)\forall\ x\in\mathbb{R}$$

является положительно однородной и полунепрерывной сверху на $\mathbb{R}^n$.

Демьяновым и Рубиновым [3; 4] доказаны и обратные утверждения: любая полунепрерывная сверху (снизу) положительно однородная функция является поточечной нижней (верхней) гранью некоторого семейства сублинейных (суперлинейных) функций. Удерзо [5] распространил этот результат на бесконечномерные равномерно выпуклые банаховы пространства.

Т е о р е м а 1 [4; 5]. *Пусть $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ – положительно однородная функция. Тогда*

(i) $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует семейство сублинейных функций Φ такое, что

$$p(x)=\inf_{\varphi\in\Phi}\max_{a\in\partial\varphi}\langle a,x\rangle\forall\ x\in\mathbb{R}^n; \tag{2}$$

(ii) $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является полунепрерывной снизу на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует семейство суперлинейных функций Ψ такое, что

$$p(x)=\sup_{\psi\in\Psi}\min_{a\in\partial^+\psi}\langle a,x\rangle\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n; \tag{3}$$

(iii) $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является непрерывной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда существуют семейство сублинейных функций Φ и семейство суперлинейных функций Ψ, для которых выполняются, соответственно, равенства (2) и (3).

Из представлений (2) и (3) следует, что полунепрерывные снизу и сверху положительно однородные функции могут быть «построены» из семейств линейных функций, при помощи последовательного применения операций поточечной нижней грани и поточечной верхней грани. Для непрерывных положительно однородных функций справедливы оба представления (2) и (3). Отметим, что для одной и той же непрерывной положительно однородной функции p в представлениях (2) и (3) используются, вообще говоря, различные семейства линейных функций.

Основным результатом настоящей работы является доказательство того, что каждой непрерывной положительно однородной функции можно сопоставить такое двухиндексное семейство линейных функций, которое одновременно задает как «минимаксное», так и «максиминное» представление. Кроме того, для различных классов (непрерывных, липшицевых, разностно-сублинейных, кусочно-линейных) положительно однородных функций мы описываем характеристические свойства данного семейства.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы функция $p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ была положительно однородной и непрерывной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для нее существовало такое двухиндексное семейство $\{a_{ts}\in\mathbb{R}^n\mid t\in T, s\in S\}$ векторов из $\mathbb{R}^n$, для которого выполняются равенства*

$$p(x)=\sup_{s\in S}\inf_{t\in T}\langle a_{ts},x\rangle=\inf_{t\in T}\sup_{s\in S}\langle a_{ts},x\rangle\forall\ x\in\mathbb{R}^n \tag{4}$$

и которое, кроме того, удовлетворяет для каждого $x\in\mathbb{R}^n$ условиям

$$-\infty < \inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \ \forall\, u \in S \ \ и \ \ \sup_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle < +\infty \ \forall\, t \in T. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная положительно однородная функция и пусть $\Phi = \{\varphi_t \mid t \subset T\}$ и $\Psi = \{\psi_s \mid s \subset S\}$ – семейства сублинейных и суперлинейных функций, удовлетворяющие соответственно равенствам (2) и (3). Существование таких семейств гарантируется утверждением (iii) теоремы 1. Из равенств (2) и (3) для любых $t \in T$ и $s \in S$ имеем

$$\psi_s(x) \le p(x) \le \varphi_t(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как функция $\psi_s(\cdot)$ суперлинейна, а функция $\varphi_t(\cdot)$ сублинейна, то из теорем об отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями [6; 7] следует, что существует линейная функция $x \to \langle a_{ts}, x\rangle$, где $a_{ts} \in \mathbb{R}^n$, такая, что

$$\psi_s(x) \le \langle a_{ts}, x\rangle \le \varphi_t(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Переходя в неравенствах (6) к нижней грани по t, получаем

$$\psi_s(x) \le \inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \le \inf_{t\in T}\varphi_t(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда следует справедливость первого условия из (5). В последнем неравенстве перейдем к верхней грани по s, в результате получим

$$p(x) = \sup_{s\in S}\psi_s(x) \le \sup_{s\in S}\inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \le \inf_{t\in T}\varphi_t(x) = p(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$p(x) = \sup_{s\in S}\inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Если же в неравенствах (6) сначала перейти к верхней грани по s, а затем к нижней грани по t, то на первом шаге убедимся в справедливости второго условия из (5), а затем получим равенство

$$p(x) = \inf_{t\in T}\sup_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, условия (5) и оба равенства (4) доказаны.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что для функции p выполнено первое из равенств (4), т. е. что $p(x) = \sup_{s\in S}\inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что функция p является положительно однородной и такова, что для любого $s \in S$ имеет место неравенство $\inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \le p(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Учитывая, кроме того, неравенство (5), заключаем, что функции $\psi_s : x \to \inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle,\ s \in S,$ конечны для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, функции $\psi_s,\ s \in S,$ суперлинейны и, следовательно, непрерывны на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как $p(x) = \sup_{s\in S}\psi_s(x),$ то функция p полунепрерывна снизу на $\mathbb{R}^n$ как верхняя огибающая семейства непрерывных функций.

Если $p(x) = \inf_{t\in T}\sup_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, т. е. если функция p удовлетворяет второму равенству из (4), то, рассуждая подобно предыдущему, убеждаемся в том, что функция p положительно однородна и полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, функция p, удовлетворяющая равенствам (4), является положительно однородной и непрерывной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *была положительно однородной и липшицевой на всем пространстве* $\mathbb{R}^n$ *необходимо и достаточно, чтобы для нее существовало двухиндексное семейство* $\{a_{ts} \in \mathbb{R}^n \mid t \in T, s \in S\}$ *векторов из* $\mathbb{R}^n$, *для которого выполняются равенства (5) и которое, кроме того, удовлетворяет для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *условиям*

$$-M\|x\| < \inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle \;\forall\, s \in S \;\; и \;\; \sup_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle < M\|x\| \;\forall\, t \in T, \tag{7}$$

где M *– некоторое фиксированное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. В силу теоремы 6 из [8] липшицевость положительно однородной функции p равносильна существованию для нее равномерно ограниченного семейства сублинейных функций Φ, удовлетворяющего равенству (2), и равномерно ограниченного семейства суперлинейных функций Ψ, удовлетворяющего равенству (3).

Выбрав произвольные равномерно ограниченные семейства Φ и Ψ для функции p и повторив рассуждения доказательства необходимой части предыдущей теоремы, придем к условиям (7) и равенствам (5).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из (7) и (5) следует, что семейство функций $\psi_s : x \to \inf_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle,\; s \in S,$ является равномерно ограниченным и удовлетворяет условию (3). Следовательно, в силу упоминавшейся выше теоремы 6 из [8] функция p является липшицевой.

Напомним, что функция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется разностно-сублинейной [3], если ее можно представить в виде разности двух сублинейных функций.

Т е о р е м а 4. *Для того чтобы функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *была разностно-сублинейной, необходимо и достаточно, чтобы для нее существовало такое двухиндексное семейство* $\{a_{ts} \in \mathbb{R}^n \mid t \in T, s \in S\}$ *векторов* из $\mathbb{R}^n$, *для которого выполняются равенства*

$$p(x) = \max_{s\in S}\min_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle = \min_{t\in T}\max_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{8}$$

и которое, кроме того, может быть представлено в виде

$$\{a_{ts} = s - t \in \mathbb{R}^n \mid s \in S,\; t \in T\}, \tag{9}$$

где S *и* T *– выпуклые компактные подмножества из* $\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – произвольная разностно-сублинейная функция и пусть $p = \varphi - \psi$ – некоторое ее представление в виде разности сублинейных функций φ и ψ. Тогда $p(x) = \max_{s\in\partial\varphi}\langle s, x\rangle - \max_{t\in\partial\psi}\langle t, x\rangle \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ и, следовательно, семейство $\{a_{ts} = s - t \in \mathbb{R}^n \mid s \in S,\; t \in T\}$, где $S = \partial\varphi,\; T = \partial\psi,$ удовлетворяет равенству (8) и имеет вид (9).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для функции $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполняются равенства (8), где двухиндексное семейство $\{a_{ts} \in \mathbb{R}^n \mid t \in T,\; s \in S\}$ векторов из $\mathbb{R}^n$ имеет вид (9). Нетрудно видеть, что в этом случае $p = \varphi - \psi$, где $\varphi(x) = \max_{s\in S}\langle s, x\rangle,\; x \in \mathbb{R}^n,$ и $\psi(x) = \max_{t\in T}\langle t, x\rangle,\; x \in \mathbb{R}^n,$ – опорные функции выпуклых компактов S и T соответственно.

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы функция* $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *была кусочно-линейной на* $\mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое конечное двухиндексное семейство* $\{a_{ts} \in \mathbb{R}^n \mid t \in T,\; s \in S\}$ *векторов из* $\mathbb{R}^n$, *для которого выполняются равенства*

$$p(x) = \max_{s\in S}\min_{t\in T}\langle a_{ts}, x\rangle = \min_{t\in T}\max_{s\in S}\langle a_{ts}, x\rangle \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, заметим, что вследствие конечности множеств индексов T и S условия (5) и, более того, условия (7) выполняются тривиально.

Кроме того, в силу теоремы 12 из [8] положительно однородная функция p является кусочно-линейной в том и только том случае, когда для нее существуют конечные семейства сублинейных функций Ф и суперлинейных функций Ψ, удовлетворяющие соответственно равенствам (2) и (3). Выбирая эти семейства и повторяя рассуждения доказательства необходимой части теоремы 2, получим представление функции p в виде (10).

Обратно, если функция p допускает представление (10), то из теоремы 3.2 из [9] следует, что она является кусочно-линейной.

Независимое доказательство утверждения теоремы 5 было дано ранее в [10].

Список использованной литературы

1. *Кутателадзе, С. С.* Двойственность Минковского и ее приложения / С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов. – Новосибирск: Наука, 1976. – 254 с.

2. *Бурбаки, Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1975. – 408 с.

3. *Демьянов, В. Ф.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. – М.: Наука, 1990. – 479 с.

4. *Демьянов, В. Ф.* Элементы квазидифференциального исчисления / В. Ф. Демьянов [и др.]; под ред. В. Ф. Демьянова // Негладкие задачи теории оптимизации и управления. – Л.: Из-во Ленингр. ун-та, 1982. – С. 5–127.

5. *Uderzo, A.* Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems / A. Uderzo // Demyanov V. F. and Rubinov A. M. (Eds). Quasidifferentiability and Related Topics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – P. 297–327.

6. *Пшеничный, Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

7. *Рокафеллар, Р. Т.* Выпуклый анализ / Р. Т. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

8. *Гороховик, В. В.* Характеристические свойства прямых экзостеров различных классов положительно однородных функций / В. В. Гороховик, М. А. Старовойтова // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 12–25.

9. *Gorokhovik, V. V.* Piecewise affine functions and polyhedral sets / V. V. Gorokhovik, O. I. Zorko // Optimization. – 1994. – Vol. 31, N 2. – P. 209–221.

10. *Гороховик, В. В.* Об аналитическом представлении невыпуклых многогранных множеств и кусочно-аффинных функций / В. В. Гороховик, Д. С. Малашевич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2001. – Т. 9. – С. 45–48.

Поступило в редакцию 25.11.2015